F 2557
1-3.40.

1
TOMUL 28
1 9 6 9

1969 MAJ 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI — *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU — *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. N. TIPEI, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

Pentru a vă asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1969.
În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134 — 135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția: **București,**
Str. Const. Mille 15, tel. 13.83.26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 1 1969

SUMAR

STUDII

Pag.

T. OROVEANU, Asupra difuziei convective în regim nepermanent 3

ADRIANA NĂSTASE, Asupra problemei de rezistenţă minimă a aripii trapezoidale simetrice, de grosime simetrică, în curent supersonic 17

H. PASCAL, Curgerea nestaţionară a fluidelor eterogene printr-un mediu poros 33

DAN MATEESCU, Aripi cruciforme şi ampenaje prevăzute cu fuzelaj conic în regim supersonic. II. Mişcări conice de ordin superior 53

ION SETEANU, Dezlocuirea plană negravitaţională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros (II). Procedeul „five-spot" 75

T. OROVEANU, I. SPULBER, Cîteva consideraţii asupra unor probleme de scurgere cu suprafaţă liberă a lichidelor prin medii poroase 95

AL. MARINESCU, L. BEINER, MARIA GAVRILĂ, Studiul manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil în faza de apropiere pe orbite eliptice şi hiperbolice (teoria neliniară) 111

S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU, Unele probleme ale calculului structurilor static nedeterminate în domeniul plastic 137

L. LIBRESCU, Stabilitatea panourilor elastic-neliniare plasate într-un curent de gaz supersonic 153

EUGEN DÎMBOIU, Consideraţii asupra măsurării frecării interne în solide 169

A. PAVEL, Legile de variaţie a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune (II) 183

CHR. PELECUDI, ANCA MATHEESCU, Analiza armonică a legilor de mişcare la mecanismele cu came 195

VICTOR CALCAN, CORNELIA OBEJDEANU, Modificările dimensionale şi variaţia masei la imersiunea în apă şi în ulei a unor materiale plastice armate de tip textolit 211

A. ZAHARESCU, Utilizarea corecţiei electrice pentru reducerea erorilor dinamice ale traductoarelor de mărimi mecanice 225

GH. VASILCA, VETURIA RASZILLIER, Unele efecte ale frecării intermitente în cazul cuplurilor din aliaje similare neferoase 241

V. N. CONSTANTINESCU, GH. MARIN, Grup electrogen pe lagăre cu aer 251

RECENZII 263

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, P. 1–264, BUCUREŞTI, 1969

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratcsillár
455/1970

ASUPRA DIFUZIEI CONVECTIVE ÎN REGIM NEPERMANENT

de T. OROVEANU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533.15

Se consideră difuzia convectivă într-o scurgere unidimensională a cărei viteză este variabilă în timp. Utilizarea sinus-transformatei finite a lui Fourier reduce problema la rezolvarea unui sistem infinit de ecuații diferențiale obișnuite de primul ordin. Sînt propuse apoi mai multe procedee cu ajutorul cărora sînt găsite soluțiile aproximative ale acestui sistem, ținînd seama de anumite ipoteze referitoare la variația vitezei.

1. Transportul de substanță prin acțiunea simultană a difuziei moleculare și a convecției a făcut pînă în prezent obiectul unui mare număr de cercetări.

Cazul cel mai simplu este, evident, acela al scurgerii unidimensionale, al cărei studiu nu prezintă nici o dificultate atunci cînd se presupune că viteza este constantă. Dar, dacă se renunță la această ipoteză, ținîndu-se seama de faptul că viteza poate fi funcție de o coordonată spațială, normală pe direcția scurgerii, și să depindă de asemenea de timp, dificultățile care apar sînt destul de serioase.

Scopul nostru este de a studia o problemă destul de particulară referitoare la acest fel de scurgere. Într-adevăr, în ceea ce urmează vom face, față de cazul general pe care l-am semnalat, o ipoteză simplificatoare, admițînd că viteza scurgerii depinde numai de timp. În acest caz, concentrația C satisface ecuația

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v(t)\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{1}$$

în care $v(t)$ este viteza și D coeficientul de difuzie.

Considerînd un sistem de lungime finită l și dacă v_0 este o valoare constantă convenabil aleasă a vitezei, putem introduce variabilele adimensionale

$$\tau = \frac{v_0 t}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \tag{2}$$

cu care ecuaţia (1) devine

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + f(\tau) \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}, \tag{3}$$

unde am pus

$$\frac{v}{v_0} = f(\tau), \tag{4}$$

iar P_0 este numărul lui Péclet definit prin relaţia

$$P_0 = \frac{v_0 l}{D}. \tag{5}$$

2. Vom încerca mai întîi să găsim soluţia ecuaţiei (3) cu condiţia iniţială

$$\tau = 0, \qquad C = C_0 \tag{6}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \qquad C = C_e; \qquad \xi = 1, \qquad C = C_c. \tag{7}$$

Aşa cum am procedat în studiul unei probleme asemănătoare din punct de vedere matematic [3], vom aplica ecuaţiei (3) sinus-transformata finită a lui Fourier, care ne dă

$$\frac{d\overline{C}_{sn}}{d\tau} - n\pi f(\tau) \int_0^1 C \cos n\pi\xi \, d\xi + \frac{n^2\pi^2}{P_0} \overline{C}_{sn} = \frac{n\pi}{P_0} [(-1)^{n+1} C_c + C_e], \tag{8}$$

cu

$$\overline{C}_{sn} = \int_0^1 C \sin n\pi\xi \, d\xi. \tag{9}$$

Am obţinut astfel o ecuaţie diferenţială obişnuită, a cărei soluţie trebuie găsită ţinîndu-se seama de condiţia iniţială, de asemenea transformată,

$$\tau = 0, \qquad \overline{C}_{sn} = \frac{C_0}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]. \tag{10}$$

Reamintim că utilizarea acestei metode presupune posibilitatea de a pune soluţia ecuaţiei (3) sub forma

$$C = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C}_{sm} \sin m\pi\xi. \tag{11}$$

Introducînd această expresie în (8), găsim, după cîteva calcule simple,

$$\frac{d\overline{C}_{sn}}{d\tau} - 2n f(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - n^2} [(-1)^{m+n+1} + 1] \overline{C}_{sm} + \frac{n^2\pi^2}{P_0} \overline{C}_{sn} = \frac{n\pi}{P_0} [(-1)^{n+1} C_c + C_e], \tag{12}$$

termenul sumei care corespunde la $m = n$ fiind nul.

Prin urmare, funcţiile $\overline{C}_{sn}(\tau)$ sînt soluţiile unui sistem infinit de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întîi. Dacă n este un număr impar ($n = 2q + 1$), funcţiile $\overline{C}_{s,\,2q+1}$ rezultă din sistemul

$$\frac{d\overline{C}_{s,\,2q+1}}{d\tau} - 8(2q+1)f(\tau)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r}{4r^2-(2q+1)^2}\overline{C}_{s,\,2r} + \\ + \frac{(2q+1)^2\pi^2}{P_0}\overline{C}_{s,\,2q+1} = \frac{(2q+1)\pi}{P_0}(C_i + C_e) \tag{13}$$

cu condiţiile

$$\tau = 0, \quad \overline{C}_{s,\,2q+1} = \frac{2C_0}{(2q+1)\pi}, \tag{14}$$

în timp ce pentru n par ($n = 2q$) găsim

$$\frac{d\overline{C}_{s,\,2q}}{d\tau} - 8qf(\tau)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2r+1}{(2r+1)^2-4q^2}\overline{C}_{s,\,2r+1} + \frac{4q^2\pi^2}{P_0}\overline{C}_{s,\,2q} = \\ = \frac{2q\pi}{P_0}(C_i - C_e) \tag{15}$$

cu condiţiile

$$\tau = 0, \quad \overline{C}_{s,\,2q} = 0. \tag{16}$$

Date fiind dificultăţile care apar atunci cînd ne propunem să găsim soluţiile sistemului (12), se poate recurge la un procedeu aproximativ. Ideea pe care o punem la baza acestui procedeu este aceea de a înlocui în suma din (12) funcţiile $\overline{C}_{sm}$ prin expresii aproximative.

În acest scop, observăm că, dacă punem în ecuaţia (3) $f(\tau) = 0$, aceasta devine

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \tag{17}$$

şi cu condiţiile (6) şi (7) are soluţia binecunoscută

$$C = C_i + (C_e - C_i)\,\xi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e)}{n}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{P_0}\tau}\sin n\pi\xi, \tag{18}$$

care se mai poate scrie

$$C = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{[C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e)]\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{P_0}\tau} + \\ + C_i + (-1)^{n+1}C_e\}\sin n\pi\xi. \tag{19}$$

Avem deci

$$\overline{C}_{sm}^{(0)} = \frac{C_0 - C_i + (-1)^{m+1}(C_0 - C_e)}{m\pi}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{P_0}\tau} + \frac{C_i + (-1)^{m+1}C_e}{m\pi} \tag{20}$$

şi observăm că este posibil să obţinem această expresie direct din (12) punînd $f(\tau) = 0$ şi găsind după aceea soluţia cu condiţia iniţială (10).

Să introducem acum expresia lui $\overline{C}_{sm}^{(0)}$, care reprezintă un fel de primă aproximaţie pentru $\overline{C}_{sm}$, în termenul ecuaţiei (12) care conţine suma. Rezultă

$$\frac{d\overline{C}_{sn}}{d\tau} - 2nf(\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m^2-n^2}[(-1)^{m+n+1}+1]\left[\frac{C_i+(-1)^{m+1}C_e}{m\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{C_0-C_i+(-1)^{m+1}(C_0-C_e)}{m\pi}e^{-\frac{m^2\pi^2}{P_0}\tau}\right]+\frac{n^2\pi^2}{P_0}\overline{C}_{sn}=$$

$$=\frac{n\pi}{P_0}[C_i+(-1)^{n+1}C_e], \tag{21}$$

ecuaţie uşor de integrat. Ţinînd seama de condiţia iniţială (10), găsim imediat

$$\overline{C}_{sn}=\frac{C_0-C_i+(-1)^{n+1}(C_0-C_e)}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2}{P_0}\tau}+\frac{C_i+(-1)^{n+1}C_e}{n\pi}+$$

$$+\frac{2n}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}[(-1)^{m+n+1}+1]\left\{[C_i+(-1)^{m+1}C_e]\int_0^{\tau}f(\lambda)e^{-n^2\pi^2\frac{\tau-\lambda}{P_0}}d\lambda+\right.$$

$$\left.+[C_0-C_i+(-1)^{m+1}(C_0-C_e)]\int_0^{\tau}f(\lambda)e^{-\pi^2\frac{m^2\lambda+n^2(\tau-\lambda)}{P_0}}d\lambda\right\}. \tag{22}$$

După ce funcţiile $\overline{C}_{sn}(\tau)$ au fost astfel determinate, soluţia aproximativă are forma

$$C=C_i+(C_e-C_i)\xi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{C_0-C_i+(-1)^{n+1}(C_0-C_e)}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2}{P_0}\tau}+\right.$$

$$+2n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}[(-1)^{m+n+1}+1]\left([C_i+(-1)^{m+1}C_e]\int_0^{\tau}f(\lambda)e^{-n^2\pi^2\frac{\tau-\lambda}{P_0}}d\lambda+\right.$$

$$\left.\left.+[C_0-C_i+(-1)^{m+1}(C_0-C_e)]\int_0^{\tau}f(\lambda)e^{-\pi^2\frac{m^2\lambda+n^2(\tau-\lambda)}{P_0}}d\lambda\right)\right\}\sin n\pi\xi, \tag{23}$$

care se găseşte ţinînd seama de relaţia

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_i+(-1)^{n+1}C_e}{n}\sin n\pi\xi=C_i+(C_e-C_i)\xi. \tag{24}$$

Tot astfel, deoarece putem scrie

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0-C_i+(-1)^{n+1}(C_0-C_e)}{n}\sin n\pi\xi=C_0-C_i+(C_i-C_e)\xi, \tag{25}$$

se constată că expresia (23) a lui C satisface atît condiţia iniţială, cît şi condiţiile de limită (7).

Modul în care am obținut soluția aproximativă precedentă ne arată că ea poate fi aplicată cu rezultate mai bune atunci cînd funcția $f(\tau)$ are valori destul de mici. Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că viteza v este mică față de v_0, așa cum este cazul, de exemplu, pentru faza inițială a unei scurgeri care pornește încet din repaus.

Se poate găsi o altă soluție aproximativă a aceleiași probleme, făcînd mai întîi în ecuația (3) schimbarea de funcție

$$C = C' \, e^{\frac{P_0}{2}\xi}. \tag{26}$$

Ajungem astfel la ecuația

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + [1 - f(\tau)]\frac{\partial C'}{\partial \xi} + \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\tau)]\, C' \tag{27}$$

și trebuie să găsim soluția acesteia care satisface condiția inițială

$$\tau = 0, \quad C' = C_0 \, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \tag{28}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad C' = C_i; \quad \xi = 1, \quad C' = C_e \, e^{-\frac{P_0}{2}}. \tag{29}$$

Aplicarea sinus-transformatei finite a lui Fourier ecuației (27) ne dă

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\tau} + n\pi\,[1 - f(\tau)]\int_0^1 C' \cos n\pi\xi \, d\xi + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\tau)]\right\}\overline{C}'_{sn} =$$

$$= \frac{n\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{n+1} C_e \, e^{-\frac{P_0}{2}}], \tag{30}$$

în timp ce condiția inițială devine

$$\tau = 0, \quad \overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}}[1 + (-1)^{n+1} \, e^{-\frac{P_0}{2}}]\, C_0. \tag{31}$$

Cu ajutorul unei dezvoltări asemănătoare cu (11) găsim fără dificultăți ecuația

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\tau} + 2n\,[1 - f(\tau)]\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m^2 - n^2}[(-1)^{m+n+1} + 1]\,\overline{C}'_{sm} + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\tau)]\right\}\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{n+1} C_e \, e^{-\frac{P_0}{2}}], \tag{32}$$

termenul sumei corespunzător la $m = n$ fiind nul.

Ca și pentru sistemul (12), putem scrie cu ușurință separat ecuațiile pentru funcțiile $\overline{C}'_{s,2q+1}$, respectiv $\overline{C}'_{s,2q}$. Însă și cînd trebuie să găsim soluțiile sistemului (32) cu condițiile inițiale (31) ne izbim de aceleași dificultăți ca și pentru sistemul (12).

Aproximaţia pe care o vom utiliza de data aceasta are tot scopul de a face să dispară suma în ecuaţia (32). În acest scop, punem $f(\tau) = 1$ numai în factorul care se găseşte în faţa sumei, ceea ce ne dă

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\tau} + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\tau)]\right\}\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}}]. \quad (33)$$

Soluţia acestei ecuaţii, cu condiţia (31), ne dă o primă aproximaţie a funcţiilor căutate, şi anume

$$\overline{C}'^{(0)}_{sm} = e^{-\int_0^\tau \left\{\frac{m^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\lambda)]\right\} d\lambda} \left\{ \frac{m\pi}{m^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} [1 + (-1)^{m+1} e^{-\frac{P_0}{2}}] C + \right.$$

$$\left. + \frac{m\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{m+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}}] \int_0^\tau e^{\int_0^\lambda \left\{\frac{m^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\mu)]\right\} d\mu} d\lambda \right\}. \quad (34)$$

Rezultă apoi, tot din (32),

$$\overline{C}'_{sn} = e^{-\int_0^\tau \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\lambda)]\right\} d\lambda} \left\{ \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} [1 + (-1)^{n+1} e^{-\frac{P_0}{2}}] C_0 + \right.$$

$$+ \frac{n\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}}] \int_0^\tau e^{\int_0^\lambda \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\mu)]\right\} d\mu} d\lambda - \quad (35)$$

$$\left. - 2n\int_0^\tau [1-f(\lambda)] e^{\int_0^\lambda \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\mu)]\right\} d\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - n^2} [(-1)^{m+n+1} + 1] \overline{C}'^{(0)}_{sm} d\lambda \right\},$$

unde trebuie să înlocuim funcţiile $\overline{C}'^{(0)}_{sm}(\tau)$ cu expresia lor precedentă (34). După ce se efectuează calculele, ceea ce presupune, firește, că funcţia $f(\tau)$ este cunoscută, soluţia aproximativă are forma

$$C = 2 e^{\frac{P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}'_{sn} \sin n\pi\xi. \quad (36)$$

Ţinînd seama de dezvoltarea

$$e^{\frac{P_0}{2}\xi} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} [1 + (-1) e^{-\frac{P_0}{2}}] \sin n\pi\xi, \quad (37)$$

este uşor de verificat că expresia concentraţiei pe care am găsit-o satisface condiţia iniţială (6) şi condiţiile la limită (7).

Calculele care conduc la soluția aproximativă (36) sînt sensibil mai complicate decît acelea care ne-au condus la soluția aproximativă (23). O simplificare destul de importantă rezultă atunci cînd se pune $f(\tau) = 1$ și în al doilea termen din (33), ceea ce ne dă

$$\overline{C}'^{(0)}_{sm} = \frac{m\pi}{m^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} \left\{ C_i + (-1)^{m+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}} + [C_0 - C_i + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m+1} e^{-\frac{P_0}{2}} (C_0 - C_e)] e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{P_0} + \frac{P_0}{4}\right)\tau} \right. \tag{38}$$

și

$$\overline{C}'_{sn} = e^{-\int_0^\tau \left\{ \frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\lambda)] \right\} d\lambda} \left\{ \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} [1 + (-1)^{n+1} e^{-\frac{P_0}{2}}] C_0 + \right.$$
$$+ \frac{n\pi}{P_0} [C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}}] \int_0^\tau e^{\int_0^\lambda \left\{ \frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\mu)] \right\} d\mu} d\lambda -$$
$$- 2n\pi \int_0^\tau [1 - f(\lambda)] e^{\int_0^\lambda \left\{ \frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\mu)] \right\} d\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2[(-1)^{m+n+1} + 1]}{(m^2 - n^2)\left(m^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)} \{C_i +$$
$$\left. + (-1)^{m+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}} + [C_0 - C_i + (-1)^{m+1} e^{-\frac{P_0}{2}} (C_0 - C_e)] e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{P_0} + \frac{P_0}{4}\right)\lambda} d\lambda \right\}. \tag{39}$$

Din punct de vedere fizic, aproximația pe care am făcut-o considerînd $f(\tau) = 1$ corespunde fie la faza inițială a unei scurgeri care pleacă din repaus cu o viteză v_0 ce descrește apoi, fie la o fază mai înaintată în timp a unei scurgeri care pleacă lent din repaus și a cărei viteză tinde către v_0.

Să considerăm, în sfîrșit, un ultim caz, în care funcția $f(\tau)$ variază destul de puțin, viteza scurgerii rămînînd apropiată de o valoare medie. În primă aproximație se poate deci înlocui $f(\tau)$ cu o valoare medie α. Găsim astfel, în loc de (3),

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \tag{40}$$

și, după schimbarea de funcție

$$C = C' e^{\frac{\alpha P_0}{2}\xi}, \tag{41}$$

ajungem la ecuația

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha^2 P_0}{4} C', \tag{42}$$

pe care trebuie să o rezolvăm cu condiția inițială

$$\tau = 0, \quad C' = C_0 e^{-\frac{\alpha P_0}{2}\xi} \tag{43}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \; C' = C_i; \; \xi = 1, \; C' = C_e e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}. \tag{44}$$

Utilizarea sinus-transformatei finite a lui Fourier ne conduce la ecuația

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\tau} + \left(\frac{n^2\pi^2}{P_0} + \frac{\alpha^2 P_0}{4}\right)\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}[C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}] \tag{45}$$

cu condiția

$$\tau = 0, \quad \overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}} [1 + (-1)^{n+1} e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}] C_0. \tag{46}$$

Găsim numaidecît

$$\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}} \{C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{\alpha P_0}{2}} + [C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e) e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}] e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{P_0} + \frac{\alpha^2 P_0}{4}\right)\tau}\}, \tag{47}$$

expresie care reprezintă tot o primă aproximație a funcțiilor $\overline{C}'_{sn}(\tau)$.

Remarcăm că, dacă punem $\alpha = 0$ în (47), regăsim formula (20), cum era, de altfel, de așteptat; tot astfel, cu $\alpha = 1$, formula (47) capătă aceeași formă cu (38).

Dacă ne mulțumim cu această aproximație, soluția problemei este

$$C = 2 e^{\frac{\alpha P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}} \{C_i + (-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{\alpha P_0}{2}} + [C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e) e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}] e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{P_0} + \frac{\alpha^2 P_0}{4}\right)\tau} \sin n\pi\xi\} \tag{48}$$

și, după cîteva calcule simple, devine

$$C = \frac{C_e - C_i}{e^{\alpha P_0} - 1} e^{\alpha P_0 \xi} + \frac{C_i e^{\alpha P_0} - C_e}{e^{\alpha P_0} - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}} [C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e) e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}] e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{P_0} + \frac{\alpha^2 P_0}{4}\right)\tau + \frac{\alpha P_0}{2}\xi} \sin n\pi\xi. \tag{49}$$

Se poate găsi o a doua aproximaţie făcînd schimbarea de funcţie (41) în ecuaţia (3), care capătă astfel forma

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + [\alpha - f(\tau)]\frac{\partial C'}{\partial \xi} + \frac{\alpha P_0}{4}[\alpha - 2f(\tau)]\, C'. \tag{50}$$

Aplicarea aceluiaşi procedeu ne dă

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\tau} + 2n\,[\alpha - f(\tau)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - n^2}[(-1)^{m+n+1} + 1]\,\overline{C}'_{sm} + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha P_0}{4}[\alpha - 2f(\tau)]\right\}\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}\left[C_i + (-1)^{n+1} C_e\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}\right] \tag{51}$$

şi, ţinînd seama de condiţia iniţială care este tot (46), găsim, după ce am înlocuit funcţiile $\overline{C}'_{sm}(\tau)$ cu expresia (47),

$$\overline{C}'_{sn} = e^{-\int_0^\tau \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{\alpha P_0}{4}[\alpha - 2f(\lambda)]\right\} d\lambda} \left\{ \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}}\left[1 + (-1)^{n+1} e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}\right] C + \right.$$
$$+ \frac{n\pi}{P_0}\left[C_i + (-1)^{n+1} C_e\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}\right] \int_0^\tau e^{\int_0^\lambda \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{\alpha P_0}{4}[\alpha - 2f(\mu)]\right\} d\mu} d\lambda -$$
$$- 2n\pi \int_0^\tau [\alpha - f(\lambda)]\, e^{\int_0^\lambda \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{\alpha P_0}{4}[\alpha - 2f(\mu)]\right\} d\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2[(-1)^{m+n+1} + 1]}{(m^2 - n^2)\left(m^2\pi^2 + \frac{\alpha^2 P_0^2}{4}\right)} \{C_i +$$
$$\left. + (-1)^{m+1} C_e\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}} + [C_0 - C_i + (-1)^{m+1}(C_0 - C_e)\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}]\, e^{-\left(\frac{m^2\pi^2}{P_0} + \frac{\alpha^2 P_0}{4}\right)\lambda} d\lambda\}\right\}. \tag{52}$$

Această formulă conţine de asemenea drept cazuri particulare rezultatele precedente, şi anume formula (22), care se regăseşte punînd $\alpha = 0$, şi formula (38), la care se ajunge cu $\alpha = 1$.

O dată ce funcţiile $\overline{C}'_{sn}(\tau)$ au fost determinate, concentraţia are expresia

$$C = 2e^{\frac{\alpha P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}'_{sn} \sin n\pi\xi. \tag{53}$$

După cum se ştie [3], formulele (36) şi (53) nu sînt foarte indicate pentru calculele numerice atunci cînd P_0 este mare sau τ mic sau cînd aceste două situaţii se realizează concomitent, deoarece seria devine slab convergentă. Dar, dacă viteza scurgerii variază destul de încet, înlocuirea lui $f(\tau)$ cu o constantă, mai ales pentru valorile mici ale lui τ, apare destul de justificată. Se poate lua deci ca punct de plecare ecuaţia (40) şi, dacă P_0 este destul de mare, transformarea lui Laplace ne dă o soluţie aproximativă a problemei considerate.

În acest scop, vom scrie mai întîi ecuația (40) sub forma

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \tag{54}$$

cu

$$\theta = \alpha\tau. \tag{55}$$

După aceea, vom introduce funcția

$$C'' = \left(\frac{C - C_i}{C_0 - C_i} - \frac{e^{\alpha P_0 \xi} - 1}{e^{\alpha P_0} - 1} \right) e^{-\frac{\alpha P_0}{4}(2\xi - \theta)}, \tag{56}$$

care este soluția ecuației

$$\frac{\partial C''}{\partial \theta} = \frac{1}{\alpha P_0} \frac{\partial^2 C''}{\partial \xi^2} \tag{57}$$

cu condiția inițială

$$\theta = 0, \quad C'' = \frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} e^{-\frac{\alpha P_0}{2}\xi} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha P_0}{2} \xi}{e^{\alpha P_0} - 1} \tag{58}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad C'' = 0; \quad \xi = 1, \quad C'' = 0. \tag{59}$$

Această schimbare este analogă cu aceea pe care am utilizat-o în lucrarea amintită mai sus.

Aplicînd transformarea lui Laplace ecuației (57), obținem

$$\frac{1}{\alpha P_0} \frac{d^2 \overline{C}''}{d\xi^2} - s\overline{C}'' = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha P_0}{2} \xi}{e^{\alpha P_0} - 1} - \frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} e^{-\frac{\alpha P_0}{2}\xi} \tag{60}$$

cu

$$\overline{C}'' = \int_0^\infty C'' e^{-s\theta} \, d\theta, \tag{61}$$

condițiile la limită pentru $\overline{C}''$ fiind tot (59). Soluția ecuației (60) cu aceste condiții este

$$\overline{C}'' = \frac{e^{\xi\sqrt{\alpha P_0 s}} - e^{-\xi\sqrt{\alpha P_0 s}}}{(e^{-\sqrt{\alpha P_0 s}} - e^{\sqrt{\alpha P_0 s}})\left(s - \frac{\alpha P_0}{4}\right)} \left[\frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} (e^{-\frac{\alpha P_0}{2}} - e^{-\sqrt{\alpha P_0 s}}) - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha P_0}{2}}{e^{\alpha P_0} - 1} \right] +$$

$$+ \left[\frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} \left(e^{-\frac{\alpha P_0}{2}\xi} - e^{-\xi\sqrt{\alpha P_0 s}} \right) - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha P_0}{2} \xi}{e^{\alpha P_0} - 1} \right] \frac{1}{s - \frac{\alpha P_0}{4}}. \tag{62}$$

Dacă P_0 este mare, așa cum am presupus, și în același timp α nu este prea mic, astfel ca produsul αP_0 să rămînă destul de mare, găsim soluția aproximativă

$$\overline{C}'' = \frac{(C_e - C_0)\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}}}{C_i - C_e} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\alpha P_0 s}}\,(e^{-\xi\sqrt{\alpha P_0 s}} - e^{\xi\sqrt{\alpha P_0 s}})}{s - \frac{\alpha P_0}{4}} +$$

$$+ \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{\alpha P_0 s}}\,(e^{\xi\sqrt{\alpha P_0 s}} - e^{-\xi\sqrt{\alpha P_0 s}})}{s - \frac{\alpha P_0}{4}} +$$

$$+ \left(\frac{C_i - C_0}{C_i - C_e}\, e^{-\frac{\alpha P_0}{2}\xi} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha P_0}{2}\xi}{e^{\alpha P_0} - 1} \right) \frac{1}{s - \frac{\alpha P_0}{4}} -$$

$$- \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} \cdot \frac{e^{-\xi\sqrt{\alpha P_0 s}}}{s - \frac{\alpha P_0}{4}} \cdot \tag{63}$$

Așa cum se poate constata numaidecît, această soluție nu mai satisface condiția de limită pentru $\xi = 1$.

Revenirea la funcțiile originale corespunzătoare fiecărui termen din (63) nu prezintă dificultăți [1]. Obținem

$$C'' = \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} e^{-\frac{\alpha P_0}{4}(2\xi - \theta)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] - \right.$$

$$- \frac{1}{2} e^{\alpha P_0 \xi} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] + \frac{1}{2} e^{-\alpha P_0 (1-\xi)} \operatorname{erfc}\left[\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] + \frac{1}{2} e^{\alpha P_0} \operatorname{erfc}\left[\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} e^{-\alpha P_0} \operatorname{erfc}\left[\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{\alpha P_0 (1+\xi)} \operatorname{erfc}\left[\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{C_e - C_0}{C_i - C_e} e^{-\frac{\alpha P_0}{4}(2\xi - \theta)} \left\{ e^{-\alpha P_0} \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] + \right.$$

$$\left. + e^{\alpha P_0 \xi} \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0 \theta} \right] - \right.$$

$$-e^{-\alpha P_0(1-\xi)}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0\theta}\right]-$$

$$-\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\theta}}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha P_0\theta}\right]-\frac{2\operatorname{sh}\frac{\alpha P_0}{2}\xi}{e^{\alpha P_0}-1}e^{\frac{\alpha P_0}{4}} \tag{64}$$

şi, ţinînd seama de (56) şi (55), soluţia căutată este

$$C=C_0+\frac{C_f-C_0}{2}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]+e^{\alpha P_0\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\Big]-e^{-\alpha P_0(1-\xi)}\operatorname{erfc}\left[\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]-$$

$$-e^{\alpha P_0}\operatorname{erfc}\left[\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}+\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]+e^{-\alpha P_0}\operatorname{erfc}\left[\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]+e^{\alpha P_0(1+\xi)}\operatorname{erfc}\left[\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}+\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]\right\}-$$

$$-\frac{C_e-C_0}{2}\left\{e^{-\alpha P_0}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]+\right.$$

$$+e^{\alpha P_0\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1+\xi)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}+\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]-e^{-\alpha P_0(1-\xi)}\times$$

$$\left.\times\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)\sqrt{\frac{P_0}{\tau}}-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]-\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)\sqrt{\frac{P_0}{\theta}}+\frac{1}{2}\sqrt{P_0\tau}\right]\right\}. \tag{65}$$

Această soluţie aproximativă satisface condiţia iniţială (6) şi prima condiţie la limită (7). Aşa cum am precizat mai sus, cea de-a doua condiţie la limită (7) nu este satisfăcută decît aproximativ. Soluţia (65) avînd aceeaşi formă cu cea pe care am dat-o în [3] pentru o altă problemă, putem să ne referim la raţionamentul pe care l-am expus în această lucrare pentru a arăta că eroarea referitoare la cea de-a doua condiţie la limită este foarte mică.

În legătură cu problema pe care am studiat-o, este posibil să se facă o observaţie privitoare la metoda de rezolvare. Într-adevăr, atunci cînd este vorba să se găsească soluţia ecuaţiei (3) pentru un mediu infinit, fără condiţii la limită, schimbarea de variabile

$$T=\tau,\quad X=\xi-\int_0^\tau f(\lambda)\,d\lambda \tag{66}$$

ne conduce la ecuaţia

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C}{\partial X^2}, \tag{67}$$

a cărei soluție se poate găsi cu ușurință. Însă atunci cînd mediul este finit, în afară de condiția inițială (6), care rămîne neschimbată, avem condițiile la limită

$$X = -\int_0^T f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\ C = C_0;\ X = 1 - \int_0^T f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\ C = C_e. \qquad (68)$$

Trebuie deci să rezolvăm o problemă cu condiții la limită pe frontiere mobile. S-ar putea aplica la această problemă metoda propusă recent de G. A. Grinberg [2], dar se poate constata numaidecît că se ajunge la rezultate analoge cu cele pe care le-am găsit.

3. Problema pe care am studiat-o, cu toate că este foarte simplificată, arată că și în aceste condiții nu este ușor să-i găsim soluția. Utilizarea metodei pe care am preconizat-o nu este legată de dificultăți de principiu, dar, cînd se ajunge la ecuațiile (12), problema este destul de delicată. Am încercat să ocolim această dificultate făcînd apel la aproximațiile care ne-au furnizat soluțiile prezentate mai sus. Alegerea uneia dintre acestea ar trebui să se facă ținînd seama de forma efectivă a funcției $f(\tau)$, care poate să facă mai bună una sau alta dintre soluțiile aproximative. În orice caz, credem că formulele pe care le-am propus pot fi utilizate pentru a evidenția influența pe care variația în timp a vitezei o are asupra distribuției concentrației.

Primită la redacție la 27 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaționnomu iscisleniiu*, GITTL, Moscova-Leningrad, 1954, p. 111, 152.
2. G. A. Grinberg, *Ob odnom vozmojnom metode podhoda k rasmotreniiu zadaci teorii teploprovodnosti, diffuzii, volnovîh i im podobnîh pri nalicii dvijuscihsia granit i o nekotorîh inîh ego prilojeniiah*, Prikladnaia matematika i mehanika, **31**, 2 (1967).
3. T. Oroveanu, *Dezlocuirea în regim nepermanent a fluidelor miscibile într-un mediu poros*, St. cerc. mec. apl., **27**, 6 (1968).

ASUPRA PROBLEMEI DE REZISTENȚĂ MINIMĂ A ARIPII TRAPEZOIDALE SIMETRICE, DE GROSIME SIMETRICĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC *)

de ADRIANA NĂSTASE
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

533.6.011.5 : 533.691.11

În prezenta lucrare se determină forma suprafeței unei aripi trapezoidale simetrice, de grosime simetrică, prevăzută și cu o muchie de separație, care are rezistența minimă la înaintare și pentru care sînt impuse proiecțiile în plan ale aripii (în trapez isoscel) și ale muchiei, volumul aripii, precum și condițiile de închidere a aripii pe bordurile sale de atac laterale, frontal, de fugă și în lungul muchiei sale de separație. Soluția acestei probleme este obținută utilizînd metoda variațională și conduce la rezolvarea unui sistem finit algebric de ecuații liniare, dacă presupunem că distribuțiile vitezelor verticale de perturbație sînt exprimate sub forma unor superpoziții de ecuații liniare.

I. INTRODUCERE

Scopul prezentei lucrări este de a determina forma suprafeței unei aripi trapezoidale simetrice, de grosime simetrică, de rezistență minimă la înaintare și pentru care sînt impuse proiecțiile în plan ale aripii (un trapez isoscel) și ale muchiei, volumul aripii, precum și o serie de condiții de închidere a aripii pe bordurile sale de atac laterale, frontal și de fugă, precum și în lungul muchiei sale de separație.

Ca și în lucrările noastre anterioare de rezistență minimă a aripii triunghiulare subțiri sau de grosime simetrică, a aripii cruciforme subțiri sau de grosime simetrică, precum și în cazul aripii trapezoidale simetrice subțiri [1]—[8], vom utiliza metoda variațională, care este adecvată pentru aplicațiile practice.

Vom considera aripa trapezoidală raportată la un sistem triortogonal de axe $O_1x_1x_2x_3$ care are originea O_1 într-unul din vîrfurile trapezului

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, *14*, 1 (1969) (în limba engleză).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$O_1A_1A_2O_2$. Axa O_1x_1 este dirijată după direcția curentului de la infinit U_∞, iar axa O_1x_2 este pe direcția bazei mici a trapezului (fig. 1). În planul de aplatisare $O_1x_1x_2$ aripa trapezoidală are proiecția $O_1A_1A_2O_2$, care este un trapez isoscel cu baza mică $2b$, cu baza mare $2(b+l_1)$, iar înălțimea este egală cu unitatea.

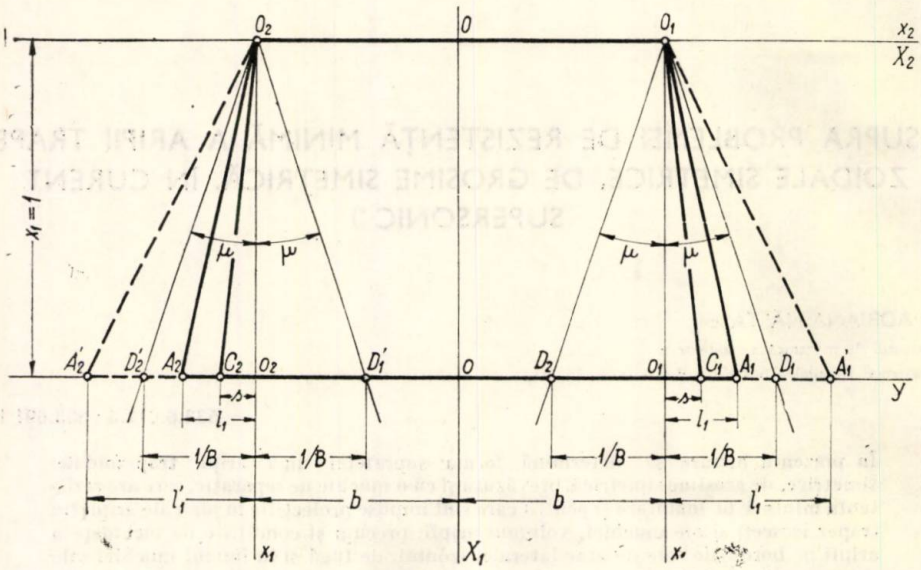


Fig. 1

Vom presupune baza mică suficient de mare, astfel încît conurile Mach din vîrfurile O_1 și O_2 să nu se intersecteze în interiorul aripii. Viteza verticală de perturbație o vom presupune, ca și în capitolele precedente, dată sub forma unei superpoziții de polinoame omogene în x_1 și x_2, adică

$$w = \sum_{m=1}^{N} w_{m-1} = \sum_{m=1}^{N} x^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^k \tag{1}$$

pe $O_1A_1C_1$ și $O_2A_2C_2$ și

$$\overline{w} = \sum_{m=1}^{N} \overline{w}_{m-1} = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \overline{w}_{m-k-1,\,k}\, y^k \tag{2}$$

$$\left(y = \frac{x_2}{x_1}\right)$$

pe porțiunea $O_2O_1C_1C_2$.

În aceste expresii $w_{m-k-1,\,k}$ și $\overline{w}_{m-k-1,\,k}$ sînt constante, iar $N-1$ este gradul polinomului de cel mai mare ordin luat în considerație în expresiile lui w și $\overline{w}$.

Vom considera suprafața trapezului simetrică față de axa de simetrie a proiecției. Pentru a putea scrie mai ușor condițiile de simetrie ale vitezei verticale de perturbație a aripii vom efectua următoarea translație a axelor de coordonate :

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2 + b, \quad X_3 = x_3. \tag{3}$$

În raport cu noile axe de coordonate, pentru a satisface simetria, w și $\overline{w}$ se scriu, respectiv, sub forma :

$$w = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} W_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}\, X_1^{m-2\varkappa-1}\, X_2^{2\varkappa} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} W_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}\, x_1^{m-2\varkappa-1}\, (x_2+b)^{2\varkappa} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, x_1^{m-k-1}\, x_2^{k} \tag{4}$$

și

$$\overline{w} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \overline{W}_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}\, X_1^{m-2\varkappa-1}\, X_2^{2\varkappa} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \overline{W}_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}\, x_1^{m-2\varkappa-1}\, (x_2 + b)^{2\varkappa} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \overline{w}_{m-k-1,\,k}\, x_1^{m-k-1}\, x_2^{k}. \tag{5}$$

Din aceste două egalități rezultă că

$$w_{\theta,\sigma} = \sum_{E\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-\theta-1}{2}\right)} C_{2\varkappa}^{\sigma}\, b^{2\varkappa-\sigma}\, W_{\theta,2\varkappa} \tag{6}$$

și analog

$$\overline{w}_{\theta\sigma} = \sum_{E\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-\theta-1}{2}\right)} C_{2\varkappa}^{\sigma}\, b^{2\varkappa-\sigma}\, \overline{W}_{\theta,2\varkappa} \tag{7}$$

iar

$$(\theta,\ \sigma) = 0,\ 1,\ \ldots\ (N-1)$$
$$1 \leqslant \theta + \sigma + 1 \leqslant N\,. \tag{8}$$

Prin urmare, condiția de simetrie a aripii față de planul OX_1X_3 nu mai intervine printre condițiile de legătură ale problemei de extremum,

deoarece ea a fost automat satisfăcută punînd $W_{0,2\mu+1} = 0$ și $\overline{W}_{0,2\mu+1} = 0$, așa cum s-a procedat în relațiile (4) și, respectiv, (5).

Suprafața aripii se poate obține prin integrarea în raport cu x_1 a vitezelor verticale de perturbație w și $\overline{w}$ date de (4) și, respectiv, (5). Vom obține astfel suprafața

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,\,k}}{m-k} x_1^{m-k} x_2^k + f(x_2) =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{W_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}}{m-2\varkappa} X_1^{m-2\varkappa} X_2^{2\varkappa} + \mathcal{F}(X_2^2) \tag{9}$$

pe $O_1A_1C_1$ și $O_2A_2C_2$ și respectiv

$$\overline{Z} = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\overline{w}_{m-k-1,\,k}}{m-k} x_1^{m-k} x_2^k + \overline{f}(x_2) =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{\overline{W}_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}}{m-2\varkappa} X_1^{m-2\varkappa} X_2^{2\varkappa} + \overline{\mathcal{F}}(X_2^2) \tag{10}$$

pe $O_2O_1C_1C_2$.

În aceste expresii $f(x_2)$ $\overline{f}(x_2)$, $\mathcal{F}(X_2^2)$, $\overline{\mathcal{F}}(X_2^2)$, sînt niște funcții arbitrare de x_2 sau, respectiv, X_2^2. Aceste funcții vor fi determinate astfel încît să satisfacă una din condițiile geometrice de legătură ale problemei de extremum studiate.

Condițiile geometrice de legătură, precum și rezistența de undă a aripii, trebuie să fie calculată numai pe semiaripa trapezoidală, deoarece aripa a fost presupusă simetrică în raport cu planul OX_1X_3.

II. EXPLICITAREA CONDIȚIILOR GEOMETRICE DE LEGĂTURĂ

În cele ce urmează vom căuta să explicităm condițiile geometrice de legătură ale problemei de extremum.

a) În acest sens, condiția de închidere a aripii pe bordul său de atac frontal O_1O_2 ($x_1 = X_1 = 0$ $\overline{Z} = 0$) conduce la determinarea funcțiilor arbitrare $\overline{f}(x_2)$ și, respectiv, $\overline{\mathcal{F}}(X_2^2)$, astfel că

$$\overline{f}(x_2) = \overline{\mathcal{F}}(X_2^2) = 0. \tag{11}$$

În consecință, $\overline{Z}$ capătă forma

$$\overline{Z} = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\overline{w}_{m-k-1,\,k}}{m-k} x_2^k x_1^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{\overline{W}_{m-2\varkappa-1,\,2\varkappa}}{m-2\varkappa} X_2^{2\varkappa} X_1^{m-2\varkappa} \tag{12}$$

și deci condiția de închidere a aripii trapezoidale pe bordul său de atac

frontal poate fi eliminată dintre condițiile de legătură ale problemei de extremum propuse.

b) Analog, din condiția ca aripa să fie închisă pe bordul său de fugă A_1A_2 ($x_1 = X_1 = 1, Z = \overline{Z} = 1$) ne conduce pe de o parte la determinarea funcțiilor $f(x_2)$ și, respectiv, $\mathcal{F}(X_2^2)$ și deci la următoarea expresie pentru Z :

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,\,k}}{m-k} x_2^k (x_1^{m-k} - 1) =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{W_{m-2\varkappa-1,2\varkappa}}{m-2\varkappa} X_2^{2\varkappa} (X_1^{m-2\varkappa} - 1), \tag{13}$$

iar pe de altă parte la următoarele condiții de legătură :

$$E_t \equiv \sum_{m=2t+1}^{N} \frac{\overline{W}_{m-2t-1,\,2t}}{m-2t} = 0,$$

$$t = 0,\ 1 \ldots E\left(\frac{N-1}{2}\right). \tag{14}$$

c) Din condiția de închidere a aripii pe bordul său de atac lateral O_1A_1 ($y = l_1\ Z = 0$) obținem următoarele relații de legătură :

$$E_t^{(1)} \equiv \sum_{m=t+1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-m+k}{2}\right)} \gamma_{k\varkappa}\, d_{mk}^{(t)}\, W_{m-k-1,\,2\varkappa} = 0,$$

$$t = 0,\ 1 \ldots (N-1). \tag{15}$$

În această formulă $\gamma_{k\varkappa}$ au semnificația din (6) și (7), iar

$$d_{mk}^{(t)} = \frac{l_1^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t), \tag{16}$$

iar δ_i^j este simbolul lui Kroenecker.

d) Din condiția de continuitate a cotei suprafeței la traversare a muchiei O_1C_1 ($y = s,\ Z = \overline{Z}$) obținem următoarele relații de legătură :

$$E_t^{(2)} \equiv \sum_{m=t+1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-m+k}{2}\right)} \gamma_{k\varkappa} (c_{mk}^{\prime(t)} W_{m-k-1,\,2\varkappa} - c_{mk}^{(t)} \overline{W}_{m-k-1,\,2\varkappa}) = 0, \tag{17}$$

$$t = 0,\ 1 \ldots (N-1).$$

În formula de mai sus

$$c_{mk}^{(t)} = \frac{s^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t), \tag{18}$$

iar

$$c_{mk}^{\prime(t)} = \frac{s^k}{m-k}. \tag{19}$$

e) Să considerăm acum condiția ca profilul central al aripii să fie dat, adică $\overline{Z}(X_1, 0) = \varphi(X_1)$, unde $\varphi(X_1)$ este ecuația suprafeței extradosului profilului central impus. Dacă presupunem că funcția dată $\varphi(X_1)$ este dezvoltabilă în serie Mac Laurin

$$\varphi(X_1) = \varphi_{(0)} + \frac{X_1}{1!}\varphi'_{(0)} + \ldots + \frac{X_1^N}{N!}\varphi^{(N)}_{(0)} + R_N(X_1) \tag{20}$$

și identificăm această expresie cu cea a profilului central al aripii

$$\overline{Z}(X_1, 0) = \frac{1}{U_\infty}\sum_{m=1}^{N}\frac{\overline{W}_{m-1.0}}{m}X_1^m, \tag{21}$$

obținem următoarele relații

$$\varphi_{(0)} = 0, \qquad R_N(X_1) = 0, \tag{22a}$$

$$E_t^{(3)} \equiv \overline{W}_{t.0} - \frac{U_\infty \varphi^{(t+1)}_{(0)}}{t!} = 0, \tag{22b}$$

$$t = 0, 1 \ldots (N-1).$$

Condițiile (22a) impun ca funcția $\varphi(X_1)$ să se reducă la un polinom de grad N cu termenul liber nul, iar condițiile (22b) intervin ca niște condiții de legătură ale problemei de extremum studiate.

f) În sfîrșit, condiția ca volumul aripii să fie dat devine

$$V = 2\left[\int_{O_1C_1A_1} Zx_1\,dx_1\,dy + \int_{OO_1C_1o} Zx_1\,dx_1\,dy\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\varkappa=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-m+k}{2}\right)}\gamma_{k\varkappa}\left(\tau_{mk}W_{m-k-1,2\varkappa} + \bar{\tau}_{mk}\overline{W}_{m-k-1,2\varkappa}\right) = V_0, \tag{23}$$

unde

$$\tau_{mk} = \frac{2\left(s^{k+1} - l_1^{k+1}\right)}{(m+2)(k+1)(k+2)U_\infty}, \tag{24}$$

iar

$$\bar{\tau}_{mk} = \frac{2}{(m-k)(k+1)U_\infty}\left[\frac{s^{k+1}}{m+2} - \frac{(-b)^{k+1}}{m-k+1}\right]. \tag{25}$$

Pentru ca să avem explicitați toți termenii care intervin în problema de extremum studiată va trebui să mai avem și expresia coeficientului de rezistență de undă.

III. EXPLICITAREA EXPRESIEI COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ DE UNDĂ

Pentru ca să putem explicita expresia coeficientului de rezistență de undă

$$c_d = \frac{4}{U_\infty^2(2b + l_1)}\left[\int_{O_1C_1A_1} wux_1\,dx_1\,dy + \int_{OO_1C_1o}\overline{w}ux_1\,dx_1\,dy\right] \tag{26}$$

avem nevoie de expresia vitezei axiale de perturbație u pe aripa trapezoidală simetrică.

Pentru determinarea vitezei axiale de perturbație u pe aripa trapezoidală de grosime simetrică vom pleca de la expresia vitezei axiale de perturbație u dată pentru aripa triunghiulară de grosime simetrică, care are un bord de atac subsonic și celălalt supersonic și care a fost dată în lucrările anterioare [9], [10], [12].

În această expresie vom face bordul de atac supersonic al aripii triunghiulare să tindă la infinit. Obținem în acest fel următoarea expresie pentru u:

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n} \left\{ \frac{P_{nq}\, y^q}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \right.$$

$$+ \delta_q^{(n)}\, C_{nq}\, y^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - By)}{2B(s - y)}} +$$

$$+ \delta_q^{(n)}\, G_{nq}\, y^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - By)}{2B(l_1 - y)}} +$$

$$\left. + \delta_q^{(n)}\, H_{nq}\, y^q \arccos \sqrt{\frac{1 + By}{2}} \right\} \tag{27}$$

$$(\delta_q^{(n)} = 1 - \delta_q^n)$$

în cazul aripii trapezoidale de grosime simetrică cu bordul de atac lateral subsonic.

În cazul aripii trapezoidale de grosime simetrică cu ambele borduri de atac supersonice, expresia vitezei axiale de perturbație este identică cu cea dată anterior [6]—[8] pentru aripa trapezoidală subțire cu ambele borduri de atac supersonice, care diferă de formula (27) doar prin faptul că în cel de-al treilea termen, care reprezintă contribuția bordului de atac lateral, se înlocuiește „arg ch" din (27) cu „arc cos" ca și în cazul aripii triunghiulare de grosime simetrică.

Observație.

a) Expresia vitezei axiale de perturbație u se prelungește pe porțiunea S a aripii în afara conului Mach al vîrfului O_1 (fig. 2) și la stînga lui cu valoarea

$$u = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n} \delta_q^{(n)}\, H_{nq}\, y^q. \tag{28}$$

b) Dacă aripa trapezoidală are ambele borduri de atac supersonice, viteza axială de perturbație pe porțiunea S_1 a aripii (fig. 3) din afara conului Mach al vîrfului O_1 și la dreapta lui are următoarea expresie:

$$u = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n} \delta_q^{(n)}\, G_{nq}\, y^q. \tag{29}$$

Coeficienţii vitezelor axiale de perturbaţie u sînt legaţi de cei ai distribuţiilor vitezei verticale de perturbaţie prin relaţiile liniare care se deduc din relaţiile de compatibilitate a lui P. Germain [11].

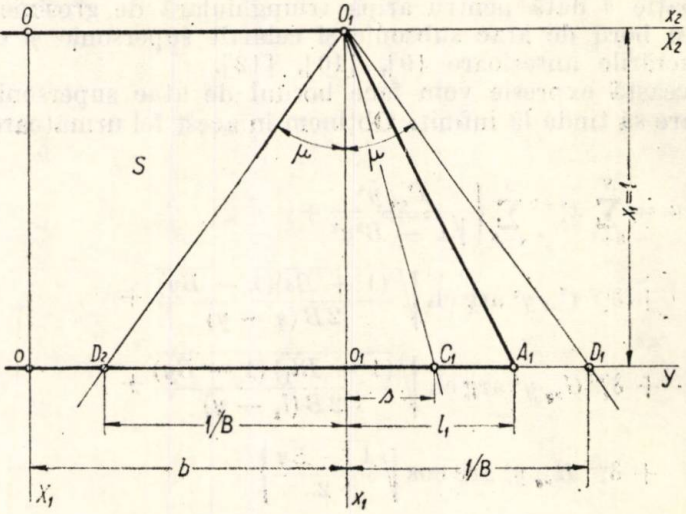


Fig. 2

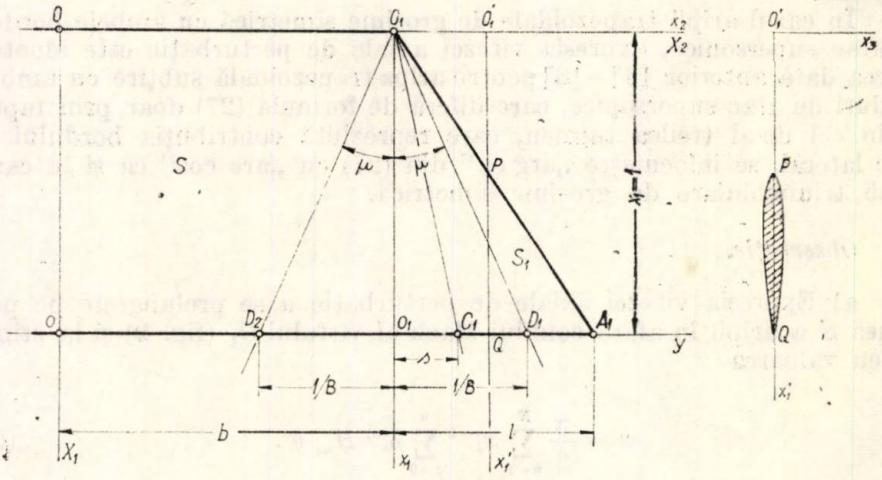


Fig. 3

Vom putea deci scrie

$$P_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} [p_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,j} + \overline{p}_{qj}^{(n)} \overline{w}_{n-j-1,j}] \qquad (30)$$

etc.

În consecință, coeficientul de rezistență de undă va avea o formă cvadratică în raport cu coeficienții lui w și $\overline{w}$

$$C_d = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}[\Omega_{nmkj}\, w_{m-k-1,\,k}\, w_{n-j-1,\,j} + \\ + \Omega^{(1)}_{nmkj}\, \overline{w}_{m-k-1,\,k}\, w_{n-j-1,\,j} + \overline{\Omega}_{nmkj}\, w_{m-k-1,\,k}\, \overline{w}_{n-j-1,\,j} + \\ + \overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}\, \overline{w}_{m-k-1,\,k}\, \overline{w}_{n-j-1,\,j}]. \tag{31}$$

În aceste expresii Ω_{nmkj}, $\Omega^{(1)}_{nmkj}$ etc. sînt constante în problema de extremum studiată și au următoarele valori:

$$\Omega^{*}_{nmkj} = \frac{4}{U_\infty^2\,(m+n)\,(2b+l_1)}\sum_{q=0}^{n}\left\{p^{(n)}_{qj}\,\mathcal{J}^{**}_{k+q}(l_1, s) + \right.$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q\, c^{(n)}_{qj}\sqrt{1-B^2s^2}}{2\,(k+q+1)}\sum_{t=0}^{k+q} s^{k+q-t}\,\mathcal{J}^{**}_t(l_1, s) +$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q\, g^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\left[\frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{2}\sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t}\,\mathcal{J}^{**}_t(l_1, s) + \right.$$

$$+ (l_1^{k+q+1} - s^{k+q+1})\,\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B\,(l_1-s)}}\Bigg] +$$

$$\left. + \frac{\delta^{(n)}_q\, h^{(n)}_{qj}}{2\,(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}^{**}_{k+q+1}(l_1, s) - 2s^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{1+Bs}{2}}\right]\right\} \tag{32}$$

și

$$\Omega^{*(1)}_{nmkj} = \frac{4}{U_\infty^2\,(m+n)\,(2b+l_1)}\sum_{q=0}^{n}\left\{p^{(n)}_{qj}\,\mathcal{J}^{**}_{k+q}\left(s; -\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q\, c^{(n)}_{qj}\sqrt{1-B^2s^2}}{2\,(k+q+1)}\sum_{t=0}^{k+q} s^{k+q-t}\,\mathcal{J}^{**}_t\left(s; -\frac{1}{B}\right) +$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q\, g^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\left[\frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{2}\sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t}\,\mathcal{J}^{**}_t\left(s; -\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ (s^{k+q+1} - l_1^{k+q+1})\,\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B\,(l_1-s)}}\Bigg] +$$

$$\left. + \frac{\delta^{(n)}_q\, h^{(n)}_{qj}}{2\,(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}^{**}_{k+q+1}\left(s; -\frac{1}{B}\right) + 2s^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{1+Bs}{2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(-1)^{k+q}\,\pi b^{k+q+1}\,(m+n)}{m+n-k-q-1}\right]\right\} \tag{33}$$

pentru aripa trapezoidală cu bordul de atac lateral subsonic. Expresiile $\overline{\Omega}^{*}_{nmkj}$ și $\overline{\Omega}^{*(1)}_{nmkj}$ ale acestei aripi se deduc din cele ale lui Ω^{*}_{nmkj} și,

respectiv, $\Omega^{*(1)}_{nmkj}$ prin simpla înlocuire a coeficienților $p^{(n)}_{qj}$, $c^{(n)}_{qj}$, $g^{(n)}_{qj}$ și $h^{(n)}_{qj}$ prin corespondenții lor barați.

Dacă aripa trapezoidală de grosime simetrică are ambele borduri de atac supersonice, atunci Ω_{nmkj} și $\Omega^{(1)}_{nmkj}$ iau valorile Ω^{**}_{nmkj} și $\Omega^{**(1)}_{nmkj}$ date anterior [6], [7] și [8] pentru aripa trapezoidală subțire cu ambele borduri de atac supersonice, și anume

$$\Omega^{**}_{nmkj} = \frac{4}{U^2_\infty (m+n)(2b+l_1)} \sum_{q=0}^{n} \left\{ p^{(n)}_{qj} \mathcal{J}^{**}_{k+q}\left(\frac{1}{B}\,;\, s\right) + \right. \tag{34}$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q c^{(n)}_{qj} \sqrt{1-B^2s^2}}{2(k+q+1)} \sum_{t=0}^{k+q} s^{k+q-t} \mathcal{J}^{**}_t\left(\frac{1}{B}\,;\, s\right) +$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q g^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\left[\frac{\sqrt{B^2l_1^2-1}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t} \mathcal{J}^{**}_t\left(\frac{1}{B}\,;\, s\right) + \right.$$

$$+ (l_1^{k+q+1} - s^{k+q+1}) \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B(l_1-s)}} +$$

$$\left. \left. + \frac{\delta^{(n)}_q h^{(n)}_{qj}}{2(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}^{**}_{k+q+1}\left(s\,;\, -\frac{1}{B}\right) - 2s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1+Bs}{2}}\right]\right\}\right.$$

și

$$\Omega^{**(1)}_{nmkj} = \frac{4}{U^2_\infty (m+n)(2b+l_1)} \sum_{q=0}^{n} \left\{ p^{(n)}_{qj} \mathcal{J}^{**}_{k+q}\left(s\,;\, -\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q c^{(n)}_{qj} \sqrt{1-B^2s^2}}{2(k+q+1)} \sum_{t=0}^{k+q} s^{k+q-t} \mathcal{J}^{**}_t\left(s\,;\, -\frac{1}{B}\right) +$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q g^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\left[\frac{\sqrt{B^2l_1^2-1}}{2} \sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t} \mathcal{J}^{**}_t\left(s\,;\, -\frac{1}{B}\right) + (s^{k+q+1} - \right. \tag{35}$$

$$\left. - l_1^{k+q+1}) \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B(l_1-s)}}\right] +$$

$$+ \frac{\delta^{(n)}_q h^{(n)}_{qj}}{2(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}^{**}_{k+q+1}\left(s\,;\, -\frac{1}{B}\right) + 2s^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1+Bs}{2}} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(-1)^{k+q} \pi b^{k+q+1} (m+n)}{m+n-k-q-1}\right]\right\}$$

iar Ω^{**}_{nmkj} și $\Omega^{**(1)}_{nmkj}$ se deduc din Ω^{**}_{nmkj} și, respectiv, $\Omega^{**)1)}_{nmkj}$ înlocuind coeficienții $p^{(n)}_{qj}$, $c^{(n)}_{qj}$ etc. prin corespondenții lor barați.

În expresiile de mai sus s-a notat cu $\mathcal{J}^{**}_k(\beta, \alpha)$ următoarea integrală :

$$\mathcal{J}^{**}_k(\beta, \alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{y^k \,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-B^2y^2}} = I^{**}_k(\beta) - I^{**}_k(\alpha), \tag{36a}$$

$$I^{**}_k = \int \frac{y^k \,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-B^2y^2}} = -\frac{y^{k-1}}{kB}\sqrt{1-B^2y^2} + \frac{k-1}{kB^2} I^{**}_{k-2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k!\,(2j)!}{(j!)^3\,(k-j)!\,B^{k-j+1}} \left[\frac{1}{(2B)^j} \arcsin By + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B}\sqrt{1-B^2y^2} \sum_{\nu=1}^{j} \frac{[(j-\nu)!]^2(1-By)^{j-\nu}}{2^\nu(2j-2\nu+1)!\,B^{j-\nu}} \right] + C. \tag{36b}$$

Observație. Expresiile Ω_{nmkj} simplu stelate diferă de corespondentele lor dublu stelate doar prin termenii care conțin ca factor pe $g_{ij}^{(n)}$, care reprezintă contribuția bordului lateral.

IV. REZOLVAREA PROBLEMEI DE EXTREMUM PROPUSE

Avem acum explicitați toți termenii care intervin în formularea problemei de extremum și putem deci trece la rezolvarea ei. Avem deci de găsit

$$C_a = \text{minim} \tag{37}$$

cu următoarele condiții de legătură:

$$V = V_0,\ E_n = 0,\quad E_t^{(1)} = 0,\quad E_t^{(2)} = 0,\quad E_t^{(3)} = 0, \tag{38}$$

$$n = 0,\ 1 \ldots E\left(\frac{N-1}{2}\right),\quad t = 0,\ 1 \ldots (N-1)$$

Această problemă de extremum de legătură se reduce la calculul extremumului fără legături al hamiltonianului,

$$H = C_a + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{E\left(\frac{N-1}{2}\right)} \lambda_t E_t +$$

$$+ \sum_{t=0}^{N-1} (\lambda_t^{(1)} E_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} E_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} E_t^{(3)}), \tag{39}$$

unde $\lambda^{(0)}$, λ_t etc. sînt multiplicatorii lui Lagrange.

Dacă anulăm acum prima variație a lui $H(\delta H = 0)$ și ținem seama că coeficienții $W_{m-k-1,2\varkappa}$ și $\overline{W}_{m-k-1,2\varkappa}$ sînt independenți, rezultă ecuații de forma

$$\sum_{t=0}^{N-1} \gamma_{t,\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{j+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N+j-t-\theta-1}{2}\right)} \gamma_{j\varkappa} [(\Omega_{n,\,t+\theta+1,\,t,\,j} + \right.$$

$$+ \Omega_{t+\theta+1,\,n,\,j,\,t})\, W_{n-j-1,2\varkappa} + (\overline{\Omega}_{n,\,t+\theta+1,\,t,\,j} + \tag{40}$$

$$+ \overline{\Omega}^{(1)}_{t+\theta+1,\,n,\,j,\,t})\, \overline{W}_{n-j-1,2\varkappa}] + \lambda^{(0)} \tau_{t+\theta+1,\,t} +$$

$$\left. + \sum_{\tau=0}^{N-1} (\lambda_\tau^{(1)} d_{t+\theta+1,\,t}^{\tau} + \lambda_\tau^{(2)} c'_{t+\theta+1,\,t}) \right\} = 0,$$

$$\theta = 0,\ 1 \ldots (N-1),$$

$$0 \leqslant \sigma \leqslant E\left(\frac{N-\theta-1}{2}\right),$$

care se obțin prin anularea coeficientului variației $\delta W_{\theta,2\sigma}$ și

$$\sum_{t=0}^{N-1} \gamma_{t,\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{j+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N+j-t-\theta-1}{2}\right)} \gamma_{j\varkappa} [(\Omega^{(1)}_{n,t+\theta+1,t,j} + \right.$$

$$+ \overline{\Omega}_{t+\theta+1,n,j,t}) W_{n-j-1,2\varkappa} + (\overline{\Omega}_{n,t+\theta+1,t,j} + \tag{41}$$

$$+ \overline{\Omega}^{(1)}_{t+\theta+1,n,j,t}) \overline{W}_{n-j-1,2\varkappa} + \lambda^{(0)} \overline{\tau}_{t+\theta+1,t} -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{N-1} \lambda^{(2)}_{\nu} c^{(\nu)}_{t+\theta+1,t} + \frac{\lambda\sigma}{\theta+1} + \lambda^{(3)}_{\theta} \delta^{\sigma}_{0} = 0,$$

$$\theta = 0, 1 \ldots (N-1),$$

$$0 \leqslant \sigma \leqslant E\left(\frac{N-\theta-1}{2}\right),$$

ecuație care se obține prin anularea coeficientului variației $\delta \overline{W}_{\theta,2\sigma}$. Ecuațiile (40) și (41) împreună cu condițiile la limită (38) alcătuiesc un sistem algebric liniar finit care determină în mod univoc valorile coeficienților $W_{\theta,2\sigma}$ și $\overline{W}_{\theta,2\sigma}$, precum și cele ale multiplicatorilor lagrangenieni $\lambda^{(0)}$, λ_{τ}, $\lambda^{(1)}_{t}$ și $\lambda^{(2)}_{t}$. Problema poate fi astfel socotită rezolvată.

Observație. Dacă aripa trapezoidală de grosime simetrică nu are muchie, atunci:

1) $w_{m-k-1,k} = \overline{w}_{m-k-1,k}$ și $W_{m-k-1,2\varkappa} = \overline{W}_{m-k-1,2\varkappa}$;

2) contribuția muchiei în expresiile vitezelor axiale de perturbație este nulă, deci coeficienții $C_{nq} = 0$;

3) toate expresiile barate $\overline{p}^{(n)}_{qj}$, $\overline{g}^{(n)}_{qj}$, $\overline{h}^{(n)}_{qj}$ etc. din relațiile (30) ale coeficienților vitezelor axiale sînt nule, deci vom putea scrie relații de forma

$$P_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} p^{(n)}_{qj} w_{n-j-1,j} \tag{42}$$

etc;

4) de asemenea, din expresia coeficientului de rezistență de undă dispar termenii care conțin coeficienții lui $\overline{w}$ ca factor. Vom putea deci scrie

$$C_d = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j}, \tag{43}$$

unde Ω_{nmkj} are următoarele două valori:

$$\Omega^{*}_{nmkj} = \frac{4}{U^2_{\infty}(m+n)(2b+l_1)} \sum_{q=0}^{n} \left\{ p^{(n)}_{qj} \mathcal{J}^{**}_{k+q}\left(l_1, \frac{1}{B}\right) + \right. \tag{44}$$

$$+\frac{\delta_q^{(n)} g_{qj}^{(n)} \sqrt{1-B^2 l_1^2}}{2(k+q+1)} \sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t} \mathcal{J}_t^*\left(l_1; -\frac{1}{B}\right)+$$

$$+\frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{(n)}}{2(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}_{k+q+1}^{**}\left(l_1; -\frac{1}{B}\right)+\frac{(-1)^{k+q}\pi b^{k+q+1}(m+n)}{m+n-k-q-1}\right]\Bigg\}$$

pentru aripa trapezoidală de grosime simetrică cu bordul de atac lateral subsonic și respectiv Ω_{nmkj}^{**} dat anterior [7]—[9] în cazul aripii trapezoidale subțiri cu ambele borduri de atac supersonice și care este de forma

$$\Omega_{nmkj}^{**} = \frac{4}{U_\infty^2 (m+n)(2b+l_1)} \sum_{q=0}^{n} \Bigg\{ p_{qj}^{(n)} \mathcal{J}_{k+q}^{**}\left(\frac{1}{B}\ ;\ -\frac{1}{B}\right)+$$

$$+\frac{\delta_q^{(n)} g_{qj}^{(n)} \sqrt{B^2 l_1^2-1}}{2(k+q+1)} \sum_{t=0}^{k+q} l_1^{k+q-t} \mathcal{J}_t^{**}\left(\frac{1}{B}\ ;\ -\frac{1}{B}\right)+$$

$$+\frac{\delta_q^{(n)} h_{qj}^{(n)}}{2(k+q+1)}\left[B\mathcal{J}_{k+q+1}^{**}\left(\frac{1}{B}\ ;\ -\frac{1}{B}\right)+\frac{(-1)^{k+q}\pi b^{k+q+1}(m+n)}{n+m-k-q-1}\right]\Bigg\}; \quad (45)$$

5) dacă considerăm acum condițiile geometrice de legătură, vom constata că, în cazul aripii trapezoidale de grosime simetrică fără muchie, condiția de continuitate a suprafeței în lungul muchiei dispare;

6) de asemenea, din condiția ca aripa să fie închisă pe bordul său de atac frontal ($x_1 = X_1 = 0$, $Z = 0$) rezultă că

$$f(x_2) = 0, \qquad \mathcal{F}(X_2^2) = 0 \quad (46)$$

și deci cota $Z(x_1, x_2)$ a suprafeței aripii devine

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{w_{m-k-1,\,k}}{m-k} x_2^k x_1^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\varkappa=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{W_{m-2\varkappa-1,2\varkappa}}{m-2\varkappa} X_2^{2\varkappa} X_1^{m-2\varkappa}, \quad (47)$$

iar condiția ca aripa să fie închisă pe bordul său de atac frontal poate fi de asemenea eliminată dintre condițiile de legătură ale problemei.

Cu aceste observații, celelalte condiții geometrice de legătură se pot scrie sub următoarea formă:

a) condiția de închidere a aripii pe bordul său de fugă ($x_1 = X_1 = 1$, $Z = 0$) conduce la relații similare cu (14) (în care $w = \overline{w}$)

$$E_t \equiv \sum_{m=2t+1}^{N} \frac{W_{m-2t-1,\,2t}}{m-2t} = 0, \qquad t = 0,\ 1 \ldots E\left(\frac{N-1}{2}\right); \quad (48)$$

b) condiția de închidere a aripii trapezoidale pe bordul său de atac lateral O_1A_1 ($y = l_1$ $Z = 0$) conduce la relațiile

$$E_m^{(1)} \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-m+k}{2}\right)} \gamma_{k\varkappa}\, d_{mk}\, W_{m-k-1,2\varkappa} = 0, \quad (49)$$

în care

$$d_{mk} = \frac{l_1^k}{m-k}; \tag{50}$$

c) condiţia ca profilul central al aripii să fie impus $[X_2 = 0, Z(X_1, 0) = \varphi(X_1)]$ conduce la relaţii similare cu (22b), în care trebuie însă să ţinem seama ca $\overline{W} = W$

$$E_t^{(3)} \equiv W_{t,0} - \frac{U_\infty \varphi_{(0)}^{(t+1)}}{t!} = 0, \qquad t = 0, 1 \ldots (N-1); \tag{51}$$

d) condiţia ca volumul aripii să fie dat $(V = V_0)$ devine

$$V \equiv \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N-m+k}{2}\right)} \gamma_{k\varkappa}\, \tau_{mk}\, W_{m-k-1,\,2\varkappa} = V_0, \tag{52}$$

unde

$$\tau_{mk} = \frac{2}{U_\infty (m-k)(k+1)} \left[\frac{l_1^{k+1}}{m+2} - \frac{(-b)^{k+1}}{m-k+1} \right]. \tag{53}$$

Cu aceste observaţii, ecuaţiile (40), care provin din anularea coeficienţilor variaţiilor $\delta W_{\theta,2\sigma}$, capătă, în cazul aripii trapezoidale de grosime simetrică, fără muchie, următoarea formă simplificată:

$$\sum_{t=0}^{N-1} \gamma_{t\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\varkappa=E\left(\frac{j+1}{2}\right)}^{E\left(\frac{N+j-t-\theta-1}{2}\right)} \gamma_{j\varkappa} \left[\Omega_{n,\,t+\theta+1,\,t,\,j} + \Omega_{t+\theta+1,\,n,\,j,\,t} \right] W_{n-j-1,\,2\varkappa} + \lambda^{(0)}\, \tau_{t+\theta+1,\,t} + \lambda_{t+\theta+1,\,t}^{(1)}\, d_{t+\theta+1,\,t} \right\} + \frac{\lambda\sigma}{\theta+1} + \lambda_\theta^{(3)}\, \delta_0^\sigma = 0, \tag{54}$$

$$\theta = 0, 1 \ldots (N-1),$$

$$0 \leqslant \sigma \leqslant E\left(\frac{N-\theta-1}{2}\right).$$

Ecuaţiile (54), împreună cu condiţiile de legătură

$$E_t = 0, \qquad E_m^{(1)} = 0, \qquad E_t^{(3)} = 0, \qquad V = V_0, \tag{55}$$

formează un sistem algebric liniar finit care determină în mod univoc valorile coeficienţilor $W_{\theta,2\sigma}$ ai vitezei verticale de perturbaţie w, precum şi valorile multiplicatorilor lagrangenieni $\lambda^{(0)}$ λ_t $\lambda_t^{(1)}$ şi $\lambda_t^{(3)}$.

Primită la redacţie la 16 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. ELIE CARAFOLI, ADRIANA NĂSTASE, *Minimum Drag Thin Triangular Wing in Supersonic Flow*, Rev. de Méc. Appl. **V**, *5* (1960) și St. cerc. mec. apl., **XI**, *4* (1960).
2. — *On the Minimum Drag Problem of the Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. de Méc. Appl. **VII**, *2* (1962) și St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1* (1962).
3. — *Minimum Drag Thin Delta Wing with Finite Velocity at the Leading Edges in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée **XI**, *2* (1967) și St. cerc. mec. apl., **23**, *6* (1966).
4. ADRIANA NĂSTASE, *The Thin Cruciform Wing of Minimum Drag in Supersonic Flow*, comunicată la Dresda, noiembrie 1964 (sub tipar).
5. ELIE CARAFOLI, ADRIANA NĂSTASE, *The Optimum Shape of the Cruciform Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée **XI**, *2* (1967) și St. cerc. mec. apl., **23**, *6* (1966).
6. — *Trapetsievidnye krylia s minimalnym lobovum soprotivleniem v sverhzukovom potoke*, Mehanika (Moscova) *1* (1961).
7. — *L'utilisation de la méthode des résidus dans le problème de résistance minimum de l'aile trapezoïdale en courant supersonique*, Arhiwum Mechaniki Stosowanej, **16**, *3* (1964) (Polonia).
8. — *Utilisation of the Residuus Method in the Problem of Trapezoidal Wing in Supersonic Flow*, Fluid Dynamic Transaction *2*, 1965 (Anglia).
9. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale*, Comunicările Acad. R.P.R., **II** *9—10* (1952).
10. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique*, Revue de Méc. Appl. **II**, *1* (1957).
11. P. GERMAIN, *The General Theory of Conical Motions and its Application to Supersonic Aerodynamics*, ONERA Publication **34**, 1949.
12. E. CARAFOLI, *High-Speed Aerodynamics*, București, Edit. tehnică, 1956.

CURGEREA NESTAȚIONARĂ A FLUIDELOR ETEROGENE PRINTR-UN MEDIU POROS

de H. PASCAL
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

532.546 : 532.529.3

În lucrare se studiază curgerea fluidelor eterogene, gaze-țiței, printr-un mediu poros în regim tranzitoriu. Se examinează cîteva probleme de hidrodinamică subterană care apar în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în regim de gaze dizolvate.
Pentru rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale neliniare care descrie curgerea nestaționară a fluidelor eterogene compresibile se utilizează metoda perturbațiilor. În felul acesta problema a fost redusă, din punct de vedere matematic, la rezolvarea unui șir de sisteme de ecuații liniare neomogene, cu condițiile la limită și inițiale care apar în aplicațiile practice.
Rezultatele obținute permit efectuarea calculelor de prevedere asupra comportării în timp a zăcămintelor de hidrocarburi fluide, în ceea ce privește evoluțiile în timp și spațiu ale debitelor de țiței și gaze produse de sonde, precum și distribuțiilor de presiune și saturație.

Cunoașterea distribuțiilor de presiune și saturație, precum și a debitelor de fluide, în funcție de timp, permite prevederea comportării în timp a zăcămîntului, în ceea ce privește evoluțiile în timp ale debitelor de fluide produse de sonde, cînd acestea sînt exploatate la presiuni impuse, sau ale evoluției în timp a presiunii, cînd acestea sînt exploatate la debite impuse.

Un alt parametru care de asemenea prezintă importanță practică este acela al evoluțiilor în timp a saturației, respectiv al prevederii rezervei recuperabile la anumite momente de timp, pentru anumite condiții de exploatare. Un număr mare de lucrări au fost consacrate determinării soluției sistemului de ecuații neliniare utilizat pentru descrierea matematică a curgerii fluidelor heterogene prin medii poroase. În lucrarea de față nu s-a menționat decît comunicarea prezentată la ședința anuală a societății A.I.M.E. din octombrie 1967, care redă în bibliografie cele mai reprezentative lucrări publicate pînă în prezent [3].

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, 1969, P. 33–52

Unii autori au aplicat metode numerice pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare, alţii metode analitice, după ce în prealabil au liniarizat ecuaţiile şi condiţiile la limită, utilizînd în acest scop anumite ipoteze.

Apariţia calculatoarelor electronice cu o mare capacitate de rezoluţie a făcut posibilă aplicarea metodelor numerice pentru rezolvarea problemelor menţionate mai sus. În acest caz pot fi determinate valorile aproximative ale presiunii şi saturaţiei în diferite puncte din zăcămînt şi la anumite momente de timp, deci se poate obţine o variaţie discretă a parametrilor curgerii.

Cu toate că metodele numerice permit rezolvarea aproximativă a problemelor hidrodinamicii subterane aferente exploatării raţionale a zăcămîntului pe baza condiţiilor reale, adică fără a mai fi necesară introducerea ipotezelor simplificatoare, acestea în schimb nu permit stabilirea dependenţelor funcţionale dintre parametrii curgerii şi caracteristicile fizice ale mediului poros, care, după cum se ştie, sînt de o reală utilitate practică pentru determinarea *in situ* a permeabilităţii după particularităţile variaţiei în timp a presiunii de fund în curgerea tranzitorie.

Dat fiind faptul că în prezent pentru determinarea *in situ* a permeabilităţii au căpătat o largă aplicabilitate practică metodele care au la bază curgerea tranzitorie, studiul curgerii fluidelor heterogene cu ajutorul metodelor analitice capătă, pentru motivele arătate mai sus, o importanţă deosebită.

Lucrarea de faţă a fost concepută deci în scopul de a pune în evidenţă unele rezultate care pot fi obţinute cu ajutorul metodei perturbaţiilor, în ceea ce priveşte rezolvarea unor probleme de hidrodinamică subterană aferente exploatării raţionale a zăcămintelor de hidrocarburi fluide în regim de gaze dizolvate.

Ţinînd seama de dificultăţile matematice inerente rezolvării sistemului de ecuaţii neliniare, corespunzător fluidelor heterogene, rezultatele prezentate în această lucrare sînt aproximative şi, în consecinţă, susceptibile de îmbunătăţiri.

Problemele de curgere nestaţionară a fluidelor eterogene printr-un mediu poros, care prezintă interes practic pentru exploatarea raţională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide, se referă la amestecul bifazic gaze-ţiţei şi ţiţei-apă.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a expus o metodă care permite determinarea aproximativă a distribuţiilor de presiune, de debit şi de saturaţie, în funcţie timp, în cazul curgerii amestecului compresibil ţiţei-gaze sau ţiţei-apă. În cele ce urmează vom aplica rezultatele obţinute în lucrarea [1] la rezolvarea unor probleme hidrodinamice care apar în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în regim de gaze dizolvate, adică în condiţiile unde curgerea este bifazică, în scopul de a putea prevedea comportarea în timp a presiunilor sau a debitelor de fluide extrase din sonde.

Problemele studiate în cele ce urmează vor fi notate în acelaşi mod cu cel utilizat în lucrarea [2], şi anume prin două simboluri care se referă la condiţiile la limită.

I. SOLUȚIILE APROXIMATIVE ALE ECUAȚIILOR CURGERII ETEROGENE

a) CAZUL GAZE-ȚIȚEI

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [1], distribuțiile presiunii și saturației în cazul unei curgeri bifazice plan radiale pot fi scrise sub forma seriilor de puteri

$$\frac{p(r,t)}{p_k} = 1 + \varepsilon p_1(r,t) + \varepsilon^2 p_2(r,t) + \ldots + \varepsilon^n p_n(r,t) \tag{I.1}$$

și

$$\sigma(r,t) = \sigma_k + \varepsilon\sigma_1(r,t) + \varepsilon^2\sigma_2(r,t) + \ldots + \varepsilon^n\sigma_n(r,t), \tag{I.2}$$

ε fiind un parametru auxiliar.

Vom arăta mai departe că seriile (I.1) și (I.2) pot fi scrise și sub o altă formă.

Pentru aproximația de ordinul doi a soluției sistemului de ecuații neliniare care descrie curgerea nestaționară a amestecului bifazic gaze-țiței, funcțiile p_1 și p_2 sînt soluțiile ecuațiilor

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial r} = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{I.3}$$

și

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r} = \lambda\frac{\partial p_2}{\partial t} + \varphi(r,t). \tag{I.4}$$

Întrucît în cele ce urmează ne referim la cazurile cînd la momentul inițial presiunea și saturația au aceleași valori în tot zăcămîntul, deci cînd curgerea începe din stare de repaus, termenul liber al ecuației neomogene (I.4) devine

$$\varphi(r,t) = A\frac{\partial p_1^2}{\partial t} + C\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)^2, \tag{I.5}$$

unde prin coeficienții A, C, λ și Ω s-au notat

$$A = \frac{m(1-\bar{\alpha})\Omega + \left(\bar{\alpha}\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right)\dfrac{\lambda p_k}{2} + [a_1 - (\bar{\alpha}-1)a_2]\dfrac{\lambda p_k \Omega}{2}}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]}, \tag{I.6}$$

$$C = -\frac{[a_1 + (1-\bar{\alpha})a_2]\Omega + \bar{\alpha}\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}}{\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}}, \tag{I.7}$$

$$\lambda = \frac{m[1 + (\bar{\alpha}-1)\sigma_k]}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]} \tag{I.8}$$

și

$$\Omega = \frac{\lambda p_k}{m} \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} = \frac{1 + (\bar{\alpha} - 1)\,\sigma_k}{1 + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{k_t(\sigma_k)} \dfrac{\mu_t}{\mu_g}}. \tag{I.9}$$

Semnificațiile fizice ale notațiilor utilizate în relațiile de mai sus au fost redate în lucrarea [1].

În ceea ce privește coeficienții a_1 și a_2, aceștia se determină din relațiile

$$a_1 = \frac{\bar{\alpha}}{\sigma_{10} - \sigma_{20}} \left(\frac{k_t(\sigma_{10})}{\mu_t} - \frac{k_t(\sigma_{20})}{\mu_t} \right) + \\ + \frac{1}{\sigma_{10} - \sigma_{20}} \left(\frac{k_g(\sigma_{10})}{\mu_g} - \frac{k_g(\sigma_{20})}{\mu_g} \right) \tag{I.10}$$

și

$$a_2 = \frac{1}{\sigma_{10} - \sigma_{20}} \left(\frac{k_t(\sigma_{10})}{\mu_t} - \frac{k_t(\sigma_{20})}{\mu_t} \right), \tag{I.11}$$

σ_{10} și σ_{20} fiind valorile saturației corespunzătoare limitei inferioare, respectiv superioare, pentru intervalul de variație a saturației.

Cunoscînd funcțiile $p_1(r, t)$ și $p_2(r, t)$, se pot determina funcțiile $\sigma_1(r, t)$ și $\sigma_2(r, t)$ din relațiile

$$\sigma_1(r, t) = \Omega p_1(r, t) \tag{I.12}$$

și

$$\sigma_2(r, t) = \Omega p_2(r, t) + \left(\frac{A k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2} \right) \frac{p_k}{m} p_1^2(r, t). \tag{I.13}$$

Rezultă deci pentru distribuția saturației în țiței în cazul aproximației de ordinul doi

$$\sigma(r, t) = \sigma_k + \Omega\,[p_1(r, t) + p_2(r, t)] + \left(\frac{A k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \right. \\ \left. + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2} \right) \frac{p_k}{m} p_1^2(r, t). \tag{I.14}$$

Sînt numeroase cazurile întîlnite în practică cînd termenul $C \left(\dfrac{\partial p_1}{\partial r} \right)^2$ poate fi în general neglijat în raport cu $A \dfrac{\partial p_1^2}{\partial t}$. În consecință, se poate considera pentru termenul liber al ecuației neomogene (I.4)

$$\varphi(r, t) \cong A \frac{\partial p_1^2}{\partial t}. \tag{I.15}$$

Pe de altă parte, în cazul primei probleme la limită, adică cînd sonda este exploatată la o presiune variabilă în timp sau constantă, se observă din (I.1) că condițiile la limită corespunzătoare funcțiilor p_1 și p_2 sînt determinate. Dacă ne referim însă la cazul cînd sonda este exploatată la un debit impus, adică la cea de-a doua problemă la limită, atunci condițiile la limită corespunzătoare funcției $\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ devin neliniare. În aceste condiții vom avea

$$2\pi h r_0 \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = Q_t = \text{const} \tag{I.16}$$

sau [1]

$$2\pi h r_0 (a_2\sigma + b_2) \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \text{const}. \tag{I.17}$$

Cu ajutorul relațiilor (I.1) și (I.2) se obține pentru $t > 0$

$$2\pi r_0 h \left[\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + a_2 \varepsilon \sigma_1(r, t)\right] \varepsilon p_k \left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \text{const} \tag{I.18}$$

și

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0.$$

Ținînd seama de faptul că $\sigma_1(r, t) = \Omega p_1(r, t)$, condiția la limită (I.18) mai poate fi scrisă și sub forma

$$2\pi r_0 h \left[\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + a_2 \varepsilon \Omega p_1(r, t)\right] \varepsilon p_k \left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = Q_t = \text{const}. \tag{I.19}$$

Deoarece atît presiunea, cît și saturația nu sînt cunoscute pe conturul sondei, rezultă că $\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ nu poate fi determinat. În acest caz este necesar să considerăm, într-o primă aproximație, că $\sigma(r_0, t) \cong \sigma_z$, respectiv $\sigma_1(r_0, t) = 0$, astfel încît din (I.18) vom avea

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \frac{\mu_t Q_t}{2\pi h r_0 p_k \varepsilon k_t(\sigma_k)}, \tag{I.20}$$

Q_t fiind debitul de țiței.

Pe de altă parte, este ușor de observat că funcția $p_1(r, t)$, adică prima aproximație a soluției sistemului de ecuații care descrie curgerea bifazică gaze-țiței, reprezintă soluția unei ecuații similare cu cea corespunzătoare curgerii fluidului omogen dacă se introduce pentru coeficienții de mobilitate și compresibilitate relațiile

$$\beta = \frac{1}{p_k}[1 + (\bar{\alpha} - 1)\sigma_k] \tag{I.21}$$

și

$$\frac{k(\sigma_k)}{\mu} = \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}.$$

b) CAZUL APĂ-ŢIŢEI

Pentru cazul apă-ţiţei funcţiile p_1, p_2, σ_1 şi σ_2 se obţin tot cu ajutorul ecuaţiilor redate mai sus, dar coeficienţii care apar vor fi acum

$$A = \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\,\lambda - m(\beta_a - \beta_t)}{\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}} \left(\frac{\lambda k_a(\sigma_k)}{m\mu_a} - \beta_a \sigma_k \right), \tag{I.22}$$

$$\lambda = \frac{m\,[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\,\sigma_k]}{\dfrac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}} \tag{I.23}$$

şi

$$\Omega = \left(\frac{\lambda k_a(\sigma_k)}{m\mu_a} - \beta_a \sigma_k \right) p_k, \tag{I.24}$$

unde $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ se determină din relaţiile

$$\bar{a}_1 = \frac{k_a(\sigma_{10}) - k_a(\sigma_{20})}{\mu_a(\sigma_{10} - \sigma_{20})} \text{ şi } \bar{a}_2 = \frac{k_t(\sigma_{10}) - k_t(\sigma_{20})}{\mu_t(\sigma_{10} - \sigma_{20})}. \tag{I.25}$$

Semnificaţiile fizice ale notaţiilor utilizate în (I.22), (I.23) şi (I.24) au fost de asemenea arătate în [1].

II. PROBLEMA $p_k - Q$

Vom considera cazul cînd exploatarea sondei se efectuează la un debit constant. În prima fază a exploatării sondei, mediul în care are loc curgerea poate fi considerat de întindere infinită, întrucît în acest caz distribuţia presiunii nu va fi practic influenţată de condiţiile la limită existente pe conturul zăcămîntului atîta timp cît frontul depresionar nu l-a atins.

În ceea ce priveşte condiţia iniţială, vom considera că la momentul iniţial fluidele se aflau în stare de repaus, avînd saturaţia σ_k şi presiunea p_k.

După cum s-a arătat în lucrarea [1], în aceste condiţii se obţine pentru distribuţiile presiunii şi saturaţiei, în cazul aproximaţiei de ordinul doi, următoarele relaţii :

$$p(r, t) - p_k = p_k Q_t B E_i \left(-\frac{\lambda r^2}{4t} \right) + \frac{2AB^2 Q_t^2 p_k}{\lambda} \left[-\frac{1}{2}(1 + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}) E_i \left(-\frac{\lambda r^2}{4t} \right) + E_i \left(-\frac{\lambda r^2}{2t} \right) \right] \tag{II.1}$$

şi

$$\sigma(r,t) - \sigma_k = \Omega B Q_t E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + \frac{2AB^2Q_t^2\Omega}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}})E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right] + \left(\frac{Ak_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2\lambda\Omega}{2}\right)\frac{p_k}{m} B^2Q_t^2E_i^2\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right), \quad \text{(II.2)}$$

unde $E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) = -\int_{\frac{\lambda r^2}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ reprezintă funcţia exponenţial integral

şi $B = \frac{\mu_t}{2\pi h p_k k_t(\sigma_k)}$.

Pentru aplicaţiile practice apare necesar să punem în evidenţă parametrii de care depinde rapiditatea convergentei seriilor (I.1) şi (I.2). În acest scop s-au redat în tabelele 2 şi 3, pentru exemplificare, valorile saturaţiei şi presiunii, calculate cu relaţiile (II.1) şi (II.2), în funcţie de parametrul adimensional $\frac{\lambda r^2}{4t}$ pentru condiţiile $\sigma_k = 80\%$, $m = 30\%$, $p_k = 100$ ata, $\bar{\alpha} = 1$, $\mu_t = 1$ cp, $\mu_g = 0{,}0125$ cp, $h = 10$ m, $Q_t = 22{,}1$ m³/24 h, adică $BQ_t = 0{,}3$ şi $k = 3$ md.

Valorile permeabilităţilor relative în funcţie de saturaţie au fost determinate din figura 1, iar cele ale coeficienţilor A, B, λ şi Ω, în funcţie de saturaţia σ_k, sînt redate în tabela 1.

Tabela 1

$\sigma_k\%$	$\lambda\left(\frac{s}{m^2}\right)$	Ω	$A\left(\frac{s}{m^2}\right)$	$B\left(\frac{s}{m^3}\right)$
40	180	$5{,}35.10^{-4}$	90	177.10^3
50	250	$19{,}8.10^{-4}$	125	$66{,}3.10^3$
60	417	58.10^{-4}	208,5	$37{,}8.10^3$
70	875	182.10^{-4}	438	$25{,}2.10^3$
80	1450	745.10^{-4}	725	$11{,}75.10^3$
100	10^4	1	$0{,}5.10^4$	$5{,}3.10^3$

Tabela 2

$332{,}5\frac{r^2}{t}\left(\frac{s}{m^2}\right)$	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,16	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$(p/p_k)_I$	0,112	0,196	0,31	0,393	0,454	0,502	0,577	0,633	0,79	0,864	0,907	0,934
$(p/p_k)_{II}$	0,23	0,313	0,408	0,501	0,546	0,589	0,557	0,707	0,839	0,900	0,932	0,995

Tabela 3

$362{,}5\frac{r}{t^2}$ s/m²	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,16	0,2	0,4	0,6
σ_I%	74,27	74,81	75,50	76,07	76,48	76,80	77,30	77,63	78,96	79,35
σ_{II}%	75,04	75,57	76,18	76,78	77,07	77,35	77,80	78,11	78,96	79,35

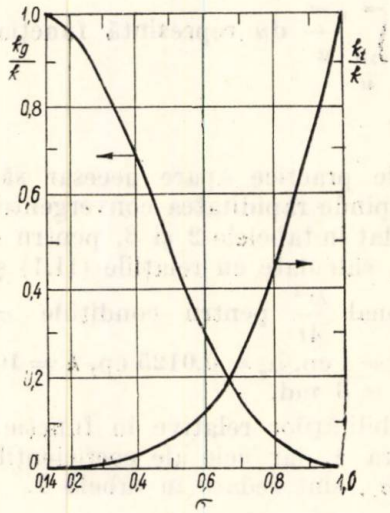


Fig. 1

Prin σ_I și p_I s-au notat valorile corespunzătoare primei aproximații, adică cele determinate de funcțiile p_1 și σ_1, iar prin p_{II} și σ_{II} — valorile corespunzătoare aproximației de ordinul doi.

Distribuțiile saturației și presiunii pentru $Q_tB = 0{,}1$, respectiv pentru $Q_t = 7{,}35$ m³/24h, $\sigma_k = 80\%$ și $p_k = 100$ata sînt redate în tabelele 4 și 5.

Comparînd valorile presiunii și saturației, redate în tabelele de mai sus, se observă că pentru $Q_t = 7{,}35$ m³/24 h nu există diferențe sensibile dintre valorile obținute cu ajutorul primei aproximații față de cele rezultate din a doua aproximație. În schimb, pentru $Q_t = 22{,}1$ m³/24 h apar diferențe sensibile, astfel încît pentru determinarea mai corectă a distribuțiilor de presiune și saturație trebuie să ținem seama de relațiile deduse din a doua aproximare a soluției sistemului de ecuații neliniare care descrie curgerea fluidelor eterogene. În consecință, cînd $Q_tB < 0{,}1$, seriile (I.1) și (I.2) devin foarte rapid convergente, încît distribuțiile de presiune și saturație pot fi determinate cu ajutorul funcțiilor p_1 și σ_1, adică din prima aproximație.

Tabela 4

$$\frac{\lambda}{4} = 362{,}5\ \frac{s}{m^2}$$

$\frac{\lambda}{4}\frac{r^2}{t}$	10^{-4}	4.10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,16	0,2	0,4	0,6	0,8
σ_I %	74,44	75,32	77,06	77,40	77,84	78,09	78,27	78,52	78,69	78,83	78,93	79,09	79,21	79,55	79,71	79,88
σ_{II} %	74,44	75,32	77,06	77,49	77,92	78,18	78,36	78,59	78,77	78,91	79,00	79,15	79,26	79,58	79,73	79,182

Tabela 5

$$\frac{\lambda}{4} = 362{,}5\ \frac{s}{m^2}$$

$\frac{\lambda}{4}\frac{r^2}{t}$	10^{-4}	4.10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,16	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$(p/p_k)_I$	0,138	0,276	0,360	0,596	0,664	0,704	0,732	0,77	0,797	0,818	0,834	0,859	0,878	0,93	0,955	0,97	0,978
$(p/p_k)_{II}$	0,138	0,276	0,368	0,61	0,678	0,717	0,745	0,782	0,809	0,828	0,844	0,868	0,886	0,935	0,958	0,972	0,98

Menţionăm că în cazul exploatării sondei la un debit variabil în timp putem aplica principiul superpoziţiei, întrucît ecuaţiile cu derivate parţiale care determină funcţiile p_1 şi p_2 sînt liniare [1]. Deoarece coeficienţii A, B, λ şi Ω depind de valorile presiunii şi saturaţiei corespunzătoare momentului iniţial, adică de σ_k şi p_k, acestea vor fi deci constante.

Pe de altă parte, ţinînd seama de rezultatele obţinute mai sus, se poate arăta că, în general, seria (I.1) poate fi scrisă în cazul celei de-a doua probleme la limită, adică în condiţiile exploatării sondei la un debit impus, sub forma

$$\frac{p}{p_k} = 1 + BQ_t f_1(r, t) + B^2 Q_t^2 f_2(r, t) + \ldots + B^n Q_t^n f_n(r, t),$$

de unde este uşor de observat că rapiditatea convergentei acesteia va fi cu atît mai mare cu cît debitul sondei va fi mai mic, întrucît avem $BQ_t < 1$ şi $f_1 > f_2 > f_3 > \ldots > f_n$.

III. PROBLEMA $p_k - p_0$. CAZUL MONODIMENSIONAL

Vom considera cazul cînd sonda este exploatată la o presiune constantă şi vom presupune, ca şi în cazul precedent, că la momentul iniţial fluidele se aflau în stare de repaus. În aceste condiţii este necesar să putem prevedea comportarea în timp a sondei, în ceea ce priveşte evoluţiile debitelor de ţiţei şi gaze.

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [4], pentru prima fază a exploatării, adică pentru condiţiile cînd zăcămîntul poate fi considerat infinit, distribuţiile presiunii şi saturaţiei se obţin din relaţiile următoare:

$$\frac{p(x,t)}{p_k} = 1 - \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{2A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}}\Bigg], \tag{III.1}$$

$$\sigma(x,t) = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{2k_t(\sigma_k)\, p_k A}{m\, \mu_t}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{\lambda x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\lambda x^2}{2t}}\Bigg] +$$
$$+ \frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 \left(\frac{a_2 \lambda \Omega}{2} + \frac{A k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, x}{2\sqrt{t}}\right)\right]^2, \tag{III.2}$$

unde

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du. \tag{III.3}$$

În ceea ce privește evoluțiile în timp ale debitelor de țiței și gaze pe unitatea de secțiune, acestea pot fi determinate din relațiile [4]

$$\frac{Q_t(0,t)}{F} = \frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} p_k \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} \left[1 - \frac{1{,}14}{\pi} \frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right] \quad \text{(III.4)}$$

și

$$\frac{Q_g(0,t)}{F} = \left(\bar{\alpha} - \frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right) \frac{p_0 p_k}{p_a} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} \left[1 - \frac{1{,}14}{\pi} \frac{A}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\right], \quad \text{(III.5)}$$

unde $\sigma_0 = \sigma(0,t)$ reprezintă valoarea saturației în țiței pe conturul sondei, care se obține din relația

$$\sigma_0 = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) + \left(\frac{A k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2}\right) \frac{p_k}{m} \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2. \quad \text{(III.6)}$$

Un alt parametru a cărui cunoaștere prezintă importanță practică, pentru controlul și conducerea exploatării raționale a zăcămintelor în regim de gaze dizolvate, este rația de gaze-țiței

$$R_g(x,t) = \left(\bar{\alpha} + \frac{k_g(\sigma)}{k_t(\sigma)} \frac{\mu_t}{\mu_g}\right) \frac{p(x,t)}{p_a}. \quad \text{(III.7)}$$

Funcțiile $\sigma(x,t)$ și $p(x,t)$ se obțin cu ajutorul relațiilor (III.1) și (III.3). În tabela 6 s-au redat variațiile presiunii și saturației în funcție de parametru adimensional $\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2\sqrt{t}}$, considerînd datele din exemplele precedente și $\frac{p_0}{p_k} = 0{,}3$. Evoluțiile în timp ale debitelor de țiței și gaze produse de sonde sînt redate în tabela 6.

Tabela 6

$\frac{\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{t}}$	0,01	0,03	0,05	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	1	1,2	1,6
$(p/p_k)_I$	0,308	0,325	0,34	0,379	0,53	0,665	0,723	0,820	0,89	0,9372	0,9835
$(p/p_k)_{II}$	0,3112	0,333	0,345	0,383	0,555	0,697	0,7547	0,847	0,91	0,95	0,988
$\sigma\%$	74,85	74,96	75,12	75,45	75,55	77,74	78,173	78,6	79,32	79,62	80

Tabela 7

t(s)	10	10^2	10^3	10^4	5.10^4	$7,5.10^4$	10^5
$\frac{Q_t(0,t)}{F}$	$4,17.10^{-3}$	$1,32.10^{-3}$	$0,417.10^{-3}$	$0,132.10^{-3}$	$0,059.10^{-3}$	$0,0482.10^{-3}$	$0,0389.10^{-3}$
$\frac{Q_g(0,t)}{F}$	$29,92.10^{-5}$	$9,46.10^{-5}$	$2,992.10^{-5}$	$0,946.10^{-5}$	$0,423.10^{-5}$	$0,345.10^{-5}$	$0,299.10^{-5}$

Distribuţia saturaţiei în ţiţei pentru condiţiile $\sigma_k = 100\%$, $p_k =$ $= 100$ata, $\mu_t = 1$cp şi $\mu_g = 0,0125$cp este redată în tabelul 8.

Tabela 8

$\frac{\sqrt{\lambda x}}{2\sqrt[4]{t}}$	0,01	0,03	0,05	0,1	0,33	0,5	0,6	0,8	1	1,2	1,6
$\sigma\%$	31,12	33,3	34,5	38,9	55,5	69,7	75,5	84,7	90,94	94,95	98,71

Se observă din tabela 6 că în cazul $\frac{p_0}{p_k} > 0,3$ putem să ne limităm numai la prima aproximaţie pentru determinarea distribuţiilor de presiune şi saturaţie, în timp ce pentru $\frac{p_0}{p_k} > 0,3$ trebuie să ţinem seama de aproximaţiile de ordin superior.

Pe de altă parte, seria (I.1) mai poate fi scrisă în general pentru prima problemă la limită, adică în cazul exploatării sondei la o presiune impusă, sub forma

$$\frac{p(r,t)}{p_k} = 1 + \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right) f_1(r,t) + \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2 f_2(r,t) + \ldots + \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^n f_n(r,t), \tag{III.8}$$

unde $f_1 > f_2 > f_3 > \ldots > f_n$ şi $\frac{p_0}{p_k} < 1$.

În consecinţă, rapiditatea convergentei seriei (III.8) va fi în aceste condiţii cu atît mai mare, cu cît raportul $\frac{p_0}{p_k}$ este mai mare, adică cu cît sonda este exploatată la o presiune mai apropiată de cea corespunzătoare momentului iniţial, cînd fluidele se aflau în stare de repaus. Se observă de asemenea din (III.4) (III.5) şi (III.6) că şi debitele de ţiţei şi gaze, precum şi saturaţia, pot fi scrise sub forma seriei (III.8).

IV. PROBLEMA $q - p_0$

După ce frontul depresionar a atins conturul zăcămîntului închis mediu în care are loc curgerea nu mai poate fi considerat de lungime infinită, deoarece în acest caz distribuţiile de presiune şi saturaţie vor fi influenţate de condiţiile la limită existente pe conturul zăcămîntului. Două cazuri sînt posibile în ceea ce priveşte felul condiţiilor la limită existente pe conturul zăcămîntului, şi anume: zăcămînt închis, adică cu frontieră impermeabilă, şi zăcămînt alimentat, fie la o presiune impusă, fie la un debit impus.

În cele ce urmează vom considera cazul zăcămîntului închis exploatat printr-o sondă la o presiune constantă. Condiţiile la limită şi iniţiale vor fi deci

$$t > 0 \begin{cases} p(0, t) = p_0, \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \end{cases} \qquad t = 0 \begin{cases} p(x, 0) = p_k, \\ \sigma(x, 0) = \sigma_k. \end{cases} \tag{IV.1}$$

Se obţin, în cazul condiţiilor (IV.1) pentru distribuţiile de presiune şi saturaţie, următoarele relaţii [4]:

$$\frac{p(x, t)}{p_k} = 1 - \left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{l}}{(2m+1)}\,e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right] -$$

$$- \frac{8A}{\pi\lambda}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right] e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} \sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} \tag{IV.2}$$

şi

$$\sigma(x, t) = \sigma_k - \Omega\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{l}}{(2m+1)}\,e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right] -$$

$$- \frac{8A}{\pi}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - 1\right)\right]\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{p_k}{m}\,e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda\Omega a_2}{2} + \frac{k_t(\sigma_k)\,A}{\mu_t}\right)\frac{p_k}{m}\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{l}}{(2m+1)}\,e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right]^2. \tag{IV.3}$$

În ceea ce privește evoluțiile în timp ale debitelor de țiței și gaze pe unitatea de secțiune, acestea se determină cu ajutorul următoarelor relații:

$$\frac{Q_t(0,t)}{F} = \frac{2k_t(\sigma_0)p_k}{l\mu_t}\left[\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - \frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}-1\right)\right]e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right] \quad \text{(IV.4)}$$

și

$$\frac{Q_g(0,t)}{F} = \left(\alpha\frac{k_t(\sigma_0)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_0)}{\mu_g}\right)\frac{p_k p_0}{p_a l}\left[\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}} - \frac{2A}{\lambda}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2\left[\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} + \frac{32}{3\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}-1\right)\right]e^{-\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}}\right], \quad \text{(IV.5)}$$

unde

$$\sigma_0 = \sigma_k - \Omega\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right) + \left(\frac{\lambda\Omega a_2}{2} + \frac{A\,k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\right)\frac{p_k}{m}\left(1-\frac{p_0}{p_k}\right)^2.$$

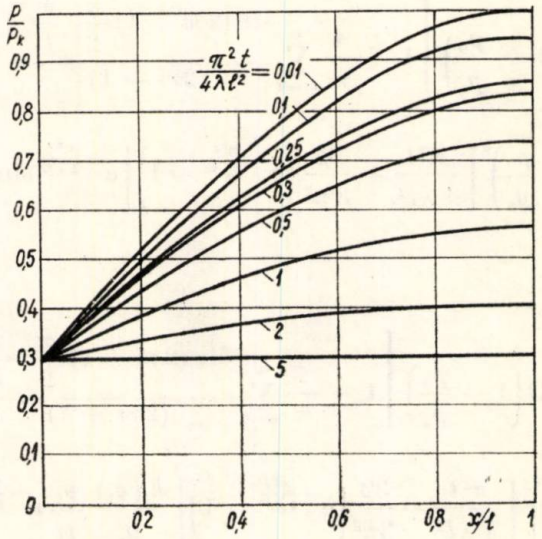


Fig. 2

În figura 2 este arătată distribuția presiunii pentru diferite valori ale timpului adimensional $\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}$, considerînd condițiile din exemplul precedent.

Variația în timp a saturației pe frontiera impermeabilă a zăcămîntului, adică la distanța $x = l$ pentru $\sigma(x, 0) = \sigma_i = 100\%$, este redată în tabela 9.

Tabela 9

$\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2}$	0,01	0,1	0,25	0,3	0,5	1	2	5
$\sigma(l,t)$	99,3	93,35	84,52	81,87	72,46	55,8	39,7	30,45

Se observă că pentru $\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} \cong 5$, respectiv pentru

$$t \cong \frac{20\, m\, l^2 [1 + (\bar{\alpha} - 1)\, \sigma_k]}{\pi^2 p_k \left(\frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} \right)},$$

presiunea la capătul deschis al zăcămîntului, deci în sondă, devine egală cu cea corespunzătoare capătului închis și, în consecință, exploatarea zăcămîntului nu mai este posibilă. În acest caz valoarea saturației va fi de 30,45%, fiind aceeași în tot zăcămîntul.

Distribuțiile în timp și spațiu ale debitelor de țiței și gaze, pe unitatea de secțiune, sînt prezentate în figurile 3—8.

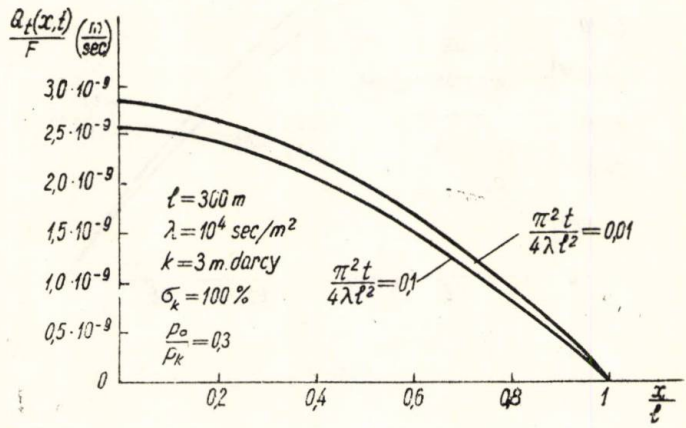


Fig. 3

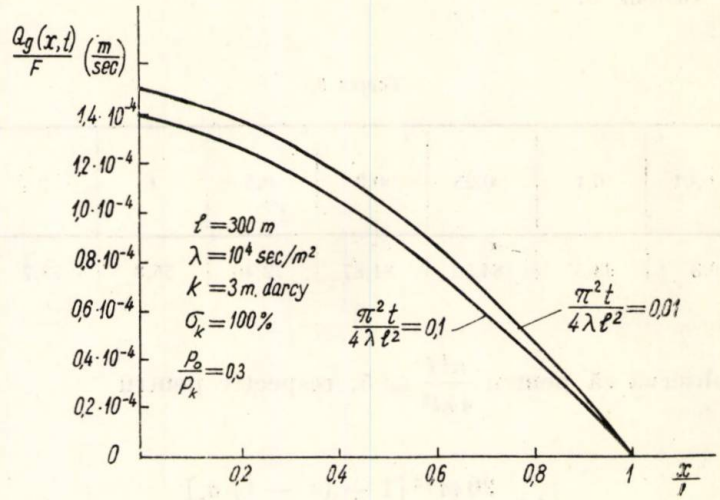

$\frac{Q_g(x,t)}{F}\left(\frac{m}{sec}\right)$
1,4·10⁻⁴
1,2·10⁻⁴
1,0·10⁻⁴
0,8·10⁻⁴
0,6·10⁻⁴
0,4·10⁻⁴
0,2·10⁻⁴
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\frac{x}{l}$
$l = 300\ m$
$\lambda = 10^4\ sec/m^2$
$k = 3\ m.\ darcy$
$\sigma_k = 100\%$
$\frac{p_o}{p_k} = 0,3$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} = 0,1$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} = 0,01$

Fig. 4

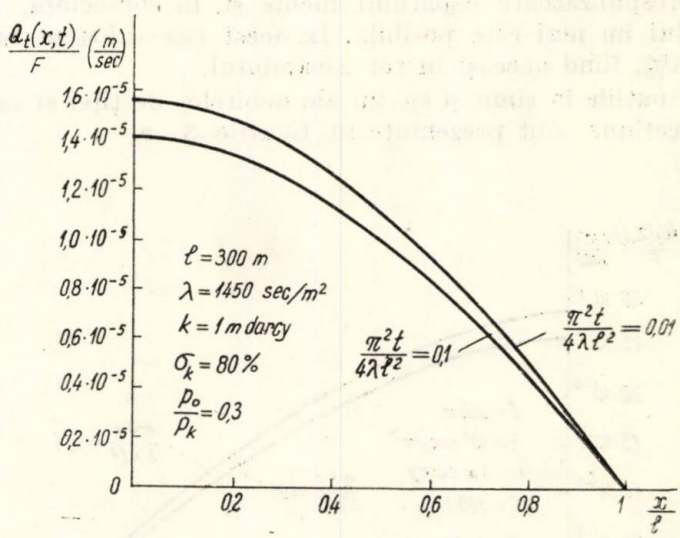

$\frac{Q_t(x,t)}{F}\left(\frac{m}{sec}\right)$
1,6·10⁻⁵
1,4·10⁻⁵
1,2·10⁻⁵
1,0·10⁻⁵
0,8·10⁻⁵
0,6·10⁻⁵
0,4·10⁻⁵
0,2·10⁻⁵
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\frac{x}{l}$
$l = 300\ m$
$\lambda = 1450\ sec/m^2$
$k = 1\ m\ darcy$
$\sigma_k = 80\%$
$\frac{p_o}{p_k} = 0,3$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} = 0,1$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda l^2} = 0,01$

Fig. 5

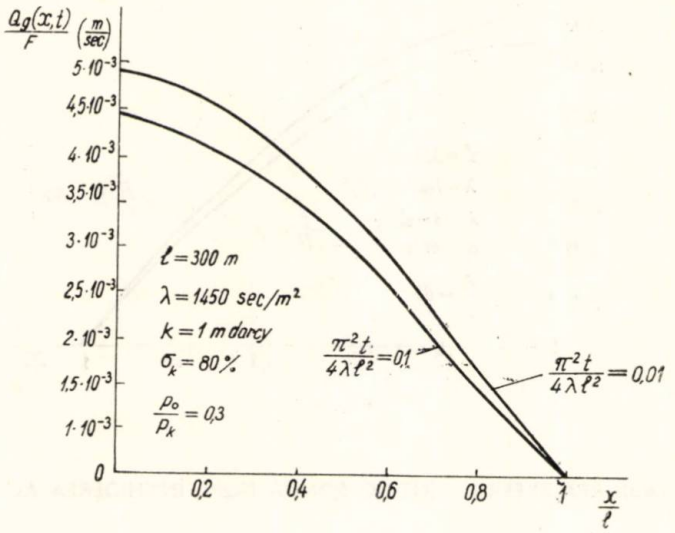

$\frac{Q_g(x,t)}{F}$ $\left(\frac{m}{sec}\right)$
$5\cdot10^{-3}$
$4{,}5\cdot10^{-3}$
$4\cdot10^{-3}$
$3{,}5\cdot10^{-3}$
$3\cdot10^{-3}$
$2{,}5\cdot10^{-3}$
$2\cdot10^{-3}$
$1{,}5\cdot10^{-3}$
$1\cdot10^{-3}$
0
$\ell = 300\ m$
$\lambda = 1450\ sec/m^2$
$k = 1\ m\ darcy$
$\sigma_k = 80\%$
$\frac{\rho_o}{\rho_k} = 0{,}3$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda\ell^2} = 0{,}1$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda\ell^2} = 0{,}01$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\frac{x}{\ell}$

Fig. 6

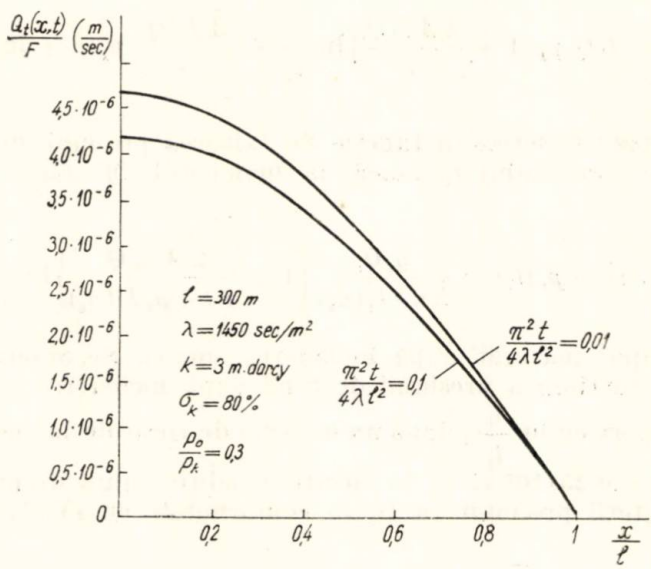

$\frac{Q_t(x,t)}{F}$ $\left(\frac{m}{sec}\right)$
$4{,}5\cdot10^{-6}$
$4{,}0\cdot10^{-6}$
$3{,}5\cdot10^{-6}$
$3{,}0\cdot10^{-6}$
$2{,}5\cdot10^{-6}$
$2{,}0\cdot10^{-6}$
$1{,}5\cdot10^{-6}$
$1{,}0\cdot10^{-6}$
$0{,}5\cdot10^{-6}$
0
$\ell = 300\ m$
$\lambda = 1450\ sec/m^2$
$k = 3\ m.darcy$
$\sigma_k = 80\%$
$\frac{\rho_o}{\rho_k} = 0{,}3$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda\ell^2} = 0{,}1$
$\frac{\pi^2 t}{4\lambda\ell^2} = 0{,}01$
0,2
0,4
0,6
0,8
1
$\frac{x}{\ell}$

Fig. 7

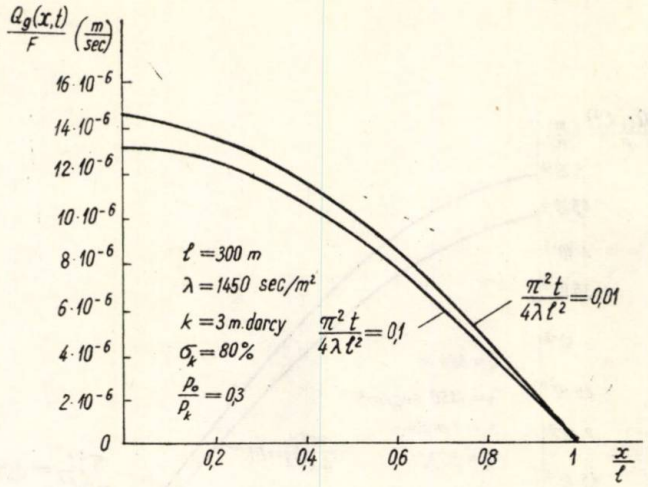


Fig. 8

V. RESTABILIREA PRESIUNII ÎNTR-O SONDĂ DUPĂ ÎNCHIDEREA ACESTEIA

În cazul unei sonde care a produs la un debit constant un timp t_1, se obține, după închiderea acesteia pentru evoluția în timp a presiunii de fund cînd $\frac{\lambda r_0^2}{4t} < 0{,}01$ [1],

$$p_f(t) - p_k = B Q_t p_k \left(1 + \frac{4 A B Q_t}{\lambda}\right) \ln \frac{t_0}{t_1} + \frac{A B^2 Q_t^2}{\lambda} p_k (2 + \ln 16), \qquad (V.1)$$

care mai poate fi scrisă în funcție de valoarea presiunii de fund corespunzătoare momentului t_1, adică la momentul închiderii sondei, sub forma

$$p_f(t) - p_f(t_1) = \frac{\mu_t Q_t}{2\pi h k_t(\sigma_k)} \left(1 + \frac{2 A \mu_t Q_t}{\pi h \lambda p_k k_t(\sigma_k)}\right) \ln \frac{t_0}{t_1}, \qquad (V.2)$$

t_0 fiind timpul măsurat după închiderea sondei. Se observă din (V.2) că variația în timp a presiunii de fund după închiderea sondei este liniară în raport cu $\ln \frac{t_0}{t_1}$, după un interval de timp de la închiderea sondei egal $t_0 = 0{,}25 \cdot 10^2\ r_0^2\ \lambda$. În aceste condiții panta dreptei corespunzătoare creșterii presiunii va fi, în conformitate cu (V.2),

$$i = \frac{\mu_t Q_t}{2\pi h k_t(\sigma_k)} + \frac{2A}{\lambda p_k} \left(\frac{\mu_t Q_t}{\pi h k_t(\sigma_k)}\right)^2 \qquad (V.3)$$

și dacă avem satisfăcută inegalitatea $\frac{2A\mu_t Q_t}{\lambda\pi h p_k k_t(\sigma_k)} < 0{,}01$, atunci din (V.3) putem obține valoarea aproximativă a permeabilității efective aferentă zonei de drenaj a sondei, utilizînd relația

$$k_t(\sigma_k) \cong \frac{\mu_t Q_t}{2\pi h i}. \tag{V.4}$$

Dacă ținem seama de faptul că $\frac{2A\mu_t}{\pi h \lambda p_k k_t(\sigma_k)}$ este o constantă, asupra căreia nu putem acționa, rezultă deci că întotdeauna putem satisface inegalitatea $\frac{2A\mu_t Q_t}{\pi h \lambda p_k k_t(\sigma_k)} < 0{,}01$ exploatînd sonda, înaintea închiderii acesteia, la un debit egal cu

$$Q_t \leqq \frac{0{,}01\pi h p_k k_t(\sigma_k)\lambda}{2\mu_t A}.$$

Pe de altă parte, pentru determinarea saturației σ_k trebuie să cunoaștem curbele permeabilităților efective în funcție de saturație, pentru zăcămîntul respectiv.

Rezultatele obținute mai sus arată unele particularități de comportare a variației presiunii de fund în curgerea bifazică gaze-țiței, față de cea a fluidului omogen. Astfel, în condițiile curgerii bifazice la determinarea pantei i apare termenul adițional $\frac{2A}{\lambda p_k}\left(\frac{\mu_t Q_t}{\pi h k_t(\sigma_k)}\right)^2$. Dacă $\frac{2A\mu_t Q_t}{\pi h \lambda p_k k_t(\sigma_k)} < 0{,}01$, atunci, din punct de vedere calitativ, variația în timp a presiunii de fund, după închiderea sondei, este aceeași atît pentru curgerea bifazică, cît și pentru cea omogenă, întrucît în acest caz funcția $p(r,t)$ poate fi determinată cu ajutorul primei aproximații a soluției sistemului de ecuații neliniare care descrie curgerea fluidelor eterogene, adică considerînd numai primii doi termeni ai seriei (I.1).

CONCLUZII

Utilizarea metodei perturbațiilor la rezolvarea sistemului de ecuații neliniare care descrie curgerea nestaționară a fluidelor eterogene poate permite să se determine analitic, în anumite cazuri, cu un anumit grad de aproximație, distribuțiile presiunii și saturației, precum și debitele de fluide.

Din punct de vedere matematic, aplicarea metodei perturbațiilor la studiul problemelor care apar în practica exploatării zăcămintelor de hidrocarburi fluide conduce la determinarea soluțiilor unui șir de sisteme de ecuații liniare neomogene, cu ajutorul cărora pot fi obținute distribuțiile de presiune și de saturație, pentru gradul de aproximație dorit. Dificultățile matematice apar atunci cînd trebuie determinate analitic distribuțiile de presiune corespunzătoare unui grad de aproximație su-

perior lui doi. În acest caz, funcţiile p_3, $p_4 \dots p_{n-1} \dots$ nu pot fi determinate decît prin aplicarea metodelor numerice.

Rezultatele obţinute arată însă că termenii seriilor (I.1) şi (I.2) conţin puterile întregi crescătoare ale unui factor subunitar care depinde de valorile $\left(1 - \frac{p_0}{p_k}\right)$ sau de Q_t, adică de valorile presiunii sau debitului cu care este exploatată sonda, iar coeficienţii acestor termeni sînt funcţii descrescătoare mărginite. Din acest motiv, convergenţa seriilor (I.1) şi (I.2), care aproximează soluţia sistemului de ecuaţii neliniare utilizat în descrierea matematică a curgerii fluidelor eterogene, va fi cu atît mai rapidă, cu cît raportul $\frac{p_0}{p_k}$ este mai mare, sau cu cît debitul sondei este mai mic. Din cele de mai sus rezultă un avantaj al utilizării metodei perturbaţiilor, comparativ cu metodele numerice, şi anume că aceasta permite să determinăm analitic distribuţiile de presiune şi saturaţie, cu o bună aproximaţie, atunci cînd sondele sînt exploatate în astfel de condiţii încît ne putem limita numai la primii trei termeni ai seriilor (I.1) şi (I.2), adică la aproximaţia de ordinul doi.

Primită la redacţie la 1 Mai 1968

NOTAŢII

$k(\sigma)$ — permeabilitatea efectivă;
μ — viscozitatea dinamică;
σ — saturaţia;
p — presiunea;
Q — debitul volumetric;
m — porozitatea mediului poros;
β — coeficientul de compresibilitate;
p_a — presiunea atmosferică;
σ_k — saturaţia în ţiţei corespunzătoare stării de repaus a fluidelor;
p_k — presiunea corespunzătoare stării de repaus a fluidelor;
F — secţiunea de curgere a mediului poros;

Indici

a — apă;
t — ţiţei;
g — gaze.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Pascal, *Etude de la courbe de remontée de pression dans l'écoulement polyphasique*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, *3* (1967).
2. A. Houpeurt, *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*, Paris, 1958.
3. S. S. Thurber, S. I. Pirson, *The effect of differential depletion on recovery by solution — gas drive*, Society of Petroleum Engineers of A.I.M.E. paper 1887, 1967.
4. H. Pascal, *L'écoulement d'un mélange compressible liquide-gaz à travers un milieu poreux en régime transitoire*, Rev. Roum. Sci. Tech.—Mécanique Appliquée, *4* (1966).

ARIPI CRUCIFORME ȘI AMPENAJE PREVĂZUTE CU FUZELAJ CONIC ÎN REGIM SUPERSONIC

II. MIȘCĂRI CONICE DE ORDIN SUPERIOR

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

533.695.6 : 533.691.11

Lucrarea tratează mișcările conice de ordin superior în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj și ampenaj-fuzelaj avînd incidențele sau pantele date sub forma unor sume de polinoame omogene de diferite ordine. În acest sens, printr-o serie de transformări convenabile, problema este redusă la studiul mișcărilor conice de ordin superior în jurul unei aripi cruciforme izolate fictive avînd incidența variabilă după funcții omogene. Pentru rezolvarea acestei din urmă probleme se utilizează, adaptată în mod corespunzător, metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli.

NOTAȚII

U_∞ — viteza curentului neperturbat;

a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$;

$Ox_1x_2x_3$ — sistem trirectangular de coordonate, Ox_1 reprezentînd axa de simetrie a fuzelajului;

$y = \dfrac{x_2}{x_1}, z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonate adimensionale;

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potențialul vitezelor de perturbație al unei mișcări conice de ordin n, care este o funcție omogenă, de același ordin n.

$\Phi_{n-k-p,\,k,\,p} = \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x_1^{n-k-p}\,\partial x_2^k\,\partial x_3^p}$ — derivata de ordinul n a potențialului, care este o funcție omogenă de ordin zero.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, 1969, P. 53–74

$u = \Phi_{100}$, $v = \Phi_{010}$, $w = \Phi_{001}$ — vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 care, fiind funcții omogene de ordin $(n-1)$, pot fi exprimate, aplicînd teorema lui Euler pentru funcții omogene, sub forma

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\,\frac{\partial}{\partial x_2} + z\,\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} u = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} \sum_{r=0}^{q} C_q^r\, y^{q-r} z^r\, \Phi_{n-q,\,q-r,\,r}\,, \tag{1a}$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,v = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\,\frac{\partial}{\partial x_2} + z\,\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} v = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} \sum_{r=0}^{q} C_q^r\, y^{q-r} z^r\, \Phi_{n-q-1,\,q-r+1,\,r}\,, \tag{1b}$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,w = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\,\frac{\partial}{\partial x_2} + z\,\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} w = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} \sum_{r=0}^{q} C_q^r\, y^{q-r} z^r\, \Phi_{n-q-1,\,q-r,\,r+1}\,. \tag{1c}$$

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În lucrarea precedentă [1] am studiat mișcarea conică în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj avînd incidențele sau pantele constante pe porțiuni.

În această lucrare ne propunem să studiem, în cadrul teoriei mișcărilor conice de ordin superior, sistemele aripă cruciformă-fuzelaj avînd incidențele sau pantele date sub forma unei sume de polinoame omogene de diferite ordine, luînd în considerație, ca și în [1], diferitele poziții ale bordurilor de atac față de conul Mach. Separînd de la început, în cadrul teoriei liniarizate, mișcarea axial-simetrică cunoscută în jurul fuzelajului izolat fără incidență, în cele ce urmează ne vom ocupa de mișcarea care rezultă în urma acestei separări.

Considerînd sistemul aripă-cruciformă-fuzelaj din figura 1, vom observa că, în cadrul mișcărilor conice de ordin superior, cazul general al sistemului menționat poate fi obținut prin suprapunerea următoarelor sisteme mai simple:

a) Sistemul la care fuzelajul și aripa orizontală au incidența nulă, iar placa verticală are de asemenea incidența nulă pe porțiunile $R_j Q_j$ și are incidența distribuită simetric, după un polinom omogen de ordin $(n-1)$, pe porțiunile $Q_j P_j$, sistem definit prin condițiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0\,; \quad [w]_{N_j A_j} = 0, \tag{2a}$$

$$[v]_{R_j Q_j} = 0, \quad [v]_{Q_j P_j} = x_1^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{(j+1)\,r}\, v_{n-1-r,\,r}\, z^r \quad (j = 1, 2). \tag{2b}$$

b) Sistemul la care fuzelajul şi aripa au incidenţa nulă, iar placa este de grosime simetrică avînd panta distribuită simetric după un polinom omogen de ordin $(n-1)$, sistem definit prin condiţiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \quad [w]_{N_j A_j} = 0, \tag{3a}$$

$$[v]_{R_j P_j} = \pm x_1^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{(j+r)r} v_{n-1-r,r} z^r \quad (j = 1, 2), \tag{3b}$$

unde semnul plus se referă la faţa din dreapta a plăcii, iar semnul minus la cea din stînga.

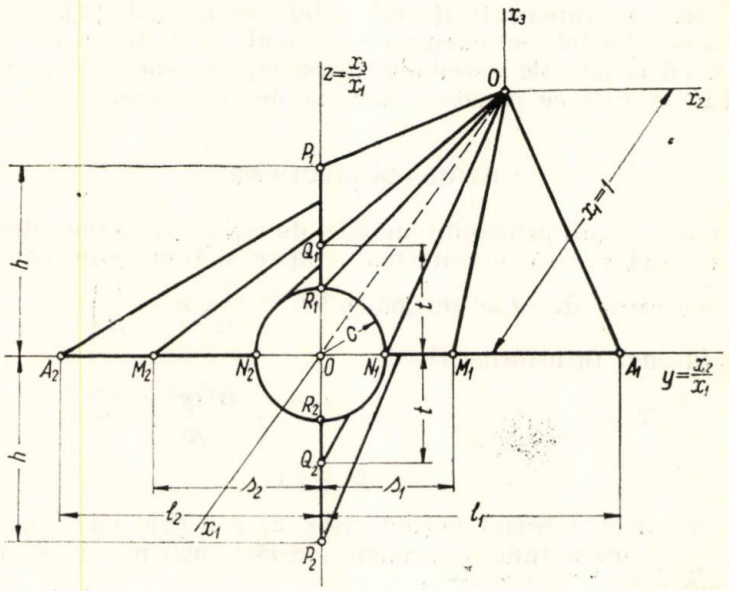


Fig. 1

c) Sistemul la care fuzelajul şi porţiunile $N_j M_j$ ale aripii şi $R_j Q_j$ ale plăcii au incidenţa nulă, în timp ce porţiunile $M_j A_j$ ale aripii au incidenţa distribuită după un polinom omogen de ordin $(n-1)$, iar porţiunile $Q_j P_j$ ale plăcii au incidenţa distribuită antisimetric de asemenea după un polinom omogen de acelaşi ordin $(n-1)$, sistem definit prin condiţiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{4a}$$

$$[w]_{N_j M_j} = 0, \quad [w]_{M_j A_j} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-1-q,q}^{(j)} y^q \qquad (j = 1, 2), \tag{4b}$$

$$[v]_{R_j Q_j} = 0, \quad [v]_{Q_j P_j} = x_1^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{(j+1)(r+1)} v_{n-1-r,r} z^r, \quad (j = 1, 2). \tag{4c}$$

d) Sistemul la care fuzelajul şi placa au incidenţa nulă, iar aripa este de grosime simetrică avînd panta distribuită după un polinom omo-

gen de ordin $(n-1)$ pe porțiunile M_jA_j și panta nulă pe porțiunile N_jM_j, sistem definit prin condițiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0\,; \quad [v]_{R_jP_j} = 0, \tag{5a}$$

$$[w]_{N_jM_j} = 0\,; \quad [w]_{M_jA_j} = \pm\, x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} w^{(j)}_{n-q-1,\,q}\, y^q \quad (j = 1, 2), \tag{5b}$$

unde semnul plus se referă la extradosul aripii, iar semnul minus la intradosul acesteia.

Este ușor de văzut că, datorită simetriei plăcii, primele două cazuri se reduc la studiul mișcării conice de ordin n în jurul unor sisteme fuzelaj-aripă delta subțire și, respectiv, fuzelaj-aripă delta de grosime simetrică, care se tratează în modul stabilit în lucrările [2], [3], așa cum vom arăta mai jos într-un exemplu de calcul. Au rămas astfel de studiat ultimele două cazuri ale sistemului aripă cruciformă-fuzelaj pentru care vom stabili în cele ce urmează metoda de rezolvare.

2. METODA DE REZOLVARE

Pentru a stabili principiul metodei de rezolvare să considerăm cazul sistemului fuzelaj-aripă cruciformă subțire definit prin condițiile (4) și avînd bordurile de atac subsonice $\left(l_j < \dfrac{1}{B},\ h < \dfrac{1}{B}\right)$.

Considerînd transformarea

$$\mathcal{y} = \frac{y}{1 - B^2z^2}\,, \quad \mathcal{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2z^2}\,, \tag{6a}$$

$$x = \mathcal{y} + i\,\mathcal{z}\,, \tag{6b}$$

în planul auxiliar x astfel obținut (fig. 2) funcțiile omogene de ordin zero $\Phi_{n-k-p,\,k,\,p}$ devin funcții armonice, astfel încît pot fi exprimate sub forma complexă

$$\Phi_{n-k-p,\,k,\,p} = \operatorname{Re} F_{n-k-p,\,k,\,p}\,, \tag{7}$$

funcțiile de variabilă complexă $F_{n-k-p,\,k,\,p}$ trebuind să satisfacă următoarele relații de compatibilitate, deduse din condițiile de irotaționalitate,

$$\mathrm{d}F_{n,\,0,\,0} = (-x)^k \left(\frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{1 - B^2x^2}}\right)^p \mathrm{d}F_{n-k-p,\,k,\,p} \quad (k + p \leqslant n). \tag{8}$$

Ținînd seama de relațiile (1), condițiile (4b), (4c) de pe aripă $(z = 0)$ și, respectiv, placă $(y = 0)$ se pot scrie sub forma

$$[\Phi_{n-q-1,\,q,\,1}]_{N_jM_j} = 0, \tag{9a}$$

$$[\Phi_{n-q-1,\,q,\,1}]_{M_jA_j} \quad \frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\, w^{(j)}_{n-q-1,\,q} \quad (j = 1, 2), \tag{9b}$$

$$[\Phi_{n-r-1,\,1,\,r}]_{R_jQ_j} = 0, \tag{10a}$$

$$[\Phi_{n-r-1,\,1,\,r}]_{Q_jP_j} = (-1)^{(j+1)(r+1)} \frac{(n-1)!}{C^r_{n-1}}\, v_{n-1-r,\,r} \quad (j = 1, 2). \tag{10b}$$

În ceea ce privește condiția (4a), observînd că pe fuzelaj avem

$$\cos\theta = \frac{y}{c} = \frac{x_2}{x_1 c}, \quad \sin\theta = \frac{z}{c} = \frac{x_3}{x_1 c}, \tag{11}$$

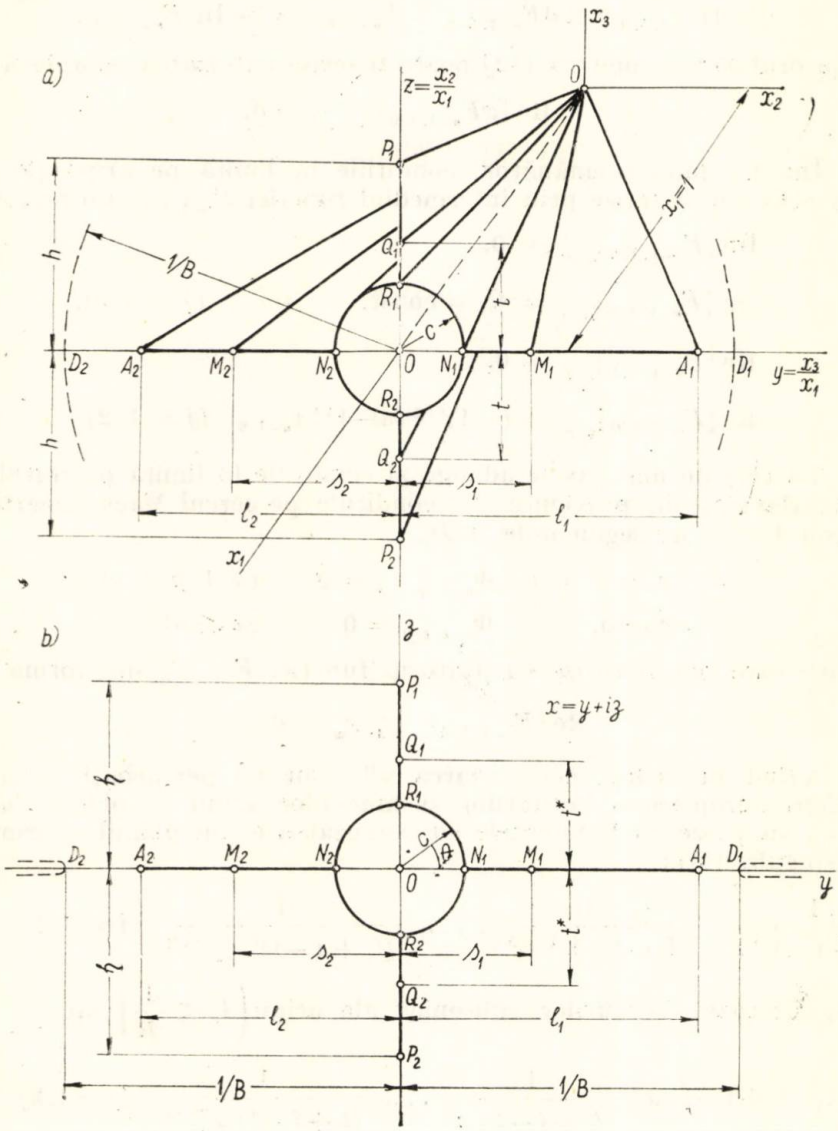


Fig. 2

această condiție poate fi scrisă, derivînd de $(n-1)$ ori în raport cu x_1, sub forma

$$y\,\Phi_{n-1,1,0} + z\,\Phi_{n-1,0,1} = 0. \tag{12}$$

Considerînd în cadrul ipotezei perturbaţiilor mici că dimensiunile transversale ale fuzelajului sînt reduse faţă de cele ale conului Mach ($B^2c^2 \ll 1$ şi deci pe fuzelaj $\mathcal{Y} \approx y$, $\mathfrak{z} \approx z$), din relaţiile de compatibilitate (8) se poate deduce relaţia

$$-\mathrm{d}F_{n-1,1,0} = \mathrm{i}\,\mathrm{d}F_{n-1,0,1}, \quad \Phi_{n-1,0,1} = -\operatorname{Im} F_{n-1,1,0}, \tag{13}$$

cu ajutorul căreia condiţia [12] poate fi scrisă sub forma complexă

$$\operatorname{Re}\left[xF_{n-1,1,0}\right]_{x=c\,e^{i\theta}} = 0. \tag{14}$$

Într-un mod asemănător, condiţiile la limită pe aripă (9) şi pe placă (10) pot fi scrise prin intermediul funcţiei $F_{n-1,1,0}$ sub forma

$$\operatorname{Im}\left[F_{n-1,1,0}\right]_{N_jM_j} = 0, \tag{15a}$$

$$\operatorname{Im}\left[F_{n-1,1,0}\right]_{M_jA_j} = C_j = \text{const.} \qquad (j = 1,2), \tag{15b}$$

$$\operatorname{Re}\left[F_{n-1,1,0}\right]_{R_jQ_j} = 0, \tag{15c}$$

$$\operatorname{Re}\left[F_{n-1,1,0}\right]_{Q_jP_j} = (-1)^{j+2}(n-1)!\,v_{n-1,0} \quad (j = 1,2). \tag{15d}$$

La cele de mai sus se adaugă şi condiţiile la limită pe restul axei $O\mathcal{Y}$ în afara aripii, provenite din condiţiile pe cercul Mach neperturbat şi respectiv de pe segmentele A_jD_j,

$$u = v = w = 0, \quad \Phi_{n-k-p,k,p} = 0 \qquad (k+p \leqslant n), \tag{16a}$$

$$u = v = 0, \qquad \Phi_{n-k,k,0} = 0 \qquad (k \leqslant n), \tag{16b}$$

condiţii care pot fi scrise cu ajutorul funcţiei $F_{n-1,1,0}$ sub forma

$$\operatorname{Re}\left[F_{n-1,1,0}\right]_{-\infty A_1 A_1\infty} = 0. \tag{17}$$

Avînd în vedere comportarea vitezelor de perturbaţie u şi v în imediata apropiere a bordurilor şi muchiilor aripii şi plăcii, funcţia $F_{n-1,1,0}$ va prezenta în punctele corespunzătoare din planul x următoarele singularităţi:

$$\frac{1}{\sqrt{l_j + (-1)^j x}}, \quad \frac{1}{[l_j + (-1)^j x]^{3/2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{[l_j + (-1)^j x]^{n-1/2}} \quad (j = 1,2) \tag{18}$$

corespunzătoare bordurilor subsonice ale aripii $\left(l_j < \dfrac{1}{B}\right)$ sau

$$\ln\left[l_j + (-1)^j x\right], \quad \frac{1}{l_j + (-1)^j x}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{[l_j + (-1)^j x]^{n-1}} \quad (j = 1,2) \tag{19}$$

corespunzătoare bordurilor supersonice ale aripii $\left(l_j > \dfrac{1}{B}\right)$,

$$\frac{1}{\sqrt{x \pm \mathrm{i}\eta}}, \quad \frac{1}{[x \pm \mathrm{i}\eta]^{3/2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{[x \pm \mathrm{i}\eta]^{n-1/2}} \tag{20}$$

corespunzătoare bordurilor plăcii, şi

$$\ln [s_j + (-1)^j x], \frac{1}{s_j + (-1)^j x}, \ldots, \frac{1}{[s_j + (-1)^j x]^{n-1}} \quad (j = 1,2), \tag{21a}$$

$$\mathrm{n}\,[x \pm \mathrm{i}t^*], \frac{1}{x \pm \mathrm{i}t^*}, \ldots, \frac{1}{[x \pm \mathrm{i}t^*]^{n-1}} \tag{21b}$$

corespunzătoare muchiilor aripii şi plăcii, unde am notat

$$\beta = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2 h^2}}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{1 - B^2 t^2}}. \tag{22}$$

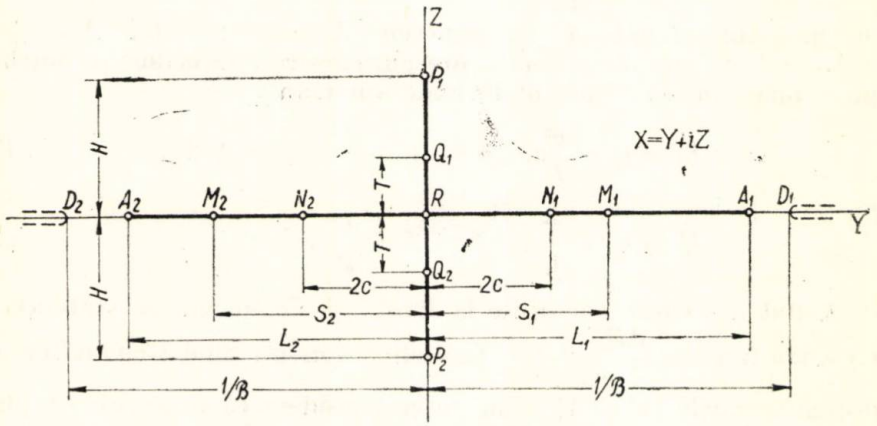


Fig. 3.

Să considerăm acum un potenţial complex fictiv definit sub forma

$$F_{n-1,1,0} = \frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}x}, \quad F_{n-1,0,0} = \int F_{n-1,1,0}\,\mathrm{d}x, \tag{23}$$

a cărei viteză complexă în planul auxiliar X definit prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x} \tag{24}$$

este dată de relaţia

$$\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\right) F_{n-1,1,0}. \tag{25}$$

În acest nou plan (fig. 3), condiţiile la limită de mai sus vor putea fi scrise sub forma

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_2 M_1} = 0, \tag{26a}$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_j A_j} = \frac{C_j}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \quad (j = 1,2), \tag{26b}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}\right]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = 0, \tag{26c}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}\right]_{Q_2 Q_1} = 0, \tag{26d}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}\right]_{Q_j P_j} = (-1)^{j+1}\frac{(n-1)!\, v_{n-1,0}}{2}\left(1+\frac{Z}{\sqrt{Z^2+4c^2}}\right) \quad (j=1,2). \tag{26e}$$

În plus, funcția $\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}$ va prezenta singularitățile (18)—(21) transpuse însă în planul X în punctele $X=(-1)^{j+1}L_j$, $X=\pm \mathrm{i}H$, $X=(-1)^{j+1}S_j$ și $X=\pm \mathrm{i}T$ corespunzătoare bordurilor și muchiilor aripii și plăcii în acest nou plan, unde am notat

$$L_j = l_j + \frac{c^2}{l_j}, \quad S_j = s_j + \frac{c^2}{s_j} \quad (j=1,2), \tag{27a}$$

$$H = \eta - \frac{c^2}{\eta}, \quad T = t^* - \frac{c^2}{t^*}. \tag{27b}$$

Avînd în vedere condițiile la limită și singularitățile stabilite mai sus pentru funcția $\frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}$ și procedînd într-un mod asemănător celui folosit în lucrările [1]—[3], vom putea considera că mișcarea din planul X corespunde, prin intermediul unei transformări analoge cu (6a), unei mișcări conice de ordin n în jurul unei aripi cruciforme fictive avînd bordurile de atac ale aripii și plăcii situate în punctele A_j și P_j din planul X, fiind prevăzută cu cîte două muchii pe aripă și pe placă în punctele M_j și Q_j și prezentînd în plus condiții la limită de forma (26b) și (26e) pe porțiunile $M_j A_j$ și $Q_j P_j$.

Notînd prin $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ funcția complexă din mișcarea în jurul acestei aripi cruciforme fictive, corespunzătoare funcției $F_{n-1,1,0}$ din mișcarea în jurul sistemului considerat, vom putea scrie

$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \frac{\mathrm{d}F_{n-1,0,0}}{\mathrm{d}X}, \tag{28}$$

din care se deduce relația

$$F_{n-1,1,0} = \left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)F^{(a)}_{n-1,1,0}. \tag{29}$$

Prin analogie cu mișcarea în jurul unei aripi cruciforme izolate, funcțiile $F^{(a)}_{n-k-p,k,p}$ din mișcarea conică de ordin n în jurul aripii cruciforme fictive definită mai sus sînt legate între ele prin relații de compatibilitate analoge cu (8), adică

$$\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0} = (-X)^k\left(\frac{\mathrm{i}X}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}}\right)^p \mathrm{d}F^{(a)}_{n-k-p,k,p}, \quad \left(\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}\right). \tag{30}$$

Deoarece funcția $F^{(a)}_{n-1.1.0}$ este mai dificil de determinat direct, datorită condițiilor la limită pe care le prezintă, în cele ce urmează vom urmări să determinăm funcția $F^{(a)}_{n.0.0}$.

În acest scop, să considerăm planul complex χ definit prin transformarea conformă

$$\chi^2 = X^2 + H^2 \qquad (\chi = \lambda + i\nu), \tag{31}$$

transformare față de care vom considera că funcția $F^{(a)}_{n.0.0}$ se comportă ca un potențial complex.

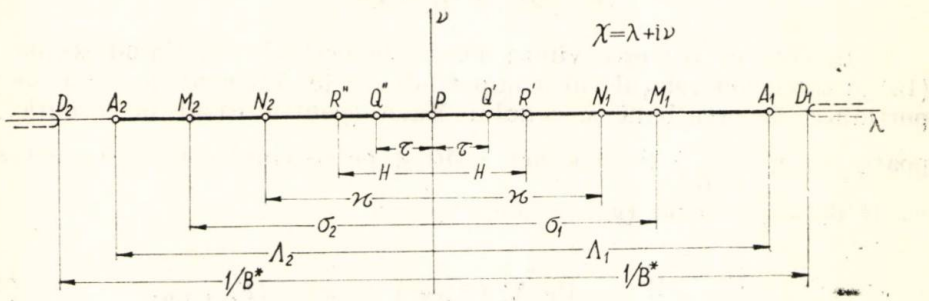


Fig. 4

Ținînd seama de singularitățile corespunzătoare muchiilor aripii și plăcii și aplicînd relațiile de compatibilitate (30) pentru $k = 1$, $p = 0$, condițiile la limită (26) vor putea fi scrise în planul χ cu ajutorul funcției $F^{(a)}_{n.0.0}$ sub forma

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n.0.0}]_{Q''PQ'} = \frac{K_0}{2} + \frac{(n-1)!\,v_{n-1.0}}{2}\frac{4c^2}{\sqrt{\chi^2 - \lambda^2}}, \tag{32a}$$

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n.0.0}]_{Q'M_1,\,Q''M_2} = 0, \tag{32b}$$

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n.0.0}]_{M_jA_j} = (-1)^j\left[\frac{K_j}{2} + \frac{C_j}{2}\frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2 - \varkappa^2}}\right] \qquad (j = 1,2), \tag{32c}$$

$$\operatorname{Re}[F^{(a)}_{n.0.0}]_{-\infty A_2,\,A_1\infty} = 0, \tag{32d}$$

condiții care se referă la configurația planului χ din figura 4, în care am introdus notațiile

$$\Lambda_j = \sqrt{L_j^2 + H^2}, \quad \sigma_j = \sqrt{S_j^2 + H^2}, \quad \frac{1}{B^*} = \frac{\sqrt{1 + \mathcal{B}^2H^2}}{\mathcal{B}}, \tag{33a}$$

$$\tau = \sqrt{H^2 - T^2}, \quad \varkappa = \sqrt{4c^2 + H^2}. \tag{33b}$$

În continuare, funcția $F^{(a)}_{n.0.0}$, definită prin condițiile la limită de mai sus și prezentînd în punctele corespunzătoare bordurilor de atac și muchiilor aripii și plăcii singularitățile (18)—(21) transpuse însă în planul χ, va fi determinată utilizînd metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli [4]—[6].

În acest mod, problema mişcării conice de ordin n, în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj a fost redusă la studiul unei mişcări conice de acelaşi ordin n în jurul aripii cruciforme izolate fictive, avînd incidenţa variabilă după funcţii omogene pe porţiunile M_jA_j şi Q_jP_j.

Odată determinată funcţia $F^{(a)}_{n,0,0}$, funcţia $F_{n-1,1,0}$ din mişcarea în jurul sistemului considerat va fi dată de următoarea relaţie care se deduce din (29) şi (30):

$$F_{n-1,1,0} = -\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int \frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{X}. \tag{34}$$

În ceea ce priveşte viteza axială de perturbaţie, ţinînd seama de (1a) şi integrînd relaţiile de compatibilitate (8) între un punct x_0 de pe porţiunea neperturbată a conului Mach (pentru cazul în discuţie se poate lua $x_0 = \frac{1}{B}$) şi un punct x situat pe sistemul considerat, aceasta va fi dată pe aripă ($y = 0$) de expresia

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,u = \mathrm{Re}\sum_{q=0}^{n-1} C^q_{n-1} y^q \int_{x_0}^{x} (-x)^{1-q}\,\mathrm{d}F_{n-1,1,0}. \tag{35}$$

În mod asemănător, viteza axială de perturbaţie va fi dată de placă ($z = 0$) de relaţia

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,u = \mathrm{Re}\sum_{r=0}^{n-1} C^r_{n-1} z^r i^r \int_{x_0}^{x} (-x)^{1-r}\left(\sqrt{1-B^2x^2}\right)^r \mathrm{d}F_{n-1,1,0}, \tag{36}$$

iar pe fuselaj de relaţia

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,u = \mathrm{Re}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{q} C^q_{n-1} C^r_q y^q z^r i^r \int_{x_0}^{x} (-x)^{1-q}\left(\sqrt{1-B^2x^2}\right)^r \mathrm{d}F_{n-1,1,0}. \tag{37}$$

3. DETERMINAREA FUNCŢIEI $F^{(a)}_{n,0,0}$

În cele ce urmează vom stabili expresiile funcţiei pentru diferitele cazuri ale sistemului aripă cruciformă-fuzelaj.

3.1. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBŢIRE LA CARE BORDURILE ARIPII ŞI PLĂCII SÎNT SUBSONICE

Avînd în vedere condiţiile la limită şi singularităţile stabilite mai sus pentru acest caz şi observînd că condiţiile (32a) şi (32c) corespund în sens hidrodinamic unor distribuţii continue de muchii elementare pe porţiunile $Q''PQ'$ şi respectiv M_jA_j din planul χ (fig. 4), vom putea

deduce pentru funcţia $F^{(a)}_{n,0,0}$, utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [4]—[6], expresia

$$F^{(a)}_{n,0,0} = \frac{A_0 + A_1\chi + \ldots + A_{4n-2}\chi^{4n-2}}{\chi^{2n-1}(\Lambda_1-\chi)^{n-1}(\Lambda_2+\chi)^{n-1}\sqrt{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\chi)}} -$$

$$-\left(\frac{K_1}{\pi} + \frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_1^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\sigma_1)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\sigma_1-\chi)}} +$$

$$+\frac{\sqrt{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\chi)}}{(\sigma_1-\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{1,p}\chi^p -$$

$$-\left(\frac{K_2}{\pi} + \frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_2^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\sigma_2)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\sigma_2+\chi)}} +$$

$$+\frac{\sqrt{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\chi)}}{(\sigma_2+\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{2,p}\chi^p -$$

$$-\frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{\Lambda_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\left(\frac{K_0}{\pi} + \frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\tau^2}}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\tau)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\tau-\chi)}} -\right.$$

$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\tau)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\tau+\chi)}}\right] + \frac{\sqrt{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\chi)}}{(\tau^2-\chi^2)^{n-1}}\sum_{p=0}^{2n-3}K_{0,p}\chi^p +$$

$$+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\eta^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta-\chi)}} -$$

$$-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\Bigg]\mathrm{d}\eta. \qquad (38)$$

Introducînd această relaţie în (34) şi apoi pe aceasta în (35), (36) şi (37), se vor obţine expresiile vitezei axiale de perturbaţie pe aripă, pe placă şi pe fuzelaj.

Constantele care intervin în expresia (38) se vor determina utilizînd relaţiile de compatibilitate (30) pentru $q = 1$, $r = 0$ care vor trebui să fie integrate pe un semicerc de rază foarte mică în jurul fiecăreia dintre

muchiile aripii şi plăcii, precum şi condiţii de forma

$$\operatorname{Im}\int_{(-1)^{j+1}\frac{1}{B}}^{y_j'}(-x)^{-q}\sqrt{1-B^2x^2}\,\mathrm{d}\left[-\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{x+\dfrac{c^2}{x}}\right]=$$

$$=-\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\,w^{(j)}_{n-q-1,q}\qquad (j=1,2), \tag{39a}$$

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_j}(-x)^{-q}\sqrt{1-B^2x^2}\,\mathrm{d}\left[-\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{x+\dfrac{c^2}{x^2}}\right]\right.=$$

$$=(-1)^{j+1}\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\,w^{(j)}_{n-q-1,q}\quad (j=1,2), \tag{39b}$$

$$\operatorname{Re}\int_{i\infty}^{iz'}\left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\right)^r\mathrm{d}\left[-\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{x+\dfrac{c^2}{x}}\right]=\frac{(n-1)!}{C^r_{n-1}}\,v_{n-1-r,r}, \tag{39c}$$

$$\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma_0}\left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\right)^r\mathrm{d}\left[-\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{x+\dfrac{c^2}{x}}\right]\right.=\frac{(n-1)!}{C^r_{n-1}}\,v_{n-1-r,r}, \tag{39d}$$

care se deduc prin integrarea relaţiilor de compatibilitate (8), unde $\mathcal{Y}_j$ este abscisa unui punct de pe aripă situat în apropierea bordului A_j, Z' este cota unui punct de pe placă situat în apropierea bordului P_1, iar γ_j şi γ_0 sînt semicercuri de rază foarte mică în jurul muchiilor M_j şi, respectiv, Q_1.

3.2. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBŢIRE LA CARE BORDURILE ARIPII SÎNT SUPERSONICE, IAR BORDURILE PLĂCII SÎNT SUBSONICE

Considerînd din nou sistemul fuzelaj-aripă cruciformă subţire definit prin condiţiile (4), în cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice $\left(l_j>\dfrac{1}{B}\right)$, iar bordurile plăcii subsonice $\left(h<\dfrac{1}{B}\right)$, condiţiile la limită din planul χ (fig. 5) vor putea fi scrise, procedînd ca mai sus, sub forma

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n,0,0}]_{Q''PQ'}=\frac{K_0}{2}+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{2}\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}, \tag{40a}$$

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n,0,0}]_{Q'M_1,Q''M_2}=0, \tag{40b}$$

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{n,0,0}]_{M_jD_j}=(-1)^j\left[\frac{K_j}{2}+\frac{C_j}{2}\frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right]\qquad (j=1,2), \tag{40c}$$

$$\mathrm{Re}[F^{(a)}_{n,0,0}]_{D_jA_j} = \frac{G_j}{2} + \frac{Q_j}{2}\frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}} \qquad (j = 1,2), \tag{40d}$$

$$\mathrm{Re}[F^{(a)}_{n,0,0}]_{-\infty A_2,\ A_1\infty} = 0. \tag{40e}$$

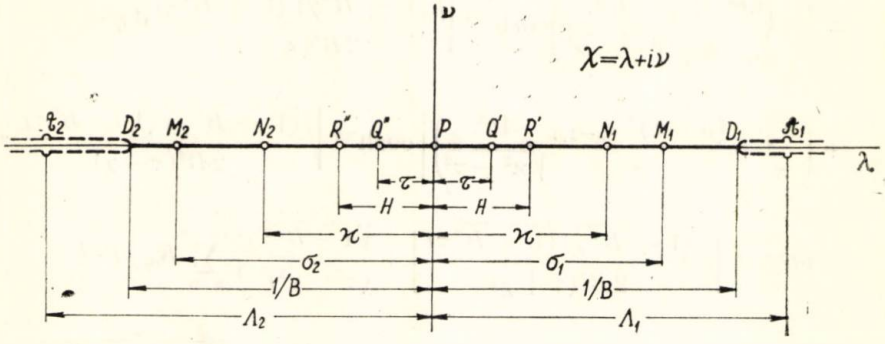


Fig. 5

Urmînd aceeași cale de rezolvare, vom putea obține pentru funcția $F^{(a)}_{n,0,0}$ expresia

$$F^{(a)}_{n,0,0} = \frac{A_0 + A_1\chi + \ldots + A_{4(n-1)}\chi^{4(n-1)}}{\chi^{2n-1}(\Lambda_1-\chi)^{n-1}(\Lambda_2+\chi)^{n-1}}\sqrt{1-B^{*2}\chi^2} +$$

$$+\left(\frac{G_1}{\pi} + \frac{Q_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\Lambda_1^2-\varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\Lambda_1)}{2B^*(\Lambda_1-\chi)}} +$$

$$+\left(\frac{G_2}{\pi} + \frac{Q_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\Lambda_2^2-\varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\Lambda_2)}{2B^*(\Lambda_2+\chi)}} -$$

$$-\frac{Q_1}{\pi}\int_{1/B^*}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{Q_2}{\pi}\int_{1/B^*}^{\Lambda_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\left(\frac{K_1}{\pi} + \frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_1^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\sigma_1)}{2B^*(\sigma_1-\chi)}} +$$

$$+\frac{\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}}{(\sigma_1-\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{1,p}\chi^p -$$

$$-\left(\frac{K_2}{\pi} + \frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_2^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\sigma_2)}{2B^*(\sigma_2+\chi)}} +$$

$$+\frac{\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}}{(\sigma_2+\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{2,p}\chi^p -$$

$$-\frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\left(\frac{K_0}{\pi}+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\tau^2}}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\tau)}{2B^*(\tau-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\tau)}{2B^*(\tau+\chi)}}\right]+\frac{\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}}{(\tau^2-\chi^2)^{n-1}}\sum_{p=0}^{2n-3}K_{0,p}\chi^p +$$

$$+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\eta^2}}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\right]\mathrm{d}\eta. \tag{41}$$

Constantele care apar în expresia de mai sus se determină în același mod ca în cazul precedent, cu singura deosebire că în locul condițiilor (39a) se vor utiliza condiții de forma

$$\mathrm{Im}\int_{\sigma_j}(-x)^{-q}\sqrt{1-B^2x^2}\,\mathrm{d}\left[-\left(1-\frac{c^2}{x^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}F^{(a)}_{n,0,0}}{x+\frac{c^2}{x}}\right]=$$

$$=(-1)^j\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}w^{(j)}_{n-q-1,q}\qquad(j=1,2), \tag{42}$$

unde σ_j sînt semicercuri de rază foarte mică în jurul bordurilor A_j.

3.3. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBȚIRE LA CARE UNUL DIN BORDURILE ARIPII ESTE SUPERSONIC, CELĂLALT BORD AL ARIPII ȘI BORDURILE PLĂCII FIIND SUBSONICE

Considerînd din nou sistemul fuzelaj-aripă cruciformă subțire definit prin condițiile (4), la care bordul A_1 al aripii este supersonic $\left(l_1>\frac{1}{B}\right)$, celălalte borduri fiind subsonice $\left(l_2<\frac{1}{B},\ h<\frac{1}{B}\right)$, condițiile

la limită din planul χ (fig. 6) vor fi cele date de relaţiile (32a,b), (32c) pentru $j = 2$, (40,c,d) pentru $j = 1$ şi (40e).

Procedînd în modul indicat mai sus, va rezulta pentru funcţia $F^{(a)}_{n,0,0}$, în acest caz, expresia

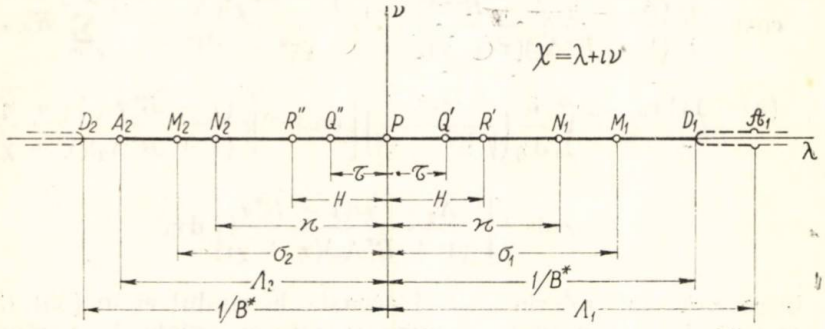


Fig. 6

$$F^{(a)}_{n,0,0} = \frac{A_0 + A_1\chi + \ldots + A_{4n-3}\chi^{4n-3}}{\chi^{2n-1}(\Lambda_1 - \chi)^{n-1}(\Lambda_2 + \chi)^{n-1}}\sqrt{\frac{1 - B^*\chi}{\Lambda_2 + \chi}} +$$

$$+ \left(\frac{G_1}{\pi} + \frac{Q_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\Lambda_1^2 - \varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \Lambda_1)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\Lambda_1 - \chi)}} -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi}\int_{\Lambda_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \eta)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \left(\frac{K_1}{\pi} + \frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_1^3 - \varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \sigma_1)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\sigma_1 - \chi)}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \chi)}}{(\sigma_1 - \chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-1} K_{1,p}\,\chi^p -$$

$$- \left(\frac{K_2}{\pi} + \frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + \chi)(1 + B^*\sigma_2)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\sigma_2 + \chi)}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \chi)}}{(\sigma_2 + \chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2} K_{2,p}\,\chi^p -$$

$$- \frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \eta)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + \chi)(1 + B^*\eta)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\eta + \chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\left(\frac{K_0}{\pi}+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\,\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\tau^2}}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(\Lambda_2+\tau)}{(1+B^*\Lambda_2)(\tau-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(1+B^*\tau)}{(1+B^*\Lambda_2)(\tau+\chi)}}\right]+\frac{\sqrt{(1-B^*\chi)(\Lambda_2+\chi)}}{(\tau^2-\chi^2)^{n-1}}\sum_{p=0}^{2n-3}K_{0,p}\chi^p+$$

$$+\frac{(n-1)!\,v_{n-1,0}}{\pi}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\eta^2}}\right)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(1+B^*\Lambda_2)(\eta-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(1+B^*\eta)}{(1+B^*\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\right]\mathrm{d}\eta, \tag{43}$$

care, introdusă în relaţia (34) şi aceasta la rîndul ei în (35), (36) şi (37), conduce la determinarea expresiei vitezei axiale de perturbaţie pe aripă, pe placă şi pe fuzelaj.

În ceea ce priveşte constantele care apar în expresia de mai sus, acestea se determină din condiţiile menţionate mai sus.

3.4. CAZUL SISTEMULUI ARIPĂ CRUCIFORMĂ-FUZELAJ LA CARE ARIPA ESTE DE GROSIME SIMETRICĂ

Să considerăm acum sistemul aripă cruciformă-fuzelaj definit prin condiţiile (5), la care aripa este de grosime simetrică.

În cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice $\left(l_j>\frac{1}{B}\right)$, iar bordurile plăcii sînt subsonice $\left(h<\frac{1}{B}\right)$, funcţia $F^{(a)}_{n0,0}$ va prezenta aceleaşi condiţii la limită (40) şi deci şi expresia (41) ca şi în cazul sistemului fuzelaj-aripă cruciformă subţire avînd aceeaşi poziţie a bordurilor faţă de conul Mach.

În cazul cînd bordurile aripii cît şi cele ale plăcii sînt subsonice $\left(l_j<\frac{1}{B},\ h<\frac{1}{B}\right)$, procedînd într-un mod asemănător celui folosit în cazurile precedente, se va obţine pentru funcţia $F^{(a)}_{n,0,0}$ expresia

$$F^{(a)}_{n,0,0}=\left(\frac{G_1^*}{\pi}+\frac{Q_1^*}{\pi}\,\frac{4c^2}{\sqrt{\Lambda_1^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\Lambda_1)}{2B^*(\Lambda_1-\chi)}}+$$

$$+\left(\frac{G_2^*}{\pi}+\frac{Q_2^*}{\pi}\,\frac{4c^2}{\sqrt{\Lambda_2^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\Lambda_2)}{2B^*(\Lambda_2+\chi)}}+$$

$$+\frac{A_0+A_1\chi+\ldots+A_{4(n-1)}\chi^{4(n-1)}}{\chi^{2n-1}\,(\Lambda_1-\chi)^{n-1}(\Lambda_2-\chi)^{n-1}}\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}+$$

$$+\frac{Q_1^*}{\pi}\int_{\Lambda_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta+$$

$$+\frac{Q_2^*}{\pi}\int_{\Lambda_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta-$$

$$-\left(\frac{K_1}{\pi}+\frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_1^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\sigma_1)}{2B^*(\sigma_1-\chi)}}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}}{(\sigma_1-\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{1,p}\,\chi^p-$$

$$-\left(\frac{K_2}{\pi}+\frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_2^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\sigma_2)}{2B^*(\sigma_2+\chi)}}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-B^{*2}\chi^2}}{(\sigma_2+\chi)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}K_{2,p}\,\chi^p-$$

$$-\frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*\eta(-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta-$$

$$-\frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta. \qquad (44)$$

Constantele care intervin în această expresie se determină în modul indicat la punctul (3.2).

4. MIŞCAREA CONICĂ DE ORDIN N = 2 ÎN JURUL SISTEMULUI AMPENAJ-FUZELA

În cele ce urmează, pentru a exemplifica metoda de rezolvare stabilită mai sus vom trata mişcarea conică de ordin $n = 2$ în jurul sistemului ampenaj-fuzelaj, care intervine în studiul mişcărilor de rotaţie sau oscilatorii ale sistemelor considerate.

4.1. MIŞCAREA CONICĂ DE ORDIN N = 2 ÎN JURUL SISTEMULUI AMPENAJ-FUZELAJ LA CARE INCIDENŢA PLĂCII ESTE DISTRIBUITĂ SIMETRIC, IAR INCIDENŢA ARIPII ESTE NULĂ

Să considerăm, ca exemplu de tratare, sistemul ampenaj-fuzelaj din figura 1, la care placa împreună cu fuzelajul au aceeaşi incidenţă laterală $\beta = \beta_{10}x_1$, iar aripa are incidenţa nulă, sistem definit prin condiţiile

$$[(v - v_{10}x_1)\cos\theta + w\sin\theta]_{fuzelaj} = 0 \qquad (v_{10} = -\beta_{10}U_\infty), \qquad (45a)$$

$$[v]_{R_jP_j} = v_{10}x_1 \quad (j = 1,2), \qquad [w]_{N_1A_1} = 0. \qquad (45b)$$

După cum am arătat în § 1, datorită simetriei plăcii, problema se reduce într-un astfel de caz la studiul unei mișcări de același ordin $n = 2$ în jurul sistemului aripă delta-fuzelaj, care a fost tratată în lucrările anterioare [2], [3].

Utilizînd în acest sens planul complex x^* (fig. 7) definit prin relațiile

$$x^* = \vartheta^* + iy^*, \tag{46a}$$

$$\vartheta^* = \frac{z}{1 - B^2 y^2}, \; y^* = -\frac{y\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 y^2}, \tag{46b}$$

și aplicînd rezultatele obținute în lucrările menționate, se vor putea deduce pentru viteza axială de perturbație pe placă și pe fuzelaj următoarele expresii :

În cazul bordurilor plăcii subsonice ($h < 1/B$)

$$u = x_1 \mathrm{Re}\mathcal{U}_1 = x_1 \mathrm{Re}\, \frac{A_0 + A_2\left(x^* + \dfrac{c^2}{x^*}\right)^2}{\sqrt{h^2 - x^{*2}}\sqrt{1 - \dfrac{c^4}{h^2 x^{*2}}}}, \tag{47}$$

în care constantele A_0 și A_2 se determină din condițiile

$$\mathrm{Im}\int_{z^*}^{1/B} \sqrt{1 - B^2 x^{*2}}\, \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^{*2}}\, \mathrm{d}x^* = v_{10}, \tag{48a}$$

$$\mathrm{Im}\int_{z^*}^{1/B} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^{*2}}}{x^*}\, \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^{*2}}\, \mathrm{d}x^2 = 0, \tag{48b}$$

unde z^* este cota unui punct situat pe placă ; pentru valorile lui $\dfrac{c}{h}$ nu prea mari $\left(\dfrac{c}{h} \leqslant 0{,}6\right)$ și concomitent pentru valori ale lui Bc destul de mici conform ipotezei admise ($Bc \leqslant 0{,}4$), constantele menționate vor fi de următoarele relații :

$$A_0 = -\frac{2h^2(1 - B^2h^2)\, v_{10}}{(1 - 2B^2h^2)\, E(k) + B^2h^2 K(k)}, \tag{49a}$$

$$A_2 = \frac{(1 - B^2h^2)\, v_{10}}{(1 - 2B^2h^2)\, E(k) + B^2h^2K(k)} \quad (k = \sqrt{1 - B^2h^2}). \tag{49b}$$

În cazul bordurilor plăcii supersonice ($h > 1/B$)

$$u = x_1 \mathrm{Re}\mathcal{U}_1 = x_1 \mathrm{Re}\left[(Q_{20} + Q_{21}X^*)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^* - X^*)}} + \right.$$

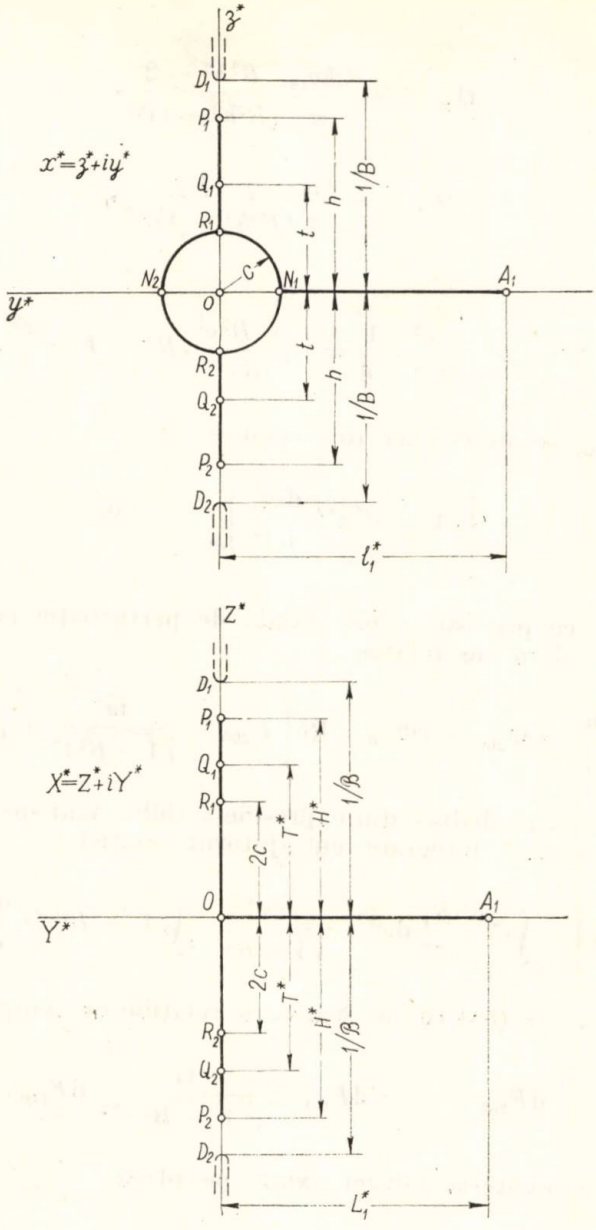


Fig. 7

$$+ (Q_{20} - Q_{21}X^*)\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X^*)(1+\mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^*+X^*)}} +$$

$$+ Q_{21}\sqrt{X^{*2}-4c^2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^{*2})(H^{*2}-4c^2)}{(H^{*2}-X^{*2})(1-4\mathcal{B}^2c^2)}} + D_{20}\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^{*2}}\Big], \quad (50)$$

în care

$$Q_{20} = -\frac{2hv_{10}}{\pi}\frac{B^2h^2-2}{(B^2h^2-1)^{3/2}}, \tag{51a}$$

$$Q_{21} = -\frac{v_{10}}{\pi}\frac{1}{(B^2h^2-1)^{3/2}}, \tag{51b}$$

și în care

$$X^* = x^* + \frac{c^2}{x^*}, \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1+B^2c^2}{B}, H^* = h + \frac{c^2}{h}. \tag{52}$$

Constanta D_{20} se determină din condiția

$$\left[\sqrt{1-B^2x^{*2}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^*}\right]_{x^*=\frac{1}{B}} = 0. \tag{53}$$

În ceea ce privește viteza axială de perturbație pe porțiunea de aripă $M_j A_j$, dată de relația

$$\frac{u}{x_1} = \Phi_{200} + y\Phi_{110} = \mathrm{Re}\left[F_{200} + \frac{\mathrm{i}x^*}{\sqrt{1-B^2x^{*2}}}F_{110}\right], \tag{54}$$

aceasta se va putea deduce din expresiile stabilite mai sus pentru funcția $\mathcal{U}_1$ printr-o simplă integrare cu ajutorul relației

$$\frac{u}{x_1} = \mathrm{Re}\left[-\int x^*\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^{*2}}\mathrm{d}x^* - \frac{x^*}{\sqrt{1-B^2x^{*2}}}\int\sqrt{1-B^2x^{*2}}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^{*2}}\mathrm{d}x^*\right], \tag{55}$$

care se obține din (54) ținînd seama de relațiile de compatibilitate

$$\mathrm{d}F_{200} = -x^*\mathrm{d}F_{101} = \frac{\mathrm{i}x^*}{\sqrt{1-B^2x^{*2}}}\mathrm{d}F_{110}, \tag{56}$$

precum și de expresia vitezei axiale pe placă

$$\frac{u}{x_1} = \Phi_{200} + z\Phi_{101} = \mathrm{Re}[F_{200} + x^*F_{101}] = \mathrm{Re}\mathcal{U}_1, \tag{57}$$

din care se deduce

$$F_{101} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^*}, F_{200} = -\int x^*\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^{*2}}\mathrm{d}x^*. \tag{58}$$

4.2. MIŞCAREA CONICĂ DE ORDIN N= 2 ÎN JURUL SISTEMULUI AMPENAJ-FUZELAJ, ARIPA ŞI FUZELAJUL AVÎND INCIDENŢĂ, IAR PLACA NEAVÎND INCIDENŢĂ

Să considerăm acum sistemul ampenaj-fuzelaj din figura 8, aripa avînd împreună cu fuzelajul incidenţa $\alpha = \alpha_{10}x_1$, iar placa neavînd incidenţă, sistem definit prin condiţiile

$$[v\cos\theta + (w - w_{10}x_1)\sin\theta]_{fuzelaj} = 0 \qquad (w_{10} = -\alpha_{10}U_\infty), \tag{59a}$$

$$[v]_{R_jP_j} = 0 \ (j = 1,2), \quad [w]_{N_1A_1} = w_{10}x_1 . \tag{59b}$$

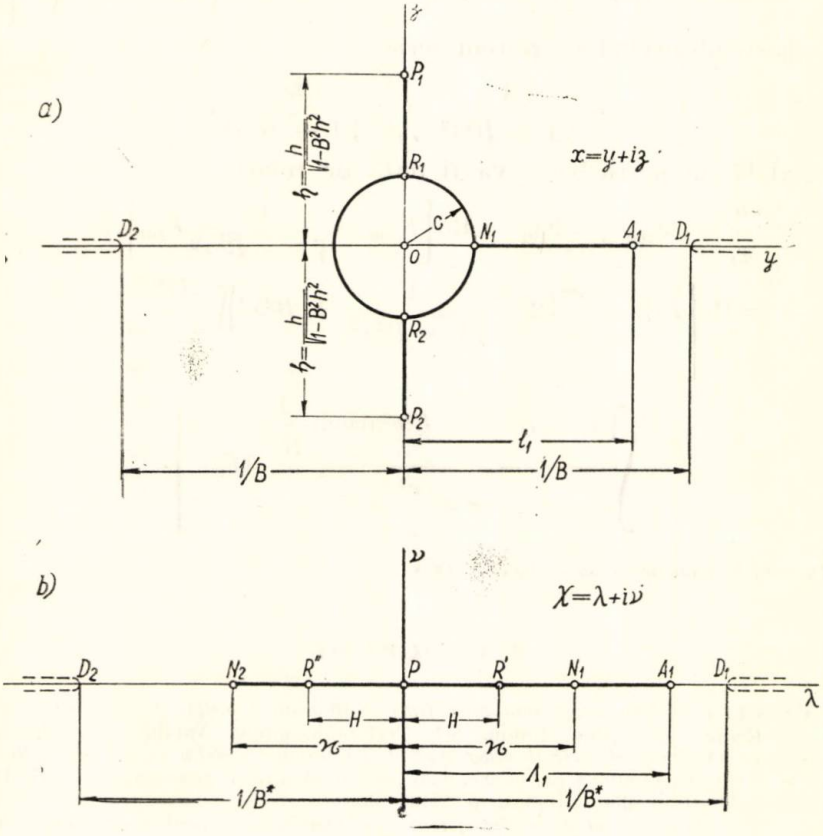


Fig. 8

Procedînd în mod asemănător celui folosit în § 1, vor rezulta următoarele condiţii la limită în planul χ, pentru cazul cînd bordul aripii este subsonic :

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{200}]_{N_2A_1} = 0, \tag{60a}$$

$$\operatorname{Re}[F^{(a)}_{200}]_{-\infty N_2A_1\infty} = 0. \tag{60b}$$

Observînd că în acest caz nu intervin decît singularităţile corespunzătoare bordurilor plăcii şi bordului A_1 al aripii, se va obţine pentru funcţia $F_{200}^{(a)}$, procedînd în modul indicat mai sus, expresia

$$F_{200}^{(a)} = \frac{A_0 + A_1\chi + A_2\chi^2 + A_3\chi^3 + A_4\chi^4}{\chi^3(\Lambda_1 - \chi)} \sqrt{\frac{H + \chi}{\Lambda_1 - \chi}}, \tag{61}$$

unde constantele $A_k (k = 0, 1, \ldots, 4)$ se determină în modul indicat în § 3.1.

În ceea ce priveşte viteza axială de perturbaţie, aceasta va fi dată pe aripă şi pe fuzelaj de relaţia

$$u = x_1 \mathrm{Re}[F_{200} + xF_{110}] = x_1 \mathrm{Re}[F_{200}^{(a)} + XF_{110}^{(a)}] = x_1 \mathrm{Re}\left[F_{200}^{(a)} - X\int \frac{\mathrm{d}F_{200}^{(a)}}{X}\right], \tag{62}$$

iar pe placă, observînd că putem scrie

$$z = \frac{\delta}{\sqrt{1 + B^2\delta^2}} = -\frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{1 - B^2x^2}}, \tag{63}$$

viteza axială de perturbaţie va fi dată de relaţia

$$\begin{aligned} \frac{u}{x_1} &= \Phi_{200} + z\Phi_{101} = \mathrm{Re}\left[F_{200} - \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{1 - B^2x^2}} F_{101}\right] = \\ &= \mathrm{Re}\left[F_{200}^{(a)} - \frac{c^2}{x}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - B^2x^2}} + B^2x^2\right)\int \frac{\mathrm{d}F_{200}^{(a)}}{x + \frac{c^2}{x}} - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{\sqrt{1 - B^2x^2} + B^2c^2 \mathrm{argch}\,\frac{1}{Bx}}{x + \frac{c^2}{x}} \mathrm{d}F_{200}^{(a)}\right]. \end{aligned} \tag{64}$$

Primită la redacţie la 25 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mateescu, *Cruciform wings and tails fitted with conical bodies in supersonic flow. I Conical flow*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée, *6* (1968).
2. E. Carafoli, D. Mateescu, *High order conical flow around a delta wing fitted with conical body*, Proceedings of the Seminar on Aeronautical Sciences (Nov. 27, Dec. 2, 1961, Bangalore, India), p. 249–69.
3. — *The wing-conical body interference in high order conical flow*, Revue de Méc. Appl. **7**, *3* (1962).
4. E. Carafoli, *High-speed aerodynamics*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
5. E. Carafoli, B. Horovitz, *Écoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale*, Rev. de Méc. Apl., **2**, *2* (1957).
6. E. Carafoli, D. Mateescu, *Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogenès en régime supersonique*, Rev. roum. sci. Techn.-Mécanique Appliquée, **10**, *2* (1965).
7. D. Mateescu, *Sverhzvukovoe obtekanie trapetsoidalnovo kryla s dvumia koniceskimi obtekateliami*, Revue de Méc,. Appl., **6**, *3* (1961).
8. — *Supersonic Flow around polygonal wings. Thin wings and wings of symmetrical thickness*, Rev. roum. techn.-Mécanique Appliquée, **11**, *3* (1966).

DEZLOCUIREA PLANĂ NEGRAVITAȚIONALĂ A DOUĂ FLUIDE NEMISCIBILE ÎNTR-UN MEDIU POROS (II). PROCEDEUL „FIVE-SPOT"

de ION SETEANU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

532.546

Se aplică metoda de calcul aproximativ a procesului de dezlocuire expusă în partea anterioară la cazul unei distribuții de sonde de injecție și de extracție care posedă o dublă periodicitate (procedeul „five-spot"). Se determină frontul de dezlocuire, distribuția nepermanentă a liniilor izosaturație, precum și liniile de curent ale procesului hidrodinamic nestaționar.

1. **Introducere.** Se prezintă aplicarea procedeului de calcul al dezlocuirii plane negravitaționale a două fluide nemiscibile indicat în prima parte a lucrării [1] la cazul dezlocuirii țițeiului de către apă prin o rețea plană dublu-periodică de sonde de injecție și extracție (procedeul „five-spot"). Studiul efectului perturbator al capilarității și determinarea zonei de variație rapidă a saturației care se aproximează în prezenta lucrare prin frontul de dezlocuire vor face obiectul unei lucrări ulterioare.

2. **Condițiile fizice ale problemei.** Se consideră un sistem hidromecanic alcătuit dintr-o rețea infinită de sonde punctiforme de injecție și de extracție. Sondele sînt așezate periodic după două direcții perpendiculare alese ca axe de coordonate, în șiruri echidistante. Acesta este un caz particular al rețelelor de sonde alternate, foarte des întîlnit în exploatarea petrolieră de recuperare secundară. Fiecare sondă productivă este înconjurată uniform de patru sonde de injecție și reciproc (fig. 1). Zăcămîntul petrolifer se consideră infinit și mărginit de pereți orizontali. Ca urmare a distribuției periodice, procesul hidrodinamic este același în fiecare domeniu pătratic care are la colțuri sonde de extracție și în centru o sondă de injecție. Simetria geometrică are drept consecință faptul că liniile AB, BC, CD, DA sînt linii de curent. Procesul hidrodinamic este complet determinat dacă se cunoaște evoluția para-

metrilor lui în celula $ABCD$; în celelalte celule, el se obţine prin oglindiri faţă de AB şi CD, respectiv prin simetrie faţă de B (fig. 1).

Se va studia, în consecinţă, procesul de dezlocuire a ţiţeiului de către apă într-un rezervor plan, omogen şi izotrop de forma unui pătrat de latură a, cu frontiere impermeabile şi care are sondele de injecţie şi

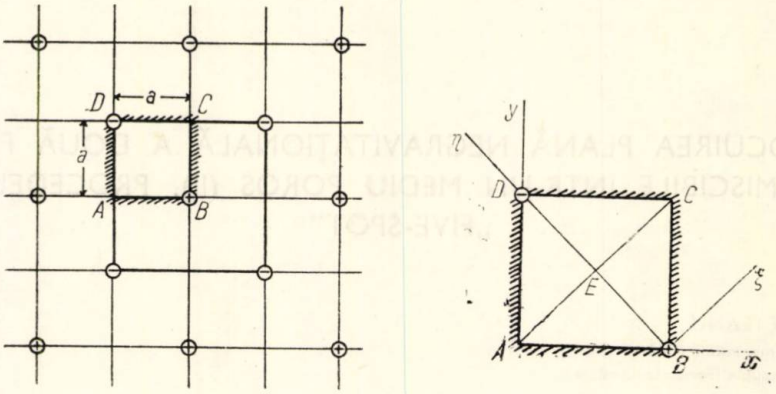


Fig. 1

de extracţie plasate în două vîrfuri opuse. Se consideră lungimea a aleasă ca unitate de măsură a lungimii, prin urmare în cele ce urmează latura pătratului este egală cu unitatea.

3. **Studiul procesului hidrodinamic în prima aproximaţie [1].** Pentru a găsi potenţialul complex al unei distribuţii de surse în planul Oxy aşezate într-o ordine determinată se folosesc proprietăţile funcţiilor eliptice [3], [4]. Funcţiile eliptice au zerourile şi polii repartizaţi periodic în planul complex, formînd celule fundamentale sub formă de paralelograme. Funcţiile eliptice dublu-periodice iau aceleaşi valori în punctele congruente. Se obţine potenţialul complex luînd logaritmul funcţiilor eliptice. Întrucît într-o celulă fundamentală numărul de zerouri ale funcţiei eliptice este egal cu numărul de poli, debitul total este nul.

Distribuţia de sonde din figura 1 se obţine folosind funcţia $\mathrm{cn}(u, k)$, care are zerourile în punctele $(2m + 1)K + 2inK'$ şi polii cu afixele $2mK + \mathrm{i}(2n + 1)K'$. Potenţialul complex este dat de

$$\pi(z) = 2\alpha \ln \mathrm{cn}\left(K\frac{z}{a},\ k\right).$$

Pentru a pune în corespondenţă dubla periodicitate a reţelei de surse care în cazul general se presupune avînd celula dreptunghică de laturi a şi b, cu latura orizontală a, ţinînd seamă de periodicitatea funcţiei eliptice este necesar să avem

$$\frac{K}{K'} = \frac{a}{b},$$

În vecinătatea sursei din $z = ib$ se poate scrie

$$z = ib + \varepsilon_1 e^{i\theta},$$

$$\frac{Kz}{a} = iK' + \varepsilon e^{i\theta}.$$

Se folosește în continuare expresia aproximativă

$$\mathrm{cn}(u + iK', k) = \frac{1}{iku} + \ldots,$$

cu ajutorul căreia se găsește expresia asimptotică a potențialului complex

$$\pi(z) = -2\alpha \ln(ik\varepsilon e^{i\theta}) = -i2\alpha\theta - 2\alpha \ln(k\varepsilon) - i\alpha\pi.$$

Deoarece în apropierea unei surse negative

$$\psi = \mathrm{Im}\,\pi(z) = -\frac{q}{2\pi}\theta + \ldots$$

se obține, prin compararea cu formula anterioară și alegînd convenabil constanta arbitrară, expresia definitivă a potențialului complex:

$$\pi(z) = \varphi + i\psi = \frac{q}{2\pi} \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}} \mathrm{cn}\frac{Kz}{a}\right). \tag{2}$$

Pentru ușurința raționamentului se va considera mai departe că debitul livrat de sonda de injecție este egal cu opt unități, adică fiecare sondă de extracție primește cîte două unități de debit din partea fiecărei sonde de injecție.

Pentru rețeaua pătratică, semiperioadele reală și imaginară sînt egale

$$K = K'.$$

Se obține [3]

$$K = K' = 1{,}854,$$

$$k = k' = 0{,}707.$$

În acest caz formulele de compunere se simplifică

$$\mathrm{cn}(\alpha + i\beta) = \frac{\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta - i\,\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{cn}^2\beta + \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2\alpha \cdot \mathrm{sn}^2\beta},$$

$$\mathrm{sn}(\alpha + i\beta) = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\beta + i\,\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}^2\beta + \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2\alpha \cdot \mathrm{sn}^2\beta}. \tag{3}$$

Cu ajutorul formulelor (3) se studiază comportarea generală a potențialului complex (2). Se verifică de exemplu că diagonala BD este o linie de curent. Pe ea

$$z = 1 - y + iy,$$

deci potențialul complex va fi

$$\pi(z) = \frac{4}{\pi} \ln \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{cn} K(1 - y + iy) \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \ln \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot k \cdot \frac{\operatorname{sn} Ky \cdot \operatorname{dn} Ky}{\operatorname{cn} Ky} \cdot \frac{i}{(i-1)k^2} \cdot \frac{\frac{1-i}{i} + \operatorname{sn}^2 Ky}{\frac{2}{i-1} + \operatorname{sn}^2 Ky} \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{\operatorname{sn} Ky \cdot \operatorname{dn} Ky}{\operatorname{cn} Ky} \right).$$

Pentru calculul funcțiilor eliptice s-a folosit lucrarea [5]. Procesul hidrodinamic prezintă simetrie față de diagonalele AC și BD, de aceea s-au efectuat calculele doar pentru sfertul de pătrat AEB. Valorile funcțiilor φ și ψ s-au calculat în nodurile unei rețele avînd coordonatele x, $y = 0\,;\ 0{,}1\,;\ 0{,}2\,;\ldots\,;\ 1{,}0$. Valorile calculate sînt concentrate în tabela 1

Tabela 1

Punctele interioare				Segmentul AB ($\psi=1$)		Segmentul AE ($\varphi=0$)	
x	y	φ	ψ	x	φ	x	ψ
0,2	0,1	−0,07662	0,91318	0,0	0,00000	0,0	1,00000
0,3	0,1	−0,18590	0,86756	0,1	−0,01085	0,1	0,95702
0,3	0,2	−0,10774	0,73817	0,2	−0,08763	0,2	0,82540
0,4	0,1	−0,33978	0,82226	0,3	−0,19766	0,3	0,61101
0,4	0,2	−0,25618	0,64762	0,4	−0,35378	0,4	0,32638
0,4	0,3	−0,14348	0,48361	0,5	−0,56117	0,5	0,00000
0,5	0,1	−0,54192	0,76855	0,6	−0,83154	Segmentul BE ($\psi = 0$)	
0,5	0,2	−0,44507	0,54712	0,7	−1,19121		
0,5	0,3	−0,31791	0,34848	0,8	−1,70802		
0,5	0,4	−0,16496	0,16887	0,9	−2,58669	y	φ
0,6	0,1	−0,80077	0,69966	1,0	$-\infty$	0,0	$-\infty$
0,6	0,2	−0,67566	0,42416			0,1	−2,15676
0,6	0,3	−0,51783	0,19342			0,2	−1,26090
0,7	0,1	−1,13398	0,59719			0,3	−0,73467
0,7	0,2	−0,94954	0,25583			0,4	−0,34176
0,8	0,1	−1,57741	0,41383			0,5	0,00000

Pentru a construi spectrul liniilor de curent trebuie explicitată funcția ψ. Întrucît

$$\pi(z) = \varphi + i\psi = i + \frac{4}{\pi} \ln \operatorname{cn} Kz$$

și se poate scrie dezvoltarea

$$\operatorname{cn}(Kx + iKy) = \frac{\operatorname{cn} Kx \cdot \operatorname{cn} Ky - i \operatorname{sn} Kx \cdot \operatorname{sn} Ky \cdot \operatorname{dn} Kx \cdot \operatorname{dn} Ky}{\operatorname{cn}^2 Ky + \frac{1}{2} \operatorname{sn}^2 Kx \cdot \operatorname{sn}^2 Ky} =$$

$$= e^{\frac{\pi\varphi}{4}} \left[\cos \frac{\pi}{4} (1 - \psi) - i \sin \frac{\pi}{4} (1 - \psi) \right],$$

se obține

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (1 - \psi) = \operatorname{tn} Kx \cdot \operatorname{tn} Ky \cdot \operatorname{dn} Kx \cdot \operatorname{dn} Ky. \tag{4}$$

S-au construit liniile de curent pentru $\psi = 0{,}1\,;\ 0{,}3\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}7\,;\ 0{,}9$. Ele sînt reprezentate grafic în figura 2. Este foarte comod ca fiecare punct al liniei de curent date să fie determinat printr-un singur para-

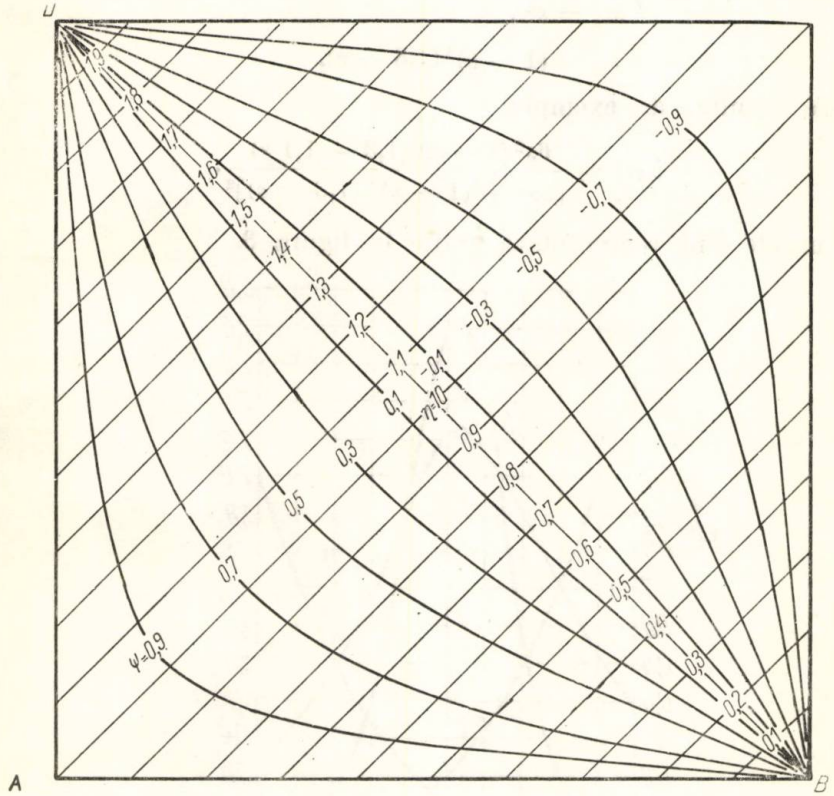


Fig. 2

metru. Cel mai simplu este de a alege distanța de la proiecția punctului respectiv pe diagonala secundară la punctul B (fig. 1). Se constată ușor că

$$\eta = \frac{1 + y - x}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

În figura 2 s-au marcat valorile lui η luînd ca unitate de măsură valoarea $\sqrt{2}$.

4. **Expresia parametrilor fizici.** Pentru a se putea determina forma funcţiilor $a(s)$, $b(s)$ din formula (10), [1] este necesar a se cunoaşte parametrii fizici ai rocii-magazin. Pentru calculul numeric s-au folosit valorile acestor parametri corespunzători ţiţeiului din Complexul Meoţian II (Schela Drăgăneasa) [6]

$$\mu_t = 1{,}9 \text{ cP},$$

$$\mu_a = 0{,}95 \text{ cP}.$$

Cercetările experimentale au arătat că permeabilitatea relativă este practic independentă de viscozitatea fiecărei faze şi de gradienţii de presiune. Una dintre reprezentările statistice posibile a curbelor permeabilităţilor relative date grafic în [7] are forma

$$k_{ra} = s^3, \tag{6}$$

$$k_{rt} = (1 - s)^2 (1{,}3 - s),$$

din care rezultă, de exemplu

$$b(s) = \frac{6s^2 (1 - s)(1{,}3 - 1{,}1\, s)}{[2s^3 + (1 - s)^2 (1{,}3 - s)]^2}. \tag{7}$$

Curbele sînt reprezentate grafic în figura 3.

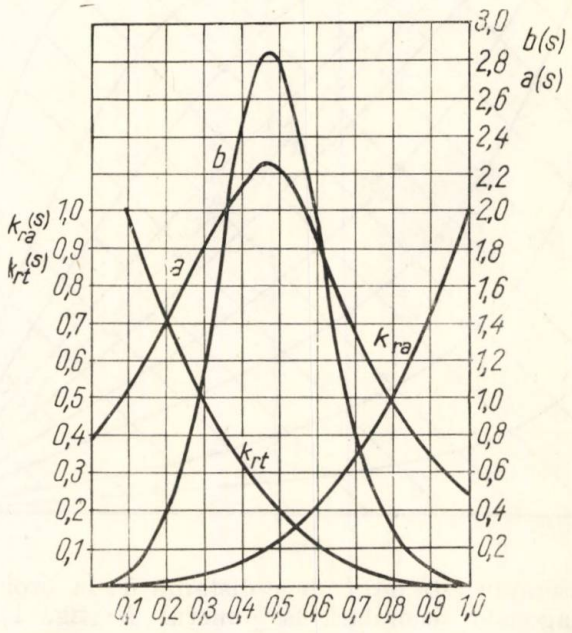


Fig. 3

5. **Frontul de dezlocuire.** În schema adoptată, sistemul hidrodinamic este compus din două sonde, de injecţie şi de extracţie, situate pe frontiera impermeabilă a zăcămîntului. Transformarea conformă care reali-

zează trecerea domeniului pe semiplanul superior se obține observînd că domeniului fizic îi corespunde în planul potențialului complex $\pi(z)$ o bandă prin transformarea

$$\pi(z) = \frac{4}{\pi} \ln[e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{cn} Kz],$$

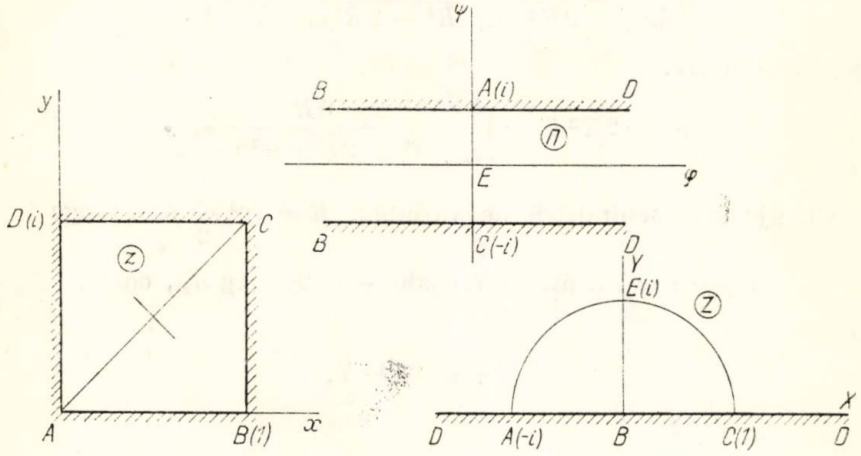


Fig. 4

iar transformarea benzii pe semiplanul superior în Z se obține cu

$$Z = e^{\frac{\pi}{2}(\pi+i)}. \tag{8}$$

În consecință, transformarea domeniului fizic pe semiplanul superior (fig. 4) se obține cu ajutorul formulei

$$Z = \operatorname{sn}^2 Kz - 1. \tag{9}$$

6. **Caracteristicile și frontul de dezlocuire.** Curba caracteristică a ecuației secunde din (11) [1] care pleacă la $T = 0$ din $R = R_0$ și este conținută în planul meridian de unghi θ în sistemul $OXYT$ este dată de relațiile (28) [1]:

$$\begin{aligned} b(s) \cdot T &= W(R, \theta) - W(R_0, \theta), \\ s &= \text{const}, \\ \theta &= \text{const}, \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$W(R, \theta) - W(R_0, \theta) = \int_{R_0}^{R} \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 R \, dR. \tag{11}$$

În cazul transformării (9) se obține

$$\frac{dZ}{dz} = 2\,\mathrm{sn}\,Kz \cdot K \cdot \mathrm{cn}\,Kz \cdot \mathrm{dn}\,Kz = K\sqrt{2Z(Z^2-1)}$$

sau, după calcule simple,

$$\left|\frac{dz}{dZ}\right|^2 = \frac{1}{2K^2}\,\frac{1}{R\sqrt{R^4 - 2R^2\cos^2\theta - 1}},$$

adică, în definitiv,

$$b(s)\cdot 2K^2\,T = \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{R^4 - 2R^2\cos^2\theta - 1}}. \tag{12}$$

Cu ajutorul schimbării de variabilă $R = \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ se ajunge la

$$b(s)\cdot\tau = F(2\,\mathrm{arc\,tg}\,R, \cos\theta) - F(2\,\mathrm{arc\,tg}\,R_0, \cos\theta), \tag{13}$$

unde

$$\tau = 4K^2\cdot T, \tag{14}$$

iar

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

este integrala eliptică de tip Legendre de ordinul unu.

S-a ales ca distribuție inițială de saturație o expresie simplă în planul Z care asigură în domeniul fizic o distribuție concentrată de fluid umectant (apă) în vecinătatea punctului B. Ea este dată de

$$s = \mathrm{e}^{-R_0^2}. \tag{15}$$

Planele meridiane din $OXYT$ corespund razelor din planul Z duse cu unghiurile $\theta = 9°; 27°; 45°; 63°; 81°; 99°; 117°; 135°; 153°; 171°$. Ele sînt imaginea în planul Z a liniilor de curent $\psi = \text{const}$ din domeniul fizic (fig. 2). Făcînd în fiecare plan meridian transformarea

$$W = F(2\,\mathrm{arc\,tg}\,R, \cos\theta), \tag{16}$$

se obține transformarea curbelor caracteristice într-o rețea de drepte

$$W = W_0(s) + b(s)\cdot\tau. \tag{17}$$

Pentru a putea construi evoluția în timp a curbelor izosaturație sînt necesare relațiile de legătură între coordonatele punctelor unei linii de curent date și valorile corespunzătoare ale variabilei W. Din (8) se obține

$$R = |Z| = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\varphi}. \tag{18}$$

Cu ajutorul formulei (2) în care $q = 8$ se găsește

$$2\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi} \ln \left[\frac{\mathrm{cn}\, K(x + iy)}{\mathrm{cn}\, K(y + ix)}\right],$$

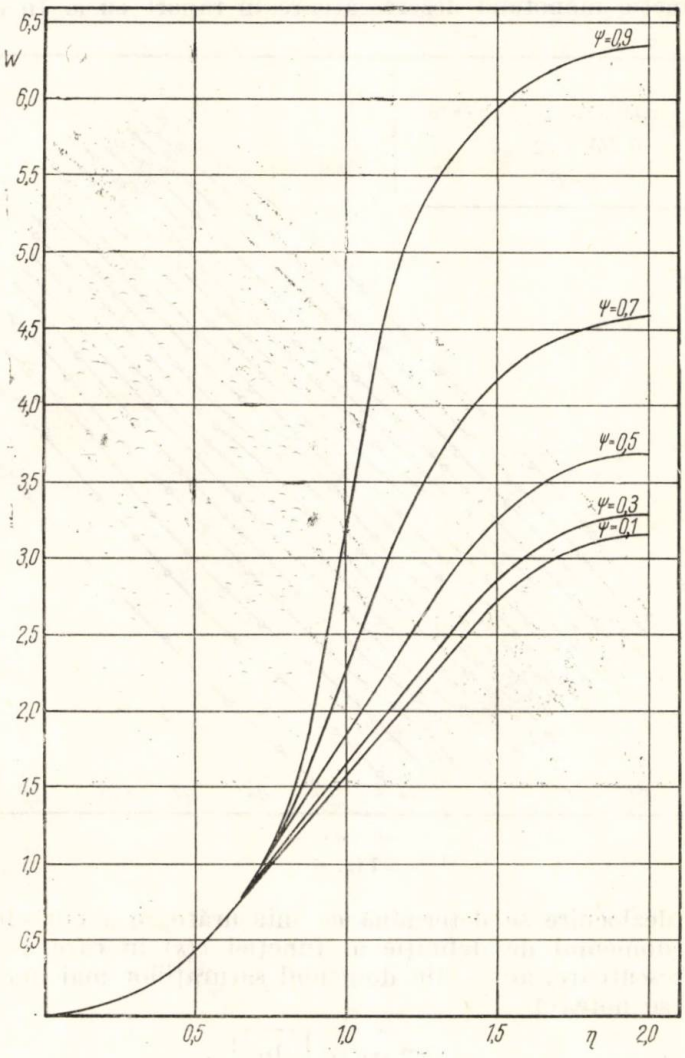


Fig. 5

care, cu ajutorul formulei (3), dă

$$R = \frac{1 - \mathrm{sn}^2 Kx \cdot \mathrm{dn}^2 Ky}{1 - \mathrm{sn}^2 Ky \cdot \mathrm{dn}^2 Kx}. \tag{19}$$

Combinînd relațiile de mai sus (19) și (16) se pot calcula formulele de legătură între variabilele η și W pentru o linie de curent dată. Ele sînt reprezentate în figura 5.

În particular se pot reprezenta curbele izosaturație la momentul inițial date prin (15) direct în planul fizic (fig. 6).

Evoluția frontului de dezlocuire se obține analitic cu ajutorul relațiilor (32) din [1]. Distribuția inițială a saturației (15) face ca $W_0(s)$ să fie o funcție monotonă descrescătoare în raport cu s. În consecință,

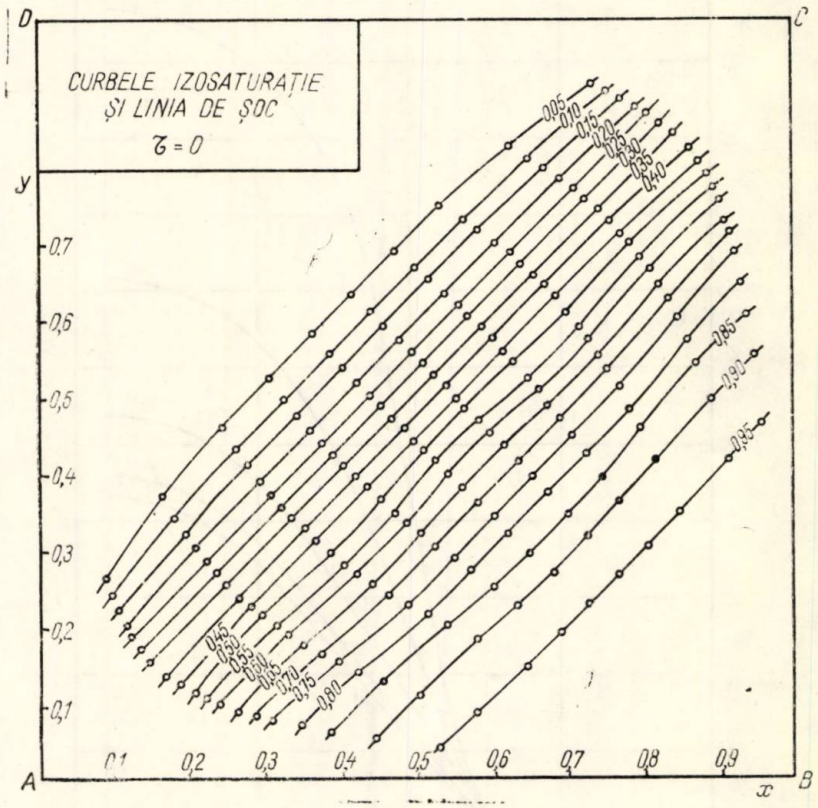


Fig. 6

frontul de dezlocuire se determină ca înfășurătoare a curbelor caracteristice din domeniul de definiție al funcției $b(s)$ în care aceasta este monoton crescătoare, adică din domeniul saturațiilor mai mici.

Dacă se notează

$$\gamma = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\ln \frac{1}{s}}, \tag{20}$$

ecuațiile parametrice ale frontului de dezlocuire se obțin folosind definiția (20) a integralei eliptice

$$W = W_0(s, \theta) + \tau \cdot b(s),$$

$$\tau = \frac{1}{s \cdot b'(s)} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \cdot \sin^2\gamma}}. \tag{21}$$

În formulele (21)

$$\theta = \arg Z = \frac{\pi}{2}(\psi + 1).$$

Valorile calculate ale funcției $b'(s)$ sînt concentrate în tabela 2

Tabela 2

γ	85°	87°	89°	92°	96°	100°	104°
s	0,43171	0,40616	0,38060	0,34232	0,29142	0,24171	0,19437
$b(s)$	2,69210	2,50330	2,21337	1,74665	1,14497	0,67790	0,36992
$b'(s)$	6,48162	9,54705	11,54539	12,45864	10,81174	7,89031	5,19948

γ	108°	116°	124°
s	0,15047	0,07723	0,02910
$b(s)$	0,18713	0,03691	0,00439
$b'(s)$	3,22187	1,10094	0,31619

Liniile de discontinuitate ale saturației (frontul de dezlocuire) sînt reprezentate în figura 7.

În fiecare plan meridian transformat $OW\tau$ corespunzător unei anumite valori alese a funcției de curent se poate construi spectrul caracteristicilor dat de (17). În figura 8 se reprezintă acest spectru pentru valoarea funcției de curent $\psi = 0{,}7$.

Punctele de intersecție ale caracteristicilor cu dreapta $\tau = \text{const}$ dau în planul fizic spectrul liniilor de saturație constantă la un moment dat, precum și frontul de dezlocuire. În figurile 9, 10 și 11 se redau aceste spectre pentru diferite momente de timp. Frontul de dezlocuire este trasat cu linie întreruptă, indicîndu-se în mod special saltul de saturație de-a lungul lui.

7. **Aproximația a doua.** Funcția lui Green pentru un operator liniar satisface ecuația cu derivate parțiale omogenă și condițiile la limită omogene în tot domeniul, cu excepția unui punct care poate fi interior domeniului sau situat pe frontiera acestuia și în care singularitatea funcției lui Green este descrisă de funcția generalizată a lui Dirac. Dacă punctul de neomogenitate este interior, funcția lui Green servește a construirea soluției ecuației neomogene cu condiții la limită omogene,

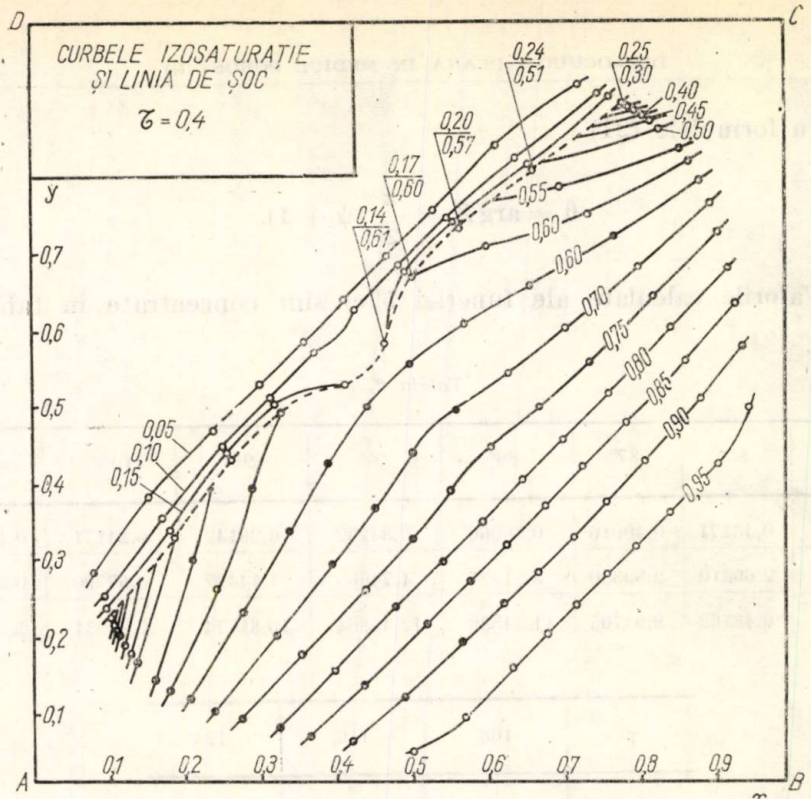

D
C
CURBELE IZOSATURAȚIE
ȘI LINIA DE ȘOC
τ = 0,4
y
x
A
B
0,24
0,51
0,25
0,30
0,40
0,45
0,50
0,20
0,57
0,17
0,60
0,14
0,61
0,55
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
0,05
0,10
0,15
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

Fig. 7

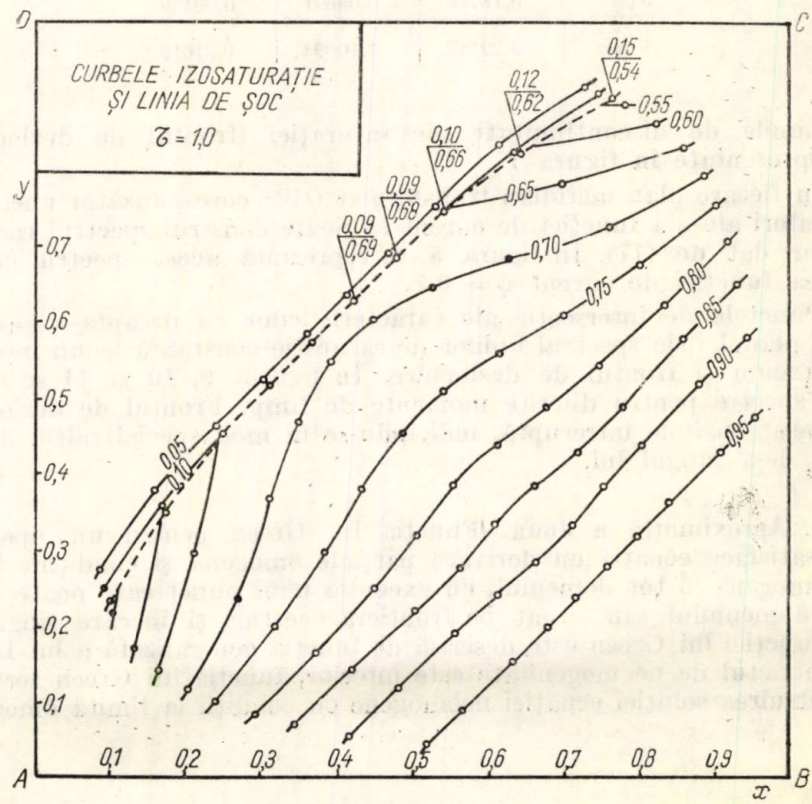

D
C
CURBELE IZOSATURAȚIE
ȘI LINIA DE ȘOC
τ = 1,0
y
x
A
B
0,15
0,54
0,12
0,62
0,55
0,60
0,10
0,66
0,09
0,68
0,09
0,69
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
0,05
0,10
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

Fig. 8

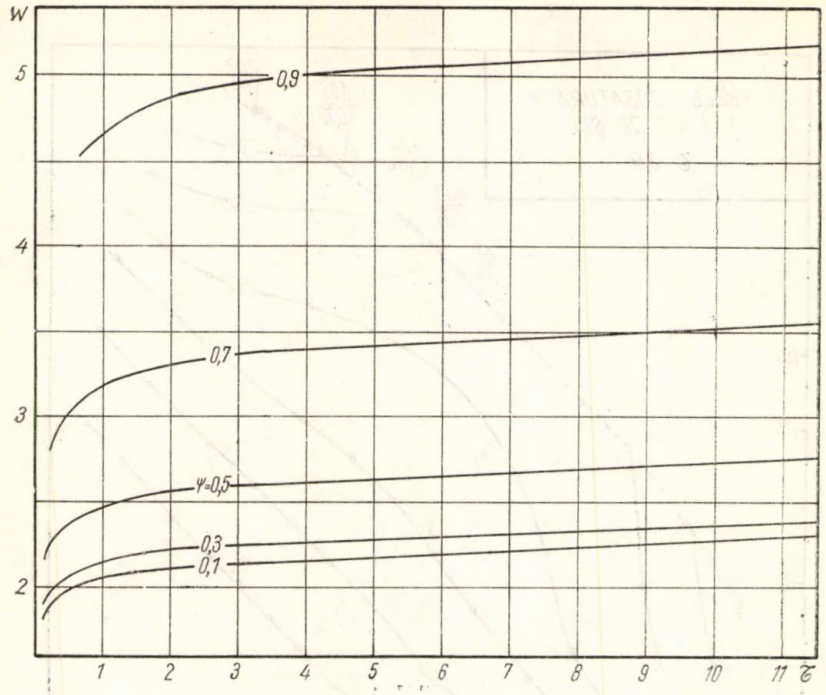

W
5
4
3
2
0,9
0,7
ψ=0,5
0,3
0,1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
τ

Fig. 9

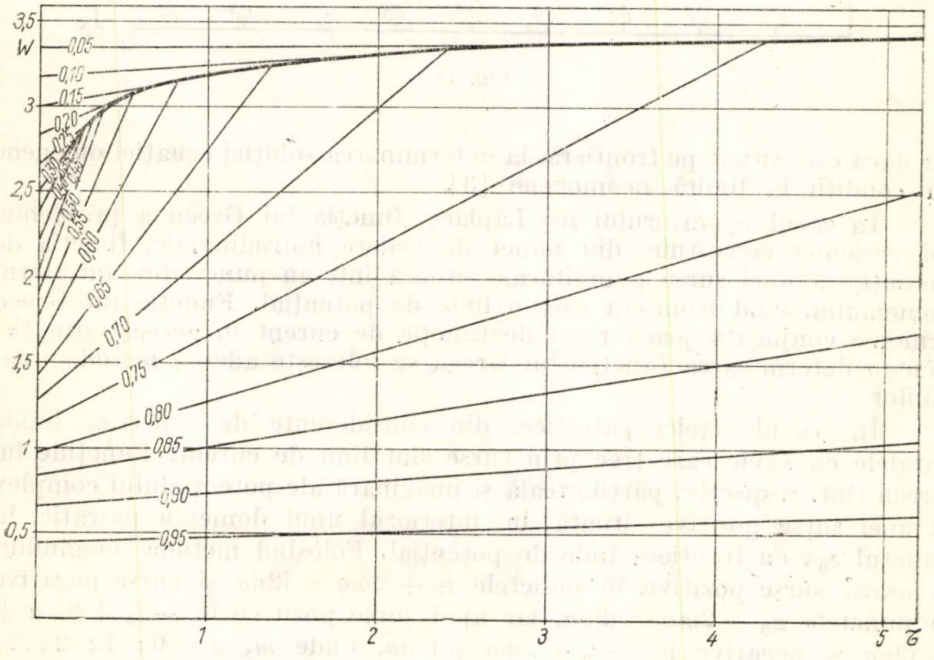

3,5
W
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0,05
0,10
0,15
0,20
0,60
0,65
0,70
0,75
0,80
0,85
0,90
0,95
1
2
3
4
5
τ

Fig. 10

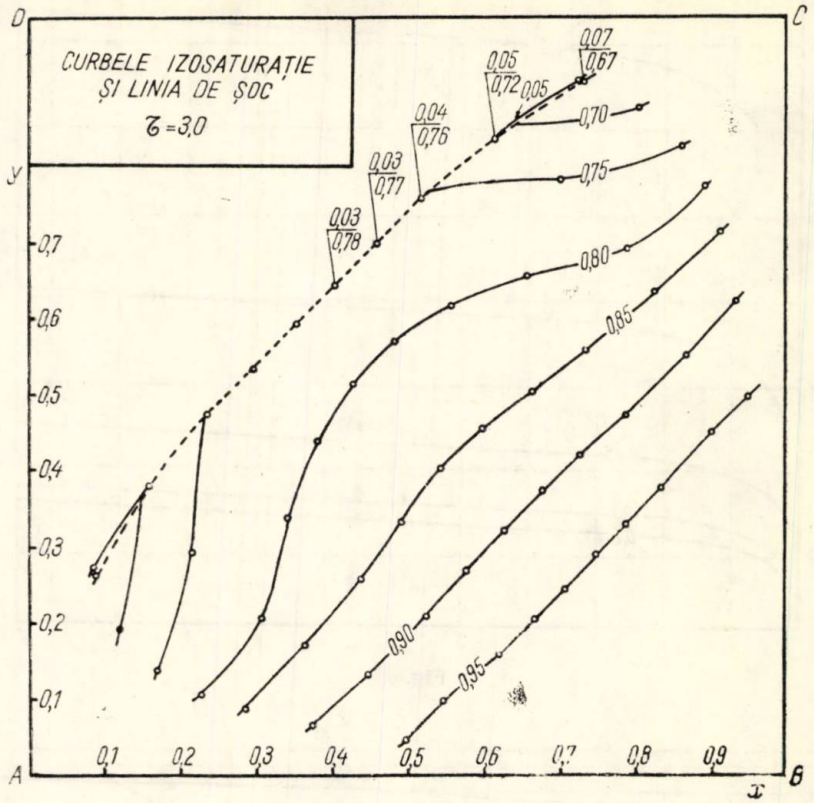


Fig. 11

iar dacă este situat pe frontieră, la determinarea soluției ecuației omogene cu condiții la limită neomogene [3].

În cazul operatorului lui Laplace, funcția lui Green a problemei lui Dirichlet constituie, din punct de vedere hidrodinamic, funcția de potențial a unei surse punctiforme situată într-un punct din interiorul domeniului, cînd frontiera este o linie de potențial. Funcția lui Green armonic conjugată joacă rolul de funcție de curent în aceeași situație. Pentru determinarea funcției lui Green se folosește adesea metoda imaginilor.

În cazul rețelei pătratice, din considerente de simetrie, liniile paralele cu axele care trec prin surse sînt linii de curent. Funcțiile lui Green sînt, respectiv, părțile reală și imaginară ale potențialului complex al unei surse pozitive situată în interiorul unui domeniu pătratic, în punctul z_0, cu frontiera linie de potențial. Folosind metoda imaginilor, se așază surse pozitive în punctele $z_0 + 2ma + i2na$ și surse negative în punctele $\bar{z}_0 + 2ma + i2na$, iar apoi surse pozitive în $-\bar{z}_0 + 2ma + i2na$ și negative în $-z_0 + 2ma + i2na$, unde m, $n = 0; 1; 2; \ldots$ (fig. 12).

Potențialul complex rezultant are expresia [3]

$$\pi_1(z) = 2q \ln \left\{ \frac{\operatorname{cn}\left(2K\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{cn}\left[\frac{K}{a}(z_0 - z)\right]}{\operatorname{sn}\left(2K\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{sn}\left[\frac{K}{a}(z_0 - z)\right]} \cdot \frac{\operatorname{cn}\left(2K\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{cn}\left[\frac{K}{a}(\bar{z}_0 - z)\right]}{\operatorname{sn}\left(2K\frac{x_0}{a}\right) - \operatorname{sn}\left[\frac{K}{a}(\bar{z}_0 - z)\right]} \right\}, \tag{23}$$

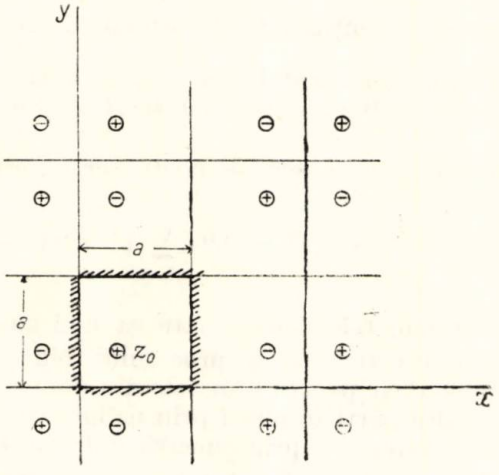


Fig. 12

unde q se determină din condiția ca debitul sursei plasate în z_0 să fie egal cu unitatea.

Funcția de reprezentare conformă din (21) [1] a domeniului fizic pe semiplanul superior al planului Z este dată de (9). Funcția lui Green în planul Z este partea reală a potențialului complex a două surse simetrice față de OX, situate în punctele Z_0 și z_0. Liniile de nivel ale funcției lui Green armonic conjugată vor fi arce de cerc cu centrul pe axa reală și care trec prin afixele celor două surse

$$\pi_1(Z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} = G + iH. \tag{24}$$

Din formula (24) se obțin

$$H = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{-2Y_0(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2}, \tag{25}$$

adică liniile de nivel ale funcției lui Green armonic conjugată sînt date de

$$(X - X_0 + Y_0 \operatorname{ctg} 2\pi H)^2 + Y^2 = Y_0^2 \operatorname{cosec}^2 2\pi H. \tag{26}$$

Pentru calculul aproximației a doua este necesar a se cunoaște corespondența dintre punctele planului fizic Oxy și planul $O\psi H$, în care ψ este funcția de curent a procesului din prima aproximație. În planul Z se determină punctele de intersecție ale razelor care pleacă din origine ($\psi = \text{const}$) cu arcele de cerc care constituie liniile de nivel ale funcției lui Green armonic conjugată ; aceste puncte se transpun apoi în domeniul fizic.

Integrala dublă din formula (18) [1] se efectuează în planul $O\psi H$, în care domeniul fizic este conținut în dreptunghiul $|H| < \frac{1}{2}$, $|\psi| < 1$. Punctele de calcul au coordonatele cu valori aparținînd mulțimilor de numere : $\psi = \pm 0{,}1$; $\pm 0{,}3$; ... ; $\pm 0{,}9$ și $H = \pm 0{,}05$; $\pm 0{,}15$; ... ; $\pm 0{,}45$.

În consecință, integrala dublă se poate scrie aproximativ

$$\iint [1 - a(s)]\, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}H = 0{,}02 \sum [1 - a(s)],$$

sumarea făcîndu-se în punctele determinate ca mai sus.

Simetria domeniului fizic și a procesului hidrodinamic permite să se efectueze calculele doar pentru punctele din domeniul AEB (fig. 1), iar rezultatele în celelalte părți se obțin prin oglindirea domeniului AEB față de diagonala pătratului sau prin simetria față de centrul său.

În planul Z, linia de nivel $H = \text{const}$ se poate scrie în coordonate polare

$$\frac{r}{X_c} = \cos\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{R}{X_c}\right)^2 - \sin^2\alpha}, \tag{27}$$

unde

$$X_c = X_0 - Y_0 \operatorname{ctg} 2\pi H ; \qquad X = r\cos\alpha,$$

$$R = Y_0 |\operatorname{cosec} 2\pi H| ; \qquad Y = r\sin\alpha,$$

iar Z_0 este imaginea punctului z_0 ales în punctele rețelei din domeniul fizic indicat anterior.

Raza $\psi = \text{const}$ are ecuația în coordonate polare

$$\alpha = \frac{\pi}{2}(1 + \psi).$$

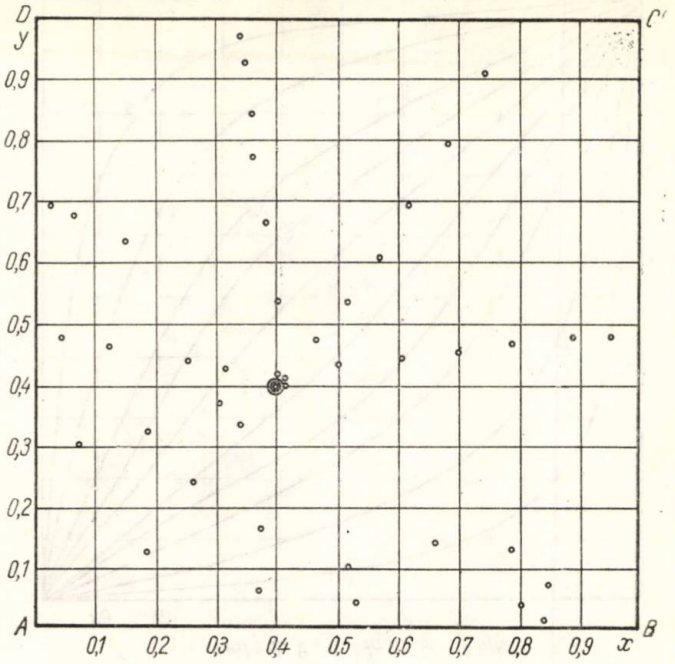

D
C
y
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
A
B
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
x

Fig. 13

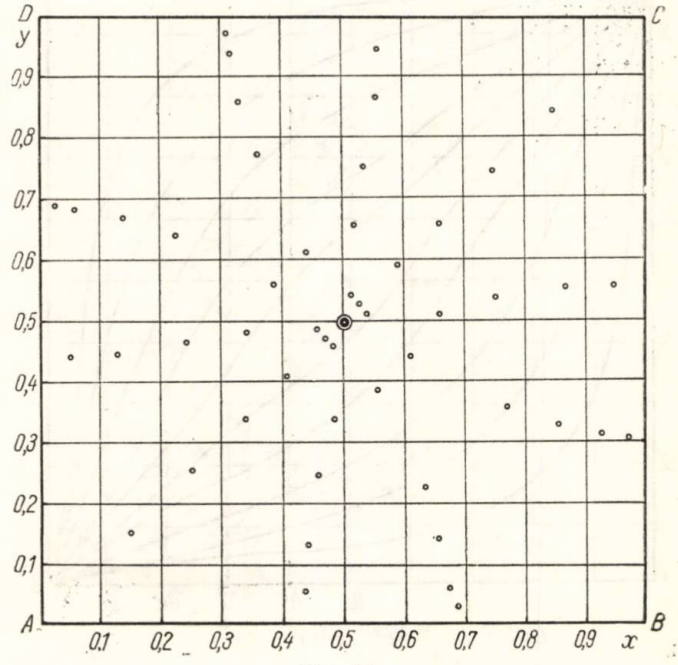
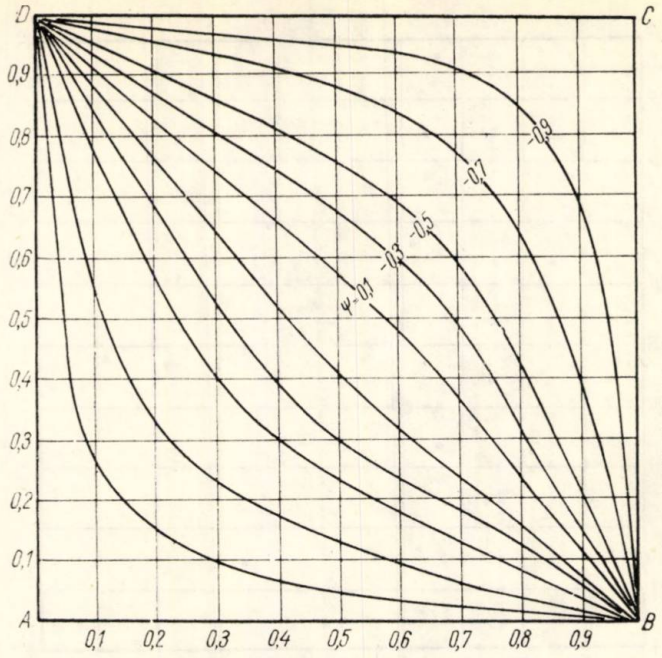
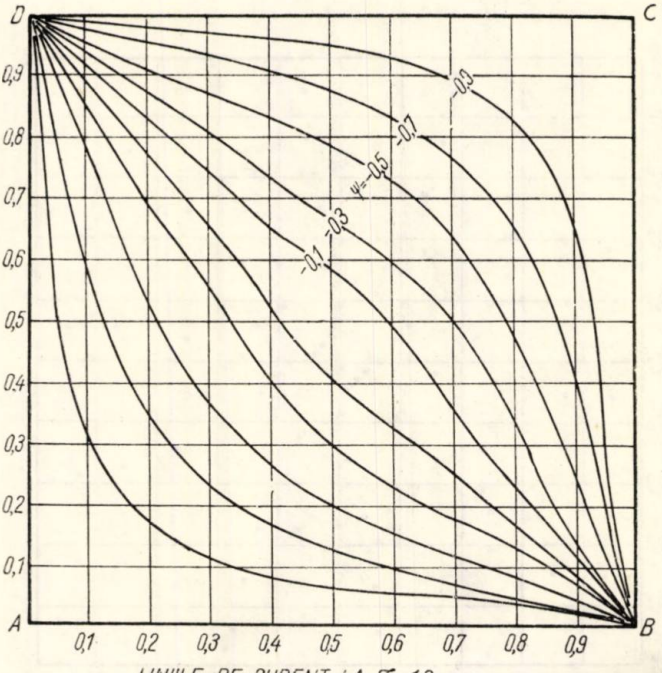

D
C
y
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
A
B
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
x

Fig. 14



LINIILE DE CURENT LA $\mathcal{C}=0.4$

Fig. 15



LINIILE DE CURENT LA $\mathcal{C}=1.0$

Fig. 16

Punctele de intersecție sînt date de rădăcinile reale și pozitive ale sistemului compus din ecuațiile (27) și (28).

De exemplu, cînd $x_0 = 0{,}4$ și $y_0 = 0{,}4$, în planul Z se obține $X_0 = -0{,}49052$ și $Y_0 = 0{,}87143$, iar rezultatul intersecției este concentrat în tabela 3

Tabela 3

H	α	$\frac{r}{X_c}$		α	$\frac{r}{X_c}$	
−0,45						
−0,35						
−0,25	9°		0,38356	27°		0,40543
−0,15		1,21777			1,20227	
−0,05		4,97053			4,59645	
−0,45						
−0,35						
−0,25	45°		0,45257	63°		0,53121
−0,15		1,17326			1,13437	
−0,05		3,90741			3,02660	
−0,45						
−0,35						
−0,25	81°			99°		0,80107
−0,15		1,06169	0,64760		1,04559	
−0,05		2,14299			1,45512	
−0,45					0,54627	3,95148
−0,35	117°	0,11278	0,90747		0,06725	1,52184
−0,25			0,97659	135°		1,14628
−0,15		1,00489			0,97157	
−0,05		1,03027			0,79803	
−0,45		0,41063	5,16981		0,36474	5,91637
−0,35	153°	0,07271	1,94988		0,04710	2,17253
−0,25			1,27955	171°		1,35253
−0,15		0,94814			0,93606	
−0,05		0,67840			0,62734	

Punctele de intersecție sînt reprezentate în planul fizic în figura 13, iar figura 14 reprezintă același lucru pentru punctul de coordonate $x_0 = y_0 = 0{,}5$.

Integrala dublă se calculează apoi, cunoscînd valoarea funcției $1 - a(s)$ în punctele determinate mai sus, obținîndu-se funcția de curent pentru a doua aproximație la diferite momente de timp. În figurile 15 și 16 sînt reprezentate spectrele liniilor de curent la momentele de timp $\tau = 0{,}4$ și, respectiv, $\tau = 1{,}0$.

Primită la redacție la 14 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. I. Seteanu, *Dezlocuirea plană negravitațională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros (I)*, St. cerc. mec. apl., 6 (1968).
2. M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., 1937.

3. P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., 1953.
4. W. Magnus, F. Oberhetinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2 Aufl., Berlin, 1948.
5. M. Schuler, H. Gebelein, *Tabliți elliptice schih funcții*, Vip. țentr. AN SSSR, Moscova, 1961.
6. I. Crețu, Al. Soare, *Cercetarea hidrodinamică a sondelor*, Edit. tehnică, București, 1967.
7. M. C. Leverett, *Flow of oil-water mixtures through inconsolidated sands*, Transactions AIME, 132 (1939).

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR PROBLEME DE SCURGERE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ A LICHIDELOR PRIN MEDII POROASE

de T. OROVEANU și I. SPULBER
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Luînd ca punct de plecare unele lucrări anterioare, autorii se ocupă de un procedeu de studiu al scurgerilor cu suprafață liberă în medii poroase neomogene. Pentru scurgerile permanente sînt date soluții exacte găsite și mai înainte, dar sub formă mai complicată. Pentru scurgerile nepermanente sînt găsite soluții aproximative, presupunîndu-se că mediul poros este slab neomogen. Printr-o particularizare, procedeul se aplică și la studiul scurgerilor în medii poroase omogene.

1. **Introducere.** Scurgerea cu suprafață liberă a lichidelor prin medii poroase a făcut obiectul unui mare număr de cercetări, care au condus la soluții pentru multe probleme. Într-adevăr, atunci cînd se presupune valabilă legea liniară de filtrare și, în plus, scurgerea este permanentă, ne găsim în fața unor probleme destul de bine cunoscute, referitoare la determinarea unei funcții armonice într-un anumit domeniu, condițiile la limită fiind date. Principala dificultate a acestor probleme se datorește faptului că suprafața liberă, care este una dintre frontierele domeniului, nu este dinainte cunoscută. În ceea ce privește scurgerea nepermanentă, condiția pe care trebuie să o satisfacă soluția pe suprafața liberă este neliniară, ceea ce constituie, firește, o nouă sursă de dificultăți.

Toate considerațiile precedente se referă la scurgerile prin medii poroase omogene a căror porozitate și permeabilitate, respectiv coeficient de filtrare, sînt constante. Atunci cînd este vorba de medii poroase neomogene și mai ales de acelea ale căror caracteristici pe care le-am menționat sînt funcții de punct, dificultățile devin foarte mari și, după cîte știm, nu există pînă în prezent nici o soluție obținută prin metode corespunzătoare celor care au fost utilizate la studiul scurgerilor prin medii poroase omogene.

În paralel cu cercetările care au mers pe calea amintită mai sus, s-a dezvoltat și o altă metodă de studiu a scurgerii cu suprafață liberă, care are ca punct de plecare unele presupuneri simplificatoare. Plecîndu-se de la acestea, se ajunge la ecuația binecunoscută a lui Boussinesq,

dar pentru scurgerea nepermanentă această ecuaţie este neliniară. Din cauza acestui fapt numărul soluţiilor exacte cunoscute este foarte restrîns, şi în literatura de specialitate se află mai ales soluţii aproximative.

Totuşi generalizarea ecuaţiei lui Boussinesq oferă pînă în prezent metoda cea mai simplă pentru studiul scurgerilor cu suprafaţă liberă prin mediile poroase neomogene. Acest lucru a fost făcut de unul dintre noi acum cîţiva ani într-o lucrare referitoare la acest gen de scurgeri [4]. Mai înainte nu au existat decît foarte puţine tentative de a se rezolva probleme de acest fel, cea mai cunoscută fiind metoda propusă de N. K. Ghirinski [3], extinsă după aceea de P. Ia. Polubarinova-Kocina [7], la studiul scurgerilor nepermanente, cu ajutorul unor aproximaţii care au ca scop liniarizarea ecuaţiei diferenţiale găsite. Este vorba de cazul destul de simplu al scurgerii într-un strat permeabil de grosime constantă aşezat pe un substrat impermeabil orizontal, coeficientul de filtrare fiind funcţie de o singură variabilă, şi anume înălţimea punctului considerat faţă de un plan orizontal de referinţă.

Acelaşi caz a fost studiat şi în lucrarea [4], dar pe o cale destul de diferită, care conduce, aşa cum am mai spus, la o generalizare a ecuaţiei lui Boussinesq. S-a păstrat neschimbată prima ipoteză care se face pentru a se ajunge la această ecuaţie, şi anume că suprafaţa liberă are o curbură destul de redusă, scurgerea fiind esenţial orizontală. Cea de-a doua ipoteză, conform căreia componentele orizontale ale vitezei de filtrare nu depind de coordonata verticală, a fost modificată, făcîndu-se să intervină variaţia coeficientului de filtrare. În acest mod, componentele menţionate mai sus sînt funcţii de coordonata verticală, dar numai prin intermediul coeficientului de filtrare.

După cîteva calcule destul de simple, care pot fi găsite în [4], se ajunge la ecuaţia

$$\frac{m}{k}\frac{\partial H}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2, \tag{1}$$

în care m este porozitatea, k coeficientul de filtrare şi H înălţimea suprafeţei libere în raport cu planul orizontal Oxy. Mărimea K este o funcţie de H definită prin formula

$$K(H) = \frac{f(H)}{k(H)} \tag{2}$$

cu

$$f(H) = \int_0^H k(z)\,dz, \tag{3}$$

z fiind coordonata verticală. În afară de coeficientul de filtrare, porozitatea poate fi de asemenea o funcţie de z. Trebuie să remarcăm că în ecuaţia (1) m şi k sînt considerate ca funcţii de H.

Ecuaţia diferenţială astfel găsită, care se transformă în ecuaţia lui Boussinesq cînd m şi k sînt constante ($K = H$), este neliniară şi rămîne astfel chiar dacă scurgerea este permanentă. Însă, în acest din urmă caz, o schimbare de funcţie pe care o vom indica mai departe face ca ecuaţia să devină liniară. În ceea ce priveşte scurgerea nepermanentă, problema

este sensibil mai complicată, deoarece toate procedeele de liniarizare propuse pînă în prezent, pentru ecuația obișnuită a lui Boussinesq, fac să intervină aproximații mai mult sau mai puțin importante. Rezultă de aici că orice tentativă de a se aplica procedee asemănătoare ecuației generalizate (1) ar prezenta aceleași inconveniente. Aceeași remarcă rămîne valabilă și pentru metodele aproximative care au fost utilizate pentru a se găsi soluții ale ecuației neliniare (metoda micului parametru etc.). Ni se pare util să atragem atenția de asemenea asupra faptului că prezența în ecuația (1) a coeficienților m, k și K, funcții de H, aduce o complicație în plus față de ecuația lui Boussinesq. Aceasta devine evident atunci cînd ne propunem să adoptăm un procedeu de liniarizare sau o metodă aproximativă, aleasă dintre acelea care sînt utilizate pentru rezolvarea acestei ultime ecuații.

În cele ce urmează, vom prezenta mai întîi cîteva considerații asupra scurgerii permanente, insistînd îndeosebi asupra modului în care am ameliorat rezultatele date anterior în [4]. Vom trece apoi la studiul scurgerii nepermanente, pentru a prezenta mai întîi cîteva considerații generale asupra metodei pe care o propunem și pentru a da apoi cîteva exemple particulare de aplicații. Avem în vedere mai ales scurgerea în mediile poroase cu caracteristici variabile, dar, așa cum vom arăta, metoda ar putea fi utilizată și la studiul scurgerii prin mediile poroase omogene.

2. **Scurgerea permanentă.** Atunci cînd timpul nu mai intervine ca variabilă, ecuația (1) devine

$$K\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2=0. \tag{4}$$

Dacă mediul poros este omogen ($K = H$), această ecuație este liniară în raport cu funcția H^2, care este armonică. Cazul unui mediu poros cu caracteristici variabile apare puțin mai complicat. Soluții exacte, care pot fi găsite în [4] sau în monografia [5], au fost stabilite totuși pentru scurgerea plană și pentru aceea cu simetrie radială. De asemenea, o metodă aproximativă, expusă tot în [4] și [5], a fost indicată pentru studiul scurgerilor tridimensionale. Este totuși posibil ca toate aceste cazuri particulare să fie supuse unui tratament unitar, observîndu-se că schimbarea de funcție

$$\Phi=\int_0^H f(z)\,\mathrm{d}z \tag{5}$$

cu

$$f(z)=\int_0^z k(u)\,\mathrm{d}u \tag{6}$$

face ecuația (4) liniară. Într-adevăr, găsim imediat

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{7}$$

și

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{f}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{k}{f^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{1}{f}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{k}{f^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right], \tag{8}$$

formule în care k și f sînt funcții de H. După înlocuirea acestor rezultate în ecuația (4) obținem

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{9}$$

funcția Φ fiind deci armonică.

Atunci cînd mișcarea este plană, funcția Φ depinde numai de o singură variabilă spațială; dacă această variabilă este, de exemplu, x, se găsește cu ușurință că suprafața liberă are ecuația

$$C_1 x + C_2 = \int_0^H f(z)\,dz. \tag{10}$$

Constantele C_1 și C_2 trebuie determinate cu ajutorul condițiilor de limită ($x = 0$, $H = H_1$; $x = l$, $H = H_2$).

Este ușor să se stabilească o relație între funcția Φ și debitul Q. Formula lui Dupuit a fost generalizată de I. A. Ciarnîi [1] pentru scurgerea printr-un mediu poros al cărui coeficient de filtrare variază după direcția verticală. Într-o lucrare anterioară [6], unul dintre noi a arătat că se poate pune această formulă sub forma

$$Q = \frac{1}{l}\int_{H_2}^{H_1} f(z)\,dz \tag{11}$$

cu $H_1 > H_2$. Ținînd seama de (5), se găsește imediat

$$Q = \frac{\Phi(H_1) - \Phi(H_2)}{l}. \tag{12}$$

În ceea ce privește scurgerea cu simetrie radială, avem

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0, \tag{13}$$

de unde rezultă că suprafața liberă are ecuația

$$C_1 \ln r + C_2 = \int_0^H f(z)\,dz. \tag{14}$$

Condițiile la limită ($r = r_s$, $H = H_s$; $r = r_c$, $H = H_c$) permit determinarea constantelor C_1 și C_2.

Un calcul la fel de simplu ca și cel schițat mai sus ne duce la formula

$$Q = 2\pi \frac{\Phi(H_c) - \Phi(H_s)}{\ln \frac{r_c}{r_s}} \tag{15}$$

cu $H_c > H_s$, $r_c > r_s$.

Nu găsim necesar să insistăm asupra acestor probleme simple, mai ales că este ușor de constatat că rezultatele pe care le-am dat aici sînt, în fond, identice cu cele prezentate în [4] și [5].

La rîndul său, studiul scurgerilor permanente tridimensionale revine la căutarea soluțiilor ecuației lui Laplace (9) cu condiții la limită care conduc la problemele clasice. Din acest motiv, ne vom mărgini numai la cîteva considerații privitoare la metoda propusă în această lucrare și la aceea dată mai înainte de N. K. Ghirinski, pe care am menționat-o mai sus. Luînd ca punct de plecare vectorul debit, N. K. Ghirinski a arătat în [3] că este posibil să se exprime componentele acestui vector cu ajutorul funcției

$$\Psi = \int_0^H (z - H)\, k(z)\, dz. \tag{16}$$

Ecuația de continuitate, scrisă tot pentru vectorul debit, a cărui divergență este nulă, conduce la concluzia că funcția Ψ este armonică. Tot astfel, calculul integralei care se găsește în cel de-al doilea membru al formulei (16) ne dă

$$\Psi = -\Phi. \tag{17}$$

Există deci identitate, cu excepția semnului, între funcția lui N.K Ghirinski și aceea pe care am definit-o prin relația (5). Însă această ultimă funcție are o formă mai simplă, și dezvoltările pe care le-am prezentat în această lucrare se leagă direct de ecuația generalizată a lui Boussinesq. Din acest motiv, credem că acest mod de a privi lucrurile comportă anumite avantaje, atît din punct de vedere teoretic, cît și din acela al aplicațiilor, calculele fiind ceva mai simple. De altfel, utilizarea funcțiilor Φ sau Ψ capătă o valoare deplină atunci cînd este vorba de scurgerile tridimensionale, deoarece în ceea ce privește scurgerea plană sau aceea cu simetrie radială am mai amintit că soluțiile exacte au fost găsite fără a se face apel la aceste funcții. Trebuie să remarcăm totuși că și în aceste ultime cazuri utilizarea funcției Φ conduce la formule mai simple.

3. **Scurgerea nepermanentă.** Atunci cînd înălțimea H a punctelor suprafeței libere nu rămîne constantă în timp, ne găsim în fața unei probleme considerabil mai dificile decît aceea a scurgerii permanente.

Cu schimbarea de funcție (6), găsim în loc de (1) ecuația

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{f}{m}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right), \tag{18}$$

în care f și m sînt funcții de Φ.

Ecuaţia (18) fiind neliniară, numai metodele numerice sau unele metode aproximative pot da de obicei soluţiile problemelor de scurgere nepermanentă cu suprafaţa liberă. Această remarcă rămîne valabilă şi atunci cînd mediul poros este omogen, căci, dacă în acest caz porozitatea m este constantă, f depinde tot de Φ.

Metoda aproximativă pe care o propunem îşi găseşte o justificare în prima ipoteză de care ne servim pentru a ajunge la ecuaţia lui Boussinesq. Într-adevăr, atunci cînd curbura suprafeţei libere este mică, H nu se depărtează sensibil de o anumită valoare medie constantă H_m. Acesteia din urmă îi corespunde o valoare constantă a funcţiei f, şi anume

$$f(H_m) = \int_0^{H_m} k(z)\,dz, \tag{19}$$

care poate fi introdusă în (18). Observăm că această aproximaţie este mai bună atunci cînd coeficientul de filtrare nu prezintă decît o variaţie destul de lentă după grosimea stratului permeabil. Metoda este deci aplicabilă mai ales scurgerilor în mediile poroase pe care le numim slab neomogene. Aceasta devine cu atît mai evident atunci cînd şi porozitatea m este variabilă, tot după grosimea stratului. Pentru a înlocui (18) cu o ecuaţie liniară trebuie să introducem şi o valoare medie $\overline{\overline{m}}$ a porozităţii, calculată în raport cu H_m sau cu grosimea pînzei freatice în repaus. Oricum am efectua acest calcul, este evident că eroarea este mai mică atunci cînd porozitatea variază puţin.

În ceea ce priveşte mediile poroase omogene, k şi m fiind constante, singura sursă de erori rămîne înlocuirea lui H cu H_m în calculul funcţiei f. Cu notaţia

$$\alpha = \frac{\overline{\overline{m}}}{f(H_m)}, \tag{20}$$

α fiind o constantă pozitivă, găsim, în loc de (18), ecuaţia liniară

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \tag{21}$$

În ceea ce urmează vom considera, aşa cum am mai spus, cîteva probleme ale căror soluţii le putem găsi luînd ca punct de plecare unele forme particulare ale ecuaţiei precedente, cu condiţii iniţiale şi la limită corespunzătoare.

3.1. *Filtrarea datorită variaţiei nivelului lichidului în rezervor.* O problemă destul de bine cunoscută este aceea a scurgerii care se produce într-un strat permeabil adiacent unui rezervor atunci cînd nivelul lichidului în acesta din urmă creşte brusc.

Vom presupune că stratul este semiinfinit şi orizontal, întinzîndu-se în lungul axei absciselor de la $x=0$ la $x=+\infty$. Scurgerea fiind plană, H depinde numai de x şi de timpul t; condiţia iniţială este

$$t = 0, \qquad H = H_2 \tag{22}$$

pentru $x>0$ și condiția la limită

$$x=0, \qquad H=H_1 \tag{23}$$

pentru $t>0$, H_1 fiind nivelul în rezervor ($H_1>H_2$).

Pentru a rezolva această problemă vom utiliza ecuația liniarizată (21), care ia forma

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tag{24}$$

relația între Φ și H fiind (5). Se observă imediat că la valori constante ale lui H corespund tot valori constante ale lui Φ, oricare ar fi legea de variație a coeficientului de filtrare. Urmează de aici că funcția Φ satisface condițiile

$$t=0, \qquad \Phi=\Phi_2 \tag{25}$$

pentru $x>0$ și

$$x=0, \qquad \Phi=\Phi_1 \tag{26}$$

pentru $t>0$.

Schimbarea de variabile

$$\xi=\frac{x\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}} \tag{27}$$

ne conduce la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\xi^2}+2\xi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\xi}=0, \tag{28}$$

pe care trebuie să o rezolvăm cu condițiile

$$\xi=0,\ \Phi=\Phi_1;\ \xi=\infty,\ \Phi=\Phi_2. \tag{29}$$

Se găsește cu ușurință

$$\Phi=(\Phi_2-\Phi_1)\operatorname{erf}(\xi)+\Phi_1 \tag{30}$$

cu

$$\operatorname{erf}(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u. \tag{31}$$

Putem să revenim acum la problema inițială, care are deci soluția

$$\frac{\int_H^{H_1} f(z)\,\mathrm{d}z}{\int_{H_2}^{H_1} f(z)\,\mathrm{d}z}=\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}}\right), \tag{32}$$

ce se obține după unele calcule simple.

Această soluție aproximativă este totuși mai bună decît aceea pe care unul dintre noi a dat-o mai demult [5]. Într-adevăr, schimbarea de funcție utilizată acolo, diferită de (5), nu permite să se ajungă la o ecuație

liniarizată decît neglijîndu-se unii termeni, în afară de faptul că se introduceau valori medii pentru funcţia f şi pentru porozitate.

Pentru efectuarea calculelor se poate defini H_m ca media aritmetică dintre H_1 şi H_2. Eroarea va fi cu atît mai mică dacă diferenţa H_1-H_2 va fi şi ea mai mică. Trebuie să remarcăm, de altfel, că această condiţie corespunde ipotezei amintite mai sus, deoarece, atunci cînd diferenţa H_1-H_2 este mică, suprafaţa liberă are o curbură destul de redusă.

Este foarte uşor să particularizăm soluţia (32) pentru cazul scurgerii printr-un mediu poros omogen. Găsim

$$H^2 = H_1^2 - (H_1^2 - H_2^2)\,\mathrm{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) \tag{33}$$

şi, dacă H_m este definit aşa cum am precizat mai sus, putem pune expresia precedentă sub forma

$$\left(\frac{H}{H_1}\right)^2 = 1 - \left[1 - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right]\mathrm{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{\beta k H_1 t}}\right) \tag{34}$$

cu

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{H_2}{H_1}\right). \tag{35}$$

Ar fi interesant de comparat valorile lui $\frac{H}{H_1}$ date de soluţia aproximativă (34), pentru diferite valori ale raportului $\frac{H_2}{H_1}$, cu cele obţinute de P. Ia. Polubarinova — Kocina [7] ca rezultat al rezolvării numerice a ecuaţiei neliniare a lui Boussinesq. Comparaţia este dificilă din cauza faptului că raportul $\frac{H}{H_1}$ în funcţie de $\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1 t}}$ este dat în [7] numai sub formă de curbe care corespund la diferite valori ale lui $\frac{H_2}{H_1}$. Totuşi, cu toată lipsa de precizie care rezultă de aici, se poate afirma că cele cîteva calcule comparative pe care le-am efectuat indică un acord destul de bun.

3.2. *Scurgerea cu simetrie radială.* Se poate scrie direct ecuaţia (18) în coordonate cilindrice, dar pentru a uşura comparaţia cu unele rezultate cunoscute vom introduce în loc de H rabaterea

$$s = H_0 - H, \tag{36}$$

H_0 fiind grosimea pînzei freatice în repaus.

După introducerea rabaterii (36) în ecuaţia (1) şi trecerea în coordonate cilindrice găsim, ţinînd seama şi de simetria radială,

$$\frac{m}{k}\frac{\partial s}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)^2 \tag{37}$$

cu

$$K = \frac{f(s)}{k(s)}, \tag{38}$$

unde

$$f(s) = \int_0^{H_0 - s} k(z)\,\mathrm{d}z. \tag{39}$$

În primul membru al ecuației (37), k și m trebuie considerate de asemenea ca funcții de s, ceea ce se obține înlocuind în expresiile lor z cu $H_0 - s$.

Tot pentru a ușura comparația despre care au vorbit, vom introduce mărimile adimensionale

$$\bar{s} = \frac{s}{H_0}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \tag{40}$$

m_0 și k_0 fiind valori constante de referință. Trebuie să observăm că pentru porozitate, care nu are dimensiuni, această notație urmărește să scoată în evidență numai faptul că se poate raporta m la valoarea constantă m_0 care, împreună cu k_0, ar putea să corespundă unui mediu poros omogen ales ca termen de comparație.

Dacă punem, de asemenea,

$$\tau = \frac{t k_0}{m_0 H_0}, \quad \rho = \frac{r}{H_0}, \quad \zeta = \frac{z}{H_0}, \tag{41}$$

ajungem la ecuația

$$\frac{\bar{m}}{\bar{k}} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \tau} = \bar{K}\left(\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{s}}{\partial \rho}\right) - \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \rho}\right)^2 \tag{42}$$

cu

$$\bar{K} = \frac{\bar{f}(\bar{s})}{\bar{k}(\bar{s})} \tag{43}$$

și

$$\bar{f}(\bar{s}) = \int_0^{1-\bar{s}} \bar{k}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{44}$$

În ceea ce urmează ne vom ocupa de scurgerea spre un puț cu debit constant Q, traversînd în întregime pînza freatică. Presupunînd că aceasta are o întindere infinită în plan orizontal, se poate înlocui puțul cu o linie de surse negative cu intensitatea totală Q. Trebuie deci să găsim soluția ecuației (42) cu condiția inițială

$$\tau = 0, \quad \bar{s} = 0 \tag{45}$$

și condițiile la limită

$$\rho = 0, \quad \rho \bar{f}(\bar{s}) \frac{\partial \bar{s}}{\partial \rho} = -\frac{\bar{Q}}{2\pi}\ ; \quad \rho = \infty, \quad \bar{s} = 0, \tag{46}$$

unde am pus

$$\bar{Q} = \frac{Q}{k_0 H_0^2}. \tag{47}$$

Prima condiţie la limită (46) rezultă din expresia

$$\overline{Q} = -2\pi \int_0^{1-\bar{s}} \rho \bar{v}_\rho \, d\zeta \tag{48}$$

cu

$$\bar{v}_\rho = \bar{k}(\zeta) \frac{\partial \bar{s}}{\partial \rho}. \tag{49}$$

Schimbarea de funcţie

$$\overline{\Phi} = \int_0^{\bar{s}} \bar{f}(u) \, du, \tag{50}$$

analogă cu aceea pe care am mai utilizat-o, ne conduce după cîteva calcule simple la ecuaţia

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \tau} = \frac{\bar{f}}{\overline{m}} \left(\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \rho} \right), \tag{51}$$

a cărei soluţie trebuie găsită cu condiţia iniţială

$$\tau = 0, \quad \overline{\Phi} = 0 \tag{52}$$

şi condiţiile la limită

$$\rho = 0, \quad \rho \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \rho} = -\frac{\overline{Q}}{2\pi}; \quad \rho = \infty, \quad \overline{\Phi} = 0. \tag{53}$$

Remarcăm că schimbarea de funcţie (50) face liniară prima condiţie la limită (46), ceea ce reprezintă o simplificare destul de importantă.

Cu schimbarea de variabile

$$\eta = \frac{\rho^2}{4\tau} \tag{54}$$

ajungem la ecuaţia

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\overline{\Phi}}{d\eta} \right) + \frac{\overline{m}}{\bar{f}} \eta \frac{d\overline{\Phi}}{d\eta} = 0, \tag{55}$$

pe care trebuie să o rezolvăm cu condiţiile

$$\eta = 0, \quad \eta \frac{d\overline{\Phi}}{d\eta} = -\frac{\overline{Q}}{4\pi}; \quad \eta = \infty, \quad \overline{\Phi} = 0. \tag{56}$$

Pentru problema astfel pusă se poate lua în considerare o rezolvare numerică. Este totuşi posibil să utilizăm unele aproximaţii care simplifică mult problema, mai ales dacă ne restrîngem la scurgerea într-un mediu poros slab neomogen, aşa cum a fost definit mai sus. În acest scop reamintim că, după ipoteza referitoare la curbura redusă a suprafeţei libere, rabaterea $\bar{s}$ trebuie să varieze în jurul unei valori medii

de care se depărtează destul de puțin. Putem, prin urmare, să înlocuim în expresia funcției $\bar{f}(\bar{s})$ rabaterea $\bar{s}$ cu o valoare medie și să scriem

$$\bar{f}(\bar{s}) \approx \bar{f}(\bar{s}_m) = \int_0^{1-\bar{s}_m} k(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{57}$$

S-ar putea chiar considera valoarea medie $\bar{s}_m$ destul de mică pentru a putea fi neglijată față de unitate. Așa cum vom arăta mai departe, această ultimă aproximație este echivalentă cu aceea care se face de obicei pentru a se liniariza ecuația diferențială atunci cînd mediul poros este omogen.

Dacă trebuie să se țină seama și de variația porozității, aceasta poate fi înlocuită în ecuația (55) prin valoarea medie calculată cu ajutorul formulei

$$\overline{m}_m = \frac{1}{1-\bar{s}_m} \int_0^{1-\bar{s}_m} \overline{m}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{58}$$

În conformitate cu presupunerea pe care am făcut-o, porozitatea este puțin variabilă, astfel că eroarea introdusă rămîne destul de mică. Evident, atunci cînd porozitatea este constantă, trebuie să punem atît în (55), cît și în (42) $\overline{m} = 1$.

Aceste aproximații ne permit să scriem, în loc de (55), ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta \frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\eta}\right) + \bar{\alpha}\eta \frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{59}$$

$\bar{\alpha}$ fiind o constantă calculată după procedeul pe care l-am indicat. Ținînd seama de faptul că nu se schimbă condițiile (56), soluția are forma

$$\overline{\Phi} = -\frac{\overline{Q}}{4\pi} Ei(-\bar{\alpha}\eta), \tag{60}$$

unde

$$-Ei(-\bar{\alpha}\eta) = \int_{\bar{\alpha}\eta}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-w}}{w}\,\mathrm{d}w. \tag{61}$$

Revenind la problema inițială, aceasta are deci soluția aproximativă

$$\int_0^{\bar{s}} \bar{f}(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\overline{Q}}{4\pi} Ei\left(-\bar{\alpha}\frac{\rho^2}{4\tau}\right), \tag{62}$$

care se aplică mai bine scurgerii într-un mediu poros slab neomogen.

Eroarea depinde în mod esențial de modul în care am determinat constanta $\bar{\alpha}$. Această eroare prezintă o importanță sporită pentru valorile mici ale lui $\frac{\rho^2}{4\tau}$, adică în apropierea puțului și atunci cînd timpul este destul de mare. Acest lucru apare foarte firesc, deoarece în aceste condiții ipoteza referitoare la curbura redusă a suprafeței libere nu mai este realizată decît foarte imperfect.

Rezultă de aici că trebuie să se calculeze cu atenție valoarea $\bar{s}_m$ care intervine în formulele (57) și (58). Așa cum am mai spus, am putea

lua $\bar{s}_m = 0$, dar este preferabil să se caute o aproximație mai bună. Dacă ne referim la cazul unui mediu poros slab neomogen, forma suprafeței libere trebuie să fie destul de apropiată de aceea care corespunde la scurgerea într-un mediu poros omogen. Prin urmare, se poate calcula o valoare aproximativă a lui $\bar{s}_m$ plecînd de la soluția acestei ultime probleme.

Atunci cînd mediul poros este omogen, cu un coeficient de filtrare k_0 și o porozitate m_0, avem $\overline{m} = 1$, $\overline{k} = 1$, și $\overline{f} = 1 - \bar{s}$, ceea ce ne dă, în loc de (51), ecuația

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \tau} = (1 - \bar{s}) \left(\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \rho} \right), \tag{63}$$

în timp ce funcția $\overline{\Phi}$ ia forma

$$\overline{\Phi} = \bar{s} - \frac{\bar{s}^2}{2}. \tag{64}$$

În ecuația (63) se poate face aproximația obișnuită neglijîndu-se $\bar{s}$ față de unitate în factorul $1 - \bar{s}$. În acest mod, ajungem la o ecuație liniară care are soluția

$$\bar{s} - \frac{\bar{s}^2}{2} = -\frac{\overline{Q}}{4\pi} Ei\left(-\frac{\rho^2}{4\tau} \right), \tag{65}$$

condițiile (52) și (53) rămînînd neschimbate.

Dacă $\bar{s}$ este destul de mic, putem neglija pătratul său, regăsind formula binecunoscută a lui Theis

$$\bar{s} = -\frac{\overline{Q}}{4\pi} Ei\left(-\frac{\rho^2}{4\tau} \right). \tag{66}$$

Rezultatul pe care l-am obținut reprezintă deci un fel de a doua aproximație față de formula (66). Trebuie să reamintim că G. Dagan [2] a calculat recent, pe cale diferită, o corecție a formulei lui Theis.

Din (65) deducem

$$\bar{s} = 1 - \sqrt{1 + \frac{\overline{Q}}{2\pi} Ei\left(-\frac{\rho^2}{4\tau} \right)}, \tag{67}$$

ceea ce ne arată că $\bar{s}$ ia valori pozitive numai atunci cînd avem

$$Ei\left(-\frac{\rho^2}{4\pi} \right) > -\frac{\overline{Q}}{2\pi}. \tag{68}$$

Dacă se ia în considerație aspectul fizic al problemei, această restricție apare naturală, deoarece rabaterea adimensională $\bar{s}$ nu poate avea decît valori pozitive cuprinse între 0 și 1 ($0 \leqslant \bar{s} \leqslant 1$).

Pentru o valoare dată a lui $\overline{Q}$ se calculează deci, pornind de la (68), cea mai mică valoare a argumentului $\frac{\rho^2}{4\tau}$ pentru care este îndeplinită

condiția (68). Se determină apoi, cu ajutorul formulei (67), valoarea medie a lui $\bar{s}$. Remarcăm în acest scop că funcția $Ei\left(-\frac{\rho^2}{4\tau}\right)$ tinde destul de repede spre zero atunci cînd argumentul crește, ceea ce permite să se considere un interval finit de integrare.

Exemple de calcul. Pentru a ilustra considerațiile precedente vom prezenta în cele ce urmează rezultatele calculelor pe care le-am efectuat.

În tabela 1 am trecut valorile rabaterii pentru $\overline{Q} = 1$, calculate după trei procedee diferite numai pentru scurgerea într-un mediu poros

Tabela 1

η	0,00125	0,00150	0,00175	0,00200	0,00225	0,00250	0,00500	0,00750
$\bar{s}_T$	0,48610	0,47160	0,45940	0,44880	0,43940	0,43270	0,37610	0,34400
$\bar{s}_D$	0,59950	0,57410	0,55628	0,54081	0,52727	0,51694	0,43826	0,39470
$\bar{s}$	0,83330	0,76170	0,71504	0,68000	0,65186	0,63313	0,50221	0,44143
η	0,01000	0,01250	0,01500	0,01750	0,02000	0,02250	0,02500	0,05000
$\bar{s}_T$	0,32130	0,30380	0,28950	0,27740	0,26700	0,25780	0,24960	0,19640
$\bar{s}_D$	0,36453	0,34162	0,32315	0,30770	0,29453	0,28298	0,27277	0,20828
$\bar{s}$	0,40217	0,37358	0,35115	0,33277	0,31736	0,30401	0,29233	0,22077
η	0,07500	0,10000	0,12500	0,15000	0,17500	0,20000	0,22500	0,25000
$\bar{s}_T$	0,16610	0,14510	0,12920	0,11650	0,10610	0,09730	0,08972	0,08310
$\bar{s}_D$	0,17296	0,14912	0,13142	0,11751	0,10626	0,09685	0,08882	0,08188
$\bar{s}$	0,18281	0,15751	0,13884	0,12421	0,11241	0,10256	0,09415	0,08688
η	0,50000	0,75000	1,00000	1,25000	1,50000	1,75000	2,00000	
$\bar{s}_T$	0,04454	0,02708	0,01746	0,01165	0,00796	0,00553	0,00389	
$\bar{s}_D$	0,04262	0,02554	0,01633	0,01084	0,00738	0,00512	0,00359	
$\bar{s}$	0,04558	0,02746	0,01762	0,01171	0,00799	0,00554	0,00389	

omogen. Am notat cu $\bar{s}_T$ valorile calculate cu ajutorul formulei lui Theis, cu $\bar{s}_D$ cele care rezultă din formula lui Dagan [2] și cu $\bar{s}$ cele date de formula (67).

În afară de valorile mari ale lui η, corecția adusă de formula (67) are același sens ca și cea propusă de G. Dagan, făcînd să crească valorile date de formula lui Theis. Însă depărtarea dintre valorile $\bar{s}_D$ și $\bar{s}$ este considerabilă, mai ales pentru valorile mici ale lui η. În domeniul valorilor mari ale lui η, $\bar{s}$ este foarte apropiat de $\bar{s}_T$, ceea ce este firesc, dar rămîne superior lui $\bar{s}_T$, ceea ce nu este cazul pentru $\bar{s}_D$.

Am considerat și un mediu poros neomogen cu porozitatea constantă și coeficientul de filtrare variabil după legea

$$\bar{k} = a\zeta + b,$$

ceea ce ne dă

$$\bar{f}(\bar{s}) = \frac{a}{2}\bar{s}^2 - (a+b)\bar{s} + \frac{a}{2} + b$$

și

$$\overline{\Phi}(\bar{s}) = \frac{a}{6}\bar{s}^3 - \frac{a+b}{2}\bar{s}^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)\bar{s}.$$

Valoarea medie $\bar{s}_m$ a fost calculată, așa cum am precizat mai sus, plecînd de la formula (67). În acest mod am obținut valoarea constantei $\bar{\alpha}$. Valorile lui $\bar{s}$ rezultă apoi din formula

$$\frac{a}{6}\bar{s}^3 - \frac{a+b}{2}\bar{s}^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)\bar{s} = -\frac{1}{4\pi}Ei\left(-\bar{\alpha}\eta\right),$$

care se găsește din (62) cu $\overline{Q} = 1$.

Calculele au fost efectuate mai întîi pentru $a = 0{,}2$ și $b = 1$ și apoi pentru $a = -0{,}2$ și $b = 1$. Valorile constantei $\bar{\alpha}$ au fost găsite în modul indicat mai sus, respectiv ca valori inverse ale mediei $\bar{f}(\bar{s}_m)$ cu $\bar{s}_m$ obținut din (67) deoarece avem $\overline{m} = 1$. Aceste valori sînt $\bar{\alpha} = 1{,}41000$ pentru primul caz și $\bar{\alpha} = 1{,}61088$ pentru cel de-al doilea.

Tabela 2

$\bar{\alpha} = 1{,}41000$

η	0,00100	0,00125	0,00150	0,00175	0,00200	0,00225	0,00250	0,00500
$\bar{\alpha}\eta$	0,00141	0,00176	0,00212	0,00247	0,00282	0,00317	0,00353	0,00705
$\bar{s}$	0,67575	0,62592	0,58470	0,55961	0,53589	0,51645	0,50053	0,40448
η	0,00750	0,01000	0,01250	0,01500	0,01750	0,02000	0,02250	0,02500
$\bar{\alpha}\eta$	0,01058	0,01410	0,01763	0,02115	0,02468	0,02820	0,03173	0,03525
$\bar{s}$	0,35763	0,32365	0,29990	0,28120	0,26581	0,25278	0,24154	0,23171
η	0,05000	0,07500	0,10000	0,12500	0,15000	0,17500	0,20000	0,22500
$\bar{\alpha}\eta$	0,07050	0,10575	0,14100	0,17625	0,21150	0,24675	0,28200	0,31725
$\bar{s}$	0,17092	0,13860	0,11727	0,10166	0,08952	0,07973	0,07165	0,06483
η	0,25000	0,50000	0,75000	1,00000	1,25000	1,50000	1,75000	2,00000
$\bar{\alpha}\eta$	0,35250	0,70500	1,05750	1,41000	1,76250	2,11500	2,46750	2,82000
$\bar{s}$	0,05896	0,02721	0,01451	0,0828	0,00495	0,00300	0,00188	0,00119

Am găsit după aceea cea mai mică valoare a argumentului $\bar{\alpha}\eta$ care corespunde la $\bar{s} = 1$. În primul caz această valoare este 0,00069, iar în al doilea 0,00159. Considerînd apoi valoarea lui η mai mică decît 0,001,

$\bar{s}$ este rădăcina cuprinsă între 0 și 1 a unei ecuații de gradul al treilea, alei cărei rădăcini le-am găsit cu ajutorul metodei lui Newton. Rezultatele calculelor se găsesc în tabela 2 pentru $\bar{\alpha} = 1{,}41000$ și în tabela 3 pentru $\bar{\alpha} = 1{,}61088$.

Tabela 3

$\alpha = 1{,}61088$

η	0,00100	0,00125	0,00150	0,00175	0,00200	0,00225	0,00250	0,00500
$\bar{\alpha}\eta$	0,00161	0,00201	0,00242	0,00282	0,00322	0,00362	0,00403	0,00805
$\bar{s}$	0,93382	0,80011	0,74403	0,69782	0,66337	0,63656	0,61128	0,48464
η	0,00750	0,01000	0,01250	0,01500	0,01750	0,02000	0,02250	0,02500
$\bar{\alpha}\eta$	0,01208	0,01611	0,02014	0,02416	0,02819	0,03222	0,03624	0,04027
$\bar{s}$	0,42279	0,38253	0,35309	0,33006	0,31112	0,29527	0,28156	0,26951
η	0,05000	0,07500	0,10000	0,12500	0,15000	0,17500	0,20000	0,22500
$\bar{\alpha}\eta$	0,08054	0,12082	0,16109	0,20136	0,24163	0,28190	0,32218	0,36245
$\bar{s}$	0,19694	0,15734	0,13192	0,11341	0,09908	0,08762	0,07774	0,07023
η	0,25000	0,50000	0,75000	1,00000	1,25000	1,50000	1,75000	2,00000
$\bar{\alpha}\eta$	0,40272	0,80544	1,20816	1,61088	2,01360	2,41632	2,81904	3,22176
$\bar{s}$	0,06348	0,02718	0,01391	0,00754	0,00425	0,00246	0,00146	0,00087

Primul dintre aceste două cazuri corespunde la o creștere a coeficientului de filtrare după direcția verticalei, cu începere de la baza stratului, în timp ce al doilea corespunde la o situație inversă. Debitul fiind același, se observă că pentru $\eta < 0{,}5$ rabaterea este mai mare în cel de-al doilea caz. Ținînd seama de faptul că valorile mici ale lui η corespund vecinătății puțului și valorilor mari ale timpului, această situație apare naturală.

În ceea ce privește comparația cu valorile trecute în tabela 1 (mediu poros omogen cu $\bar{k} = 1$), remarcăm o oarecare anomalie. Într-adevăr, aceste valori ale lui $\bar{s}$ sînt mai mari decît cele din tabela 3, deși ar fi fost mai logic să se găsească între valorile din tabela 2 și cele din tabela 3. Această anomalie provine din faptul că valorile din tabela 1 au fost calculate neglijîndu-se în ecuația (63) $\bar{s}$ față de unitate, adică luînd $\bar{f}(\bar{s}) = 1$. Dacă utilizăm valoarea medie $\bar{s}_m$, calculată din (67), înlocuind în (63) factorul $1 - \bar{s}$ prin $1 - \bar{s}_m$, anomalia semnalată dispare.

4. **Concluzii.** În această lucrare am propus un procedeu de calcul care oferă posibilitatea de a se studia influența pe care o are variația caracteristicilor mediului poros asupra formei suprafeței libere. O va-

riantă a acestui procedeu este aplicabilă și la studiul scurgerilor cu suprafața liberă în mediile poroase omogene. Desigur, rezultatele sînt afectate de ipotezele simplificatoare pe care le-am reținut și de aproximația pe care am utilizat-o. Dar, ținînd seama de dificultățile inerente acestei probleme, sîntem de părere că formulele găsite prezintă un anumit interes.

Primită la redacție la 26 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Ciarnîi, *Strogoe dokazatelstvo formulî Dupuit dlia beznapornoi filtrații o promejutkom visacivaniia*, Dokladî AN SSSR, **LXXIX**, *6* (1951).
2. G. Dagan, *Second order correction of the formula of pumping test in unconfined aquifers*, Journal of Hydraulic Research, **5**, *2* (1967).
3. N. K. Ghirinski, *Kompleksnîi potențial potoka so svobodnoi poverhnostiiu v plaste otnositelno maloi moșnosti pri $k = f(z)$*, Dokladî AN SSSR, **LI**, *5* (1946).
4. T. Oroveanu, *Considérations sur l'écoulement à surface libre d'un liquide à travers un milieu poreux non homogène*, Revue de mécanique appliquée, **V**, *3* (1960).
5. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963, p. 247–257, 267–272.
6. T. Oroveanu, *Asupra formulei generalizate a lui Dupuit*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *5* (1961).
7. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *O neustanovinșihsia dvijeniiah gruntovîh vod pri filtrații iz vodohranilișci*, Prikladnaia matematika i mehanika, **XIII**, *2* (1949).

STUDIUL MANEVREI OPTIME DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL ÎN FAZA DE APROPIERE PE ORBITE ELIPTICE ŞI HIPERBOLICE (TEORIA NELINIARĂ)

de AL. MARINESCU, L. BEINER şi MARIA GAVRILĂ
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

521.1

În lucrare se studiază manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice şi hiperbolice în faza de apropiere. După ce se stabilesc ecuaţiile generale ale mişcării relative a aparatului urmăritor faţă de un sistem orbital legat de ţintă, se formulează problema variaţională a manevrei ca în lucrările [1] şi [2] şi se deduc ecuaţiile diferenţiale ale extremalelor. Se arată că aceste ecuaţii sînt generale şi că prin particularizarea lor se pot obţine ecuaţiile pentru manevra optimă de întîlnire pe orice fel de orbită conică. Se integrează ecuaţiile diferenţiale ale extremalelor pentru orbite eliptice şi hiperbolice şi se obţin legi optime de variaţie a parametrilor mişcării aparatului urmăritor în faza de apropiere.
Dezvoltările de calcul sînt însoţite de aplicaţii numerice pentru două cazuri.

NOTAŢII

$OXZY$	— sistem de axe de coordonate inerţial planetocentric;
$Axzy$	— sistem de axe de coordonate legat de aparatul urmărit (ţintă);
x,z,y	— coordonate ale aparatului urmăritor în sistemul $Axzy$;
ε	— excentricitatea orbitei ţintei;
p	— parametrul focal al orbitei ţintei;
$r_0\,(t)$	— raza vectoare a ţintei;
$\Phi\,(t)$	— anomalia adevărată a ţintei;
μ	— parametru gravitaţional;
t	— timpul;
$\tau = \tau_a + \tau_j$	— durata combustiei la aparatul urmăritor (durata manevrei);
τ_a	— durata fazei de apropiere;
τ_j	— durata fazei de întîlnire (joncţiune);
g	— acceleraţia gravitaţiei;
V_x, V_z, V_y	— componente ale vitezei relative a aparatului urmăritor în sistemul $Axzy$;

a_x, a_z, a_y — componente ale acceleraţiei datorită tracţiunii în sistemul $Axzy$;

r_{0_P} — raza vectoare la perigeu;

r_{0_0}, Φ_0 — coordonatele ţintei la momentul începerii manevrei de întîlnire;

r_{0_1}, Φ_1 — coordonatele ţintei la sfîrşitul fazei de apropiere (începutul fazei de întîlnire);

r_{0_2}, Φ_2 — idem, la sfîrşitul manevrei de întîlnire.

I. INTRODUCERE

În lucrările [1] şi [2] s-a studiat manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare, considerîndu-se astfel ecuaţiile liniare, cît şi ecuaţiile neliniare de mişcare relativă ale aparatului urmăritor. Pentru ambele cazuri s-a arătat în lucrările citate mai sus că problema variaţională a manevrei revenea la o problemă de extremum condiţionat. Se poate arăta că, formulînd problema variaţională ca în lucrările [1] şi [2], studiul manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orice fel de orbită conică se poate face prin particularizarea rezultatelor din prezenta lucrare, unde vom trata în detaliu întîlnirea pe orbite eliptice şi hiperbolice, orbita parabolică fiind de un interes mai redus pentru astronautică. După cum se ştie, întîlnirea pe orbite eliptice este actualmente în centrul atenţiei, iar întîlnirea pe orbite hiperbolice capătă importanţă în perspectiva zborurilor interplanetare.

Vom face un prim pas în rezolvarea problemei pe care ne-am propus-o observînd că manevra de întîlnire pe distanţe mari este compusă din două faze distincte:

1) *apropierea*, care se desfăşoară pe durate de ordinul a cel puţin 10 minute, începînd din momentul cînd distanţa relativă dintre aparate este în jurul a cel puţin 100 km, timp în care ţinta parcurge arce de orbită mari (de ordinul miilor de kilometri).

2) *întîlnirea propriu-zisă* (joncţiunea), care se desfăşoară pe durate de ordinul a 1 minut şi pe distanţe comparativ mici, timp în care ţinta parcurge arce de orbită mici.

În lucrarea de faţă se va studia mişcarea relativă a aparatului urmăritor în faza de apropiere cu ajutorul ecuaţiilor generale neliniare ce vor fi deduse în paragraful următor, arătîndu-se totodată că mişcarea în faza de întîlnire propriu-zisă (numită pe scurt în continuare, întîlnire) poate fi tratată prin liniarizarea aceloraşi ecuaţii. Acest lucru va fi făcut riguros într-o altă lucrare, în care se va indica şi modul de racordare a celor două faze ale manevrei.

II. ECUAŢIILE GENERALE ALE MIŞCĂRII RELATIVE A APARATULUI URMĂRITOR

Aparatul urmărit (prevăzut sau nu cu instalaţie de propulsie) se mişcă pe o orbită conică în raport cu Pămîntul sau altă planetă, avînd rigid legat de el sistemul de axe $Axzy$, faţă de care vor fi stabilite ecuaţiile mişcării relative a urmăritorului.

Fie deci sistemul fix de axe $OXZY$, de obicei considerat ca sistem planetocentric, şi sistemul mobil de axe $Axzy$, care efectuează o mişcare cunoscută faţă de sistemul fix (fig. 1).

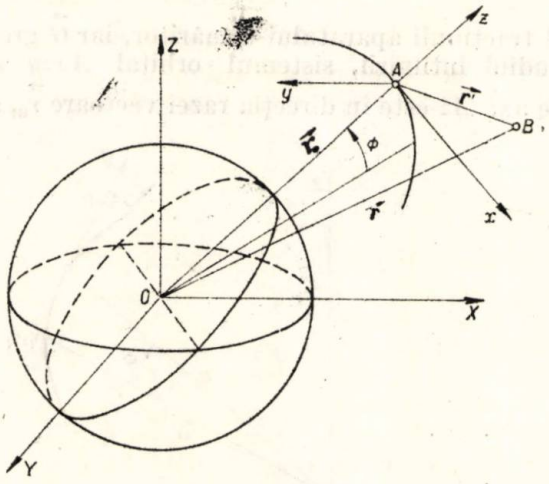


Fig. 1

În originea A a sistemului mobil se află ţinta; aparatul urmăritor B de masă M, prevăzut cu instalaţie de propulsie, este definit ca poziţie faţă de sistemul mobil prin vectorul $\vec{r}'(x, z, y)$, iar faţă de sistemul fix prin vectorul $\vec{r}(X, Z, Y)$, vectorul de poziţie al originei sistemului mobil A fiind $\vec{r}_0(X_0, Z_0, Y_0)$.

Notînd cu

$\vec{a}_r = \dfrac{\partial^2 \vec{r}'}{\partial t^2}$ — acceleraţia relativă a urmăritorului;

$\vec{a}_0 = \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$ — acceleraţia originii A a sistemului mobil (ţintei);

$\vec{\omega}$ — viteza unghiulară a sistemului mobil;

$\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ — acceleraţia unghiulară a sistemului mobil;

$\vec{V} = \dfrac{\partial \vec{r}'}{\partial t}$ — viteza relativă a urmăritorului;

$\vec{F}$ — rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra aparatului urmăritor,

ecuaţia vectorială a mişcării relative a aparatului urmăritor de masă M faţă de sistemul mobil se va scrie sub forma

$$M\vec{a}_r = -M\left[\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{V}\right] + \vec{T} + \vec{G}. \qquad (1)$$

Trebuie remarcat că, deoarece aparatele cosmice (urmăritor şi ţintă) se află în afara atmosferei, forţele aerodinamice se neglijează, deci

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{G},$$

$\vec{T}$ fiind vectorul tracţiunii aparatului urmăritor, iar $\vec{G}$ greutatea acestuia.

Pentru studiul întîlnirii, sistemul orbital $Axzy$ se consideră ca în figura 1, unde axa Az este în direcţia razei vectoare $\vec{r}_0$, axa Ax perpen-

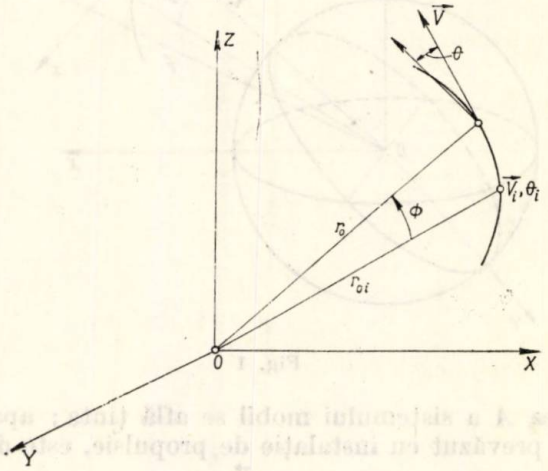


Fig. 2

diculară pe aceasta în planul orbitei şi inversă mişcării, iar Ay perpendiculară pe ele. Anomalia adevărată Φ defineşte poziţia unghiulară a razei vectoare $\vec{r}_0$ faţă de o poziţie la care sînt cunoscute pe orbită elementele mişcării, r_{0i} şi V_i, şi unghiul dintre viteză şi perpendiculară la raza vectoare, θ_i (fig. 2).

Vom avea, faţă de sistemul $Axzy$ [3],

$$\vec{a}_0\left(0, -\frac{\mu}{r_0^2}, 0\right); \quad \vec{\omega}\left(0, 0, \frac{d\Phi}{dt}\right); \quad \vec{\varepsilon}\left(0, 0, \frac{d^2\Phi}{dt^2}\right). \tag{2}$$

Întrucît ţinta A de care este legat sistemul mobil $Axzy$ se mişcă astfel încît momentul său cinetic este constant (mişcare kepleriană), putem scrie

$$r_0^2 \frac{d\Phi}{dt} = \text{const} = r_{0i} V_i \cos\theta_i. \tag{3}$$

Notînd parametrul focal al orbitei ţintei cu

$$p = \frac{V_i^2 r_{0i}^2 \cos^2\theta_i}{\mu},$$

deducem

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3}\sin\Phi. \tag{5}$$

Fie $\bar{g}(g_x, g_z, g_y) = \frac{\vec{G}}{M}$ acceleraţia gravitaţiei şi $\vec{a}(a_x, a_z, a_y) = \frac{\vec{T}}{M}$ acceleraţia datorită tracţiunii, proiecţiile de-a lungul axelor sistemului orbital $Axzy$ ale acceleraţiei gravitaţiei avînd expresiile

$$g_x = -\mu\frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$g_z = -\mu\frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{6}$$

$$g_y = -\mu\frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Notînd componentele vitezei relative cu

$$\frac{dx}{dt} = V_x;\ \frac{dz}{dt} = V_z;\ \frac{dy}{dt} = V_y$$

şi ţinînd seama de relaţiile (2), (4), (5) şi (6), din ecuaţia (1) vom obţine ecuaţiile generale ale mişcării relative a aparatului urmăritor pe cele trei axe [3]

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= V_x,\\
\frac{dV_x}{dt} &= \frac{\mu p}{r_0^4}x + 2V_z\frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3}z\sin\Phi - \mu\frac{x}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_x,\\
\frac{dz}{dt} &= V_z,\\
\frac{dV_z}{dt} &= \frac{\mu}{r_0^2} + \frac{\mu p}{r_0^4}z - 2V_x\frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3}x\sin\Phi -\\
&\quad -\mu\frac{r_0+z}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_z,\\
\frac{dy}{dt} &= V_y,\\
\frac{dV_y}{dt} &= -\mu\frac{y}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_y.
\end{aligned} \tag{7}$$

III. PROBLEMA VARIAŢIONALĂ

Problema variaţională a manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orice fel de orbită revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^\tau a^2 \, dt \tag{8}$$

cu condiţiile (7).

Scriem pentru aceasta ecuaţiile (7) sub forma

$$F_1 = \frac{dx}{dt} - V_x = 0,$$

$$F_2 = \frac{dV_x}{dt} - \frac{\mu p}{r_0^4} x - 2V_z \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} z \sin\Phi +$$

$$+ \mu \frac{x}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_x = 0,$$

$$F_3 = \frac{dz}{dt} - V_z = 0,$$

$$F_4 = \frac{dV_z}{dt} - \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\mu p}{r_0^4} z + 2V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \tag{9}$$

$$- \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} x \sin\Phi + \mu \frac{r_0 + z}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_z = 0,$$

$$F_5 = \frac{dy}{dt} - V_y = 0,$$

$$F_6 = \frac{dV_y}{dt} + \mu \frac{y}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_y = 0.$$

Cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_6$, alcătuim funcţia

$$F = a_x^2 + a_z^2 + a_j^2 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 + \lambda_5 F_5 + \lambda_6 F_6. \tag{10}$$

Problema se reduce deci la a găsi minimul necondiţionat al integralei

$$J' = \int_0^\tau F \, dt. \tag{11}$$

Ţinînd seama de funcţia (10), ecuaţiile lui Euler

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}} = 0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}} = 0$$

şi condiţiile sus-menţionate (9) duc la un sistem de ecuaţii diferenţiale care, integrat, va furniza funcţiile căutate $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, $a_x(t)$, $a_z(t)$, $a_y(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ... $\lambda_6(t)$, funcţii care caracterizează manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil.

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Ecuaţiile lui Euler (12) duc, în urma calculelor, la sistemul

$$-\lambda_2 \frac{\mu p}{r_0^4} + \lambda_2 \mu \frac{-2x^2 + (r_0+z)^2 + y^2}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \lambda_4 \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\Phi +$$

$$+ \lambda_4 \mu \frac{-3x(r_0+z)}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_6 \mu \frac{-3xy}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]} - \frac{d\lambda_1}{dt} = 0,$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_4 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \frac{d\lambda_2}{dt} = 0,$$

$$\lambda_2 \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\Phi + \lambda_2 \mu \frac{-3x(r_0+z)}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \lambda_4 \frac{\mu p}{r_0^4} +$$

$$+ \lambda_4 \mu \frac{x^2 - 2(r_0+z)^2 + y^2}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_6 \mu \frac{-3y(r_0+z)}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} -$$

$$- \frac{d\lambda_3}{dt} = 0, \qquad (13)$$

$$-2\lambda_2 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \lambda_3 - \frac{d\lambda_4}{dt} = 0,$$

$$\lambda_2 \mu \frac{-3xy}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_4 \mu \frac{-3y(r_0+z)}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$+ \lambda_6 \mu \frac{x^2 + (r_0+z)^2 - 2y^2}{[x^2 + (r_0+z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{d\lambda_5}{dt} = 0,$$

$$-\lambda_5 - \frac{d\lambda_6}{dt} = 0,$$

$$2a_x - \lambda_2 = 0,$$

$$2a_z - \lambda_4 = 0,$$

$$2a_y - \lambda_6 = 0.$$

Din ecuaţiile (7) şi (13) obţinem sistemul complet de ecuaţii diferenţiale ale extremalelor, pe care îl vom scrie sub forma

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \psi_1(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\mu p}{r_0^4} x + 2V_z \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} z \sin\Phi -$$

$$- \mu \frac{x}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_x =$$

$$= \psi_2(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z = \psi_3(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\mu}{r_0^2} + \frac{\mu p}{r_0^4} z - 2V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} x \sin\Phi -$$

$$- \mu \frac{r_0 + z}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_z =$$

$$= \psi_4(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \psi_5(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{dV_y}{dt} = - \mu \frac{y}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_y =$$

$$= \psi_6(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6), \qquad (14)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = - \lambda_2 \frac{\mu p}{r_0^4} + \lambda_2 \mu \frac{-2x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} -$$

$$- \lambda_4 \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\Phi + \lambda_4 \mu \frac{-3x(r_0 + z)}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$+ \lambda_6 \mu \frac{-3xy}{[x^2 + (r_0 + z)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \psi_7(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + 2\lambda_4 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} =$$

$$= \psi_8(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \lambda_2 \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3} \sin\Phi + \lambda_2\mu \frac{-3x(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} -$$

$$- \lambda_4 \frac{\mu p}{r_0^4} + \lambda_4\mu \frac{x^2 - 2(r_0+z)^2 + y^2}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$+ \lambda_6\mu \frac{-3y(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \psi_9(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -2\lambda_2 \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2} - \lambda_3 =$$

$$= \psi_{10}(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \lambda_2\mu \frac{-3xy}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$+ \lambda_4\mu \frac{-3y(r_0+z)}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_6\mu \frac{x^2+(r_0+z)^2-2y^2}{[x^2+(r_0+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \psi_{11}(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = -\lambda_5 = \psi_{12}(t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots, \lambda_6).$$

Sistemul (14) este general și poate fi soluționat prin aproximații succesive, deoarece funcțiile ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ sînt continue și lipschitziene.

Dacă în sistemul de mai sus (14) facem $\varepsilon = 0$ și $p = r_0 = R$, unde R este raza orbitei circulare, deoarece $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}$, se obține sistemul din lucrarea [2], iar dacă în plus considerăm componentele liniare ale accelerației gravitației se obține sistemul din lucrarea [1].

Întrucît fixarea riguroasă a valorilor iniţiale ale multiplicatorilor lui Lagrange $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$ este dificilă, vom apela la metodica din lucrarea [2], care recurge la problema circulară liniară [1]. Pentru aceasta vom liniariza sistemul (14), luînd pentru componentele acceleraţiei gravitaţiei expresiile liniare

$$g_x = -\frac{\mu}{r_0^3}\, x,$$

$$g_z = -\frac{\mu}{r_0^2} + \frac{2\mu}{r_0^3}\, z,$$

$$g_y = -\frac{\mu}{r_0^3}\, y,$$

iar pentru r_0 şi Φ valorile medii $r_0 \approx r_{0_m} = \frac{r_{0_0} + r_{0_2}}{2}$ şi $\Phi \approx \Phi_m = \frac{\Phi_0 + \Phi_2}{2}$, corespunzătoare porţiunii de orbită pe care are loc manevra de întîlnire (ambele faze); sistemul liniarizat se va scrie

$$\frac{dx}{dt} = V_x,$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\mu p}{r_{0m}^4}\, x + 2V_z \frac{\sqrt{\mu p}}{r_{0m}^2} - \frac{2\mu\varepsilon}{r_{0m}^3}\, z \sin\Phi_m - \frac{\mu}{r_{0m}^3}\, x + a_x,$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z,$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\mu p}{r_{0m}^4}\, z - 2V_x \frac{\sqrt{\mu p}}{r_{0m}^2} + \frac{2\mu\varepsilon}{r_{0m}^3}\, x \sin\Phi_m + \frac{2\mu}{r_{0m}^3}\, z + a_z, \qquad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\mu}{r_{0m}^3}\, y + a_y.$$

Rezolvînd identic ca mai înainte problema variaţională pentru sistemul liniarizat (15), se obţin nişte expresii liniare ale funcţiilor $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_6(t)$, în care, făcînd $t = 0$, se capătă valorile $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$, necesare integrării sistemului neliniar (14).

Reamintindu-ne că manevra de întîlnire este alcătuită din două faze, şi anume apropierea, caracterizată prin durată şi distanţe de des-

făşurare mari, şi întîlnirea, care are loc într-un timp scurt şi pe un arc mic de orbită a ţintei, rezultă imediat că liniarizarea este aplicabilă riguros fazei de întîlnire, întrucît în decursul ei r_0 şi Φ rămîn practic constante. Se poate deci conchide că faza de apropiere a manevrei de întîlnire este descrisă de soluţiile sistemului (14) cu constantele λ_{10}, $\lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$ aproximate în modul indicat, în timp ce faza de întîlnire va fi descrisă de soluţiile sistemului liniarizat (15); datele orbitale r_{0_m} şi Φ_m iau pentru faza de apropiere valorile indicate corespunzătoare întregii manevre, iar pentru faza de întîlnire valori corespunzătoare arcului de orbită pe care aceasta are loc $r_{0_m} = \frac{r_{0_1} + r_{0_2}}{2}$, $\Phi_m = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}$.

Sistemul (15) se mai scrie

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= V_x, \\
\frac{dV_x}{dt} &= \alpha_1 x - \alpha_2 z + \alpha_3 V_z + a_x, \\
\frac{dz}{dt} &= V_z, \\
\frac{dV_z}{dt} &= \alpha_2 x + \beta_1 z - \alpha_3 V_x + a_z, \\
\frac{dy}{dt} &= V_y, \\
\frac{dV_y}{dt} &= -\gamma_1 y + a_y,
\end{aligned} \tag{16}$$

unde coeficienţii depind de caracteristicile orbitei

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\mu p}{r_{0m}^4} - \frac{\mu}{r_{0m}^3}, \\
\alpha_2 &= 2\frac{\mu\varepsilon}{r_{0m}^3} \sin \Phi_m, \\
\alpha_3 &= 2\frac{\sqrt{\mu p}}{r_{0m}^2}, \\
\beta_1 &= \frac{\mu p}{r_{0m}^4} + \frac{2\mu}{r_{0m}^3}, \\
\gamma_1 &= \frac{\mu}{r_{0m}^3}.
\end{aligned} \tag{17}$$

După ce am determinat $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$, se poate porni la calcularea în primă aproximaţie a soluţiilor sistemului (14).

Scriind în aproximaţia de ordinul n

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{(n)}}{dt} &= \psi_1(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)}),\\
\frac{dV_x^{(n)}}{dt} &= \psi_2(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\lambda_6^{(n)}}{dt} &= \psi_{12}(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)}),
\end{aligned} \tag{18}$$

prin integrare se capătă

$$\begin{aligned}
x^{(n)} &= x_0 + \int_0^t \psi_1(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)})\, dt,\\
V_x^{(n)} &= V_{x_0} + \int_0^t \psi_2(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)})\, dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_6^{(n)} &= \lambda_{60} + \int_0^t \psi_{12}(t, x^{(n-1)}, \ldots, V_x^{(n-1)}, \ldots, \lambda_6^{(n-1)})\, dt.
\end{aligned} \tag{19}$$

Deci, avînd datele iniţiale $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0$, $y(0) = y_0$, $V_x(0) = V_{x_0}, V_z(0) = V_{z_0}$, $V_y(0) = V_{y_0}$, care practic se pot determina la începutul manevrei, şi $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$, soluţiile în primă aproximaţie sînt

$$x^{(1)} = x_0 + V_{x_0} t,$$

$$V_x^{(1)} = V_{x_0} + \int_0^t \left[\frac{\mu p}{r_0^4(t)} x_0 + 2 V_{z_0} \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3(t)} z_0 \sin \Phi(t) - \mu \frac{x_0}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_{20}}{2} \right] dt,$$

$$z^{(1)} = z_0 + V_{z_0} t,$$

$$V_z^{(1)} = V_{z_0} + \int_0^t \left[\frac{\mu}{r_0^2(t)} + \frac{\mu p}{r_0^4(t)} z_0 - 2 V_{x_0} \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3(t)} x_0 \sin \Phi(t) - \mu \frac{r_0(t) + z_0}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_{40}}{2} \right] dt,$$

$$y^{(1)} = y_0 + V_{y_0} t,$$

$$V_y^{(1)} = V_{y_0} + \int_0^t \left[-\mu \frac{y_0}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_{60}}{2} \right] dt,$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + \int_0^t \left[-\lambda_{20} \frac{\mu p}{r_0^4(t)} + \lambda_{20}\mu \frac{-2x_0 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} - \right.$$

$$- \lambda_{40} \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3(t)} \sin \Phi(t) + \lambda_{40}\mu \frac{-3x_0(r_0(t) + z_0)}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\left. + \lambda_{60}\mu \frac{-3x_0 y_0}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right] dt,$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} + \int_0^t \left[-\lambda_{10} + 2\lambda_{40} \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2(t)} \right] dt, \tag{20}$$

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_{30} + \int_0^t \left[\lambda_{20} \frac{2\mu\varepsilon}{r_0^3(t)} \sin \Phi(t) + \lambda_{20}\mu \frac{-3x_0(r_0(t) + z_0)}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} - \right.$$

$$- \lambda_{40} \frac{\mu p}{r_0^4(t)} + \lambda_{40}\mu \frac{x_0^2 - 2(r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\left. + \lambda_{60}\mu \frac{-3y_0(r_0(t) + z_0)}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right] dt,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_{40} + \int_0^t \left[-2\lambda_{20} \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0^2(t)} - \lambda_{30} \right] dt,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \lambda_{50} + \int_0^t \left[\lambda_{20}\mu \frac{-3x_0 y_0}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \lambda_{40}\mu \frac{-3y_0(r_0(t) + z_0)}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_{60}\mu \frac{x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 - 2y_0^2}{[x_0^2 + (r_0(t) + z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right] dt,$$

$$\lambda_6^{(1)} = \lambda_{60} - \lambda_{50} t.$$

Introducînd dependenţele funcţionale

$$r_0 = r_0(t),$$

$$\sin\Phi = \sin\Phi(t)$$

pentru elipsă şi hiperbolă, se poate trece la integrarea sistemului (20), obţinîndu-se toate elementele mişcării relative a aparatului urmăritor în timpul fazei de apropiere.

IV. APLICAŢII

În scopul efectuării unor aplicaţii numerice efective va trebui să găsim expresiile finale ale extremalelor (20) operînd integralele şi considerînd, aşa cum am menţionat anterior, pentru λ_{10}, λ_{20}, ..., λ_{60} valorile date de teoria liniară.

Pentru a efectua integralele din (20) vor trebui găsite într-o formă uşor integrabilă funcţiile $r_0(t)$ şi $\sin\Phi(t)$. Din teoria mişcării kepleriene se ştie că legătura între Φ şi t pentru o orbită eliptică de parametru p şi excentricitate ε este [4]

$$t_{\Phi_i\Phi_f} = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arcsin\frac{\varepsilon+\cos\Phi_f}{1+\varepsilon\cos\Phi_f} - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arcsin\left(\frac{\varepsilon+\cos\Phi_i}{1+\varepsilon\cos\Phi_i}\right) - \frac{\varepsilon p\sin\Phi_f}{1+\varepsilon\cos\Phi_f} + \frac{\varepsilon p\sin\Phi_i}{1+\varepsilon\cos\Phi_i}\right], \qquad (21)$$

unde $t_{\Phi_i\Phi_f}$ este timpul în care se parcurge arcul de elipsă subîntins de unghiul $\Phi_f - \Phi_i$ (fig. 3). Razele vectoare la timpii respectivi se deduc din ecuaţiile generale ale conicelor

$$r_{0_f} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\Phi_f},$$

$$r_{0_i} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\Phi_i}, \qquad (22)$$

Avînd $\Phi = \Phi(t)$ calculat cu relaţia (21), rezultă $\sin\Phi = \sin\Phi(t)$. Relaţiile sînt deduse în ipoteza că la $t = 0$, $\Phi = 0$ şi $r_0 = r_{0_p}$ (originea la perigeul P).

Trasînd pentru 1/2 elipsă (de la P la A) r_0, Φ şi $\sin\Phi$ ca funcţii de timp, cu $r_{0_p} = 6\,560$ km şi $\varepsilon = 0{,}1$; 0,2, se obţin curbele din figura 4.

Se vede că, pentru porţiunea de elipsă cuprinsă între $\Phi \approx 30° - 150°$ (adică în regiunea de mică curbură, care este în general indicată

pentru întîlnirile orbitale), putem asimila $r_0(t)$ cu o dreaptă și $\sin \Phi(t)$ cu o parabolă cubică ce trece prin origine

$$\begin{aligned} r_0 &= mt + n, \\ \sin \Phi &= a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \end{aligned} \tag{23}$$

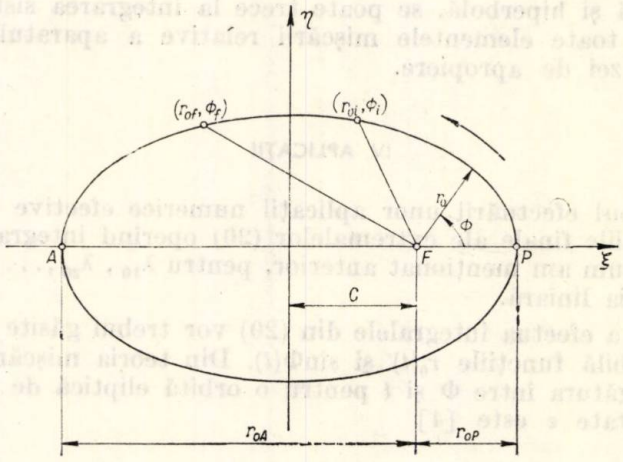


Fig. 3

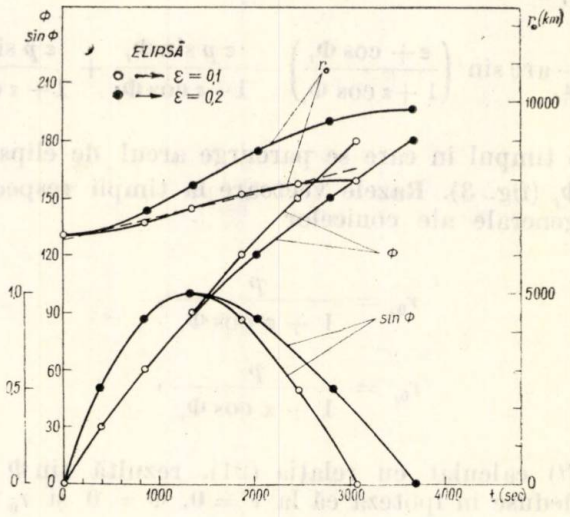


Fig. 4

unde coeficienții m, n, a_1, a_2, a_3 se determină punînd condiția ca r_0 și Φ să treacă prin două, respectiv, trei puncte de pe curbele trasate cu relațiile (21) și (22).

Pentru hiperbola de parametru p și excentricitate ε avem relațiile

$$t_{\Phi_i\Phi_f} = \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{\varepsilon^2-1}\left[\frac{\varepsilon p \sin\Phi_f}{1+\varepsilon\cos\Phi_f} - \frac{\varepsilon p \sin\Phi_i}{1+\varepsilon\cos\Phi_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln\left(\frac{\frac{\varepsilon\sin\Phi_f+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon\cos\Phi_f} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}}{\frac{\varepsilon\sin\Phi_i+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon\cos\Phi_i} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}}\right)\right], \quad (24)$$

$$r_{0_i} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\Phi_i}; \quad r_{0_f} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\Phi_f}. \quad (22\text{ bis})$$

Procedînd analog ca la elipsă cu $r_{0_P} = 6\,560$ km și $\varepsilon = 1,\ 2\,;\ 2$, se obțin curbele din figura 6; examinîndu-le, observăm că pentru $\Phi > 60° - 70°$, deci tot în zona de mică curbură a traiectoriei, putem scrie

$$\begin{aligned} r_0 &= mt + n \\ \sin\Phi &= q = \text{const.} \end{aligned} \quad (25)$$

În vederea determinării parametrilor $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$ și pentru aplicațiile numerice care vor urma s-au considerat două orbite, cu următoarele date:

a) orbita eliptică

$r_{0_P} = 6560$ km;	$r_{0_1} = 7408$ km;	$\Phi_1 = 105^0$,
$\varepsilon = 0,1$;	$r_{0_2} = 7472$ km;	$\Phi_2 = 110°$,
$r_{0_0} = 6872$ km;	$\Phi_0 = 60°$;	$\tau_a = 752$ s,
$m = 0,3$;	$n = 6385$;	$\tau = 842$ s,
$a_1 = 1,52\cdot10^{-3}$;	$a_2 = 0,63\cdot10^{-6}$;	$a_3 = 0,04\cdot10^{-9}$;
$x_0 = -80$ km;	$V_{x_0} = 100$ m/s;	
$z_0 = 120$ km;	$V_{z_0} = -110$ m/s;	
$y_0 = 1,5$ km;	$V_{y_0} = -15$ m/s;	

b) orbita hiperbolică

$r_{0_P} = 6560$ km;	$r_{0_1} = 15399$ km;	$\Phi_1 = 93^0$,
$\varepsilon = 1,2$;	$r_{0_2} = 16118$ km;	$\Phi_2 = 95^0$,
$r_{0_0} = 11088$ km;	$\Phi_0 = 75^0$;	$\tau_a = 710$ s,
$m = 0,65$;	$n = 14\,000$;	$\tau = 826$ s,
$x_0 = -60$ km;	$V_{x_0} = 80$ m/s;	$q = 0,85$.
$z_0 = 100$ km;	$V_{z_0} = -95$ m/s;	
$y_0 = 1$km;	$V_{y_0} = -10$ m/s;	

Pentru pămînt $\mu = 399000$ km^3/s^2.

Pe baza teoriei liniare elaborată [1] şi aplicată identic sistemului liniarizat (16), unde $\tau = \tau_a + \tau_1$, ţinînd seama de condiţiile iniţiale s-au găsit următoarele expresii ale multiplicatorilor lui Lagrange :

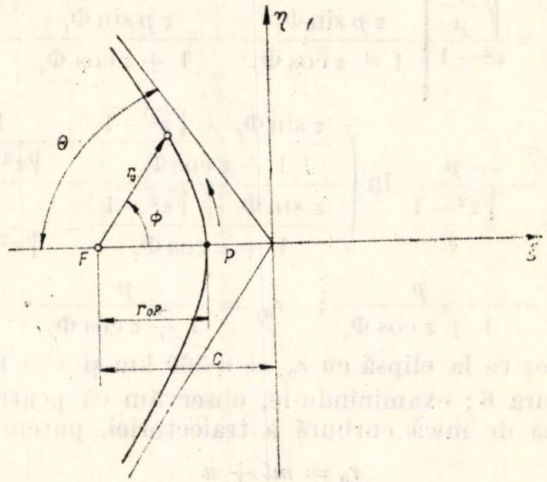


Fig. 5

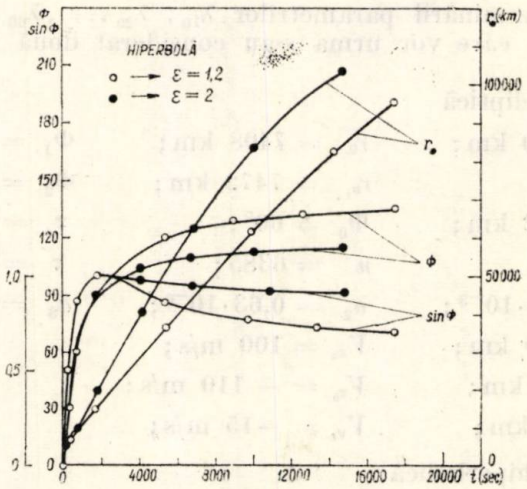


Fig. 6

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_2 C_2}{K}\sin Kt + \frac{\alpha_2 C_2}{K}\cos Kt + C_3,$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{\alpha_2 C_1}{K} - \frac{\alpha_2 C_2}{K^2}\right)\sin Kt - \left(\frac{\alpha_3 C_2}{K} + \frac{\alpha_2 C_1}{K^2}\right)\cos Kt - C_3 t + C_4,$$

$$\lambda_3 = \left(-\frac{\alpha_3^2 C_1}{K} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_2}{K^2} + K C_1\right)\sin Kt + \left(\frac{\alpha_3^2 C_2}{K} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_1}{K^2} - K C_2\right)\cos Kt +$$
$$+ \alpha_3 C_3 t - \alpha_3 C_4, \qquad (26)$$

$$\lambda_4 = C_1 \cos Kt + C_2 \sin Kt,$$

$$\lambda_5 = -\omega C_6 \cos\omega t + \omega C_5 \sin\omega t,$$

$$\lambda_6 = C_5 \cos\omega t + C_6 \sin\omega t,$$

$$K^2 = \alpha_3^2 - \beta_1,$$

$$\omega^2 = \gamma_1.$$

Făcînd în aceste ecuaţii $t = 0$, vom obţine valorile iniţiale căutate ale multiplicatorilor lui Lagrange

$$\lambda_{10} = \frac{\alpha_2 C_2}{K} + C_3,$$

$$\lambda_{20} = -\frac{\alpha_3 C_2}{K} - \frac{\alpha_2 C_1}{K^2} + C_4,$$

$$\lambda_{30} = \frac{\alpha_3^2 C_2}{K} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 C_1}{K^2} - K C_2 - \alpha_3 C_4, \tag{27}$$

$$\lambda_{40} = C_1,$$

$$\lambda_{50} = -\omega C_6,$$

$$\lambda_{60} = C_5.$$

Prin integrarea sistemului liniarizat de ecuaţii de mişcare (16) şi a sistemului aferent de extremale rezultat din punerea problemei variaţionale, se obţin soluţiile problemei liniare

$$x(t), z(t), y(t), V_x(t), V_z(t), V_y(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_6(t).$$

Aceste soluţii conţin 12 constante arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, pentru a căror determinare dispunem de următoarele condiţii la limită:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; & V_x(0) &= V_{x0}, \\ z(0) &= z_0; & V_z(0) &= V_{z0}, \\ y(0) &= y_0; & V_y(0) &= V_{y0}, \\ x(\tau) &= 0; & V_x(\tau) &= 0, \\ z(\tau) &= 0; & V_z(\tau) &= 0, \\ y(\tau) &= 0; & V_y(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

În felul acesta dispunem de toate datele necesare calculării valorilor iniţiale ale multiplicatorilor lagrangieni daţi de expresiile (27).

Avînd datele iniţiale x_0, z_0, y_0, V_{x_0}, V_{z_0}, V_{y_0}, λ_{10}, $\lambda_{20}, \ldots, \lambda_{60}$, precum şi expresiile funcţiilor $r_0(t)$ şi $\sin\Phi(t)$, putem trece la efectuarea integralelor din (20), pentru a determina principalii parametri ai mişcării în timpul fazei de apropiere, şi anume x, z, y, V_x, V_z, V_y, iar apoi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$, din care vom deduce expresiile acceleraţiei datorită tracţiunii a_x, a_z, a_y.

Pentru orbita *eliptică*, introducînd notaţiile *)

$$\begin{aligned} X^2 &= x_0^2 + y_0^2, \\ Y &= n + z_0, \\ R &= X^2 + (mt + Y)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

şi efectuînd calculele, vom obţine următoarele soluţii în primă aproximaţie :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x_0 + V_{x_0} t, \\ z^{(1)} &= z_0 + V_{z_0} t, \\ y^{(1)} &= y_0 + V_{y_0} t, \end{aligned} \tag{30}$$

$$V_x^{(1)} = V_{x_0} - \frac{\mu p x_0}{3m(mt+n)^3} - 2V_{z_0}\frac{\sqrt{\mu p}}{m(mt+n)} -$$

$$- \frac{2\mu\varepsilon z_0}{m(mt+n)^2}\left[a_3 t^3 + \frac{2n a_3}{m} t^2 - \left(a_1 - \frac{2a_2 n}{m} + \frac{2a_3 n^2}{m^2}\right) t - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1 n}{2m} + \frac{3a_2 n^2}{2m^2} - \frac{5a_3 n^3}{2m^3}\right] - \frac{2\mu\varepsilon z_0}{m^3}\left(a_2 - \frac{3a_3 n}{m}\right)\ln(mt+n) -$$

$$- \frac{\mu x_0 (mt+Y)}{m X^2 \sqrt{R}} + \frac{\lambda_{20}}{2} t,$$

$$V_z^{(1)} = V_{z_0} - \frac{\mu}{m(mt+n)} - \frac{\mu p z_0}{3m(mt+n)^3} + \frac{2V_{x_0}\sqrt{\mu p}}{m(mt+n)} +$$

$$+ \frac{2\mu\varepsilon x_0}{m(mt+n)^2}\left[a_3 t^3 + \frac{2n a_3}{m} t^2 - \left(a_1 - \frac{2a_2 n}{m} + \frac{2a_3 n^2}{m^2}\right) t - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1 n}{2m} + \frac{3a_2 n^2}{2m^2} - \frac{5a_3 n^3}{2m^3}\right] + \frac{2\mu\varepsilon x_0}{m^3}\left(a_2 - \frac{3a_3 n}{m}\right)\ln(mt+n) +$$

$$+ \frac{\mu}{m\sqrt{R}} + + \frac{\lambda_{40}}{2} t,$$

*) A nu se confunda aici X, Y, R cu coordonatele în sistemul inerţial, respectiv raza orbitei circulare.

$$V_y^{(1)} = V_{y_0} - \frac{\mu\, y_0\,(mt + Y)}{mX^2\sqrt{R}} + \frac{\lambda_{60}}{2}\,t,$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + \frac{\lambda_{20}\,\mu p}{3m\,(mt+n)^3} - \frac{2\mu\,\varepsilon\,\lambda_{40}}{m\,(mt+n)^2}\left[a_3\,t^3 + \frac{2n\,a_3}{m}\,t^2 - \right.$$

$$\left. - \left(a_1 - \frac{2a_2\,n}{m} + \frac{2a_3\,n^2}{m^2}\right)t - \frac{a_1\,n}{2m} + \frac{3a_2\,n^2}{2m^2} - \frac{5a_3\,n^3}{2m^3}\right] -$$

$$- \frac{2\mu\,\varepsilon\,\lambda_{40}}{m^3}\left(a_2 - \frac{3a_3\,n}{m}\right)\ln\,(mt+n) + \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[\frac{\lambda_{20}\,(y_0^2 - 2x_0^2 - X^2)}{3m\,X^4} \times\right.$$

$$\left. \times\,(mt+Y) + \frac{x_0\,\lambda_{40}}{m} - \frac{x_0\,y_0\,\lambda_{60}\,(mt+Y)}{mX^2}\right] + \qquad (31)$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{R}}\left[\frac{2\lambda_{20}\,(y_0^2 - 2x_0^2)\,(mt+Y)}{3m\,X^4} + \frac{\lambda_{20}\,(mt+Y)}{3m\,X^2} - \frac{2x_0\,y_0\,\lambda_{60}\,(mt+Y)}{m\,X^4}\right],$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} - \lambda_{10}\,t - \frac{2\lambda_{40}\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)},$$

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_{30} + \frac{2\lambda_{20}\,\mu\,\varepsilon}{m\,(mt+n)^2}\left[a_3\,t^3 + \frac{2n\,a_3}{m}\,t^2 - \left(a_1 - \frac{2a_2\,n}{m} + \frac{2a_3\,n^2}{m^2}\right)t - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1\,n}{2m} + \frac{3a_2\,n^2}{2m^2} - \frac{5a_3\,n^3}{2m^3}\right] + \frac{2\lambda_{20}\,\mu\,\varepsilon}{m^3}\left(a_2 - \frac{3a_3\,n}{m}\right)\ln\,(mt+n) +$$

$$+ \frac{\lambda_{40}\,\mu p}{3m\,(mt+n)^3} + \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[\frac{x_0\,\lambda_{20}}{m} + \frac{\lambda_{40}\,(mt+Y)}{m} + \frac{y_0\,\lambda_{60}}{m}\right],$$

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_{40} + \frac{2\lambda_{20}\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)} - \lambda_{30}\,t,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \lambda_{50} + \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[-\frac{x_0\,y_0\,\lambda_{20}\,(mt+Y)}{mX^2} + \frac{y_0\,\lambda_{40}}{m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{60}\,(x_0^2 - 2y_0^2)\,(mt+Y)}{3m\,X^2} - \frac{\lambda_{60}\,(mt+Y)}{3m}\right] +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{R}}\left[-\frac{2x_0\,y_0\,\lambda_{20}\,(mt+Y)}{mX^4} + \frac{2\lambda_{60}\,(x_0^2 - 2y_0^2)\,(mt+Y)}{3m\,X^4} + \frac{\lambda_{60}\,(mt+Y)}{3m\,X^2}\right],$$

$$\lambda_6^{(1)} = \lambda_{60} - \lambda_{50}\, t,$$

$$a_x^{(1)} = \frac{\lambda_2^{(1)}}{2},$$

$$a_z^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{2},$$

$$a_y^{(1)} = \frac{\lambda_6^{(1)}}{2}.$$

Pentru orbita *hiperbolică*, soluțiile în prima aproximație vor fi

$$x^{(1)} = x_0 + V_{x_0}\, t,$$

$$z^{(1)} = z_0 + V_{z_0}\, t,$$

$$y^{(1)} = y_0 + V_{y_0}\, t,$$

$$V_x^{(1)} = V_{x_0} - \frac{\mu p\, x_0}{3m\,(mt+n)^3} - 2V_{z_0}\frac{\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)} +$$

$$+ \frac{\mu\varepsilon\, z_0\, q}{m\,(mt+n)^2} - \frac{\mu\, x_0\,(mt+Y)}{mX^2\sqrt{R}} + \frac{\lambda_{20}}{2}\, t,$$

$$V_z^{(1)} = V_{z_0} - \frac{\mu p\, z_0}{3m\,(mt+n)^3} - \frac{\mu\varepsilon\, x_0\, q}{m\,(mt+n)^2} - \frac{\mu}{m\,(mt+n)} +$$

$$+ 2V_{x_0}\frac{\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)} + \frac{\mu}{m\sqrt{R}} + \frac{\lambda_{40}}{2}\, t,$$

$$V_y^{(1)} = V_{y_0} - \frac{\mu\, y_0\,(mt+Y)}{mX^2\sqrt{R}} + \frac{\lambda_{60}}{2}\, t,$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + \frac{\mu p\, \lambda_{20}}{3m\,(mt+n)^3} + \frac{\mu\varepsilon\, \lambda_{40}\, q}{m\,(mt+n)^2} +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[\frac{\lambda_{20}\,(mt+Y)\,(y_0^2 - 2x_0^2 - X^2)}{3m\,X^2} + \frac{\lambda_{40}\, x_0}{m} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_0\, y_0\, \lambda_{60}\,(mt+Y)}{mX^2}\right] + \frac{\mu}{\sqrt{R}}\left[\frac{2\lambda_{20}\left(y_0^2 - 2x_0^2 + \frac{X^2}{2}\right)(mt+Y)}{3m\,X^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2x_0\, y_0\, \lambda_{60}\,(mt+Y)}{mX^4}\right],$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} - \lambda_{10}\, t - 2\lambda_{40}\frac{\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)},$$

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_{30} - \frac{\lambda_{20}\,\mu\varepsilon\, q}{m\,(mt+n)^2} + \frac{\lambda_{40}\,\mu p}{3m\,(mt+n)^3} + \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[\frac{x_0\,\lambda_{20}}{m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{40}\,(mt+Y)}{m} + \frac{\lambda_{60}\,y_0}{m}\right],$$

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_{40} + 2\lambda_{20}\frac{\sqrt{\mu p}}{m\,(mt+n)} - \lambda_{30}\, t, \tag{32}$$

$$\lambda_5^{(1)} = \lambda_{50} + \frac{\mu}{\sqrt{R^3}}\left[-\frac{x_0\, y_0\,\lambda_{20}\,(mt+Y)}{mX^2} + \frac{y_0\,\lambda_{40}}{m} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_0^2 - 2y_0^2)\,(mt+Y)\,\lambda_{60}}{3m\,X^2} - \frac{\lambda_{60}\,(mt+Y)}{3m}\right] +$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{R}}\left[-\frac{2x_0\, y_0\,\lambda_{20}\,(mt+Y)}{mX^4} + \frac{\lambda_{60}\,(mt+Y)}{3m\,X^2} + \frac{2\lambda_{60}\,(x_0^2 - 2y_0^2)\,(mt+Y)}{3m\,X^4}\right],$$

$$\lambda_6^{(1)} = \lambda_{60} - \lambda_{50}\, t,$$

$$a_x^{(1)} = \frac{\lambda_2^{(1)}}{2},$$

$$a_z^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{2},$$

$$a_y^{(1)} = \frac{\lambda_6^{(1)}}{2}.$$

Pe baza extremalelor în forma finală (31), (32) şi cu datele sus-menţionate pentru cele două orbite s-au calculat în cadrul teoriei neliniare expuse componentele acceleraţiei datorită tracţiunii caracterizînd faza de apropiere a manevrei de întîlnire cu minimum de combustibil.

Rezultatele sînt înscrise în graficul din figura 7 pentru orbita eliptică şi în cel din figura 8 pentru orbita hiperbolică.

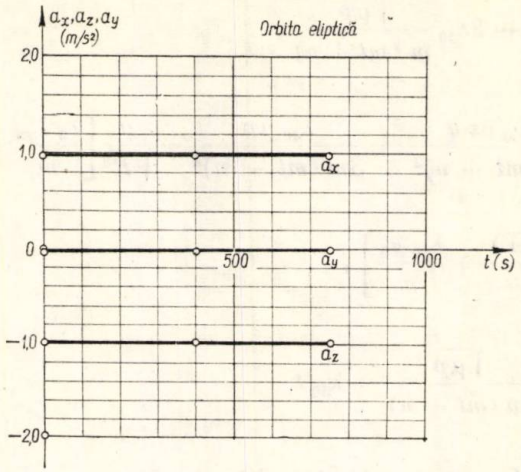


Fig. 7

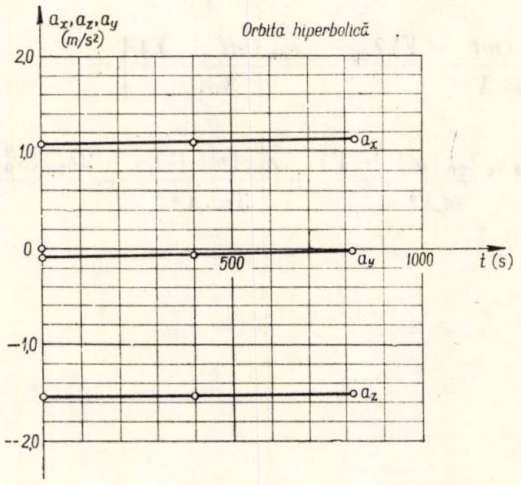


Fig. 8

V. CONCLUZII

Dezvoltările de calcul din lucrarea de faţă arată că, formulînd în cazul general problema variaţională ca în lucrările [1] şi [2], studiul manevrei optimale de întîlnire pe orice fel de orbită conică atît în faza de apropiere, cît şi de întîlnire propriu-zisă se poate face prin particularizarea rezultatelor obţinute aici. În cercetarea întreprinsă în special asupra manevrei optime de întîlnire pe orbite eliptice şi hiperbolice în faza de apropiere (orbita parabolică este de mai mică importanţă pentru astronautică), calculele pe baza extremalelor obţinute formulînd problema variaţională aşa cum s-a indicat arată că acceleraţia datorită tracţiunii

este aproximativ constantă (componentele după cele trei axe ale sistemului orbital, figurile 7 şi 8 sînt constante). Se remarcă, observînd condiţiile iniţiale, că componentele importante ale acceleraţiei datorită tracţiunii sînt în planul orbitei. Acceleraţia datorită tracţiunii fiind aproximativ constantă, deoarece variaţia masei aparatului urmăritor este mică, rezultă că tracţiunea este aproximativ constantă. Acest lucru vine să confirme în cazul mişcării relative rezultatele lui Lawden din lucrările [6], [7] şi [8] unde se arată că distanţa dintre două puncte fixe cu minimum de combustibil se străbate în regim de tracţiune constantă. Se pot concepe şi în cazul apropierii pe distanţe foarte mari porţiuni străbătute de aparatul urmăritor în regim de tracţiune constantă alternate de porţiuni cu motorul deconectat. Pe de altă parte, datele furnizate de experienţe pe simulatoare din lucrarea [9] arată valori de ordinul unităţii pentru acceleraţiile datorite tracţiunii pentru condiţii iniţiale apropiate de cele din prezenta lucrare. Şi acest lucru este în acord cu rezultatele obţinute aici.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Contribution à l'étude de certains manœuvres optimales pour le rendez-vous des engins sur les orbites circulaires*, Proceedings of the XVI-th International Astronautical Congress, Atena, 1965.
2. — *Sur la manœuvre optimale pour le rendez-vous des engins sur des orbites circulaires à minimum de combustible, compte tenu des equations non linéaires du mouvement de l'engin poursuivant*, XVIII-th International Astronautical Congress, Belgrad, 1967.
3. AL. MARINESCU, C. GUŢĂ, *Ecuaţiile generale de mişcare a aparatelor cosmice în procesul de apropiere şi întîlnire pe orbite*, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, nr. 6, 1967.
4. K. EHRICKE, *Space Flight*, vol. I, D. Van Nostrand 1960, New York, Toronto.
5. I. M. RÎJIK, I. S. GRADSTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1955.
6. D. F. LAWDEN, *Optimal trajectories*, Report RR-59-1186-7, Radiation Inc (Melbourne), May 1959.
7. — *Minimal Rocket Trajectories*, Journal of the American Rocket Society, **23**, 6 (1953).
8. — *Fundamentals of Space Navigation*, Journal of the British Interplanetary Society, **13**, 2 (1954).
9. B. J. ROBERTS, I. E. FARBER, A. C. LARSON, *Simulation of Rendez-Vous under Adverse Dynamic Condition*, Symposium on Space Rendez-Vous Rescue and Recovery. Edwards Air Force Base, September, 1963.

UNELE PROBLEME ALE CALCULULUI STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE ÎN DOMENIUL PLASTIC *)

S. RĂUTU şi VETURIA CHIROIU
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

624.07 : 539.374

Se dau metode de lucru simplificate privind calculul capacităţii portante a structurilor static nedeterminate, renunţînd la sistemul de bază.
Se prezintă, de asemenea, calculul structurilor de greutate minimă acceptînd ca sarcină minimă, sarcina de rupere.

Calculul la stările limită constituie, după părerea noastră, formularea care exprimă în modul cel mai cuprinzător comportarea reală a structurilor sub sarcină, pînă la rupere.

Utilizarea noţiunilor de diagramă static şi cinematic compatibilă a dat posibilitatea efectuării calculului din două direcţii a capacităţii portante a structurilor, sintetizate matematic în problema simplex, primară şi duală. Sub această prezentare, capacitatea portantă se calculează uşor utilizînd calculatoarele electronice.

Paralel cu problema determinării stării de eforturi dintr-o structură, pentru o distribuţie a rigidităţilor dată, apare problema determinării repartiţiei optime a materialului construcţiei, pentru obţinerea unei structuri economice.

Proiectarea structurilor în domeniul plastic consideră starea limită a structurilor momentul cînd acestea ajung la cedare pierzîndu-şi capacitatea portantă, sau starea limită dată de deformaţiile maxime admisibile.

În ceea ce urmează se prezintă numai cazul cînd capacitatea portantă a unei structuri este determinată de sarcina sa de rupere.

*) Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **14**, *1* (1969) (în limba franceză).

1. CALCULUL CAPACITĂŢII PORTANTE A STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE, DINTR-UN MATERIAL ELASTO-PLASTIC, ÎN CAZUL SARCINILOR FUNCŢIE DE UN SINGUR PARAMETRU

Bazîndu-se pe teorema de maxim a sarcinii de rupere, s-a stabilit [1], [2], [3] o metodă de calcul a capacităţii portante a structurilor static nedeterminate, calculînd valoarea maximă a parametrului P în raport cu care variază sarcinile exterioare

$$P = \max \tag{1.1}$$

în condiţia ca momentul să nu depăşească în nici un punct al structurii momentul plastic al secţiunii corespunzătoare M_{pl}

$$-M_{pl} \leqslant M_p \leqslant M_{pl}. \tag{1.2}$$

Diagrama de moment încovoietor M_p se calculează pe un sistem de bază ales în raport cu necunoscutele static nedeterminate obţinute

$$M_p = M_p^0 + \sum_i X_i m_i.$$

Metoda implică o problemă duală, corespunzătoare teoremei de minim a sarcinii de rupere, respectiv se determină valoarea minimă a funcţiei

$$\sum_i M_{pl}^i \theta_i = \min, \tag{1.3}$$

unde θ_i este rotirea relativă a secţiunii i

$$\theta_i = \begin{cases} 0 \text{ pentru } M < M_{pl} \\ \neq 0 \text{ pentru } M = M_{pl} \end{cases}$$

în condiţiile

$$\sum_i m_i^0 \theta_i = 1,$$

$$\sum_i m_i \theta_i = 0, \tag{1.4}$$

unde m_i^0 sînt momentele calculate pe sistemul de bază ales, datorită sarcinilor exterioare, pentru o valoare a parametrului egală cu unitatea, şi m_i sînt momentele calculate pe sistemul de bază ales datorită necunoscutelor static nedeterminate i unitare. Fundamentarea problemei presupune un sistem de bază dat, în raport cu care se calculează diagramele M_p^0 şi m_i, respectiv condiţiile (1.2) şi (1.4). Sistemul de bază împiedică scrierea uşoară a matricelor şi ulterior eventuala posibilitate de automatizare a operaţiei de scriere a matricelor M_p^0 şi m_i.

În cele ce urmează, se renunţă la sistemul de bază, punîndu-se accent pe noţiunile de diagramă de moment încovoietor în echilibru cu solicitările exterioare şi diagramă în autoechilibru [4]. Diagrama de

moment în echilibru cu solicitările exterioare se scrie simplu, utilizînd pentru fiecare încărcare un sistem de bază avantajos. Este evident că problema astfel pusă nu mai necesită alegerea unui sistem de bază, ci pentru fiecare sarcină exterioară se poate lua alt sistem de bază, iar ca diagrame în autoechilibru se poate alege orice sistem complet de diagrame.

În ceea ce urmează se prezintă un mod particular de lucru pentru exemplificarea simplificărilor posibile.

În figura 1*c* este trasată diagrama M_p^0 pentru cadrul de 12 ori static nedeterminat din figura 1*a*.

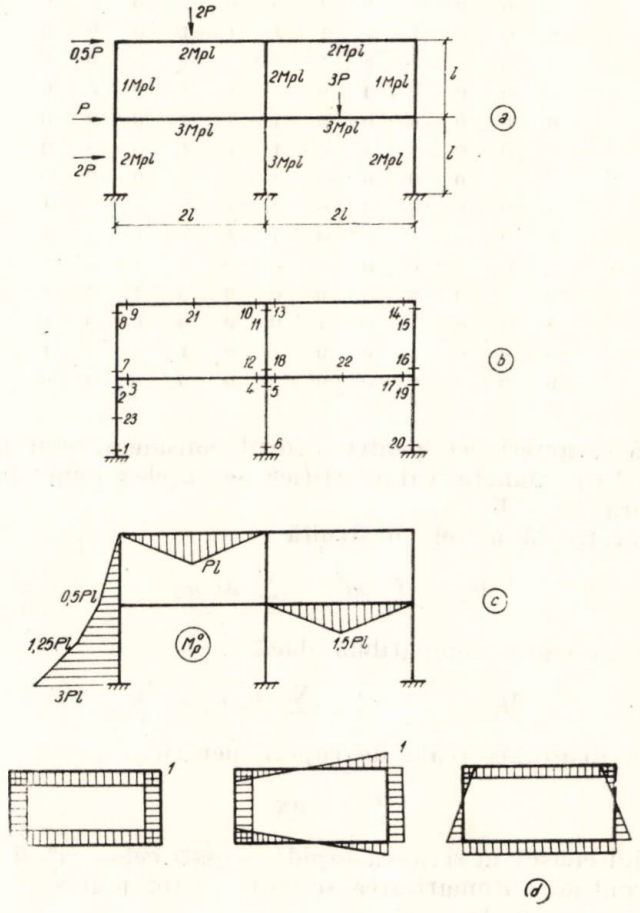


Fig. 1

Diagramele m_i sînt combinații pe conture ale diagramelor tipizate liniar independente, reprezentate în figura 1*d*.

Pentru cadrul considerat, matricea m, reprezentînd pe fiecare coloană o diagramă unitară și avînd un număr de linii egal cu numărul punctelor caracteristice, devine

Tabela 1

$$m = \begin{vmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Punctele caracteristice pentru cadrul considerat sînt reprezentate în figura 1*b*. Prin puncte caracteristice se înţeleg punctele în care e posibil să apară $M = M_{pl}$.

Diagrama totală astfel construită

$$M_p = P \cdot m_p^0 + \sum_i X_i \, m_i$$

devine diagramă static compatibilă dacă

$$-M_{pl} \leqslant P \cdot m_p^0 + \sum_i X_i \, m_i \leqslant M_{pl}$$

şi coincide cu diagrama reală de rupere pentru

$$P = \max.$$

Avantajul constă în scrierea rapidă a matricelor m_p^0 şi m_i necesare în calcul, permiţînd automatizarea scrierii acestor matrice.

O descompunere de felul

$$X_i = X_i' - X_i'' \tag{1.5}$$

cu X_i, X_i'' pozitive transformă problema de mai sus într-o problemă clasică de simplex. Evident, există şi alte mijloace de-a face necunoscutele X_i pozitive. O translaţie de axe [3]

$$x_i = X_i + M_{pl}^i, \tag{1.6}$$

spre deosebire de descompunerea (1.5), păstrează numărul de necunoscute. Descompunerea (1.5) are avantajul că una din aceste mărimi este întotdeauna nulă. Punînd

$$x_i = X_i + M_{pl}^{\max}, \tag{1.7}$$

unde $M_{pl}^{\max}$ este cel mai mare în valoare absolută dintre momentele plastice din structură, scrierea se simplifică, păstrîndu-se în acelaşi timp numărul necunoscutelor.

*

Pornind de la teorema de minim, sarcina de rupere va fi valoarea minimă a raportului

$$\frac{\sum_i M_{pl}^i \theta_i}{\sum_j \lambda_j \Delta_j} = \min,$$

unde Δ_j sînt deplasările pe direcţia forţelor $P\lambda_j$.

Fără a se restrînge generalitatea problemei, se impune, pentru simplificarea calculului, condiţia restrictivă

$$\sum_j \lambda_j \Delta_j = 1, \tag{1.8}$$

adică lucrul mecanic exterior dat de forţele exterioare egale cu λ_j este unitar. Sarcina de rupere va fi dată de valoarea minimă a unei expresii liniare în necunoscutele θ_i

$$\sum_i M_{pl}^i \theta_i = \min. \tag{1.9}$$

Diagrama de moment încovoietor

$$M_p = P m_p^0 + \sum_i X_i m_i$$

verifică condiţia de plasticizare

$$M_p \leqslant M_p$$

şi condiţia de mecanism conform relaţiei (1.9). Va fi deci o diagramă cinematic compatibilă. Ea va coincide cu diagrama reală de rupere dacă îndeplineşte condiţia de echilibru cu solicitările exterioare. Condiţia este îndeplinită dacă se alege ca diagramă finală de rupere o diagramă static compatibilă, adică pm_0 să fie în echilibru cu sarcinile $\lambda_i P$

$$P \sum_j m_i^0 \theta_i = P \sum_i \lambda_i \Delta_i \tag{1.10}$$

şi diagramele m_j să fie în autoechilibru

$$\sum_j m_{ij} \theta_j = 0.$$

Ţinînd seama de (1.8), condiţia (1.10) devine

$$\sum_i m_i^0 \theta_i = 1.$$

Duala problemei de maxim va fi o problemă simplex pentru

$$\theta_i = \theta_i' - \theta_i''$$

cu θ_i', θ_i'' pozitive.

Ca şi problema primară, apare acelaşi avantaj al scrierii rapide a diagramelor de calcul. O dată determinate necunoscute X_i, diagrama finală de rupere se determină din

$$M_p = P_p m_p^0 + \sum_i X_i m_i.$$

Necunoscutele θ_i din problema duală duc la determinarea mecanismului de rupere şi a capacităţii portante a structurii.

Din cele expuse rezultă că aplicarea acestor metode în practică prin utilizarea calculatoarelor electronice reduce substanţial timpul de rezolvare a oricărei structuri, oricît de complexă, în domeniul plastic. Studiul experimental pe modele cromoplastice verifică sigur şi rapid rezultatele obţinute. Cu ajutorul acestor experienţe se obţin date privind apariţia primelor deformaţii plastice, dezvoltarea lor, mecanismul de rupere şi sarcina limită corespunzătoare.

Exemple.

1. Se consideră cadrul din figura 2*a* o dată static nedeterminat încărcat cu o forţă orizontală. Diagrama în echilibru cu forţele exterioare şi diagrama corespunzătoare unei sarcini în autoechilibru sînt reprezentate în figura 2*b*.

Sarcina de rupere este valoarea maximă a funcţiei

$$f = b\,Y,$$

cu

$$b = |1\ 0\ 0|$$

$$Y = \begin{vmatrix} P \\ X' \\ X'' \end{vmatrix}$$

în condiţiile

$$A\,Y \leqslant C, \quad Y \geqslant 0,$$

cu

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

cu X', X'' pozitive.

Rezolvînd problema prin simplex, se obţine soluţia

$$X' = 0, \qquad X'' = 0, \qquad P = 3.$$

Sarcina de rupere este dată de valoarea

$$P_r = 3\frac{M_{pl}}{l}$$

şi diagrama finală de rupere şi mecanismul de rupere sînt reprezentate în figura 2 *c*. Rezolvînd problema prin metoda duală, se obţine acelaşi rezultat.

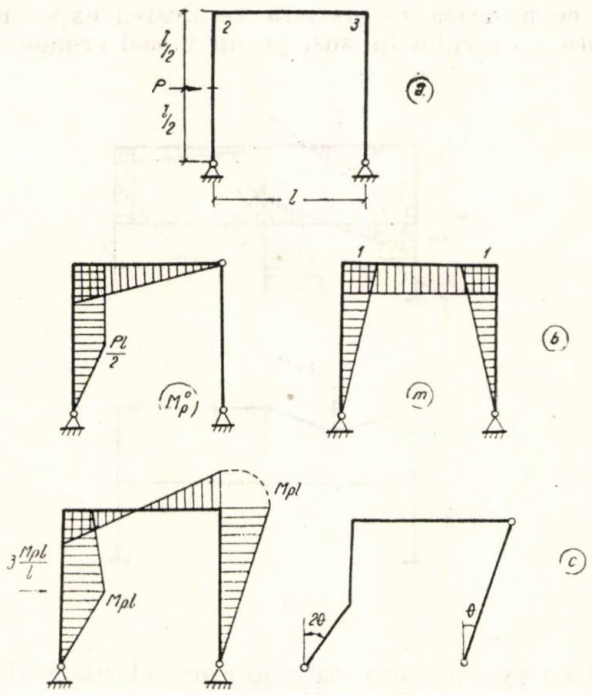


Fig. 2

2. Se consideră cadrul din figura 1*a*. Momentele plastice corespunzătoare fiecărei bare sînt reprezentate în figura 1*a*.

Necunoscutele problemei sînt P şi X_i $(i = 1, 2, \ldots, 12)$.

Punînd

$$X_i = X_i' - X_i'',$$

obţinem o problemă simplex cu 25 de necunoscute şi 42 de inegalităţi.

Soluţia problemei este dată de

$$\begin{aligned} P &= 3{,}5, & X_6 &= -1{,}5, \\ X_1 &= 4{,}625, & X_7 &= 0{,}5, \\ X_2 &= 1{,}5, & X_8 &= -0{,}5, \\ X_3 &= -2{,}375, & X_9 &= 0, \\ X_4 &= 0, & X_{10} &= 0{,}25. \\ X_5 &= 0{,}5, & X_{11} &= 0{,}25, \\ & & X_{12} &= -2. \end{aligned}$$

Diagrama finală de rupere şi mecanismul de rupere sînt reprezentate în figura 3.

În cele ce urmează se prezintă verificarea experimentală a capacităţii portante a cadrului de sus, pe un model cromoplastic.

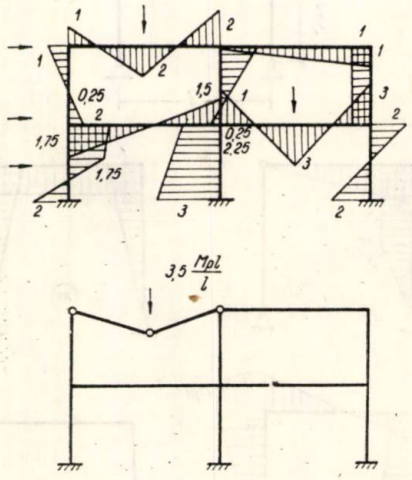


Fig. 3

Modelul s-a executat din material cromoplastic SDP-7 avînd limita de curgere la încovoiere 584 kgf/cm.

Aspectul cadrului în timpul încercării şi după descărcare sînt arătate în figurile 4, 5, 6, 7.

Experienţa a confirmat întru totul rezultatele obţinute pe calea teoretică.

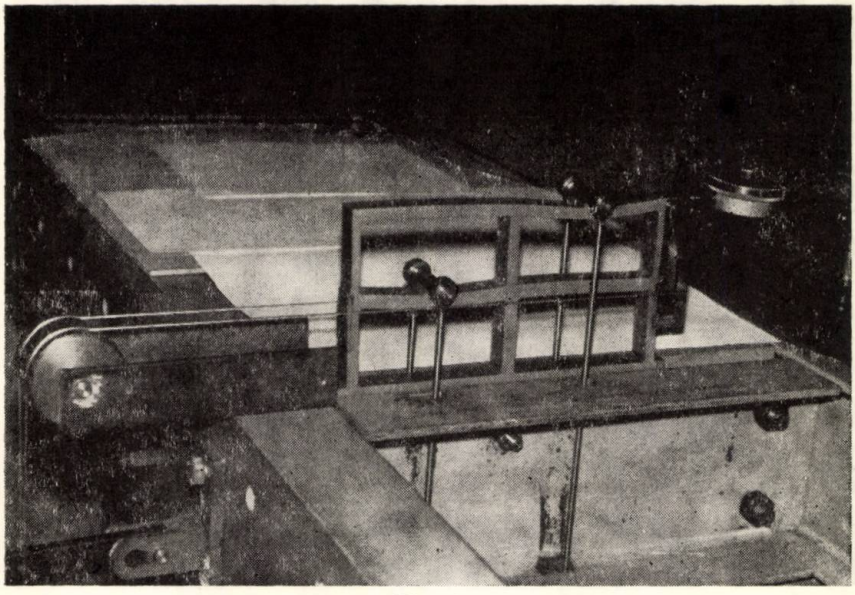


Fig. 4

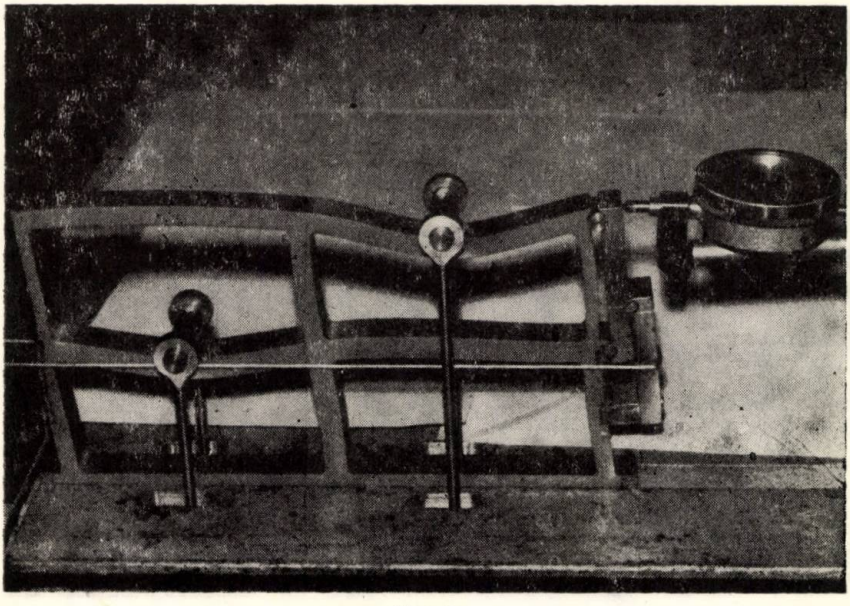


Fig. 5

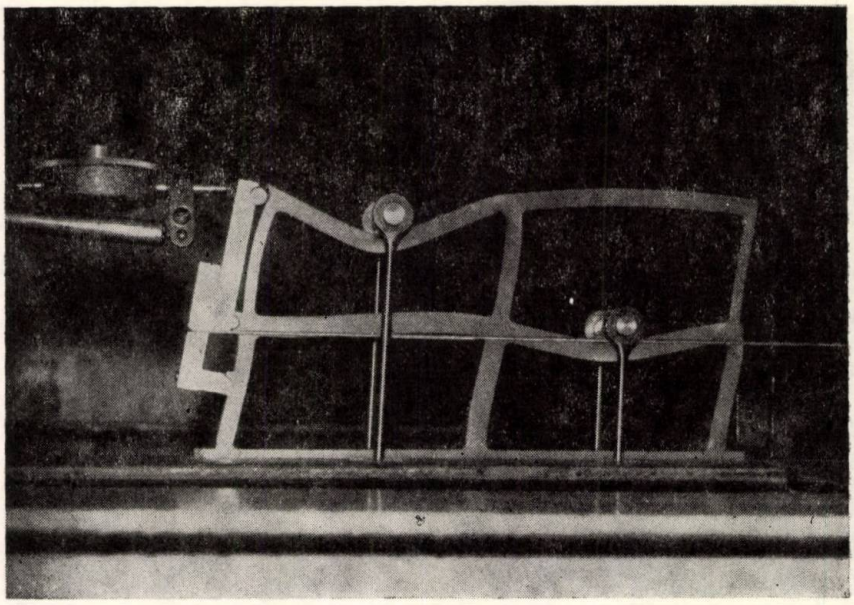


Fig. 6

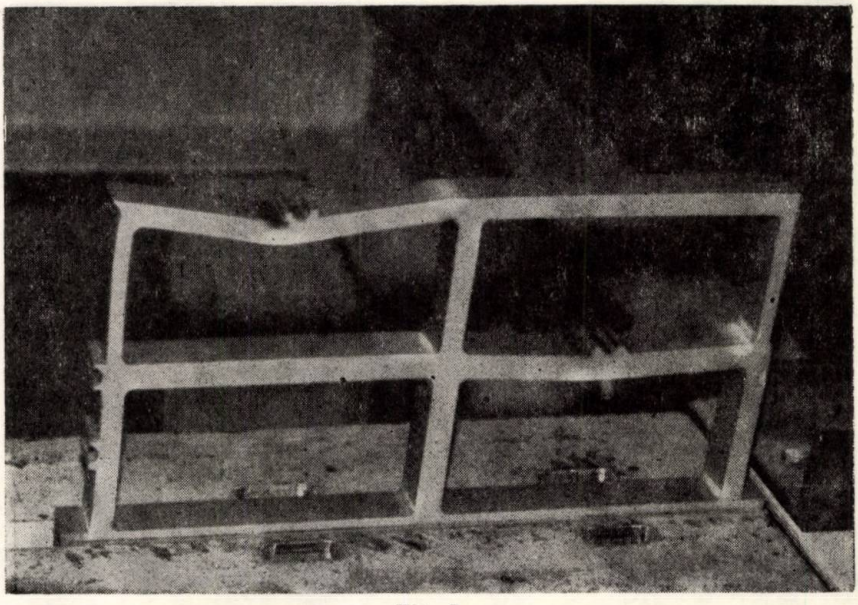


Fig. 7

2. CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE DE GREUTATE MINIMĂ

Determinarea construcției de greutate minimă capabilă să reziste în bune condiții la o solicitare dată necesită fixarea următoarelor date :

— stabilirea stării limită la care se calculează construcția,

— stabilirea relațiilor dintre greutatea construcției și rezistența ei.

În ceea ce urmează vom accepta ca stare limită pierderea capacității portante a construcției în ansamblu sau într-o parte a ei.

Acceptăm, de asemenea, pentru funcția de greutate a structurii expresia simplificată

$$G = \sum_i l_i M_{pl}^i, \tag{2.1}$$

conform căreia greutatea este direct proporțională cu momentul de plasticitate al secțiunii și lungimea elementului.

Această formulă, deși aproximativă, este în prezent acceptată curent în literatură [5].

Într-o serie de lucrări [5], [6] se determină valoarea minimă a funcției G din condiția ca sarcina care solicită structura să fie inferioară tuturor sarcinilor de rupere corespunzătoare mecanismelor posibile de rupere. În felul acesta se asigură condiția de rezistență la rupere a structurii de greutate minimă.

Dezavantajul metodei constă în imposibilitatea cunoașterii tuturor mecanismelor posibile de rupere pentru sisteme multiplu static nedeterminate.

O altă metodă de calcul a structurii de greutate minimă [3] utilizează mijloacele de programare liniară, și anume, pornind de la condiția de rezistență

$$-M_{p'} \leqslant M_p \leqslant M_{p'},$$

determină valoarea minimă a funcției G având ca necunoscute momentele de plasticizare ale secțiunilor și necunoscutele static nedeterminate ale sistemului de bază. Această metodă este legată de alegerea unui sistem de bază și exclude posibilitatea automatizării scrierii matricelor necesare în calcul.

Renunțîndu-se la sistemul de bază și punîndu-se accent, ca și în calculul capacității portante, pe noțiunile de diagramă de moment încovoietor în echilibru cu solicitările exterioare și diagramă în autoechilibru, condițiile pe care trebuie să le satisfacă funcția de greutate minimă devin

$$-M_{p'} \leqslant M_p^0 + \sum_i X_i m_i \leqslant M_{p'},$$

unde X_i sînt coeficienți de proporționalitate

Cu relațiile (1.5), (1.6), (1.7) problema devine o problemă clasică de simplex cu necunoscute pozitive.

Exemple

1. Să se determine grinda continuă de greutate minimă o dată static nedeterminată, a cărei configurație geometrică și mod de încărcare sînt reprezentate în figura 8*a*.

Diagrama de momente în echilibru cu solicitările exterioare şi diagrama de momente datorită unei sarcini în autoechilibru sînt reprezentate în figura 8 *b*, *c*.

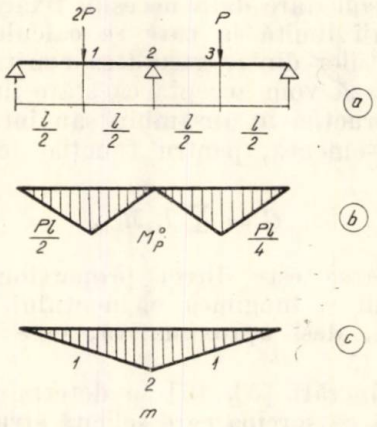


Fig. 8

Greutatea structurii este valoarea minimă a funcţiei

$$G = aX$$

cu

$$a = | \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ |, \quad X = \begin{vmatrix} X' \\ X'' \\ M_1 \\ M_2 \end{vmatrix},$$

unde M_1, M_2 sînt momentele de plasticizare a celor două cîmpuri din grinda continuă, în condiţiile

$$AX \geqslant C \qquad X \geqslant 0$$

cu

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ -1 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}25 \\ 0{,}25 \end{vmatrix}.$$

Aplicînd metoda variabilelor pilot, se obține soluția

$$X' = 0, \quad X'' = \frac{Pl}{12}, \quad M_1 = \frac{5\,Pl}{12}, \quad M_2 = \frac{Pl}{6},$$

$$G = \frac{7\,Pl}{2}.$$

Diagrama finală de momente este reprezentată în figura 9.

Se vede că grinda continuă de greutate minimă acceptă ca mecanism de rupere grinda cu articulații plastice în punctele *1*, *2* și *3*.

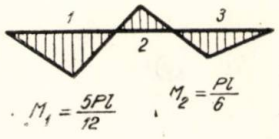


Fig. 9

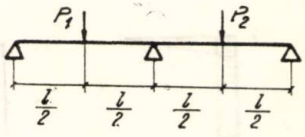


Fig. 10

Presupunînd că aceeași grindă este acționată rînd pe rînd cu sistemul de sarcini (fig. 10).

$$\frac{P_1}{P_2} = i \quad (i = 1, 2, \ldots 5),$$

variația

$$\frac{M_2}{M_1} = f\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

este reprezentată grafic în figura 11, printr-un element de dreaptă.

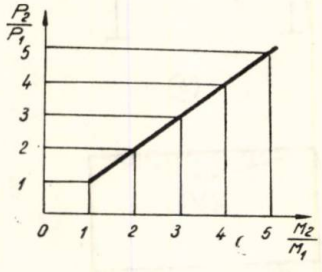


Fig. 11

2. Să se determine cadrul de 6 ori static nedeterminat de greutate minimă reprezentat în figura 12 *a*.

Diagrama de moment în echilibru cu solicitările exterioare și diagrama de momente datorită unei sarcini în autoechilibru sînt arătate în figura 12 *b*, *c*.

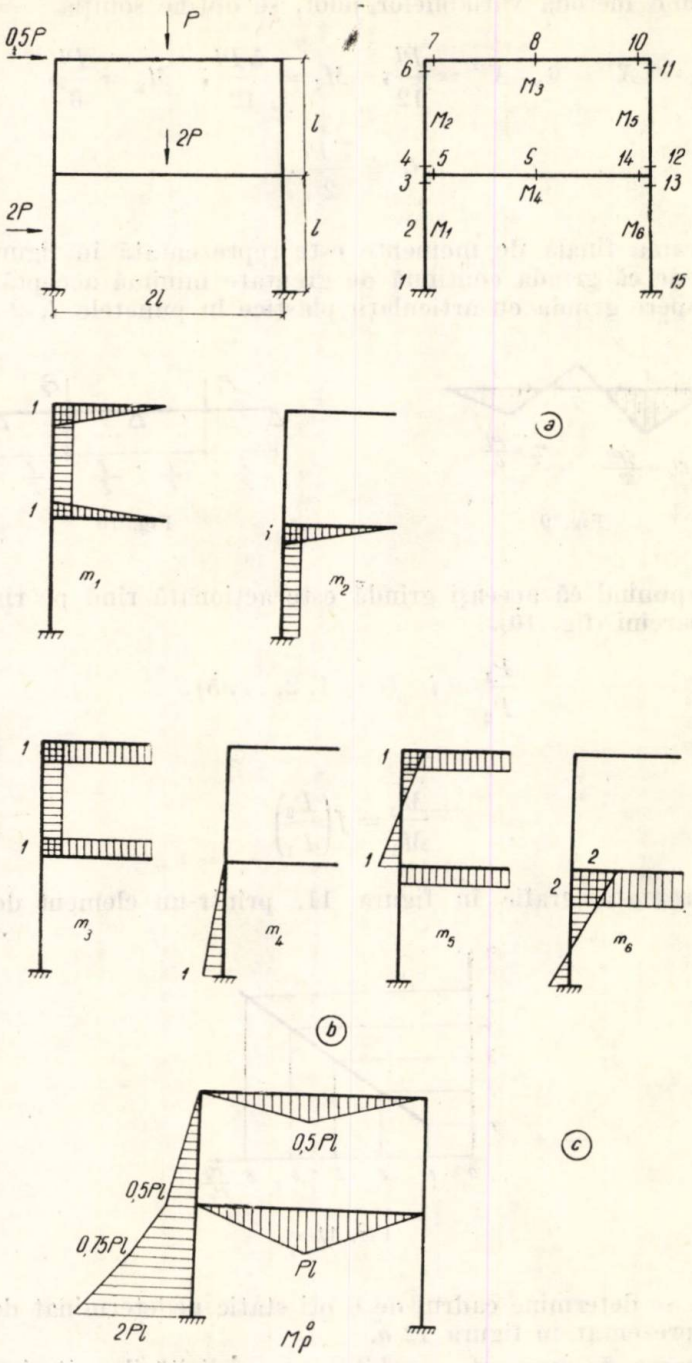

0,5P
P
2P
2P
l
l
2l
7
8
10
6
11
M3
M2
M5
4
5
5
14
12
3
13
M4
2
M1
M6
1
15
1
1
m1
i
m2
a
1
1
m3
1
m4
1
1
m5
2
2
m6
b
0,5Pl
0,5Pl
0,75Pl
Pl
2Pl
Mp°
c

Fig. 12

Matricea m reprezentînd pe fiecare coloană o diagramă unitară şi avînd un număr de linii egal cu numărul punctelor caracteristice este

Tabela 2

$$m = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Necunoscutele vor fi $M_{pl}^{i} (i = 1,2 \ldots 6)$ şi necunoscutele static nedeterminate $X_i (i = 1, 2, \ldots 6)$.

Punînd

$$X_i = X_i' - X_i'',$$

obţinem o problemă simplex cu 18 necunoscute şi 30 de inegalităţi, a cărei soluţie este

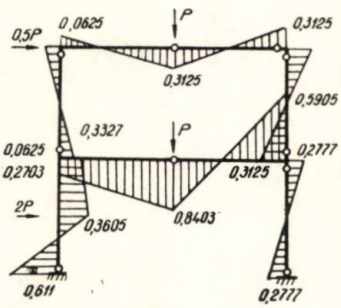


Fig. 13

$$M_{pl}^{1} = 0,6111, \qquad X_1 = 0,125,$$
$$M_{pl}^{2} = 0,0625, \qquad X_2 = 0,555,$$
$$M_{pl}^{3} = 0,3125, \qquad X_3 = 0,125,$$
$$M_{pl}^{4} = 0,840278, \qquad X_4 = -0,97222,$$
$$M_{pl}^{5} = 0,3125, \qquad X_5 = -0,3125,$$
$$M_{pl}^{6} = 0,2777, \qquad X_6 = 0,13888.$$

Diagrama finală de rupere este reprezentată în figura 13.

Cadrul de greutate minimă acceptă ca mecanism de rupere cadrul cu articulaţii plastice în punctele *1*, *4*, *6*, *8*, *11*, *9*, *12*, *13*, *15*, adică un mecanism cu mai multe grade de libertate.

Primită la redacţie la 15 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. W. S. Dorm, H. J. Greenberg, *Linear Programming and plastic limit analysis of structurs*, Quart. Appl. Math. **15**, 155 (1957).
2. A. Charnes, H.. J. Greenberg, *Plastic collapse and linear programming*, Bull. Amer. Math. Soc., **57**, 80 (1951).
3. Massonet, M. A. Save, *Calcul plastique des constructions*, vol. 1, *Structures dependant d'un parametre*, Bruxelles, 1967.
4. S. Răutu, *Consideraţii asupra calculului structurilor static nedeterminate*, St. cerc. mec. apl., *4* (1967).
5. P. G. Hodge, *Plastic analysis of structurs*, Mc. Graw-Hill Book Company, 1959.
6. B. G. Neal, *The plastic methods of structural Analysis*, Chapman-Hall L.T.D., 1965.

STABILITATEA PANOURILOR ELASTIC-NELINIARE PLASATE ÎNTR-UN CURENT DE GAZ SUPERSONIC*)

de L. LIBRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.312

Luînd în considerare în studiul stabilității aeroelastice a efectului neliniarităților de natură fizică, se determină condițiile ce definesc caracterul „periculos" și „nepericulos" al frontierei critice de flutter și, implicit, caracterul influenței pe care neliniaritățile de natură fizică îl au în acest sens.

1. INTRODUCERE

Problema stabilității învelitorilor și plăcilor elastice plasate într-un curent de gaz a constituit în ultimul timp subiectul unor numeroase investigații. Menționăm în acest sens lucrările datorite lui Bisplinghoff [1], Goodman și Rattaya [2], Bolotin [3], Johns [4], Grigoliuc, Lamper și Sandarov [5], lucrări în care sînt trecute în revistă metodele folosite, rezultatele obținute și care cuprind și ample bibliografii privind acest subiect.

În legătură cu direcțiile privind studiul stabilității aeroelastice se distinge, pe de o parte, preocuparea de a examina această problemă în formulare liniară, formulare care permite determinarea valorii minime a vitezei (viteza de flutter sau de divergență), pentru care forma neperturbată a structurii încetează de a mai fi stabilă. Pe de altă parte, în ultimul timp se distinge preocuparea de a lua în considerare și neliniaritățile de natură geometrică, aerodinamică și fizică**). Abordarea în formulare neliniară a problemei stabilității aeroelastice face posibilă deter-

*) Se bazează pe lucrarea *Aeroelastic stability of thin panels in the vicinity of the flutter critical boundary*", Journal de mécanique, 1, mars, 1967.

**) În lucrarea [6] este prezentată o amplă bibliografie privind stabilitatea aeroelastică a panourilor subțiri în formulare neliniară, neliniaritățile fiind de natură geometrică și aerodinamică.

minarea condițiilor în care, datorită caracterului influenței diverselor neliniarități, viteza critică de flutter poate fi depășită fără ca să se producă ruperea imediată a panoului (în acest caz ruperea panoului se produce prin oboseală), precum și a condițiilor în care vibrații neamortizate pot apărea la viteze mai mici decît viteza critică de flutter dacă o anumită perturbație este aplicată sistemului, perturbație ce poate fi foarte mică în cazul în care sistemul este suficient de apropiat de frontiera critică. Apare deci necesitatea de a examina comportarea sistemului dinamic în vecinătarea frontierei critice de flutter, adică de a determina dacă sistemul considerat este „practic" stabil.

Din cercetările datorite lui Bautin [7] rezultă că mișcarea neperturbată a sistemului, cînd acesta se află în vecinătatea frontierei domeniului de stabilitate, este practic stabilă sau instabilă, după cum mișcarea este stabilă sau instabilă în sens Liapunov pe însăși frontiera. Frontiera sau părți ale frontierei domeniului de stabilitate pe care mișcarea neperturbată este stabilă se numesc „nepericuloase", iar acelea pe care este instabilă se numesc „periculoase" *). Scopul acestei lucrări constă în determinarea condițiilor care definesc caracterul „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice și, implicit, în a determina caracterul influenței pe care neliniaritățile de *natură fizică* îl au în acest sens. În acest scop este necesar a deduce în prealabil ecuațiile echilibrului aeroelastic al panourilor construite dintr-un material fizic-neliniar.

2. IPOTEZE, ECUAȚII DE BAZĂ

În majoritatea lucrărilor abordînd problema stabilității aeroelastice a panourilor, ecuațiile echilibrului aeroelastic au fost deduse considerîndu-se liniară legea fizică a materialului panoului. Totuși devieri de la legea liniară tensiuni-deformații sînt constatate pentru toate materialele folosite în inginerie, o dată cu creșterea deformațiilor și a temperaturii. De aceea în scopul determinării influenței neliniarităților de natură fizică în problemele privind stabilitatea aeroelastică este important a considera legea fizică reală a materialului.

În cele ce urmează vom deduce ecuațiile de încovoiere transversală a structurilor plane, eterogene, subțiri, materialul straturilor avînd proprietățile fizic-neliniare. Aceste ecuații vor fi deduse pentru cazul structurilor plane, construite simetric din $(2l+1)$, $(l=1,2,\ldots)$ straturi. Simetria structurii se consideră a fi geometrică și fizico-mecanică, cu alte cuvinte straturile din care este construită structura, plasate simetric față de stratul median, posedă proprietăți geometrice și fizice identice. Se presupune că materialul fiecărui strat este omogen și izotrop și că ascultă de o lege fizică neliniară; o vom admite pe cea datorită lui Kauderer [9], [10]. Planul median al structurii, plan ce coincide cu planul median al stratului median, este raportat la un sistem de coordonate cartezian, rectangular, x_α.

*) Noțiunea de „periculos" și „nepericulos" legată de frontiera critică de flutter a fost introdusă de Bolotin [8].

3. DEDUCEREA ECUAȚIEI TEORIEI DE ÎNCONVOIERE A PLĂCILOR PLANE FIZIC-NELINIARE

În notații tensoriale, ecuațiile tensiuni-deformații scrise într-un punct al mediului tridimensional al structurii sînt date prin

$$\sigma_{ik} = 3K\varkappa(e)\,\overline{\varepsilon}_{ik} + 2G\gamma(\psi^2)\,\overline{\overline{\varepsilon}}_{ik}, \tag{1*}$$

unde σ_{ik} reprezintă componentele tensorului de tensiune,

$\overline{e}_{ij}$ — tensorul sferic de deformație,

$\overline{\overline{e}}_{ij} = \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\delta_{rs}\,e_{rs}\right)$ — deviatorul tensorului de deformație,

$e_{ij} = \overline{e}_{ij} + \overline{\overline{e}}_{ij}$ — componentele tensorului de deformație elastică a unui punct al mediului tridimensional al structurii,

δ_{ij} — simbolul lui Kronecker,

$K = \frac{2}{3}G\frac{1+\mu_0}{1-2\mu_0}$; G — modulul de forfecare,

$\varkappa(e)$; $\gamma(\psi)^2$ — funcția de întindere, respectiv de forfecare, care depinde de proprietățile fizice ale materialului.

Aceste funcții pot fi prezentate prin următoarea dezvoltare (vezi Kauderer [9], [10]) :

$$\begin{aligned} \varkappa(e) &= 1 + \varkappa_1 e + \varkappa_2 e^2 + \cdots \\ \gamma(\psi^2) &= 1 + \gamma_2\psi^2 + \gamma_4\psi^4 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Definind primii doi invarianți ai tensorului deformație

$$I_1 = \varepsilon_{rs}\,\delta_{rs}\,;\quad I_2 = \frac{1}{2}\left(\delta_{rs}\,\delta_{mn}\,e_{rs}\,e_{mn} - e_{rs}\,e_{rs}\right), \tag{3}$$

parametrii e și ψ pot fi exprimați prin relațiile (vezi Kauderer [9] și Zerna [12]) :

$$e = \frac{1}{3}I_1\ ,\quad \psi = 2\sqrt{-\frac{2}{3}\left[I_2 - \frac{1}{3}(I_2)^2\right]}. \tag{4}$$

În baza ipotezei Love-Kirchhoff, din (1) rezultă

$$e_{33} = -\frac{3K\varkappa(e) - 2G\gamma(\psi)^2}{3K\varkappa(e) + 4G\gamma(\psi^2)}\,\delta_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

de unde expresiile pentru $\sigma_{\alpha\beta}$ devin

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2G\gamma(\psi^2)\left[e_{\alpha\beta} + \frac{3K\varkappa(e) - 2G\gamma(\psi^2)}{3K\varkappa(e) + 4G\gamma(\psi^2)}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\lambda\rho}\,\delta_{\lambda\rho}\right] \tag{6}$$

*) Legea fizică se referă la materialul fiecărui strat (j). Indicele (j) a fost suprimat pentru moment pentru a nu complica scrierea. Folosirea sistemului de coordonate cartezian face ca distincția dintre caracterul covariant și contravariant al tensorilor să dispară. Indicii latini pot lua valorile 1, 2, 3, iar indicii greci valorile 1, 2. Se aplică binecunoscuta convenție einsteiniană de însumare în raport cu indicele ce se repetă.

Introducînd expresia neliniară a coeficientului Poisson

$$\mu(e, \psi^2) = \frac{3K\varkappa(e) - 2G\gamma(\psi^2)}{2[3K\varkappa(e) + G\gamma(\psi^2)]} \tag{7}$$

şi ştiind că, în cazul încovoierii transversale a plăcii plane,

$$e_{\alpha\beta} = z\,\varkappa_{\alpha\beta} = z\,w_{,\alpha\beta}\,, \tag{8}$$ *)

unde $w(x_\alpha, t)$ reprezintă deplasarea transversală a punctelor planului median al plăcii, ecuaţia (6) poate fi scrisă desfăşurat sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{2}{1-\mu(e,\psi^2)} G\gamma(\psi^2)\,[w_{,11} + \mu(e,\psi^2)\,w_{,22}]\,z\,,\\
\sigma_{22} &= \frac{2}{1-\mu(e,\psi^2)} G\gamma(\psi^2)\,[w_{,22} + \mu(e,\psi^2)\,w_{,11}]\,z\,,\\
\sigma_{12} &= 2G\gamma(\psi^2)\,w_{,12}\,z\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

În continuare, pentru a putea exprima pe e şi ψ^2 prin intermediul deplasării normale $w(x_\alpha, t)$ şi a derivatelor sale, este necesar a exprima deformaţia e_{33} prin intermediul lui $w(x_\alpha, t$. În acest scop vom presupune cu Kauderer [9] că mărimea e_{33}, în cazul fizic-neliniar, are aceeaşi exprimare ca în cazul fizic-liniar şi se obţine din (5) considerînd $\varkappa(e) \equiv 1$, $\gamma(\psi^2) \equiv 1$. Vom avea deci

$$e_{33} = -\frac{3K - 2G}{3K + 4G}\,\delta_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} \tag{10}$$

sau, sub o formă echivalentă,

$$e_{33} = -\frac{\mu_0}{1-\mu_0}\,\delta_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta}\,, \tag{11}$$

unde

$$\mu_0 = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \tag{12}$$

reprezintă coeficientul Poisson. Ţinînd seama de $(3)_1$ şi (11) în $(4)_1$, se obţine

$$e = \frac{1}{3}\,\frac{1 - 2\mu_0}{1-\mu_0}\,\delta_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} \tag{13}$$

şi amintindu-ne că în cazul încovoierii transversale a plăcii plane fizic-liniare

$$\delta_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} = z\,\Delta w\,, \tag{14}$$

---

*) În relaţia (8) şi în cele ce urmează s-a notat $(\ )_{,\alpha} \equiv \dfrac{\partial(\ )}{\partial x_\alpha}$

avem în final

$$e = \frac{1}{3}\frac{1-2\mu_0}{1-\mu_0} z \Delta w , \tag{15}$$

unde Δ este operatorul Laplace bidimensional. Pe de altă parte, din relațiile (3), $(4)_2$ se obține

$$\frac{3}{4}\psi^2 = e_{rs}\, e_{rs} - \frac{1}{3}\delta_{rs}\,\delta_{mn}\, e_{rs}\, e_{mn} \tag{16}$$

și, avînd în vedere (13), relația (16) devine

$$\psi^2 = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\omega}\,\delta_{\beta\pi} + \delta_{\alpha\pi}\,\delta_{\omega\beta}) - \frac{1-4\mu_0+\mu_0^2}{3(1-\mu_0)^2}\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\omega\pi}\right] e_{\alpha\beta}\, e_{\omega\pi}, \tag{17}$$

sau, ținînd seama de (8), obținem pentru (17)

$$\psi^2 = \frac{8}{9}\{\mu_{\mathrm{I}} < (w,_{11})^2 + (w,_{22})^2 > + \mu_{\mathrm{II}}\, w,_{11}\, w,_{22} + 3\,(w,_{12})^2\}\, z^2, \tag{18}$$

unde

$$\mu_{\mathrm{I}} = \frac{1-\mu_0+\mu_0^2}{(1-\mu_0)^2}, \quad \mu_{\mathrm{II}} = \frac{4\mu_0-1-\mu_0^2}{(1-\mu_0)^2}. \tag{19}$$

Introducînd notația

$$\lambda(x_\alpha) = \sum_{j=1}^{l+1}\left[\int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}} \frac{\gamma(\psi^2)}{1-\mu(e,\psi^2)} z^2\,dz + \int_{-\xi_{(j)}}^{-\xi_{(j-1)}} \frac{\gamma(\psi^2)}{1-\mu(e,\psi^2)} z^2\,dz\right],$$

$$\rho(x_\alpha) = \sum_{j=1}^{l+1}\left[\int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}} \frac{\gamma(\psi^2)\,\mu(e,\psi^2)}{1-\mu(e,\psi^2)} z^2\,dz + \int_{-\xi_{(j)}}^{-\xi_{(j-1)}} \frac{\gamma(\psi^2)\,\mu(e,\psi^2)}{1-\mu(e,\psi^2)} z^2\,dz\right] \tag{20}$$

și ținînd seama de formulele (15), (18), (7), (8), în relațiile ce definesc momentele, acestea pot fi exprimate prin intermediul deplasării $w(x_\alpha, t)$

$$\begin{aligned} M_{11} &= -(\lambda\, w,_{11} + \rho\, w,_{22}), \\ M_{22} &= -(\lambda\, w,_{22} + \rho\, w,_{11}), \\ M_{12} &= (\lambda - \rho)\, w,_{12}, \end{aligned} \tag{21}$$

de unde, pe baza ecuației

$$M_{11},_{11} + 2\,M_{12},_{12} + M_{22},_{22} - m_0\,\ddot{w} - m_0\,\varepsilon\,\dot{w} + p_e - p_i = 0,$$

se obține ecuația de mișcare transversală a structurilor plane construite simetric din straturi fizic-neliniare [11]

$$\begin{aligned} &\lambda\,\Delta\Delta w + 2\,\lambda,_1\,(\Delta w),_1 + 2\,\lambda,_2\,(\Delta w),_2 + \\ &+ (\lambda,_{11} + \rho,_{22})\, w,_{11} + (\lambda,_{22} + \rho,_{11})\, w,_{22} + \\ &+ 2\,(\lambda,_{12} - \rho,_{12})\, w,_{12} = p_e - p_i - m_0\,\ddot{w} - m_0\,\varepsilon\,\dot{w}, \end{aligned} \tag{22}$$

$m_0 = \frac{2}{g}\sum_{j=1}^{l+1} \gamma_{(j)}\,(\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)})$, unde g este accelerația gravității, iar $\gamma_{(j)}$ greutatea specifică a materialului stratului j.

Pentru aplicații este suficient a considera funcția de întindere și forfecare sub forma (vezi Kauderer [9], Zerna [12], Tzurpal [13]),

$$\varkappa(e) = 1 + \varkappa_2 e^2;\ \gamma(\psi^2) = 1 + \gamma_2 \psi^2. \tag{23}$$

În acest caz, dezvoltînd membrul drept al relației (7) în serie după puterile lui $\varkappa_2$ și γ_2 și reținînd doar termenii liniari, se obține

$$\mu(e, \psi^2) = \mu_0 + \frac{1}{3}(1 + \mu_0)(1 - 2\mu_0)(\varkappa_2 e^2 - \gamma_2 \psi^2), \tag{24}$$

de unde relațiile (20) devin

$$\begin{aligned}\lambda(x_\alpha) = \frac{4}{3}\Bigg\{ & \sum_{j=1}^{l+1} \frac{G^{(j)}(\xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3)}{1 - \mu_0^{(j)}} + \\ & + \frac{8}{45}\sum_{j=1}^{l+1} G^{(j)}\,(\xi_{(j)}^5 - \xi_{(j-1)}^5)[< 2\gamma_2^{(j)}(\mu_{\mathrm{I}}^{(j)})^2 + \\ & + (\mu_{\mathrm{III}}^{(j)})^2 \varkappa_2^{(j)} > < (w,_{11})^2 + (w,_{22})^2 > + \\ & + 2 < \gamma_2^{(j)} \mu_{\mathrm{I}}^{(j)} \mu_{\mathrm{II}}^{(j)} + (\mu_{\mathrm{III}}^{(j)})^2 \varkappa_2^{(j)} > w,_{11}\, w,_{22} + \\ & + 6\,\mu_{\mathrm{I}}^{(j)} \mu_{\mathrm{II}}^{(j)} (w,_{12})^2]\Bigg\},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\rho(x_\alpha) = \frac{4}{3}\Bigg\{ & \sum_{j=1}^{l+1} \frac{G^{(j)}\,\mu_0^{(j)}(\xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3)}{1 - \mu_0^{(j)}} + \\ & + \frac{8}{45}\sum_{j=1}^{l+1} G^{(j)}\,(\xi_{(j)}^5 - \xi_{(j-1)}^5)\,[\gamma_2^{(j)} \mu_{\mathrm{I}}^{(j)} \mu_{\mathrm{II}}^{(j)} + \\ & + (\gamma_3^{(j)})^2 \varkappa_2^{(j)} > < (w,_{11})^2 + (w,_{22})^2 > + \\ & + < \gamma_2^{(j)} (\mu_{\mathrm{II}}^{(j)})^2 + 2\,(\mu_{\mathrm{III}}^{(j)})^2 \varkappa_2^{(j)} > w,_{11}\, w,_{22} + \\ & + 3\gamma_2^{(j)})\,\mu_{\mathrm{II}}^{(j)} (w,_{12})^2]\Bigg\},\end{aligned}$$

unde

$$(\mu_{\mathrm{III}}^{(j)})^2 = \frac{(1 + \mu_0^{(j)})(1 - 2\,\mu_0^{(j)})^3}{8\,(1 - \mu_0^{(j)})^4}.$$

Pentru cazul plăcii omogene, ecuația (25) coincide cu ecuația dedusă de Kauderer [9] și Özden [14], iar în cazul considerării unui material incompresibil $\left(\mu_0 = \frac{1}{2}\right)$ ecuația obținută coincide cu cea dedusă de Ambarțumian [15] pe baza considerării modelului Iliușin (vezi în acest

sens Oghibalov [16]). Pentru $\varkappa(e) \equiv 1$, $\gamma(\psi^2) \equiv 1$, se obţine ecuaţia de încovoiere transversală a structurilor plane, elastice, subţiri simetric construite din straturi al căror material este izotrop, şi ascultă de legea liniară a lui Hooke. Este important de menţionat că constantele $\varkappa_2^{(j)}$ şi $\gamma_2^{(j)}$ ce se determină pentru fiecare material în parte (vezi Kauderer [9], Turpal [13],) pot fi atît pozitive, cît şi negative). În primul caz materialul este „rigid," iar în al doilea „moale".*)

3. CAZUL ÎNCONVOIERII CILINDRICE A STRUCTURILOR PLANE, SIMETRIC CONSTRUITE DIN STRATURI AL CĂROR MATERIAL ESTE FIZIC-NELINIAR

În cazul în care deplasarea normală w nu depinde de coordonata x_2, adică

$$w = w(x_1, t), \tag{26}$$

ecuaţia (22) devine

$$D_1 w,_{1111} + D_2 [(w,_{11})^2 w,_{1111} + 2 (w,_{111})^2 w,_{11}] = \\ = p_e - p_i - m_0 \ddot{w} - m_0 \varepsilon \dot{w}, \tag{27}$$

unde

$$D_1 = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{l+1} \frac{G^{(j)} (h_{(j)}^3 - h_{(j-1)}^3)}{1 - \mu_0^{(j)}}, \tag{28}$$

$$D_2 = \frac{32}{45} \sum_{j=1}^{l+1} G^{(j)} (h_{(j)}^5 - h_{(j-1)}^5) [2 \gamma_2^{(j)} (\mu_{(1)}^{(j)})^2 + (\mu_{111}^{(j)})^2 \varkappa_2^{(j)}].$$

Sub această ultimă formă ecuaţia va fi folosită în studiul stabilităţii aeroelastice a structurilor plane, fizic-neliniare.

4. ECUAŢIA ECHILIBRULUI AEROELASTIC

Ecuaţia echilibrului aeroelastic (vezi Bislinghoff şi Ashley [18]) este dată de

$$(\mathcal{S} - \mathcal{A} - \mathcal{T})(w) = 0,$$

unde

$\mathcal{S}$ ( ) reprezintă operatorul structural dat de

$$\mathcal{S}(w) \equiv \Big[\lambda \Delta \Delta + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta + \\ + \Big(\frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 \rho}{(\partial x_2)^2} \Big) \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \Big(\frac{\partial^2 \lambda}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2 \rho}{(\partial x_1)^2} \Big) \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2} + \\ + 2 \Big(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2} \Big) \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} \Big] (w), \tag{29}$$

*) Terminologia folosită în original (Vezi Prager [17]) este de „hard" şi respectiv, „soft".

$\lambda(x_\alpha)$, $\rho(x_\alpha)$ fiind definiți prin relațiile (25);

$\mathcal{I}(w) = -m_0 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(w)$ — operatorul de inerție;

$\mathcal{A}(\ )$ — operatorul aerodinamic.

Expresia operatorului aerodinamic valabilă pentru numere Mach de zbor $M \geqslant 2$ și dedusă pe baza „analogiei pistonului" este dată de

$$\mathcal{A}(w) = -\varkappa p_\infty \left[\frac{1}{c_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\varkappa+1}{4} M^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa+1}{12} M^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^3\right](w). \tag{30}$$

Relația (30) are loc numai în cazul scurgerii pe fața superioară a panoului $\left(M = \dfrac{U_\infty^+}{c_\infty},\ U_\infty^- = 0\right)$.

În cazul în care scurgerea are loc pe ambele fețe ale panoului cu viteza $U_\infty^+ = U_\infty^- = U_\infty$, operatorul aerodinamic este dat de

$$\mathcal{A}(w) = -2\varkappa p_\infty \left[\frac{1}{c_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\varkappa+1}{12} M^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^3\right](w). \tag{31}$$

Pentru a folosi metoda Galerkin vom exprima $w(x_\alpha, t)$ sub forma

$$w(x_\alpha, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(t) f_{mn}(x_\alpha), \tag{32}$$

unde funcțiile $f_{mn}(x_\alpha)$ satisfac toate condițiile la limită în ceea ce privește deplasarea normală, $w_{mn}(t)$ fiind funcții de timp ce trebuie determinate. Ținînd seama în (22) de reprezentarea dată pentru $w(x_\alpha, t)$, aceasta trebuie să satisfacă aproximativ în sensul metodei Galerkin la relația

$$\int_0^a \int_0^b (\mathcal{S} - \mathcal{A} - \mathcal{I})(w) f_{rn}(x_\alpha)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = 0 \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} r = 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}.$$

Se deduce astfel un sistem de ecuații diferențiale, neliniar în raport cu coeficienții seriei (32),

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_{rn}}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon_T \frac{\mathrm{d}w_{rn}}{\mathrm{d}t} + \Omega_{rn}^2 w_{rn} + F_{rn}(w_{mn}, M) = 0, \tag{34}$$

unde funcțiile $F_{rn}(w_{mn}, M)$ sînt funcții neliniare care pot fi prezentate sub forma

$$F_{rn}(w_{mn}, M) = F_{rn}^{(\mathrm{I})} + F_{rn}^{(\mathrm{II})},$$

unde $F_{rn}^{(I)}$ sînt funcţii ce includ neliniarităţile aerodinamice, iar $F_{rs}^{(II)}$ funcţii ce includ neliniarităţile fizice. În cele ce urmează, pentru a nu fi conduşi la calcule excesiv de complicate, vom proceda la simplificarea problemei, fără ca aceasta să implice o diminuare a generalităţii concluziilor ce vor fi trase, simplificare ce va consta în studiul stabilităţii aeroelastice a benzii eterogene.

5. FLUTTERUL BENZII ETEROGENE

În cazul considerării benzii eterogene, expresia operatorului structural se obţine considerînd în (29) $w = w(x_1, t)$. Operatorul structural $\mathcal{S}(w)$ este dat în acest caz de (vezi şi relaţia (27))

$$\mathcal{S}(w) \equiv D_1 w,_{1111} + D_2 [(w,_{11})^2 w,_{1111} + 2 (w,_{111})^2 w,_{11}], \tag{35}$$

unde rigidităţile D_1 şi D_2 sînt definite prin relaţiile (28).

Vom considera două cazuri de condiţii de rezemare.

Cazul (A) — marginile perpendiculare scurgerii curentului de gaz sînt simplu rezemate.

Cazul (B) — marginile perpendiculare scurgerii curentului de gaz sînt încastrate.

Expresiile lui $f_r(x_1)$ în cele două cazuri de sprijinire menţionate sînt date de:

$$\text{Cazul (A)} - \quad f_r(x_1) = \sin \frac{r\pi x_1}{a},$$

$$\text{Cazul (B)} - \quad f_r(x_1) = \cos \frac{(r-1)\pi x_1}{a} - \cos \frac{(r+1)\pi x_1}{a} \tag{36}$$

$$(r = 1, 2, \ldots).$$

5.1. CAZUL DE SPRIJINIRE (A)

În cazul de sprijinire (A), procedînd aşa cum s-a menţionat mai sus se obţine sistemul de ecuaţii

$$\frac{d^2 \zeta_r}{d\tau^2} + \varepsilon_T \frac{d\zeta_r}{d\tau} + \omega_x^2 \zeta_r + F_r(\zeta_t, M) = 0, \tag{37}$$

unde

$$\zeta_r = \frac{w_r}{h}, \quad \tau = \Omega t, \quad \nu = M \frac{h}{a}.$$

În cazul scurgerii pe o singură faţă a panoului,

$$\varepsilon_T = \frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon + \frac{\varkappa p_\infty}{m_0 c_\infty}\right), \quad P = \frac{\varkappa p_\infty}{m_0 h \Omega^2}, \tag{38}$$

iar în cazul scurgerii pe ambele fețe cu viteza $U_\infty^+ = U_\infty^- = U_\infty$,

$$\varepsilon_T = \frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon + \frac{2\varkappa p_\infty}{m_0 c_\infty}\right), \quad P = \frac{2\varkappa p_\infty}{m_0 h \Omega^2}. \tag{39}$$

Celelalte expresii ale parametrilor sînt identice în cazul scurgerii pe o singură sau pe ambele fețe ale benzii și sînt date de

$$\omega_r^2 = \frac{\Omega_r^2}{\Omega^2} = r^4; \quad \Omega^2 = \frac{\pi^4 D_1}{m_0 a^4}; \quad K' = \frac{\pi^8 h^2}{m_0 a^8 \Omega^2}. \tag{40}$$

Expresiile lui $F_r^{(I)}$ și $F_r^{(II)}$ în cazul scurgerii pe o singură față a panoului sînt date de

$$\begin{aligned}
F_r^{(I)} = &-4P\nu \sum_{t=1}^{\infty} \frac{r(2t+1-r)}{(2t+1)(2t+1-2r)} \zeta_{2t+1-r} + \\
&+ \frac{P}{2}\nu^2(\varkappa+1)\left\{\frac{\delta_r}{r}\sum_{q=1}^{\infty} q^2 \zeta_q^2 - \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{r}{(2t+1)(2t+1-2r)} \times\right. \\
&\times [3q(2t+1+q-r)\,\zeta_q\,\zeta_{2t+1+q-r} + \\
&\left. + q(2t+1-q-r)\,\zeta_q\,\zeta_{|2t+1-q-r|}]\right\} - \\
&- \frac{P\pi^2}{12}\nu^3(\varkappa+1)\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{2r(2t+1-r)}{(2t+1)(2t+1-2r)} q^2 \zeta_q^2 \zeta_{2t+1-r} + \right. \\
&+ \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2s+1)(2s+1-2r)} \times\right. \\
&\times [(2s+1-t-r-q)\,qt\,\zeta_q\,\zeta_t\,\zeta_{|2s-1+t-r-q|} + \\
&\left.\left. + 3(2s-1+t-r+q)\,qt\,\zeta_q\,\zeta_t\,\zeta_{2s-1+t-r-q}]\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_r^{(II)} = &\frac{K'}{4}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\{[-t^2q^2(r-t-q)^4 - 2q^3t^2(r-t-q)^3] \times \\
&\times \zeta_{r-t-q} + [t^2q^2(t+q-r)^4 - 2(t+q-r)^3q^3t^2] \times \\
&\times \zeta_{t+q-r} + [-t^2q^2(t+q+r)^4 + 2(t+q+r)^3q^3t^2]\,\zeta_{t+q+r} + \\
&+ [-t^2q^2(t-q-r)^4 + 2q^3t^2(q-t-r)^3]\,\zeta_{q-t-r} + \\
&+ [t^2q^2(r+q-t)^4 - 2q^3t^2(q+r-t)^3]\,\zeta_{q+r-t} + \\
&- [t^2q^2(t-q-r)^4 + 2q^3t^2(t-q-r)^3]\,\zeta_{t-q-r} + \\
&+ [t^2q^2(t+r-q)^4 + 2q^3t^2(t-q+r)^3]\zeta_{t-q+r}\}\,\zeta_q\,\zeta_t \\
&(r = 1, 2, \cdots).
\end{aligned} \tag{41}$$

Știind că în cadrul teoriei liniare condițiile cele mai critice de flutter se obțin considerînd mari coordonatele succesive ζ_p, ζ_{p+}

($p = 1, 2, \cdots$) (vezi în acest sens lucrările [19—21]), sistemul de ecuații (37) în cazul scurgerii pe ambele fețe cu viteza $U_\infty^+ = U_\infty^- = U_\infty$, poate fi transcris, sub forma

$$\frac{d\zeta_p}{d\tau} = \zeta_{p+2} \quad ; \quad \frac{d\zeta_{p+1}}{d\tau} = \zeta_{p+3} \, , \tag{42}$$

$$\frac{d\zeta_{p+2}}{d\tau} = -\varepsilon_T \zeta_{p+2} - \omega_p^2 \zeta_p - a^3_{p,\,p,\,p} \zeta_p^3 - a^3_{p,\,p,\,+1,\,p+1} \zeta_p \zeta_{p+1}^2 +$$
$$+ P\nu (b^{(3)}_{p+1} \zeta_{p+1} - \nu^2 b_{p+1,\,p+1,\,p+1} \zeta_{p+1}^3 -$$
$$- \nu^2 b^{(3)}_{p,\,p,\,p+1} \zeta_p^2 \zeta_{p+1}) \, ,$$

$$\frac{d\zeta_{p+3}}{d\tau} = -\varepsilon_T \zeta_{p+3} - \omega_{p+1}^2 \zeta_{p+1} - a^{(4)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} \zeta_{p+1}^3 -$$
$$- a^{(4)}_{p,\,p,\,p+1} \zeta_p^2 \zeta_{p+1} - P\nu (b^{(4)}_p \zeta_p + \nu^2 b^{(4)}_{p,\,p,\,p} \zeta_p^3 +$$
$$+ \nu^2 b^{(4)}_{p,\,p+1,\,p+1} \zeta_p \zeta_{p+1}^2)$$
$$(p = 1, 2, \cdots) \, ,$$

unde coeficienții sînt dați de

$$a^{(3)}_{p,\,p,\,p} = \frac{1}{4} K' p^8 \, ; \; a^{(3)}_{p,\,p+1,\,p+1} = a^{(4)}_{p,\,p,\,p+1} = \frac{1}{2} K' p^4 (1+p)^4,$$

$$a^{(4)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} = \frac{1}{4} K' (p+1)^8,$$

$$b^{(3)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} = -\frac{1}{3} \pi^2 (\varkappa + 1) \frac{p(1+p)^3 (6p^2 + 14p + 7)}{(2p+1)(2p+3)(4p+3)} \, ,$$

$$b^{(3)}_{p,\,p,\,p+1} = -\frac{1}{2} \pi^2 (\varkappa + 1) \frac{p^3 (1+p)(1+2p-2p^2)}{(1+4p)(1-4p^2)} \, , \tag{43}$$

$$b^{(4)}_{p,\,p+1,\,p+1} = \pi^2 (\varkappa + 1) \frac{p(1+p)^3 (2p^2 + 6p + 3)}{(2p+1)(4p+3)(2p+3)} \, ,$$

$$b^{(4)}_{p,\,p,\,p} = \frac{1}{3} \pi^2 (\varkappa + 1) \frac{p^3 (1+p)(6p^2 - 2p - 1)}{(2p+1)(4p+3)(2p+3)} \, .$$

Ecuația caracteristică corespunzînd ecuațiilor (42) în primă aproximație este dată de

$$\rho^4 + a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_4 = 0, \tag{44}$$

unde

$$a_1 = 2\varepsilon_T \, ; \; a_2 = \omega_p^2 + \omega_{p+1}^2 + \varepsilon_T^2 \, ; \; a_3 = \varepsilon_T (\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2),$$
$$a_4 = \omega_p^2 \omega_{p+1}^2 + \frac{p^2 (1+p)^2 \nu^2 P}{(1+2p)^2} \, .$$

Folosind condiţiile Routh-Hurwitz, se deduce expresia critică a lui v dată prin

$$v_*^2 = \frac{(1+2p)^2}{4P^2 p^2(1+p)^2}\left[(\omega_{p+1}^2 - \omega_p^2)^2 + 2\varepsilon_T^2(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2)\right] \tag{45}$$

iar expresiile rădăcinilor ecuaţiei caracteristice pe frontiera critică de flutter sînt date de

$$\rho_{1,2} = \pm if; \qquad \rho_{3,4} = -\varepsilon_T \pm if, \tag{46}$$

unde

$$f^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2), \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Rezultă pe baza lui (46) (vezi Bautin [7]) că caracterul „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice poate fi dedus determinînd semnul primei mărimi liapunoviene $L(v_*)$. Aceasta face ca frontiera critică de flutter să fie „nepericuloasă" dacă (vezi [6])

$$a^{(4)}_{p+1,p+1,p+1} + a^{(4)}_{p,p,p+1} - a^{(3)}_{p,p,p} - a^{(3)}_{p,p+1,p+1} - v_*^3 P(b^{(4)}_{p,p,p} + b^{(4)}_{p,p+1,p+1} - b^{(3)}_{p+1,p+1,p+1} - b^{(3)}_{p,p+1,p+1}) > 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{47*}$$

şi „periculoasă" dacă este satisfăcută inegalitatea inversă.

Ţinînd seama de (43), condiţia de „nepericulozitate" scrisă explicit este dată de

$$\frac{1}{4}K'[(p-1)^8 - p^8] - \frac{2}{3}Pv_*^3\pi^2(\varkappa+1)\,p(p+1)\times$$

$$\times\left[\frac{p^2(3p^2-2p-1)}{(4p+1)(4p^2-1)} + \frac{(1+p)^2(3p^2+8p+4)}{(2p+1)(4p+3)(2p+3)}\right] > 0 \tag{48}$$

$$(p = 1, 2, \ldots).$$

Condiţia de „nepericulozitate" şi „periculozitate" a frontierei critice de flutter poate fi scrisă sub forma mai concisă

$$v_* < v_r; \qquad v_* > v_r, \tag{49}$$

*) Această condiţie a fost dedusă considerînd $\varepsilon_T^2 \ll \omega_{p+1}^2 - \omega_p^2$.
În acest caz expresia vitezei critice de flutter este dată de

$$v_*^2 = \frac{(1+2p)^2}{4P^2p^2(1+p)^2}(\omega_{p+1}^2 - \omega_p^2)^2.$$

unde

$$\nu_r^3 = \frac{3}{8} K'[(p+1)^8 - p^8] \times$$

$$\times \frac{1}{P\pi^2(\varkappa+1)p(1+p)\left[\frac{p^2(3p^2-2p-1)}{(4p+1)(4p^2-1)} + \frac{(1+p)^2(3p^2+8p+4)}{(2p+1)(2p+3)(4p+3)}\right]}. \tag{50}$$

5.2. CAZUL DE SPRIJINIRE (B)

În cazul de sprijinire (B) se obţine un sistem de ecuaţii identic $(37)_1$, unde

$$\omega_1^2 = \frac{16}{3}; \quad \omega_p^2 = \frac{(p+1)^4 + (p-1)^4}{2} \qquad (p = 2, 3, \ldots) \tag{51}$$

În rest, parametrii adimensionali sînt exprimaţi tot prin $(37)_2$, (38), (39), $(40)_2$, $(40)_3$.

În cazul scurgerii pe ambele feţe ale benzii, sistemul de ecuaţii poate fi adus la forma (42), unde coeficienţii calculaţi pentru $p = 1$ sînt daţi de

$$a_{1,1,1}^{(3)} = \frac{320}{3} K'; \quad a_{1,2,2}^{(3)} = \frac{584}{3} K'; \quad a_{2,2,2}^{(4)} = \frac{3437}{4} K',$$

$$a_{1,1,2}^{(4)} = 292\, K'; \quad b_2^{(3)} = \frac{128}{45} = \frac{2}{3} b_1^{(4)},$$

$$b_{1,1,1}^{(4)} = \frac{4\times256}{27\times35}\pi^2(\varkappa+1); \quad b_{2,2,2}^{(3)} = -\frac{4\times8192}{35\times297}\pi^2(\varkappa+1), \tag{52}$$

$$b_{1,1,2}^{(3)} = 0; \quad b_{1,2,2}^{(4)} = \frac{1024\times4}{33\times35}\pi^2(\varkappa+1).$$

Expresia vitezei critice de flutter este dată de (45) pentru $p = (2, 3, \ldots)$ şi de

$$\nu_*^2 = \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4P^2 b_2^{(3)} b_1^{(4)}} \tag{53}$$

pentru

$$p = 1,$$

iar ν_3^3 (în cazul $\varepsilon_T^2 \ll \omega_{p+1}^2 - \omega_p^2$ prin relaţia (50) în cazul $(p = 2, 3, \ldots)$ şi

$$\nu_r^3 = \frac{d(d^2 a_{2,2,2}^{(4)} + a_{1,1,2}^{(4)} - a_{1,1,1}^{(3)} - d^2 a_{1,2,2}^{(3)})}{P(b_{1,1,1}^{(4)} + d^2 b_{1,2,2}^{(4)} - d^4 b_{2,2,2}^{(3)})}, \quad \left(d^2 = \frac{3}{2}\right)$$

pentru $p = 1$, condiţiile de „nepericulozitate" şi periculozitate" fiind exprimate prin inegalităţile (49).

6. CONCLUZII

Ținînd seama de expresiile (43) și (52), precum și de condițiile de „nepericulozitate" și, respectiv, „periculozitate" a frontierei critice de flutter, rezultă caracterul influenței neliniarităților fizice. Astfel, caracterul influenței neliniarităților fizice depinde de semnul rigidității D_2. În cazul în care panoul este construit din materiale „rigide" astfel încît $D_2 > 0$, caracterul influenței neliniarităților fizice este identic cu acela al neliniarităților geometrice. În cazul în care panoul este construit din materiale „moi", astfel încît $D_2 < 0$, caracterul influenței neliniarităților fizice este similar cu acela al neliniarităților aerodinamice. Este demn de menționat că, în cazul considerării unui material incompresibil ($K \to \infty$) și a liniarității aerodinamice, condiția de „nepericulozitate" coincide cu aceea dedusă de Ambarțumian și Bagdasarian [2] prin considerarea unui material de tip Iliușin și a folosirii metodei micului parametru (vezi în acest sens Bolotin [23]), un rezultat similar fiind obținut și de Tamuj și Teters [24] prin folosirea ecuațiilor constitutive neliniare prezentate de Goldenblat [25].

Primită la redacție la 9 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Bisplinghoff, *Aeroelasticity*. Appl. Mech. Rev. 1958, 11, nr. 3, 99–103.
2. L. E. Goodman, T. V. Rattaya, *Review of Panel Flutter and Effects of Aerodynamic Noise*, Pat. 1, Panel Flutter. Appl. Mech. Rev. 1960, 13, nr. 1, 2–7.
3. V. V. Bolotin, *Sovremennae napravlenia v oblasti dinamiki plastin i obolocek*, Teoria plastin i obolocek, Kiew, 1962, 16–32.
4. D. J. Johns, *A Survey of Panel Flutter*, 19-th *Meeting of the Panel*, Paris, Oct. 1964, AGARD.
5. E. I. Grigoliuc, R. E. Lamper, L. G. Sandarov, *Flatter panelei i obolocek*, Itogi Nauki, Mechanika 34–39, Moskva, 1965.
6. L. Librescu, *Aeroelastic Stability of Orthotropic heterogeneous thin Panels in the vicinity of the Flutter Critical Boundary* (Part. I). Journal de Mécanique, **4**, *1* (1965).
7. N. N. Bautin, *Povedenie dinamiceskih sistem v blizi granit oblasti ustoicivosti*, Gosizdat. Leningrad, Moskva, 1949.
8. V. V. Bolotin, *O kriticeskih Skorostiah v nelineinih zadaciah teorii aerouprogosti*, Naukinoi dokladă vasei Skolî, Masim, i pribostr., 3, 1958.
9. H. Kauderer, *Uber eine nichtlineares Elastastizitätgesetz*, Ing. Archiv, Bd. 17, H. 16, 1949, p. 464.
10. H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1988.
11. L. Librescu, *Aeroelastic Stability of orthotropic heterogeneous thin panels in the vicinity of the flutter critical boundary* (Part. II), Journal de Mécanique, **6**, *1*, 133–152, (1967).
12. W. Zerna, *Über eine nichtlineare allgemeine Theorie der Schalen*, Proc. IUTAM Sympos. Theory of thin Elastic Shells, Delft, 1959, Amsterdam 1960, 33–42 Editor W. T. Koiter.
13. I. A. Turpal, *Experimentalnoe opredelenie uprugih Konstant nelineinoi teorii uprugosti*, Prikladna Mehanika, **8**, *5*, 555–563 (1962) (în ucraineană).
14. K. Özden, *Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz*, Ing. Archiv. Bd. **24**, 133–147 (1956).
15. S. A. Ambarțumian, *Ob izgibe nelineinouprugih trehsloinih plastinok*, Izv. ANSSSR, OTN. Mehanika i Mașinostroenie, **6**, 86–90 (1960).
16. P. M. Oghibalov, *Izgib, ustoicivosti i Kolebania plastinok Izdat*, Mosk. Universit. 1958.

17. W. PRAGER, *On Ideal Locking Materials*, Trans. of the Society of Rheology, vol. I, 1957, pp. 169—175.
18. R. L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, *Principles of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, Inc. New York, London.
19. A. A. MOVCIAN, *Ob ustoicivosti panelei dvijussihsia v gaze*, Priklad. Matem. i. Mehan. **21**, *2*, 231—243 (1957).
20. L. LUKE, A. JOHN, *Supersonic Panel Flutter*, WADC TR, 57, 252, Iuly 1957.
21. H. NELSON, H. J. CUNNINGHAM, *Theoretical Investigation of Flutter of Two.-Dimensional Flat Panels with one Surface Exposed to Supersonic Potential Flow*, NACA, TN, 3465, July 1955.
22. S. A. AMBARȚUMIAN, J. E. BAGDASARIAN, *Ob ustoicivosti nelinoino-uprughih trehsloinîh plastinok, obtekaemih sverhzukovăh potokom gaze*, IZv. AN. SSSR, OTN, Mehan. i. Mașina. 4, 92—96 (1961).
23. V. V. BOLOTIN, *Nekonservativnîe zadaci teorii uprugoi ustoicivosti*, Fizmatighiz, Moskva, 1961.
24. V. P. TAMUJ, G. A. TETERS, *Izgib i ustoicivosti nelineinouprugih ortotropnîh plastinok*, Izv. Akad. Nauk Latvinskoi S.S.R. Fiz i Techn. Nauk, *6*, 63—72 (1961).
25. I. I. GOLDENBLAT, *Nekotorîe voprosi mehanicki deformiruemîh Sred*, Gosizdat, Moskva, 1955.

CONSIDERAȚII ASUPRA MĂSURĂRII FRECĂRII INTERNE ÎN SOLIDE

de EUGEN DÎMBOIU
Institutul politehnic Brașov

531.1 : 534 : 620.179.1 : 621.317.39

Se prezintă bazele teoretice ale diferitelor metode de măsurare a frecării interne în solide : metoda directă, metoda indirectă a vibrațiilor libere, metoda indirectă a vibrațiilor forțate (metoda rezonanței) și metodele indirecte cu impulsuri ultrasonice. La sfîrșit se dau rezultatele obținute prin aplicarea metodei rezonanței în cazul vibrațiilor forțate longitudinale asupra fontelor cenușii și se fac aprecieri asupra precizării măsurărilor.

Una dintre metodele fizice de cercetare mult utilizate în studiul solidelor este metoda frecării interne [1], [5], [9], [10], [11], [13]—[17]. Prin această metodă se măsoară caracteristica fizică cea mai sensibilă din punct de vedere structural, frecarea internă, cu ajutorul căreia se pot determina proprietăți aparent atît de diferite ale materialelor în general și ale metalelor în special, cum sînt capacitatea de amortizare a oscilațiilor și mobilitatea de difuzie a atomilor în rețeaua cristalină. Frecarea internă se poate deseori lega univoc de densitatea, de concentrația și de mobilitatea dislocațiilor și a defectelor în rețeaua cristalină. Procese ca recristalizarea, călirea și revenirea, solidificarea, deformarea plastică, îmbătrînirea etc. se studiază cu mult succes prin metoda frecării interne.

Diferitele acțiuni asupra metalelor duc la schimbarea structurii lor (metalografică, dislocativă etc.), iar schimbările structurale au o influență esențială asupra limitei de rupere și curgere, asupra plasticității, asupra proprietăților electrice și magnetice și în special asupra frecării interne. În aceasta rezidă posibilitatea utilizării cu eficiență a metodei frecării interne în studiul metalelor și aliajelor.

1. BAZELE TEORETICE ALE METODELOR DE MĂSURARE

Pentru determinarea frecării interne se poate utiliza *metoda directă*, care constă în determinarea raportului $\frac{\Delta W}{W}$, în care ΔW este energia disipată de epruveta considerată într-un ciclu de tensiuni (lucrul mecanic

al tensiunilor interne la un ciclu complet de variație a sarcinii exterioare $\Delta W = \int \sigma \, d\varepsilon$), iar W — energia de deformație acumulată de epruvetă în momentul în care se produce deformația maximă [6], [13], [15], [17]. Acest raport se numește „capacitate specifică de amortizare", „amortizare specifică" sau „factor de amortizare" și este o măsură pentru energia transformată în căldură pe unitatea de energie de deformație.

Dacă timpul de relaxare este mic, se recomandă utilizarea *metodelor indirecte* pentru determinarea frecării interne, supunînd epruveta unui cîmp variabil de tensiuni elastice. Aceste metode [1]—[6] [9], [10], [12]—[15], [18] se bazează pe ipoteza că forțele de restabilire sînt proporționale cu amplitudinea vibrației, în timp ce forțele de frecare sînt proporționale cu viteza (amortizare vîscoasă).

În aceste condiții, raportul dintre două amplitudini succesive (considerate la două momente separate printr-o perioadă) ale vibrațiilor libere (fig. 1 *a*) situate de aceeași parte a poziției de echilibru va fi constant și definește unitatea de măsură a frecării interne, respectiv decrementul logaritmic

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2}. \tag{1}$$

Se consideră o epruvetă avînd forța elastică de restabilire proporțională cu deplasarea, iar disiparea de energie proporțională cu viteza. Pentru o astfel de epruvetă, mișcarea punctelor materiale poate fi exprimată cu aproximație de ecuația mișcării punctului material

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + kx = f = F_m \cos \omega t; \tag{2}$$

în care

m este masa punctului material;
R_m — rezistența mecanică a sistemului;
k — rigiditatea (elasticitatea) sistemului;
x — deplasarea;
f — forța perturbatoare armonică.

În cazul vibrațiilor libere cu amortizare vîscoasă,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{3}$$

Se notează:

$$\beta = \frac{R_m}{2m} \text{ — factorul de amortizare;} \tag{4}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ — pulsația proprie a sistemului;} \tag{5}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \text{ — pseudopulsația;} \tag{6}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ — pseudoperioada,} \tag{7}$$

și relația (3) devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8}$$

Soluția ecuației (8) în cazul cînd $\beta < \omega_0$ (cazul unei forțe de frecare redusă) este

$$x = X_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi). \tag{9}$$

Mișcarea punctului material este în acest caz o mișcare vibratorie amortizată (fig. 1 *a*) de amplitudine

$$X = X_0 e^{-\beta t}, \tag{10}$$

care descrește exponențial cu timpul.

Așa cum s-a mai amintit, un indiciu asupra intensității amortizării este dat de raportul a două amplitudini succesive

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_0 e^{-\beta t}}{X_0 e^{-\beta (t+T)}} = e^{\beta T}, \tag{11}$$

iar decrementul logaritmic al amortizării este

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{\pi R_m}{m\omega}. \tag{12}$$

Atunci cînd amortizarea este suficient de mică pentru ca β să poată fi neglijat în comparație cu ω_0, relația (6) arată că $\omega = \omega_0$, iar relația (12) ia forma

$$\delta = \beta T_0 = \frac{\pi R_m \omega_0}{k}. \tag{13}$$

Energia de deformație acumulată în epruvetă fiind proporțională cu pătratul amplitudinii, în cazul cînd amortizarea specifică este mică față de unitate,

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2} = \frac{X_0^2 [e^{-2\beta t} - e^{-2\beta (t+T)}]}{X_0^2 e^{-2\beta t}} = 1 - e^{-2\beta T},$$

iar pentru valori mici ale lui β și T, se descompune $e^{-2\beta T}$ în serie și se obține

$$\frac{\Delta W}{W} \simeq 2\beta T = 2\delta. \tag{14}$$

Rezultă că, în cazul vibrațiilor libere, dacă amortizarea este mică, amortizarea specifică este egală cu dublul decrementului logaritmic.

Metoda indirectă a vibrațiilor libere amortizate se utilizează în domeniul frecvențelor mici, cînd

$$f \ll \frac{v}{d}, \tag{15}$$

unde f este frecvența;

v — viteza de propagare a undei elastice;

d — dimensiunea epruvetei în direcția de propagare a undei.

O altă *metodă indirectă* pentru măsurarea frecării interne este aceea a *vibrațiilor forțate*, în care se examinează curba de rezonanță (*metoda rezonanței*). Dacă epruveta este solicitată de o forță armonică a cărei

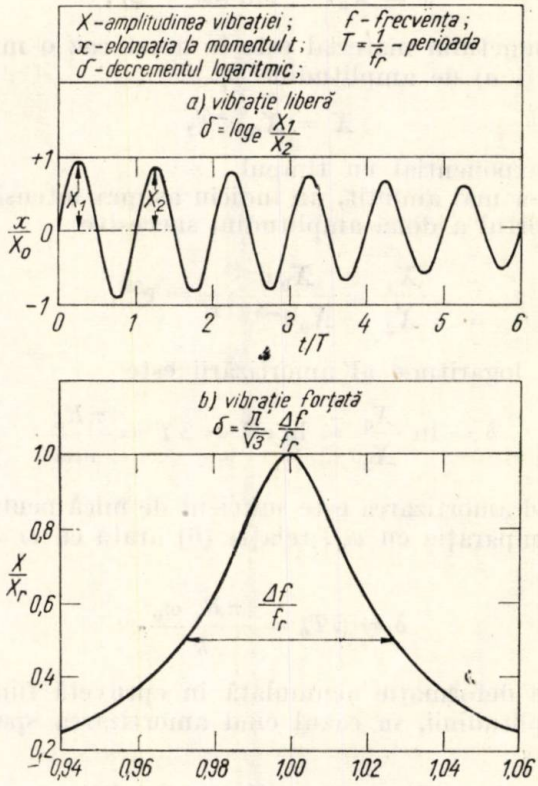


Fig. 1. — Vibrație amortizată.

frecvență poate varia, iar amplitudinea vibrațiilor epruvetei se exprimă în funcție de frecvență, curba respectivă are un maxim pentru frecvența de rezonanță f_r, coborînd de o parte și de alta a acestui punct.

În figura 1 *b* s-a reprezentat curba de rezonanță ca amplitudine relativă a *nivelului de ieșire* în funcție de frecvența exprimată ca o fracțiune a frecvenței de rezonanță.

Cînd frecarea internă este cea mai mică, vîrful curbei de rezonanță este cel mai ascuțit.

Dacă Δf este cantitatea cu care trebuie să varieze frecvența forței perturbatoare pentru ca amplitudinea să treacă de la jumătatea valorii sale maxime de o parte a frecvenței de rezonanță pînă la jumătatea valorii maxime situate de cealaltă parte, atunci $\frac{\Delta f}{f_r}$ poate exprima frecarea

internă. Pentru un sistem liniar cu amortizare slabă, $\frac{\Delta f}{f_r}$ este egal cu amortizarea specifică înmulțită cu $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. Decrementul logaritmic, în acest caz, este exprimat în funcție de lățimea curbei de rezonanță Δf la jumătatea amplitudinii maxime și de frecvența de rezonanță f_r, prin relația

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Delta f}{f_r} = 1{,}815 \frac{\Delta f}{f_r}. \tag{16}$$

În cazul vibrațiilor întreținute cu forță perturbatoare amornică în sistem de amortizare vîscoasă, este valabilă ecuația diferențială exprimată prin relația (2).

Soluția acestei ecuații cuprinde două părți: componenta liberă și componenta forțată, adică

$$x = X_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + X \sin(\omega t - \varphi), \tag{17}$$

unde

$$X = \frac{F_m}{\omega \sqrt{R_m^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}} = \frac{F_m}{\omega \sqrt{R_m^2 + X_m^2}} = \frac{F_m}{\omega Z_m} \tag{18}$$

reprezintă amplitudinea vibrațiilor forțate;

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{R_m} = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_m}{R_m} \tag{19}$$

este defazajul dintre forța perturbatoare și viteza oscilațiilor;
R_m — rezistența mecanică;
X_m — reactanța mecanică;
Z_m — impedanța mecanică.

Expresia complexă a impedanței mecanice este

$$\underline{Z}_m = R_m + jX_m. \tag{20}$$

Atunci cînd frecvența forței perturbatoare variază, amplitudinea deplasării trece printr-un maxim, determinat prin anularea derivatei întîi a funcției $x = X \sin(\omega t - \varphi)$ în raport cu ω; se obține

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{21}$$

care, introdus în relația (18), dă

$$X_m = \frac{F_m}{2m\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_m}{R_m \omega}, \tag{22}$$

și se produce fenomenul de rezonanță.

Dacă amortizarea sistemului este mică, termenul $2\beta^2$ din relația (21) se poate neglija, și fenomenul de rezonanță se produce cînd frecvența forței perturbatoare coincide cu frecvența proprie a sistemului (epruvetei),

adică atunci cînd $\omega = \omega_0$ sau $f = f_0 = f_r$. Această frecvență se numește frecvență de rezonanță.

La rezonanță, partea imaginară a impedanței mecanice este nulă, și impedanța mecanică devine minimă și egală cu rezistența mecanică.

Pentru a obține semilățimea vîrfului curbei de rezonanță, raportul $\frac{\Delta f}{f_r}$, trebuie să se obțină pentru frecvența f două valori la care amplitudinea X a deplasării este egală cu jumătatea valorii maxime $X_{(m)}$.

Dacă f_2 și f_1 sînt cele două valori ale lui f, avem

$$f_2^2 - f_1^2 = \frac{2\sqrt{3}\,\beta f}{\pi}. \tag{23}$$

În cazul cînd amortizarea este slabă, deci semilățimea mică față de unitate

$$\frac{\Delta f}{f_r} \simeq \frac{f_2 - f_1}{f} \simeq \frac{f_2^2 - f_1^2}{2f^2}, \tag{24}$$

din relațiile (23) și (14) se obține

$$\frac{\Delta f}{f_r} \simeq \frac{f_2^2 - f_1^2}{2f^2} = \frac{\sqrt{3}\,\beta}{\pi f} = \frac{\delta\sqrt{3}}{\pi}. \tag{25}$$

Din relațiile (25) și (14) se observă că semilățimea vîrfului curbei de rezonanță este egală cu decrementul logaritmic δ înmulțit cu $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$, sau cu amortizarea specifică înmulțită cu $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

Modul de comportare la rezonanță a unui sistem vibrant poate fi caracterizat și prin factorul de calitate Q, care este definit de raportul

$$Q = \frac{\pi f_r}{\beta} = \frac{\pi}{\delta}. \tag{26}$$

Cu cît factorul de amortizare β este mai mic (R_m mai mic), cu atît este mai ridicată valoarea factorului de calitate și, ca urmare, mai ascuțită forma curbei de rezonanță.

Atunci cînd în epruvetă se produce un ciclu armonic de tensiuni de perioadă T, lucrul mecanic pe care îl efectuează forța interioară este

$$\Delta W = \int_0^T f v\,\mathrm{d}t = \int_0^T f \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

În cazul de față, $f = F_m \cos\omega t$ și $x = \frac{F_m}{\omega Z_m}\sin(\omega t - \varphi)$, deci

$$\Delta W = \frac{F_m^2}{Z_m}\int_0^T \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi F_m^2}{Z_m \omega}\cos\varphi. \tag{28}$$

Pe de altă parte,

$$\cos \varphi = \frac{R_m}{Z_m}, \tag{29}$$

$$\Delta W = \frac{\pi F_m^2 R_m}{Z_m^2 \omega}. \tag{30}$$

Energia elastică acumulată în epruvetă în momentul în care deplasarea a ajuns la valoarea ei maximă (la rezonanță), ținînd cont de relația (22), este

$$W = \frac{1}{2} k X_{(m)}^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_m^2}{R_m^2 \omega_0^2}, \tag{31}$$

deci

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi R_m \omega_0}{k} = 2\delta, \tag{32}$$

adică

$$\delta = \frac{\pi R_m \omega_0}{k}, \tag{33}$$

ceea ce coincide cu decrementul logaritmic al amortizării în cazul vibrațiilor libere (13).

Metoda indirectă a vibrațiilor forțate (*metoda rezonanței*) se utilizează în domeniul frecvențelor medii cînd

$$f \simeq \frac{v}{d}. \tag{34}$$

Atît metoda indirectă a vibrațiilor libere, cît și aceea a vibrațiilor forțate sînt *metode dinamice*, întrucît în ele este vorba de cercetări asupra oscilațiilor.

Metodele indirecte cu impulsuri ultrasonice sînt tot *metode dinamice*, care permit măsurarea constantei de atenuare utilizînd un impuls ultrasonic care traversează epruveta. Unda ultrasonică suferă o atenuare din cauza absorbției (transformarea unei părți a energiei acustice în energie termică prin diferite procese) și dispersiei (o împrăștiere a energiei ultrasonice pe structura discretă a mediului în care se propagă unda).

Valorile presiunii acustice ale impulsului după parcurgerea diferitelor distanțe sînt proporționale cu amplitudinile imaginilor apărute pe ecranul osciloscopului catodic. Aceste amplitudini pot fi măsurate, legea lor de variație fiind

$$A_x = A_0 e^{-\alpha x}, \tag{35}$$

unde

A_x este amplitudinea semnalului după parcurgerea distanței x;
A_0 — amplitudinea semnalului la intrarea în epruvetă.

Utilizînd metoda transmisiei, după parcurgerea de către impulsul ultrasonic a distanței l prin epruvetă, constanta de atenuare se calculează cu relația

$$\alpha = \frac{1}{l} \ln \frac{A_0}{A_l}, \tag{36}$$

în care A_0 și A_l sînt amplitudinile inițială și finală, iar l — lungimea epruvetei.

În cazul metodei reflexiei, constanta de atenuare se calculează cu relația

$$\alpha = \frac{1}{2l} \ln \frac{A_{n-1}}{A_n}, \tag{37}$$

unde A_{n-1} și A_n sînt amplitudinile a două semnale succesive.

La o anumită frecvență f, în lungimea de parcurs l există un număr de unde egal cu $\frac{fl}{v}$, v reprezentînd viteza de propagare a undei ultrasonice în epruvetă. Ținînd seama de relația (1), decrementul logaritmic poate fi exprimat:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}, \tag{38}$$

în care o amplitudine A_0 se micșorează la valoarea A_n după n cicluri.

Comparînd relațiile (37) și (38), rezultă corelarea între constanta de atenuare și decrementul logaritmic

$$\alpha = \frac{f\delta}{v}. \tag{39}$$

Deoarece δ și v sînt aproximativ independente de frecvență, atenuarea este aproximativ proporțională cu frecvența.

În corpurile solide, atenuarea ultrasunetului depinde de raportul dintre dimensiunea particulelor componente și lungimea de undă a ultrasunetului.

Amortizarea specifică în cazul utilizării undelor ultrasonice este

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{A_x^2 - A_{x+\lambda}^2}{A_x^2} = \frac{A_0^2 [e^{-2\alpha x} - e^{-2\alpha (x+\lambda)}]}{A_0^2 e^{-2\alpha x}} = 1 - e^{-2\alpha\lambda}, \tag{40}$$

unde λ este lungimea de undă.

Pentru valori mici ale lui α și λ avem

$$\frac{\Delta W}{W} \simeq 2\alpha\lambda = 4\alpha \frac{\pi v}{\omega} = 2\delta. \tag{41}$$

Metoda indirectă cu ultrasunete se utilizează în domeniul frecvențelor înalte, cînd:

$$f \gg \frac{v}{d}. \tag{42}$$

Instalațiile folosite pentru măsurarea indirectă a frecării interne pot fi clasificate în general după următoarele criterii :

— după felul oscilației : libere, forțate ;

— după gama de frecvență : de joasă, de medie și de înaltă frecvență ;

— după forma oscilației : longitudinale, transversale, de torsiune ;

— după modul de excitație al oscilațiilor : mecanice, electromagnetice, elestrostatice, cu curenți turbionari, piezoelectrice, ultrasonice ;

— după metoda de înregistrare a oscilației : vizuale, mecanice, fotografice, fotoelectrice, electromagnetice, electrostatice, cu curenți turbionari, piezoelectrice, ultrasonice.

2. METODA DINAMICĂ A REZONANȚEI APLICATĂ ÎN CAZUL VIBRAȚIILOR FORȚATE LONGITUDINALE

În cele ce urmează se prezintă rezultatele obținute de autor la determinarea decrementului logaritmic la fontele cenușii prin metoda dinamică a rezonanței, supunînd epruveta la vibrații longitudinale [7], [8].

Schema instalației utilizate este reprezentată în figura 2.

Oscilatorul *4* produce tensiune sinusoidală, reglabilă ca amplitudine și frecvență, a cărui putere mică de ieșire impune utilizarea în schemă a amplificatorului de putere *5*. Transformarea oscilațiilor electrice în unde elastice în epruveta *1*, fixată la mijloc, se face prin intermediul traductorului electromagnetic *2*.

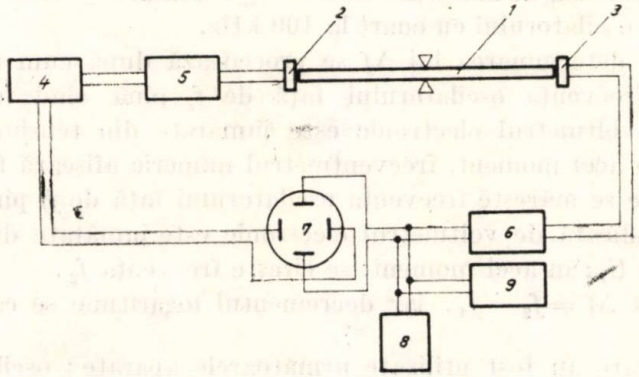


Fig. 2. — Schema instalației pentru determinarea decrementului logaritmic, a vitezei de propagare a undei elastice și a modulului de elasticitate a materialelor feromagnetice, la vibrații longitudinale.

Oscilațiile elastice ale epruvetei vor fi transformate de traductorul electromagnetic receptor *3*, sub forma unei tensiuni electromotoare armonice.

Epruveta va avea vibrații puternice atunci cînd frecvența tensiunii oscilatorului va coincide cu frecvența proprie de oscilație a epruvetei, ceea ce are loc pentru armonica fundamentală.

De la traductorul receptor oscilaţiile electrice se aplică la intrarea amplificatorului de tensiune *6*, a cărui ieşire este conectată la plăcile de deflecţie verticală ale osciloscopului catodic *7* şi la bornele voltmetrului electronic *8*. Totodată, la plăcile orizontale ale osciloscopului se aplică tensiune direct de la ieşirea din oscilator. În acest fel se poate determina univoc frecvenţa proprie de oscilaţie prin compararea celor două tensiuni după figurile Lissajous.

Variind treptat frecvenţa oscilatorului, la o anumită frecvenţă f_r a sa, în cazul dat, frecvenţele celor două tensiuni fiind egale, pe ecranul osciloscopului catodic apare un cerc, o elipsă sau o dreaptă, după unghiul de fază al celor două tensiuni, iar deviaţia acului voltmetrului electronic este maximă. În acest moment se produce fenomenul de rezonanţă, observîndu-se o creştere bruscă a oscilaţiilor.

Frecvenţmetrul numeric *9* determină numărul oscilaţiilor pe care le efectuează epruveta într-un timp oarecare de 0,001s, 0,01s, 0,1s, 1s sau 10s. Rezultatul măsurării apare afişat şi indică frecvenţa $\frac{f}{1000}$ [Hz], $\frac{f}{100}$ [Hz], $\frac{f}{10}$ [Hz], f [Hz] sau 10 f [Hz]. Dacă comutatorul selectiv al bazei de timp este pe poziţia 1s, atunci tabloul numeric decadic indică exact numărul de oscilaţii pe care le execută epruveta pe secundă, eroarea de măsurare fiind de $\pm$ 1 Hz. Dacă comutatorul este pe poziţia 10s, atunci pe tabloul numeric apare 10f, precizia de măsurare este mai mare, eroarea fiind de $\pm$ 0,1 Hz. În general precizia de măsurare este de $\pm$ 1 unitate $\pm 1.10^{-7}$, unde 10^{-7} este precizia oscilatorului cu cuarţ la 100 kHz.

Pentru determinarea lui Δf se procedează după cum urmează. Se micşorează frecvenţa oscilatorului faţă de f_r pînă cînd tensiunea U_1 indicată de voltmetrul electronic este jumătate din tensiunea la rezonanţă U_r; în acel moment, frecvenţmetrul numeric afişează frecvenţa f_1. În continuare se măreşte frecvenţa oscilatorului faţă de f_r pînă cînd tensiunea U_2 indicată de voltmetrul electronic este jumătate din tensiunea la rezonanţă U_r; în acel moment, se citeşte frecvenţa f_2.

Rezultă $\Delta f = f_2 - f_1$, iar decrementul logaritmic se calculează cu relaţia (16).

În lucrare au fost utilizate următoarele aparate: oscilator RC de mare stabilitate Orion, de 0,03—300 kHz, tip TT — 0204/A; amplificator de audiofrecvenţă Progres; osciloscop catodic Orion, tip 1531, pînă la 100 kHz; voltmetru electronic Orion EM6, tip 1321/c; frecvenţmetru numeric RFT, tip 3506 a; amplificator de tensiune $\frac{0,1}{20}$ V, 150—10 000 Hz; traductoare electromagnetice.

Încercările s-au efectuat pe epruvete de fontă cenuşie de 350 mm lungime şi 12 mm diametru.

Rezultatele încercărilor sînt redate în tabela 1.

Factorul de calitate a fost calculat cu relaţia (26).

Pentru calculul vitezei de propagare a sunetului şi modulului de elasticitate, s-a utilizat relaţia

$$f_r = \frac{nv}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{43}$$

valabilă pentru $l \gg D$ şi în care

f_r este frecvenţa de rezonanţă;

n — numărul de ordine al armonicii;

v — viteza de propagare a undei elastice la vibraţii longitudinale;

l — lungimea epruvetei;

$\rho = \dfrac{m}{l\pi \dfrac{D^2}{4}}$ — densitatea (m — masa epruvetei; D — diametrul epruvetei);

E — modulul de elasticitate.

Tabela 1

Numărul epruvetei	Tipul fontei	Lungimea epruvetei l, mm	Diametrul epruvetei D, mm	Masa epruvetei m, g	Frecvenţa de rezonanţă f_r, Hz	Frecvenţa f_1, Hz	Frecvenţa f_2, Hz	$\Delta f = f_2 - f_1$, Hz	Decrementul logaritmic δ	Factorul de calitate Q	Viteza de propagare a undei elastice v, m/s	Modulul de elasticitate E, kgf/mm^2
1	fontă cenuşie	350	12	283,6	5 718	5 697	5 742	45	0,0142	221	4 002,6	11 695
2	,,	,,	,,	285,9	5 755	5 735	5 778	43	0,0135	233	4 028,5	11 944
3	,,	,,	,,	290,3	5 934	5 919	5 955	36	0,0110	285	4 153,8	12 889
4	,,	,,	,,	286,6	5 974	5 960	5 990	30	0,00911	345	4 181,8	12 906

În cazul de faţă ne mulţumim cu măsurarea frecvenţei primei armonice ($n = 1$), şi atunci din relaţia (43) rezultă

$$v = f_r \cdot 2l, \tag{44}$$

$$E = \frac{16}{\pi}\,\frac{ml}{D^2}\,f_r^2. \tag{45}$$

Din datele din tabela 1 se observă că decrementul logaritmic scade pe măsură ce creşte modulul de elasticitate, iar factorul de calitate creşte. Deci, cu cît materialul este mai elastic, cu atît amortizarea este mai mică şi calitatea mai bună.

Pe de altă parte, dacă se compară epruvetele *2* și *4*, ale căror micrografii la mărirea × 100 sînt indicate în figurile 3*a* și 3*b*, se observă influența lungimii și diametrului separărilor de grafit asupra amortizării.

a)

b)

Fig. 3.— Micrografiile epruvetelor *2* și *4*, la mărirea ×100.

În primul caz, ele fiind mai mari, amortizarea este mai mare.

3. PRECIZIA MĂSURĂRILOR

Pentru a pune în evidență gradul de precizie al măsurărilor efectuate se va da calculul erorilor pentru mărimile referitoare la epruveta *2*.

Erorile relative de determinare a decrementului logaritmic, $\frac{\Delta\delta}{\delta}$, a vitezei de propagare a sunetului, $\frac{\Delta v}{v}$, și a modulului de elasticitate, $\frac{\Delta E}{E}$, se obțin ținînd cont de relațiile (16), (44) și (45):

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\Delta f_2}{f_2 - f_1} + \frac{\Delta f_1}{f_2 - f_1} + \frac{\Delta f_r}{f_r}, \tag{46}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta f_r}{f_r} + \frac{\Delta l}{l}, \tag{47}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta f_r}{f_r} + 2\frac{\Delta D}{D}. \tag{48}$$

În cazul epruvetei *2* avem

1) $f_2 - f_1 = 43$ Hz; $\Delta f_2 = \Delta f_1 = \pm 0{,}1$ Hz; $\frac{\Delta f_2}{f_2 - f_1} = \frac{\Delta f_1}{f_2 - f_1} = \frac{0{,}1}{43} = 0{,}0023$;

$f_r = 5\,755$ Hz; $\Delta f_r = \pm 0{,}1$ Hz; $\frac{\Delta f_r}{f_r} = \frac{0{,}1}{5\,755} = 0{,}000017$;

$\frac{\Delta\delta}{\delta} = 0{,}0023 + 0{,}0023 + 0{,}000017 = 0{,}004617 \rightarrow \pm 0{,}46\ \%$;

pentru $\delta = 0{,}0135$, rezultă $\Delta\delta = \pm 0{,}000062$;

2) $l = 350$ mm; $\Delta l = \pm 0{,}1$ mm; $\frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}1}{350} = 0{,}00028$;

$f_r = 5\,755$ Hz; $\Delta f_r = \pm 0{,}1$ Hz; $\frac{\Delta f_r}{f_r} = \frac{0{,}1}{5\,755} = 0{,}000017$;

$\frac{\Delta v}{v} = 0{,}000017 + 2.0{,}00028 = 0{,}000577 \rightarrow \pm 0{,}057\ \%$;

pentru $v = 4\,028{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, rezultă $\Delta v = \pm 2{,}29\ \frac{m}{s}$;

3) $m = 285{,}9$ g; $\Delta m = \pm 0{,}1$ g; $\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}1}{285{,}9} = 0{,}00034$;

$l = 350$ mm; $\Delta l = \pm 0{,}1$ mm; $\frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}1}{350} = 0{,}00028$;

$f_r = 5\,755$ Hz; $\Delta f_r = \pm 0{,}1$ Hz; $\frac{\Delta f_r}{f_r} = \frac{0{,}1}{5\,755} = 0{,}000017$;

$D = 12$ mm; $\Delta D = \pm 0{,}01$ mm; $\frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}01}{12} = 0{,}00083$;

$\frac{\Delta E}{E} = 0{,}00034 + 0{,}00028 + 2.0{,}000017 + 2.0{,}00083 = 0{,}002314 \rightarrow \pm 0{,}23\ \%$;

pentru $E = 11\,944\ \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$, rezultă $\Delta E = \pm 27{,}47\ \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$.

Primită la redacție la 10 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Внутренее трение в металлах и сплавах*, Академия Наук СССР, Институт Металлургии им. Байкова, Москва Изд. „Наука" 1966.
2. BĂDĂRĂU, E., GRUMĂZESCU, M., *Bazele acusticii moderne*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1962.
3. BĂDĂRĂU, E., GRUMĂZESCU, M., *Ultraacustica fizică şi tehnică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1967.
4. BARONE, A., *Detection and Measurement of Ultrasound*, în Encyclopedia of Physics, **XI/2**, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 74—152, 1962.
5. БЕИНЕВА, Т. Иа., ЛАРИКОВ, Л. Н., ПОЛОТКИЙ, И. Г., *Влияние структуры на модуль Юнга и декремент затухания алюминия*, *физика твердого тела*, **7**, *8*, 2273—2275 (1965).
6. BUZDUGAN, GH., *Măsurarea vibraţiilor mecanice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
7. DÎMBOIU, E., *Determinarea frecvenţei de rezonanţă, a vitezei de propagare a sunetului şi modulului de elasticitate în cazul vibraţiilor longitudinale în lemn*, Industria lemnului, *1*, 23—26 (1963).
8. DÎMBOIU, E., TUDORAN, P., GIACOMELLI, I., *Cercetări privind legătura dintre unele caracteristici ale fontelor cenuşii şi viteza de propagare a sunetului*, Metalurgia, *12*, 672—676 (1966).
9. FĂCĂOARU, I., NEGOIŢĂ, C., BERNATH, A., *Măsurări şi control cu ultrasunete*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
10. HEARMON, R. F. S., *The Assessment of Wood Properties by Vibrations and High Frequency Acoustic Waves*, Proceedings of Second Symposium on Nondestructive Testing of Wood, Wash, State Univ., 49—65 (1965).
11. JAYNE, B. A., *The Vibrational Properties of Wood as Indices of Quality*, Forest Products Journal, **IX**, *11*, 413 (1959).
12. KOHLRAUSCH, F., *Praktische Physik*, I, Stuttgart, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 144—172, 1960.
13. KOLSKY, H., *Stress Waves in Solids*, New York, Dover Publications, Inc., 1963.
14. KOLLMANN, F., KRECH, H., *Dynamische Messung der elastichen Holzeigenschaften und der Dämpfung*, Holz als Roh — nd Werkstoff, **18**, *2*, 41—54, (1960).
15. КРИШТАЛ, М. А. ПИГУЗОВ, Ю. В., ГОЛОВИН, С. А., *Внутренее тренее в металлах и сплавах*, Москва, 1964, Изд." Металлургия"
16. MILLER, D. G., *Selection Efficiencies of Nondestructive Strength Tests*, Forest Products Journal, **XII**, *8*, 358 (1962).
17. PIWOWARSKI, E., *Fonte de înaltă calitate*, Bucureşti, 1967, Edit. tehnică (trad. din l. germană după ediţia a II-a).
18. TRUELL, R., ELBAUM, C., *High Frequency Ultrasonics Stress Waves in Solids*, în Encyclopedia of Physics, **XI/2**, Berlin, Göttingen, Heiderlberg, Springer — Verlag, 153—258, 1962.

STUDII

LEGILE DE VARIAȚIE A PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL ÎMBINĂRILOR PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE (II)

de A. PAVEL
(Institutul de petrol, gaze și geologie, București,

621.643.411

Se prezintă o metodă analitică de calcul a presiunii instantanee de contact, elaborată pentru îmbinările prin mandrinare lisă folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale.
După ce se precizează ipotezele de calcul, pornindu-se de la condițiile de echilibru și de la condițiile de compatibilitate a deformațiilor radiale, se procedează la stabilirea ecuațiilor diferențiale ale presiunii instantanee de contact pentru îmbinarea prin mandrinare lisă în placa tubulară a țevilor cu perete subțire sau cu perete gros, studiindu-se separat stările de eforturi plane și spațiale în cazul solicitării axiale la întindere sau compresiune.
Prin integrarea acestor ecuații diferențiale se obțin soluții generale care conduc la o serie de concluzii deosebit de importante din punct de vedere practic, iar, în urma stabilirii condițiilor de contur, din aceste soluții generale rezultă formule de calcul simple pentru presiunea instantanee de contact. În final, pe baza rezultatelor obținute, se precizează legile de variație a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune.

Rezumativ, formulele de calcul pentru coeficienții k_1 și k_2 sînt prezentate în tabela 4, în funcție de tipul țevilor îmbinate cu placa tubulară prin mandrinare lisă și de tipul solicitării (întindere sau compresiune).

În tabelele 2 și 3 se prezintă, comparativ, valorile coeficienților k_1 și k_2 calculate cu diferite formule, deci pentru diferite situații și pentru anumite date inițiale. Analiza acestor valori confirmă concluziile anterioare și prezintă în plus un tablou cantitativ al gradului de precizie al diferitelor formule de calcul.

f) FORMA GENERALĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT

Din calculele și considerațiile prezentate anterior rezultă că ecuațiile diferențiale ale presiunii instantanee de contact în cazul general al îmbinărilor prin mandrinare lisă sînt :

Tabela 2

Compararea valorilor coeficienților k_1 și k_2

(calculele au fost făcute pentru următoarele date:

$s' = 2{,}5$ mm; $m' = 5$ mm; $r_0 = \frac{d_0}{2} = 12{,}75$ mm; $\mu = 0{,}3$; $f = 0{,}4$).

Modulul de elasticitate longitudinal, în kgf/cm²		$E_p = 2{,}1 \cdot 10^6$ (oțel) $E_t = 2{,}0 \cdot 10^6$ (oțel)		$E_p = 2{,}1 \cdot 10^6$ (oțel) $E_t = 0{,}99 \cdot 10^6$ (alamă)		$E_p = E_t$	
Solicitarea îmbinării / Tipul țevilor mandrinate		Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)
Țevi cu perete gros. Stare de eforturi spațială ($\sigma_r^{p'} \neq 0$)	①	$k_1 = 0{,}1209$	$k_2 = 0{,}0573$	$k_1 = 0{,}1434$	$k_2 = 0{,}0999$	$k_1 = 0{,}1200$	$k_2 = 0{,}0547$
Țevi cu perete gros. Stare de eforturi plană ($\sigma_r^{p'}$ neglijabil)	②	$k_1 = 0{,}1205$	$k_2 = 0{,}0571$	$k_1 = 0{,}1302$	$k_2 = 0{,}0909$		
Țevi cu perete subțire	③	$k_1 = 0{,}121$	$k_2 = 0{,}0501$	$k_1 = 0{,}1300$	$k_2 = 0{,}0855$	$k_1 = 0{,}1240$	$k_2 = 0{,}0552$
	④	$k_1 = 0{,}1200$	$k_2 = 0{,}0349$	$k_1 = 0{,}1200$	$k_2 = 0{,}0681$	$k_1 = 0{,}1200$	$k_2 = 0{,}0400$

Observație. Numerotarea rîndurilor tabelei corespunde celei din tabela 4, pentru a înlesni identificarea formulelor de calcul corespunzătoare pentru coeficienții k_1 și k_2.

Tabela 3

Compararea valorilor coeficienților k_1 și k_2

(calculele au fost făcute pentru următoarele date:

$s' = 2{,}5$ mm; $m' = 5$ mm; $r_0 = \frac{d_0}{2} = 12{,}75$ mm; $\mu = 0{,}3$; $f = 0{,}4$)

Modulul de elasticitate longitudinal, în kgf/cm²	$E_p = 2{,}1.10^6$ (oțel) $E_t = 2{,}0.10^6$ (oțel)		$E_p = 2{,}1.10^6$ (oțel) $E_t = 0{,}99.10^6$ (alamă)		$E_p = E_t$	
Raportul coeficienților / Solicitarea îmbinării	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)
$\frac{k_1^{(1)}}{k_1^{(4)}} \cdot 100$; $\frac{k_2^{(1)}}{k_2^{(4)}} \cdot 100$	100,6 (+0,6)	164,1 (+64,1)	119,5 (+19,5)	146,1 (+46,1)	100,0 (0,0)	136,8 (+36,8)
$\frac{k_1^{(2)}}{k_1^{(4)}} \cdot 100$; $\frac{k_2^{(2)}}{k_2^{(4)}} \cdot 100$	100,2 (+0,2)	163,6 (+63,6)	108,6 (+8,6)	133,0 (+33,0)		
$\frac{k_1^{(3)}}{k_1^{(4)}} \cdot 100$; $\frac{k_2^{(3)}}{k_2^{(4)}} \cdot 100$	100,8 (+0,8)	143,6 (+43,6)	108,1 (+8,1)	125,2 (+25,2)	101,6 (+1,6)	138,0 (+38,0)
$\frac{k_1^{(1)}}{k_1^{(3)}} \cdot 100$; $\frac{k_2^{(1)}}{k_2^{(3)}} \cdot 100$	100 (0,0)	114,0 (+14,0)	110,1 (+10,1)	116,9 (+16,9)	96,8 (−3,2)	99,2 (−0,8)
$\frac{k_1^{(2)}}{k_1^{(3)}} \cdot 100$; $\frac{k_2^{(2)}}{k_2^{(3)}} \cdot 100$	99,7 −0,3	113,9 (+13,9)	100,1 (+0,1)	106,1 (+6,1)		

Observații. 1) În paranteze sînt indicate, în procente, abaterile coeficienților k_1 și k_2 față de valorile de referință. 2) Exponenții coeficienților (cifrele încercuite) corespund numerotării rîndurilor din tabelele 2 și 4.

— pentru solicitarea la întindere (vezi formulele (15), (45) și (70) și fig. 4*a*):

$$\frac{dp_1}{dx} + \frac{k_1}{r_0} \cdot p_1 = 0; \tag{81}$$

— pentru solicitarea la compresiune (vezi formulele (28), (56) și (78) și fig. 4*b*):

$$\frac{dp_2}{dx} - \frac{k_2}{r_0} \cdot p_2 = 0. \tag{82}$$

Ecuațiile diferențiale (81) și (82) mai pot fi scrise și sub următoarea formă generală :

$$\frac{dp_{1,2}}{dx} \pm \frac{k_{1,2}}{r_0} \cdot p_{1,2} = 0, \tag{83}$$

în care indicele 1 și semnul plus (+) corespund solicitării la întindere (fig. 4*a*), iar indicele 2 și semnul minus (—), solicitării la compresiune (fig. 4*b*).

În tabela 4 se indică, recapitulativ, formulele de calcul ale coeficienților k_1 și k_2, respectiv $k_{1,2}$, în funcție de tipul țevilor mandrinate, de natura solicitării și de corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t.

INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI PRECIZAREA LEGILOR DE VARIAȚIE A PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT

a) SOLUȚII GENERALE

Soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale (81) și (82), respectiv (83), obținute în urma integrării prin metoda separării variabilelor, sînt :

— pentru solicitarea la întindere (vezi formula (81)) :

$$p_1 = c_1 \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} \cdot x\right); \tag{84}$$

— pentru solicitarea la compresiune (vezi formula (82)) :

$$p_2 = c_2 \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0} \cdot x\right), \tag{85}$$

c_1 și c_2 fiind constante de integrare, ale căror valori urmează să fie determinate — în scopul stabilirii soluțiilor particulare — din condițiile la limită (în cazul de față, condiții de contur).

Se transcriu expresiile (84) și (85) sub următoarea formă :

$$\left(\frac{p_1}{c_1}\right)^{\frac{1}{k_1}} = \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right); \tag{86}$$

$$\left(\frac{p_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{k_2}} = \exp\left(\frac{x}{r_0}\right), \tag{87}$$

valorile $\exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$ și $\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$ fiind date în tabela 5 în funcție de valoarea exponentului $\frac{x}{r_0}$.

În figura 6 este dată reprezentarea grafică a relației (86), iar în figura 7 este reprezentată grafic relația (87). Ambele figuri redau însă — este adevărat, într-o primă formă generală — legile de variație ale

Tabela 4

Formule de calcul pentru coeficienții k_1 și k_2, respectiv $k_{1,2}$ (vezi formulele (81) – (83)).

Corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t		$E_p \neq E_t$		$E_p = E_t$		Notații
Solicitarea îmbinării / Tipul țevilor mandrinate		Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	
Țevi cu perete gros. Stare de eforturi spațială ($\sigma_r^{p'} \neq 0$)	①	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2+1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)-\mu\cdot\dfrac{E_p-E_t}{E_t}\cdot(\beta_p^2-1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\,\beta_t^2-1}{\psi\left(\beta_t^2+1\right)+\left(\beta_p^2+1\right)-\mu\cdot\dfrac{E_p-E_t}{E_t}\cdot(\beta_p^2-1)}$	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\,\beta_t^2+1}{\psi\,(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\,\beta_t^2-1}{\psi\,(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$\beta_t = \dfrac{1}{1-\dfrac{s'}{r_0}}$; $\beta_p = 1+\dfrac{m'}{r_0}$
Țevi cu perete gros. Stare de eforturi plană ($\sigma_r^{p'}$ neglijabil)	②	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\,\beta_t^2+1}{\psi\,(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\,\beta_t^2-1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$			$\psi = \dfrac{E_p\,(\beta_p^2-1)}{E_t\,(\beta_t^2-1)}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{\beta_p^2-1}{\beta_t^2-1}$ pentru $E_p = E_t$
Țevi cu perete subțire	③	$k_1 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_1 = \mu f \dfrac{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$\psi = \dfrac{m'E_p}{s'E_t}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{m'}{s'}$ pentru $E_p = E_t$
	④	$k_1 \approx \mu f$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_2 \approx \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_1 = \mu f$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{cases} s' << 2r_0 \\ m' << 2r_0 \end{cases}$	

Tabela 5

Valori pentru $\exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$ și $\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$

$\frac{x}{r_0}$	$\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$	$\exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$	$\frac{x}{r_0}$	$\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$	$\exp\left(-\frac{x}{r_0}\right)$
0,0	1,0000	1,000	10	$2{,}2026.10^{4}$	$0{,}454.10^{-4}$
0,5	1,6487	0,607	15	$3{,}238.10^{6}$	$0{,}309.10^{-6}$
1,0	2,7183	0,368	20	$4{,}9.10^{8}$	$0{,}204.10^{-8}$
1,5	4,4817	0,223	25	$7{,}08.10^{10}$	$0{,}141.10^{-10}$
2,0	7,3891	0,1352	30	$10{,}71.10^{12}$	$0{,}0931.10^{-12}$
2,5	12,1825	0,0821	50	$50{,}10.10^{20}$	$0{,}01995.10^{-20}$
3,0	20,0860	0,0497			
3,5	33,1150	0,0302	100	$2{,}682.10^{43}$	$0{,}372.10^{-43}$
4,0	54,5980	0,0183			
4,5	90,0170	0,0111			
5,0	148,4130	0,00673	—	—	—

Observație. Pentru $\frac{x}{r_0} \leqslant 10$, valorile $\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$ au fost luate din lucrarea [25]. Pentru $\frac{x}{r_0} > 10$, valorile $\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)$ au fost calculate de către autor.

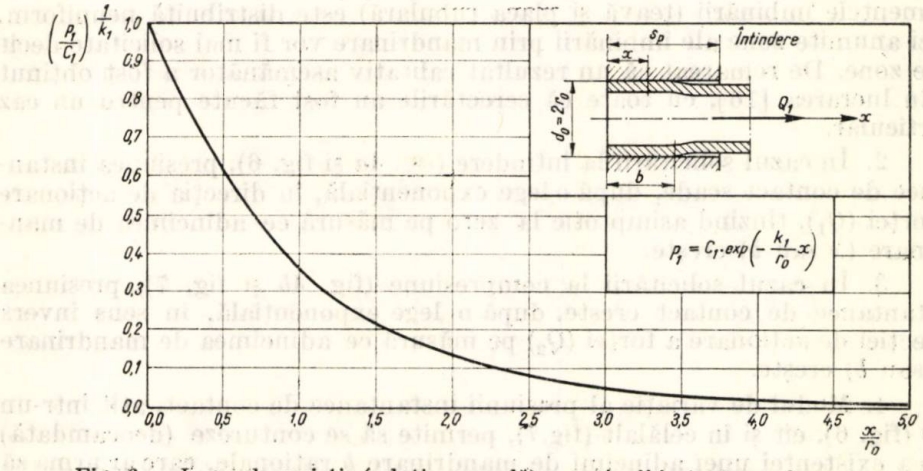


Fig. 6. — Legea de variație (soluție generală) a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate la întindere.

presiunii instantanee de contact pentru cele două moduri de solicitare avute în vedere : întindere (fig. 6) şi compresiune (fig. 7).

O primă analiză a curbelor reprezentînd legile de variaţie a presiunii instantanee de contact (soluţii generale), reprezentate în figurile 6 şi 7, conduce la următoarele concluzii deosebit de importante din punct de vedere practic :

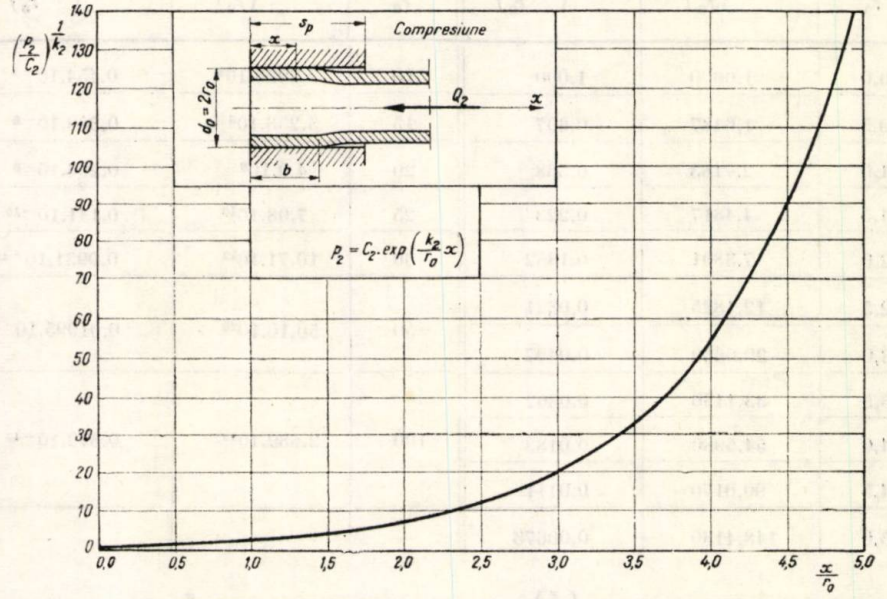


Fig. 7. — Legea de variaţie (soluţie generală) a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate la compresiune.

1. În urma punerii sub sarcină (întindere sau compresiune) a îmbinărilor prin mandrinare lisă, presiunea pe suprafeţele de contact dintre elementele îmbinării (ţeavă şi placa tubulară) este distribuită neuniform, deci anumite zone ale îmbinării prin mandrinare vor fi mai solicitate decît alte zone. De remarcat că un rezultat calitativ asemănător a fost obţinut şi în lucrarea [16], cu toate că cercetările au fost făcute pentru un caz particular.

2. În cazul solicitării la întindere (fig. 4*a* şi fig. 6), presiunea instantanee de contact scade, după o lege exponenţială, în direcţia de acţionare a forţei (Q_1), tinzînd asimptotic la zero pe măsură ce adîncimea de mandrinare (x sau b) creşte.

3. În cazul solicitării la compresiune (fig. 4*b* şi fig. 7), presiunea instantanee de contact creşte, după o lege exponenţială, în sens invers direcţiei de acţionare a forţei (Q_2) pe măsură ce adîncimea de mandrinare (x sau b) creşte.

4. Modul de variaţie al presiunii instantanee de contact, atît într-un caz (fig. 6), cît şi în celălalt (fig.7), permite să se contureze (deocamdată) ideea existenţei unei adîncimi de mandrinare b raţionale, care ar urma să fie luată în consideraţie în calculele practice.

b) SOLUȚII PARTICULARE

Pentru a obține din soluțiile generale (84) și (85) soluțiile particulare care interesează în rezolvarea problemei de față, se procedează la determinarea constantelor de integrare c_1 și c_2, condițiile de contur ce trebuie să fie satisfăcute în acest caz fiind următoarele :

— pentru solicitarea de întindere (fig. 4*a* și *d*) :

$$x = 0 \rightarrow \sigma_{p_2} = \frac{Q_1}{F_p} = 0 \rightarrow Q_1 = 0 ; \tag{88}$$

— pentru solicitarea de compresiune (fig. 4*b* și *e*) :

$$x = b \rightarrow \sigma_{p_3} = \frac{Q_2}{F_p} = 0 \rightarrow Q_2 = 0, \tag{89}$$

în care F_p reprezintă aria secțiunii transversale a piesei tubulare decupate din placa tubulară (fig. 2).

Întrucît pentru cele două cazuri de solicitare considerate în zonele $x = 0$ și, respectiv, $x = b$ îmbinarea prin mandrinare nu preia și nu transmite nici un fel de efort, rezultă așadar

$$\begin{aligned} p_0 - p_1 &= 0 \text{ pentru } x = 0 ; \\ p_0 - p_2 &= 0 \text{ pentru } x = b, \end{aligned} \tag{90}$$

de unde, dacă se ține cont de expresiile (84) și (85), se obține

$$c_1 = p_0 ; \tag{91}$$

$$c_2 = \frac{p_0}{\exp\left(\frac{k_2}{r_0} b\right)} = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{k_2}{r_0} b\right). \tag{92}$$

Legile de variație a presiunii instantanee de contact vor fi deci

$$p_1 = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} x\right); \tag{93}$$

$$p_2 = p_0 \cdot \frac{\exp\left(\frac{k_2}{r_0} x\right)}{\exp\left(\frac{k_2}{r_0} b\right)} = p_0 \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0} x\right) \cdot \exp\left(-\frac{k_2}{r_0} b\right) \tag{94}$$

sau

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_1}} = \exp\left(-\frac{x}{r_0}\right); \tag{93 a}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_2}} = \frac{\exp\left(\frac{x}{r_0}\right)}{\exp\left(\frac{b}{r_0}\right)} = \exp\left(\frac{x}{r_0}\right) \cdot \exp\left(-\frac{b}{r_0}\right). \tag{94 a}$$

În figura 8 sînt reprezentate grafic legile de variație a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă pentru solicitarea de întindere (curba *1*) și pentru solicitarea de compresiune (curba *2*), ultima fiind trasată pentru $\frac{b}{r_0} = 5{,}0$. După cum rezultă din această

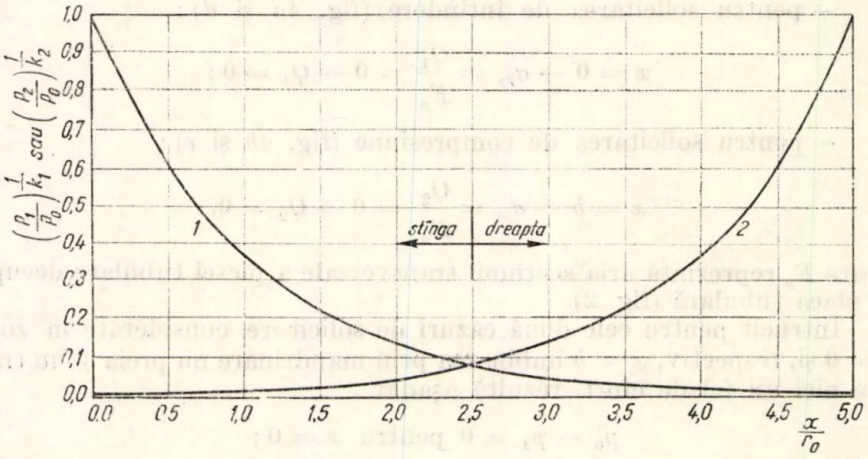


Fig. 8. — Legile de variație (soluții particulare) a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă:
1 — solicitare la întindere (formulele 93 și 93 a);
2 — solicitare la compresiune (formulele 94 și 94 a), pentru $\frac{b}{r_0} = 5{,}0$.

figură, pentru o anumită adîncime de mandrinare b și pentru un anumit raport $\frac{x}{r_0}$, $\left(\frac{x}{r_0} = 2{,}5 \text{ în cazul considerat}\right)$, se poate scrie

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_1}} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \tag{95}$$

de unde pentru punctul M (fig. 8) se obține

$$p_{1M} = p_0 \left(\frac{p_{2M}}{p_0}\right)^{\frac{k_1}{k_2}}, \tag{96}$$

Dacă se ține seama de formulele (93) și (94), atunci în punctul M (fig. 8) vor rezulta următoarele expresii de calcul pentru p_1 și p_2:

$$p_{1M} = p_0 \cdot \exp\left(\frac{k_1}{r_0} x\right) \cdot \exp\left(-\frac{k_1^2}{k_2 r_0} b\right); \tag{97}$$

$$p_{2M} = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{k_2}{r_0} x\right), \tag{98}$$

în cazul considerat ($x = 2{,}5.r_0$ și $b = 5{,}0.r_0$) obținîndu-se

$$p_{1M} = p_0 \cdot \exp(2{,}5\, k_1) \cdot \exp\left(-\frac{5k_1^2}{k_2}\right); \tag{99}$$

$$p_{2M} = p_0 \cdot \exp(-2{,}5 k_2). \tag{100}$$

În dreapta punctului M (fig. 8) îmbinarea prin mandrinare lisă se comportă mai bine la solicitarea de compresiune, iar în stînga punctului M aceeași îmbinare se comportă mai bine la solicitarea de întindere, așa cum, de altfel, rezultă și din următoarele inegalități :

— în dreapta punctului M

$$p_1 < p_{2M} \rightarrow \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} x\right) < \exp\left(-\frac{k_2}{r_0} x\right); \tag{101}$$

— în stînga punctului M

$$p_2 < p_{1M} \rightarrow \frac{\exp\left(\frac{k_2}{r_0} x\right)}{\exp\left(\frac{k_2}{r_0} b\right)} < \frac{\exp\left(\frac{k_1}{r_0} x\right)}{\exp\left(\frac{k_1^2}{k_2 r_0} b\right)}, \tag{102}$$

deoarece întotdeauna $k_1 > k_2$ (vezi tabelele 2 și 4).

ANEXĂ

Notații :

p_0 este presiunea inițială de contact (presiune ce se manifestă pe suprafața de contact țeavă-placă tubulară înainte de solicitarea îmbinării prin mandrinare), în kgf/cm²;

p, p_1, p_2 — presiuni instantanee de contact, în kgf/cm²;

$p' = p_0 - p$; $p' = p_0 - p_1$; $p' = p_0 - p_2$; [kgf/cm²]

Q, Q_1, Q_2 — forțe axiale ce solicită îmbinarea prin mandrinare, în kgf;

σ_p, σ_{p_1}, σ_{p_2} — eforturi unitare normale longitudinale în placa tubulară, provenite din solicitările Q, Q_1 și Q_2, în kgf/cm²;

σ_t, σ_{t_1}, σ_{t_2} — eforturi unitare normale longitudinale în țevi, provenite din solicitările Q, Q_1 și Q_2, în kgf/cm²;

$d\sigma_p$, $d\sigma_t$ — creșteri ale eforturilor unitare normale longitudinale σ_p și σ_t, în kgf/cm²;

$\sigma_{p_1}^{p'}$, $\sigma_{p_2}^{p'}$ — eforturi unitare normale circumferințiale în placa tubulară provenite din solicitarea la presiunea p', în kgf/cm²;

$\sigma_{t_1}^{p'}$, $\sigma_{t_2}^{p'}$ — eforturi unitare normale circumferințiale în țevi, provenite din solicitarea la presiunea p', în kgf/cm²;

$\sigma_r^{p'}$ — efort unitar normal radial, provenit din solicitarea la presiunea p', în kgf/cm²;

$\sigma_{rp_1}^{p'}$, $\sigma_{rp_1}^{p'}$ — eforturi unitare normale radiale în placa tubulară, provenite din solicitarea la presiunea p', în kgf/cm²;

$\sigma_{rt_1}^{p'}$, $\sigma_{rt_2}^{p'}$ — eforturi unitare normale radiale în țevi, provenite din solicitarea la presiunea p', în kgf/cm²;

σ_{ct}, σ_{cp} — limita de curgere a materialelor din care se confecționează țevile și, respectiv, plăcile tubulare în care se mandrinează țevile, în kgf/cm²;

τ — eforturi unitare tangențiale pe suprafața de contact țeavă-placă tubulară, în kgf/cm²;

E, E_p, E_t — module de elasticitate longitudinale, în kgf/cm²;

Z — componenta forțelor exterioare în direcția axei z, raportată la unitatea de suprafață (vezi teoria de membrană), în kgf/cm²;

ε_{p_1} ε_{p_2} — deformații (elastice) specifice radiale totale pentru placa tubulară, în unități relative;

ε_{t_1}, ε_{t_2} — deformații (elastice) specifice radiale totale pentru țeavă, în unități relative;

ψ — „maleabilitatea relativă" a țevii, în unități relative;

k_1, k_2 — coeficienți depinzînd de dimensiunile și proprietățile elastice ale pieselor îmbinate prin mandrinare;

f — coeficient de frecare pe suprafața de contact dintre piesele îmbinate prin mandrinare;

μ — coeficientul lui Poisson;

x — coordonată curentă, măsurată în direcție axială în cm;

dx — creșterea coordonatei curente x, în cm;

b — adîncimea de mandrinare, în cm;

s_p — grosimea plăcii tubulare, în cm;

t — pasul dintre țevile fasciculului tubular, în cm;

s și s' — grosimea peretelui țevii înainte și după mandrinare ($s' < s$), în cm;

m — lățimea minimă admisibilă a punții dintre două țevi alăturate, în cm;

$m' = \frac{m}{2}$ — grosimea piesei tubulare exterioare, decupate din placa tubulară, în cm;

$d_0 = 2r_0 \approx d_2'$ — diametrul locașului din placa tubulară în care se mandrinează țeava, în cm;

$\delta = d_0 - d_2$ — jocul inițial dintre țeavă și peretele locașului din placa tubulară, în cm;

d_2 și d_2' — diametrul exterior al țevii înainte și după mandrinare ($d'_2 > d_2$), în cm;

d_1 și d_1' — diametrul interior al țevii înainte și după mandrinare ($d'_1 > d_1$), în cm;

$D_{mt} = 2R_{mt}$ — diametrul mediu al țevii după mandrinare, în cm;

$D_{mp} = 2R_{mp}$ — diametrul mediu al piesei tubulare exterioare, decupate din placa tubulară, după mandrinare, în cm;

$F_p = \pi . D_{mp} . m'$ — aria secțiunii transversale a piesei tubulare decupate din placa tubulară, în cm^2;

$$\beta = \frac{d_2}{d_1} \; ; \; \beta_t = \frac{1}{1 - \frac{s'}{r_0}} \; ; \; \beta_p = 1 + \frac{m'}{r_0};$$

c_1, c_2 — constante de integrare;
indice p — pentru placa tubulară;
indice t — pentru țeavă;
indice 1 — întinderea fasciculului tubular, respectiv a țevii (solicitarea la întindere);
indice 2 — compresiunea fasciculului tubular, respectiv a țevii (solicitarea la compresiune).

BIBLIOGRAFIE

1. Ю. Л. Вихман, И. Ф. Бабицкий, С. И. Вольфсон, *Расчет и конструирование нефтезаводской аппаратуры*, Москва-Ленинград, Гостоптехиздат 1953.
2. И. Ф. Бабицкий, Г. Л. Вихман, С. И., Вольфсон, *Расчет и конструирование аппаратуры нефтеперерабатывающих заводов*. Москва, Недра, 1965.
3. Şt. Teodorescu, *Construcția și calculul mecanic al aparaturii statice din instalațiile de prelucrarea țițeiului și petrochimice*, București, T.L.I., 1956.
4. С. С. Берман, *Теплообменные аппараты и конденсационные устройства турбоустановок*, Москва, Машгиз, 1959.
5. А. Н. Константинов, Н. А. Самсонов, М. А. Вейцман, К. Я. Иванец, *Аппараты и оборудование нефтеперерабатывающих заводов* (Расчет и конструирование), Справочная книга. Москва, Гостоптехиздат, 1960.
6. T. Hobler, *Ruch ciepla i wymienniki*, Wydanie II uzupelnione, Warszawa, 1959.
7. А. Д. Домашнев, *Конструирование и расчет химических аппаратов*, Москва, Машгиз, 1961.
8. П. А. Антикайн, М. С. Аронович, А. М. Бакластов, *Рекуперативные теплообменные аппараты*, Москва-Ленинград, Госэнергоиздат, 1962.
9. А. Н. Лейбо, Э. Б. Хесин, Я. С. Черняк, *Справочник механика нефтеперерабатывающего завода*, Москва, Гостоптехиздат, 1963.
10. M. Renert, G. Tănase, *Calculul și construcția utilajului chimic*, ediția a II-a, vol. I, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
11. Г. Л. Вихман, С. А. Круглов, *Основы конструирования аппаратов и машин нефтеперерабатывающих заводов*, Москва, Гостоптехиздат, 1962.
12. M. A. Kicighin, G. N. Kostenko, *Schimbătoare de căldură și instalații de vaporizare*, București, Editura tehnică, 1958.
13. MIPC, NID-2550–62., *Aparatură pentru industria chimică și petrolieră. Plăci tubulare. Prescripții de calcul.*
14. F. L. Rubin, *With are the differences? New TEMA standards compared to old*, „Petroleum Refiner", **40**, *6*, 157–164 (1961).
15. Al. Davidescu, H. Mucica, *Schimbul de căldură în instalațiile industriale*, București, Editura tehnică, 1964.
16. Л. П. Перцев, В. М. Долинский, *Расчет прочности вальцовочного соединения трубы с трубной решеткой теплообменного аппарата*, „Химическое и нефтяное машиностроение", сентябрь, *3*, 20–23 (1964).
17. А. П. Мураров, *Опыт автоматизаций развальцовки труб в коллекторах судовых котлов*. „Судостроение", **26**, *11*, 46—48 (1960).
18. А. И. Антошин, *Теоретическое исследование прессовых и вольцовочных соединений труб*. Сб. *За новое советское энергооборудование*, Ленинград, ЦКТИ, 1939.
19. A. D. Nadai, *Theory of expanding of the boiler and condenser tube joints through rolling*, „Trans. ASME", **65**, 865–880 (1943).
20. J. N. Goodier, G. J. Schoessow, *The holding power and hydraulic tightness of expanded tube joints*, „Trans. ASME", **65**, 489–496 (1943).

21. G. Sachs, *Note of the tightness of expanded tube joints*, „Journal of Applied Mechanics," **14**, *4*, 285—286 (1947).
22. E. D. Grimisson, G. G. Lee, *Experimental investigation of tube expanding*, „Trans. ASME", **65**, 497—505 (1943).
23. A. Pavel, *Cu privire la calculul de rezistență și etanșeitate al îmbinării prin mandrinare dintre țevile și plăcile aparaturii tubulare utilizate în industriile petrolieră prelucrătoare, chimică și petrochimică*, I, Construcția de mașini, **XVIII**, *3*, 137—149 (1966).
24. * * * *Manualul inginerului mecanic*, Vol. I, București, Editura tehnică, 1959.
25. Б. И. Сегал, К. А., Семендяев, *Пятизначные математические таблицы*, Москва, Физматгиз, 1962.
26. A. Pavel, *Cu privire la calculul de rezistență și etanșeitate al îmbinării prin mandrinare dintre țevile și plăcile aparaturii tubulare utilizate în industriile petrolieră prelucrătoare, chimică și petrochimică*. II, Construcția de mașini, **XVIII**, *4*, 205—213 (1966).

Primită la redacție la 7 martie 1966.

ANALIZA ARMONICĂ A LEGILOR DE MIŞCARE LA MECANISMELE CU CAME

de CHR. PELECUDI şi ANCA MATHEESCU
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

621.835

Se calculează coeficienţii Fourier pentru diverse legi de mişcare ale mecanismelor de distribuţie, pe baza discontinuităţilor diverselor derivate. Se redau coeficienţii pentru legile simple, ca şi pentru legile polinomiale utilizate la viteze ridicate — came polidine.
Se discută influenţele fazelor neegale, a pauzelor superioară şi inferioară, precum şi a sectorului de mişcare uniformă, la camele cu trei sectoare în fazele active, de ridicare sau coborîre.

Pentru cunoaşterea comportării dinamice a mecanismelor de distribuţie de la motoarele cu turaţii mari este folositoare reprezentarea prin serii armonice a diverselor legi de mişcare şi compararea lor pe baza influenţelor armonicelor superioare [1], [2]. Totodată, din cauza impedanţei mecanice a oscilatorului prin care se modelează lanţul cinematic al distribuţiei, se obţine transformarea amplitudinilor şi defazajul acestor componente în mod neuniform, ceea ce corespunde unor aspecte de filtrare. Vibraţiile mecanismului sînt de asemenea mai uşor de urmărit prin această analiză armonică.

1) Întrebuinţînd exprimarea complexă, seriile legilor de mişcare vor fi de forma

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m \, e^{\frac{2\pi m \, i}{\lambda} x}, \tag{1}$$

în care λ este perioada, iar coeficienţii C_m sînt daţi de expresia

$$\lambda \, C_m = \int_0^{\lambda} y \, e^{-\frac{2\pi m \, i}{\lambda} x} \, dx. \tag{2}$$

Pentru $m \neq 0$, integrînd prin părţi, se găseşte

$$\lambda C_m = \left| -\left[\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{\lambda}{2\pi m\,\mathrm{i}}\right)^{k+1} y^{(k)}\right] \mathrm{e}^{-\frac{2\pi m\,\mathrm{i}}{\lambda}x} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda}{2\pi m\,\mathrm{i}}\right)^{p+1} \int y^{(p+1)} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi m\,\mathrm{i}}{\lambda}x}\,\mathrm{d}x \right|_0^{\lambda}. \tag{3}$$

În cazul în care funcţia şi derivatele sale au un număr finit de discontinuităţi, de specia întîi, pe perioada λ, definindu-se saltul de ordinul k prin diferenţa derivatelor de ordinul k ale funcţiei la dreapta şi la stînga punctelor de discontinuitate (x_r), adică

$$S_r^{(k)} = y_+^{(k)}(x_r) - y_-^{(k)}(x_r), \tag{4}$$

se ajunge la formula

$$\lambda C_m = +\sum_r \left[\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{\lambda}{2\pi m\,\mathrm{i}}\right)^{k+1} S_r^{(k)}\right] \mathrm{e}^{-\frac{2\pi m\,\mathrm{i}}{\lambda}x_r} +$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi m\,\mathrm{i}}\right)^{p+1} \int_0^{\lambda} y^{(p+1)}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi m\,\mathrm{i}}{\lambda}x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

Dacă pe porţiuni funcţia este reprezentată prin polinoame de gradul p, atunci $y^{(p+1)} = 0$, ultimul termen din expresia lui C_m dispare, iar pentru forma trigonometrică a seriei

$$y = C_0 + \sum A_m \cos\frac{2\pi m}{\lambda}x + \sum B_m \sin\frac{2\pi m}{\lambda}x \tag{6}$$

se obţin următorii coeficienţi [3]:

$$\frac{\lambda}{2}A_m = -\frac{\lambda}{2\pi m}\sum S_r^{(0)} \sin\frac{2\pi m}{\lambda}x_r - \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^2 \sum S_r^{(1)} \cos\frac{2\pi m}{\lambda}x_r +$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^3 \sum S_r^{(2)} \sin\frac{2\pi m}{\lambda}x_r + \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^4 \sum S_r^{(3)} \cos\frac{2\pi m}{\lambda}x_r - \ldots \tag{7}$$

$$\frac{\lambda}{2}B_m = \frac{\lambda}{2\pi m}\sum S_r^{(0)} \cos\frac{2\pi m}{\lambda}x_r -$$

$$- \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^2 \sum S_r^{(1)} \sin\frac{2\pi m}{\lambda}x_r - \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^3 \sum S_r^{(2)} \cos\frac{2\pi m}{\lambda}x_r + \ldots \tag{8}$$

deoarece

$$A_m = C_m + C_{-m} \quad \text{şi} \quad B_m = \mathrm{i}(C_m - C_{-m}). \tag{9}$$

Pentru funcţiile periodice cu p derivate continue, iar cu derivata de ordinul $(p+1)$ continuă pe porţiuni, coeficienţii Fourier tind spre zero

o dată cu $\left(\frac{1}{m}\right)^p$, seria numerică $\Sigma \mid C_m \mid m^p$ fiind convergentă. Determinarea coeficienţilor se reduce la

$$\lambda C_m = \left(\frac{\lambda}{2\pi m \mathrm{i}}\right)^{p+1} \int_0^\lambda y^{(p+1)} \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi m \mathrm{i}}{\lambda} x} \, \mathrm{d}x \tag{10}$$

sau pentru p par

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} A_m &= (-1)^{\frac{p}{2}+1} \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^{p+1} \int_0^\lambda y^{(p+1)} \sin \frac{2\pi m}{\lambda} x \, \mathrm{d}x, \\ \frac{\lambda}{2} B_m &= (-1)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^{p+1} \int_0^\lambda y^{(p+1)} \cos \frac{2\pi m}{\lambda} x \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{11}$$

şi pentru p impar

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} A_m &= (-1)^{\frac{p+1}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^{p+1} \int_0^\lambda y^{(p+1)} \cos \frac{2\pi m}{\lambda} x \, \mathrm{d}x, \\ \frac{\lambda}{2} B_m &= (-1)^{\frac{p+1}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi m}\right)^{p+1} \int_0^\lambda y^{(p+1)} \sin \frac{2\pi m}{\lambda} x \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{12}$$

Termenul constant C_0 se determină din

$$\lambda C_0 = \int_0^\lambda y \mathrm{d}x, \tag{13}$$

care, de asemenea, integrat prin părţi, capătă forma

$$\lambda C_0 = \left| \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{k+1} y^{(k)}}{(k+1)!} + \frac{1}{(p+1)!} \int x^{p+1} y^{(p+1)} \, \mathrm{d}x \right|_0^\lambda. \tag{14}$$

Pentru cele două cazuri practice de calcul, amintite anterior, primul util în cazul legilor polinomiale de puteri, celălalt util în cazul legilor nepolinomiale (de exponenţiale), termenul C_0 capătă determinările

$$\lambda C_0 = \sum_r \left[\sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{x_r^{k+1} S_r^{(k)}}{(k+1)!} \right] \tag{15}$$

şi

$$\lambda C_0 = \frac{1}{(p+1)!} \int_0^\lambda x^{p+1} y^{(p+1)} \, \mathrm{d}x. \tag{16}$$

Sub forma (13) coeficientul C_0 reprezintă, pentru mecanismele cu came, media cronosecţiunii pe ciclul complet de perioadă λ de funcţionare.

2) Reprezentările grafice ale legilor de mişcare au forma generală din figura 1. Dacă ne referim la lungimea fazei de ridicare luată ca unitate, celelalte faze au lungimile : coborîre c, pauză inferioară i, pauză superioară s. Astfel perioada completă este $\lambda = 1 + c + s + i$.

Urmărind a întrebuinţa aceeaşi formă de lege de mişcare pentru faza de ridicare ca şi pentru cea de coborîre (fig. 1), dar de lungimi în general neegale, fără pauze, legăturile dintre ele se exprimă prin

$$y_r(x) = y_c(-cx) = y_c(\lambda - cx),$$
$$\lambda = 1 + c \tag{17}$$

şi

$$y_r'(x) = -cy_c'(-cx);\ y_r''(x) = c^2 y_c''(-cx);\ y_r'''(x) = -c^3 y'''(-cx)\ldots \tag{18}$$

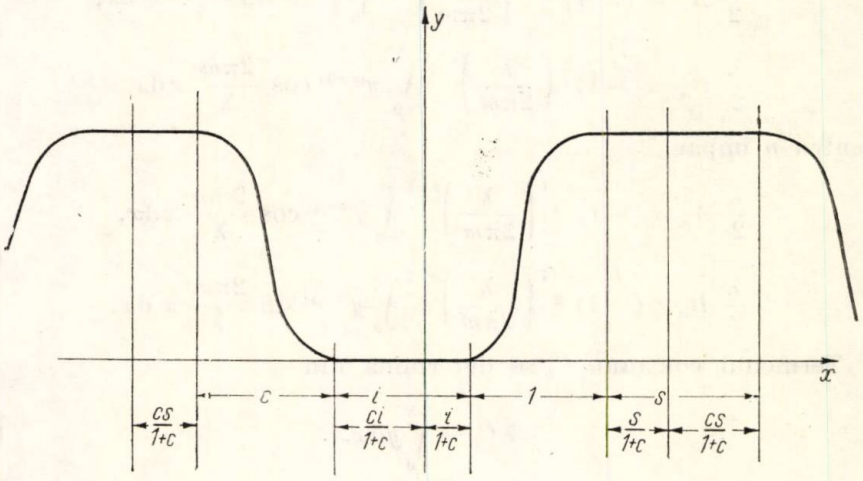


Fig. 1

Aceste legături impun, pentru păstrarea continuităţilor diverselor derivate în punctele $x = 0$ sau $x = 1$ şi -1, următoarele :

a) sau $c = 1$, adică fazele de ridicare şi de coborîre sînt simetrice şi $y_r' = y_c' = 0$, $y_r'' = y_c''$, $y_r''' = y_c''' = 0, \ldots$, adică în punctele de joncţiune numai derivatele de ordine impare trebuie să se anuleze, celelalte putînd avea valori finite, dar egale, adică

$$x = 0; \qquad y = 0;\ y' = 0;\ y''(0) \neq 0,$$
$$y''' = 0;\ y^{IV}(0) \neq 0;\ y^{V} = 0, \ldots$$
$$x = 1,\ -1; \quad y(1) = y(-1) = 1;\ y'(1) = y'(-1) = 0, \tag{19}$$
$$y''(1) = y''(-1) \neq 0;\ y'''(1) = y'''(-1) = 0, \ldots$$

b) sau $c \neq 1$, cu fazele de ridicare şi de coborîre neegale, dar pentru păstrarea continuităţii derivatelor în punctele de joncţiune trebuie ca acestea să aibe valori nule :

$$x = 0; \qquad y = 0;\ y' = 0;\ y'' = 0; \ldots\ y^{(p)} = 0,$$
$$x = 1, -1;\ y = 1;\ y' = 0;\ y'' = 0; \ldots\ y^{(p)} = 0. \tag{20}$$

Fără a considera fazele de pauze superioară şi inferioară, legile polinomiale vor acoperi tot ciclul de mişcare, redus numai la fazele de ridicare şi coborîre.

În primul caz (a), considerînd continuitatea pînă la derivata de ordinul p-pară-, vom avea în cazurile cele mai simple

$$y^{(p-1)} = Ax(1-x^2) = A(x-x^3)$$

şi deci

$$y^{(p-2)} = A\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) + C_1, \tag{21}$$

$$y^{(p-3)} = A\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20}\right) + C_1 x + C_2,$$

. . . . . .

$$y = A\left(\frac{x^p}{p!} - \frac{6x^{p+2}}{(p+2)!}\right) + \frac{C_1 x^{p-2}}{(p-2)!} + \frac{C_2 x^{p-3}}{(p-3)!} + \ldots + C_{p-1}. \tag{22}$$

Cele p constante de integrare se determină prin condiţiile (19). Deoarece pentru derivatele impare, în originea $x = 0$, valoarea lor este nulă, rezultă $C_2 = C_4 = C = {}_6 \ldots = 0$. De asemenea $C_{p-1} = 0$. Se îndeplineşte totodată şi condiţia ca, în punctele $x = 1$ şi $x = -1$, derivatele să fie egale. Punînd, în plus, condiţiile ca derivatele de ordin impar să se anuleze în aceleaşi puncte $x = 1$ şi $x = -1$, se determină constantele de indici impari, adică

$$C_2 = -\frac{7A}{60} \quad \text{şi} \quad y^{(p-2)} = -\frac{A}{60}(7 - 30x^2 + 15x^4),$$
$$y^{(p-3)} = -\frac{Ax}{60}(1-x^2)(7-3x^2) \tag{23}$$

şi

$$C_3 = \frac{31A}{2520}, \quad y^{(p-4)} = \frac{A}{2520}(31 - 147x^2 + 105x^4 - 21x^6),$$
$$y^{(p-5)} = \frac{Ax}{2520}(1-x^2)(31 - 18x^2 + 3x^4), \tag{24}$$

. . . . . .

Constanta A se determină din condiţia ca funcţia să aibă valoarea unitară în punctele $x = 1$ şi -1. Vom avea primele legi astfel:

$$p = 1 \text{ şi } 2, \quad y = 2x^2 - x^4, \tag{25}$$

$$p = 3 \text{ şi } 4, \quad y = \frac{7x^2 - 5x^4 + x^6}{3}. \tag{26}$$

Aceste legi se pot transforma, prin adăugarea unor funcţii care îndeplinesc condiţii omogene la capetele intervalelor, pînă la derivata de ordinul p;

$$\overline{y} = [x(1-x^2)]^{p+1} Q(x), \tag{27}$$

astfel ca $0 < y + \overline{y} < 1$ şi $0 < y' + \overline{y}'$,

în care $Q(x)$ este arbitrar, dar respectă inegalităţile anterioare. Mai simplu, se poate adăuga pe faza de ridicare funcţia

$$\overline{y}_r(x) = [x(1-x)]^{p+1} Q(x), \tag{28}$$

iar pe faza de coborîre funcţia

$$\overline{y}_c(x) = [-x(1+x)]^{p+1} Q(-x). \tag{29}$$

Pentru îmbunătăţirea cronosecţiunii $\sigma_{1,2} = \frac{7}{15} \cong 0{,}5$ şi $\sigma_{3,4} = \frac{31}{63} \cong 0{,}5$ se alege funcţia $Q(x)$ de formele $Q(x) = k(1-mx)^n$ sau $Q(x) = k(1-mx^\nu)$ cu $k > 0$, $1 > m > 0$ şi $1 > \nu > 0$ şi $n > 1$.

Cazul al doilea de soluţii (b) corespunde legilor utilizate la mecanismele cu toate fazele *P R P C P* la care, dacă se elimină pauzele, intervin uneori continuităţi superioare. Aceste legi ale mecanismelor de distribuţie, exprimate sub formă adimensională, cuprinse în diverse lucrări, au fost sistematizate, completate şi analizate, pe baza parametrilor cinematici maximi [4], [5] cronosecţiune, viteză, acceleraţie, supraacceleraţie şi pe baza condiţiilor de continuitate ale derivatelor superioare, pînă la ordinul patru, la capetele intervalului activ de lucru. Ele sînt întabelate şi cuprind atît formele simetrice, cît şi formele asimetrice, cu două sau trei sectoare de mişcare accelerată, uniformă şi decelerată, în faza de ridicare completată cu faza de coborîre şi eventual cu fazele de pauze superioară şi inferioară.

3) Din cauza prelungirii pare a funcţiilor din faza de ridicare în faza de coborîre, seriile Fourier vor conţine numai termenii în cosinus, astfel încît coeficienţii $B_m = 0$ vor fi nuli, iar coeficienţii A_m vor fi dubli integralelor calculate pe semiperioadă (7) , (8).

De asemenea, din cauza eliminării pauzelor, numai derivatele impare (18), superioare ordinului p de continuitate, pot fi discontinue în punctele 0,1 (sau -1).

Pentru legile polinomiale simetrice, în punctele $x = 0$ şi $x = 1$ derivatele de ordin impar sînt egale, iar cele de ordin par sînt egale în valoare absolută, dar de semne contrare

$$y^{(r)}(1) = (-1)^{r-1} y^{(r)}(0). \tag{30}$$

Termenul liber din dezvoltarea Fourier al legilor simetrice este $C_0 = 0{,}5$.

Pentru legile polinomiale asimetrice, discontinuităţile pot apărea în afara punctelor $x = 0$ şi $x = 1$ şi în punctele $x = u_1$ sau $x = 1 - u_2$ (legi cu trei sectoare) [4], [5]. Dar, cu ajutorul coeficientului de asimetrie $k = \frac{u_2}{u_1}$ forma legii din sectorul de decelare y_2 este obţinută din aceea a sectorului de accelerare y_1 prin

$$y_2(x) = 1 - k y_1\left(\frac{1-x}{k}\right) \tag{31}$$

și deci

$$y_2^{(r)}(x) = \left(-\frac{u_1}{u_2}\right)^{r-1} y_1^{(r)}\left[\frac{u_1}{u_2}(1-x)\right].$$

De aici rezultă că valorile de discontinuitate din punctele 1 și $(1-u_2)$ se pot reduce la acelea din punctele 0 și u_1, adică

$$\begin{aligned} y_{2-}^{(r)}(1) &= \left(-\frac{u_1}{u_2}\right)^{r-1} y_{1+}^{(r)}(0), \\ y_{2+}^{(r)}(1-u_2) &= \left(-\frac{u_1}{u_2}\right)^{r-1} y_{1-}^{(r)}(u_1). \end{aligned} \tag{32}$$

Termenul liber din dezvoltarea Fourier al legilor asimetrice are valoarea cronosecțiunii $C_0 = \sigma$ [4], [5].

4. Coeficienții Fourier ai legilor simetrice cu două sectoare [4],[5]. Conform celor anterioare rezultă :

$$p = 1, \qquad y = 3x^2 - 2x^3, \quad y^{(3)}(0) = y^{(3)}(1) = -12,$$

$$A_m = -\frac{24(1-\cos\pi m)}{(\pi m)^4} \tag{33}$$

sau

$$A_m = -\frac{48}{(\pi m)^4} \quad \text{pentru } m \text{ impar.}$$

$$A_m = 0 \qquad \text{pentru } m \text{ par,}$$

$$p = 2 \qquad y = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5,$$

$$y^{(3)}(0) = y^{(3)}(1) = 60\,; \quad y^{(5)}(0) = y^{(5)}(1) = 720,$$

$$A_m = \frac{120(1-\cos\pi m)}{(\pi m)^4}\left[1 - \frac{12}{(\pi m)^2}\right] \tag{34}$$

sau

$$A_m = \frac{240}{(\pi m)^4}\left[1 - \frac{12}{(\pi m)^2}\right] \text{pentru } m \text{ impar,}$$

$$A_m = 0 \qquad \text{pentru } m \text{ par,}$$

$$p = 3, \qquad y = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7,$$

$$y^{(5)}(0) = y^{(5)}(1) = -84.5! = -10.080,$$

$$y^{(7)}(0) = y^{(7)}(1) = -20.7! = -100.800,$$

$$A_m = \frac{20160(1-\cos\pi m)}{(\pi m)^6}\left[1 - \frac{10}{(\pi m)^2}\right] \tag{35}$$

sau

$$A_m = \frac{40320}{(\pi m)^6}\left[1 - \frac{10}{(\pi m)^2}\right] \qquad \text{pentru } m \text{ impar,}$$

$$A_m = 0 \qquad \text{pentru } m \text{ par,}$$

$$p = 4, \quad y = 126\,x^5 - 420\,x^6 + 540\,x^7 - 315\,x^8 + 70\,x^9,$$

$$y^{(5)}(0) = y^{(5)}(1) = 126.5! = 15.120,$$

$$y^{(7)}(0) = y^{(7)}(1) = 540.7! = 2.721.600,$$

$$y^{(9)}(0) = y^{(9)}(1) = 70.9! = 25.401.600,$$

$$A_m = -\frac{30.240\,(1 - \cos \pi m)}{(\pi m)^6}\left[1 - \frac{180}{(\pi m)^2} + \frac{1680}{(\pi m)^4}\right] \tag{36}$$

sau

$$A_m = -\frac{60.480}{(\pi m)^6}\left[1 - \frac{180}{(\pi m)^2} + \frac{1680}{(\pi m)^4}\right] \qquad \text{pentru } m \text{ impar,}$$

$$A_m = 0 \qquad \text{pentru } m \text{ par.}$$

Se vede că rapiditatea convergenţei este destul de mare, coeficienţii A_m scăzînd pentru primele legi, $p = 1$ şi 2, cu puterea patru a ordinului m, iar pentru ultimele două legi, $p = 3$ şi 4, cu puterea a şasea a ordinului m. În plus, coeficienţii A_m există numai pentru ordinele impare. Valorile primilor coeficienţi sînt redate în tabela 1.

Introducerea pauzelor, superioară sau inferioară, lasă neschimbată rapiditatea convergenţei pentru legile $p = 2$ şi $p = 4$ şi o micşorează la puterea a treia a ordinului m pentru legea $p = 1$ şi la puterea a cincea a ordinului m pentru legea $p = 3$.

5) Coeficienţii Fourier ai legilor asimetrice cu trei sectoare [4], [5]. Vom nota prin C şi S funcţiile cosinusoidale şi sinusoidale în raport cu m, u_1 şi u_2 de formele

$$C_{nm} = \frac{\cos^2 \dfrac{\pi m u_1}{2}}{u_1^n} - (-1)^m \frac{\cos^2 \dfrac{\pi m u_2}{2}}{u_2^n},$$

$$S_{nm} = \frac{\sin \pi m u_1}{u_1^n} - (-1)^m \frac{\sin \pi m u_2}{u_2^n}. \tag{37}$$

Tabela 1

1	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
A_1	−0,49373	−0,53579	−0,59728	−1,57165
A_3	−0,00608	0,02635	0,05121	0,07057
A_5	−0,00079	0,00373	0,00258	−0,00120
A_7	−0,00020	0,00099	0,00035	−0,00033
A_9	−0,00007	0,00036	0,00001	−0,00009
A_{11}	−0,00003	0,00015	0	0
A_{13}	−0,00002	0,00007	0	0
A_{15}	−0,00010	0,00003	0	0
A_1/A_3	81,20559	−20,33358	−11,66334	−22,27079
A_1/A_5	624,97460	−143,64343	−231,50387	1309,70830
A_1/A_7	2468,650	−541,202	−1706,514	4762,575
A_1/A_9	7053,281	−1488,305	−59728,0	17462,777
A_1/A_{11}	16457,666	−3571,933	—	—
A_1/A_{13}	24685,5000	−7654,142	—	—
A_1/A_{15}	49373,000	−17859,666	—	—

Se deduce

$$p=1,\quad y_1=\frac{vx^2}{2u_1},$$

$$y_{1+}^{(2)}(0)=y_{1-}^{(2)}(u_1)=\frac{v}{u_1};\quad y_{2-}^{(2)}(1)=y_{2+}^{(2)}(1-u_2)=-\frac{v}{u_2},$$

$$A_m=-\frac{2v}{(\pi m)^3}S_{1m}, \tag{38}$$

$$p=2,\quad y_1=\frac{u_1v}{2}\left[2\left(\frac{x}{u_1}\right)^3-\left(\frac{x}{u_1}\right)^4\right],$$

$$y_{1+}^{(3)}(0)=-y_{1-}^{(3)}(u_1)=\frac{6v}{u_1^2};\quad y_{2-}^{(3)}(1)=-y_{2+}^{(3)}(1-u_2)=\frac{6v}{u_2^2},$$

$$y_{1+}^{(4)}(0) = y_{1-}^{(4)}(u_1) = -\frac{12v}{u_1^3}; \quad y_{2-}^{(4)}(1) = y_{2+}^{(4)}(1-u_2) = \frac{12v}{u_2^3},$$

$$A_m = \frac{24v}{(\pi m)^4}\left[C_{2m} - \frac{S_{3m}}{\pi m}\right]; \tag{39}$$

$p = 3,$ $$y_1 = \frac{u_1 v}{2}\left[5\left(\frac{x}{u_1}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{u_1}\right)^5 + 2\left(\frac{x}{u_1}\right)^6\right],$$

$$y_{1+}^{(4)}(0) = y_{1-}^{(4)}(u_1) = \frac{60v}{u_1^3}; \quad y_{2-}^{(4)}(1) = y_{2+}^{(4)}(1-u_2) = -\frac{60v}{u_2^3},$$

$$y_{1+}^{(5)}(0) = -y_{1-}^{(5)}(u_1) = -\frac{360v}{u_1^4}; \quad y_{2-}^{(5)}(1) = y_{2+}^{(5)}(1-u_2) = -\frac{360v}{u_2^4},$$

$$y_{1+}^{(6)}(0) = y_1^{(6)}(u_1) = \frac{720v}{u_1^5}; \quad y_2^{(6)}(1) = y_2^{(6)}(1-u_2) = -\frac{720v}{u_2^5},$$

$$A_m = \frac{120v}{(\pi m)^5}\left[S_{3m} + \frac{12}{\pi m} C_{4m} - \frac{12}{(\pi m)^2} S_{5m}\right]; \tag{40}$$

$p = 4,$ $$y_1 = \frac{u_1 v}{2}\left[14\left(\frac{x}{u_1}\right)^5 - 28\left(\frac{x}{u_1}\right)^6 + 20\left(\frac{x}{u_1}\right)^7 - 5\left(\frac{x}{u_1}\right)^8\right],$$

$$y_{1+}^{(5)}(0) = -y_{1-}^{(5)}(u_1) = \frac{840v}{u_1^4}; \quad y_{2-}^{(5)}(1) = -y_{2+}^{(5)}(1-u_2) = \frac{840v}{u_2^4},$$

$$y_{1+}^{(6)}(0) = y_{1-}^{(6)}(u_1) = -\frac{10.080v}{u_1^5}; \quad y_{2-}^{(6)}(1) = y_{2+}^{(6)}(1-u_2) = \frac{10.080v}{u_2^5},$$

$$y_{1+}^{(7)}(0) = -y_{1-}^{(7)}(u_1) = \frac{50.400v}{u_1^6}; \quad y_{2-}^{(7)}(1) = -y_{2+}^{(7)}(1-u_2) = \frac{50.400v}{u_2^6},$$

$$y_{1+}^{(8)}(0) = y_{1-}^{(8)}(u_1) = -\frac{100.800v}{u_1^7}; \quad y_{2-}^{(8)}(1) = y_{2+}^{(8)}(1-u_2) = \frac{100.800v}{u_2^7},$$

$$A_m = \frac{3360v}{(\pi m)^6}\left[-C_{4m} + \frac{6}{\pi m} S_{5m} + \frac{60}{(\pi m)^2} C_{6m} - \frac{60}{(\pi m)^3} S_{7m}\right]. \tag{41}$$

Coeficienţii C şi S pot căpăta forme reduse în cazul legilor particularizate, astfel :

— pentru legile simetrice cu sector central de mişcare uniformă $u_1 = u_2 = u < 0{,}5$ rămîn numai coeficienţii pentru m impar

$$C_{nm} = \frac{2\cos^2\frac{\pi m u}{2}}{u^n}, \qquad S_{nm} = \frac{2\sin \pi m u}{u^n}; \tag{42}$$

— pentru legile simetrice fără sector central de mișcare uniformă $u_1 = u_2 = u = 0{,}5$, avem (m impar)

$$C_{nm} = 2^n \quad S_{nm} = \pm 2^{n+1} \tag{43}$$

după cum m este $M4 + 1$ sau $M4 + 3$;

— pentru legi asimetrice fără sector central de mișcare uniformă $u_1 = u$; $u_2 = 1 - u$, avem coeficienții (m oarecare):

$$S_{nm} = \sin \pi m u \left[\frac{1}{u^n} + \frac{1}{(1-u)^n}\right], \tag{44}$$

$$C_{nm} = \frac{\cos \pi m u}{2}\left[\frac{1}{u^n} - \frac{1}{(1-u)^n}\right] + \left[\frac{1}{2u^n} - \frac{(-1)^n}{2(1-u)^n}\right],$$

care se reduc la cei anteriori pentru simetria $u = 0{,}5$.

Se menține observația rapidității convergenței cu puterea $(p + 2)$ a ordinului m a coeficienților. În afara legilor simetrice, coeficienții A_m se mențin pentru orice ordin m par sau impar. Datorită discontinuităților create de sectorul de mișcare uniformă sau de eventualele faze de pauze, apar în componența coeficienților sume de termeni care scad însă în raport cu puteri superioare ale ordinului m, cuprinse între $p + 2$ și $2p + 1$.

6) Coeficienții Fourier ai legilor simple cu și fără șocuri $p = 1$ sau $p = 2$ [4], [5] sînt redați în tabelele 2 și 3.

Aceste tabele verifică observațiile generale asupra rapidității convergenței diverselor legi. De asemenea, subliniem scăderea convergenței pentru derivatele deplasării, adică viteze, accelerații sau supraaccelerații.

7) Pentru legile polinomiale coeficienții Fourier pot fi de asemenea calculați prin integrări efectuate direct asupra monoamelor de puteri. Astfel

$$A_m^{(k)} = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} x^k \cos \frac{2\pi m x}{\lambda}\,\mathrm{d}x,$$

$$B_m^{(k)} = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} x^k \sin \frac{2\pi m x}{\lambda}\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

și, integrînd prin părți, se obțin relațiile de recurență

$$A_m^{(k)} = -\frac{k\lambda}{2\pi m} B_m^{(k-1)},$$

$$B_m^{(k)} = \frac{k\lambda}{2\pi m} A_m^{(k-1)} - \frac{(-1)^m\,[1-(-1)^k]}{\pi m}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k, \tag{46}$$

cu

$$A_m^{(0)} = B_m^{(0)} = 0.$$

Tabela 2

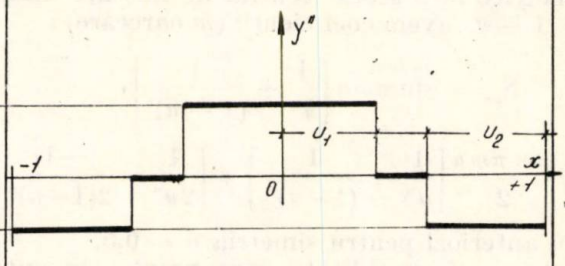
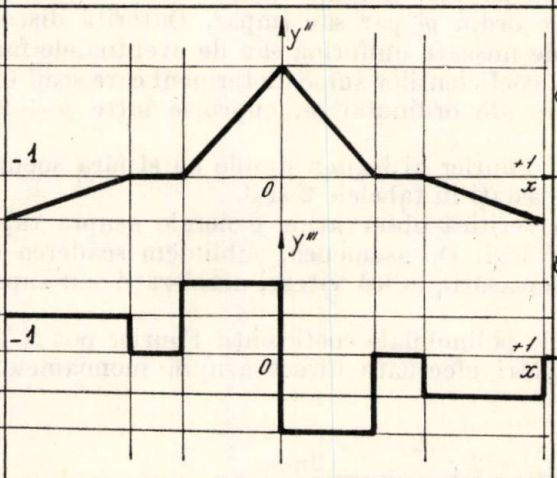
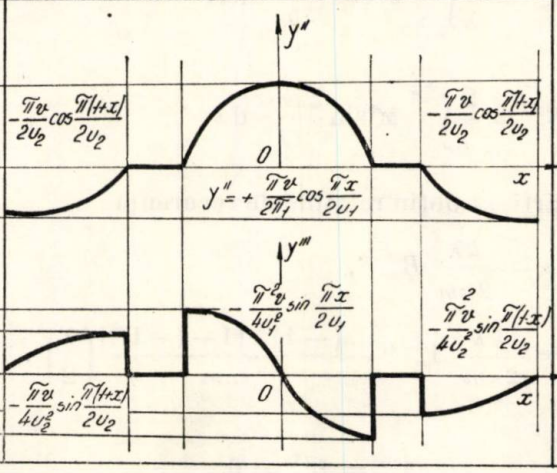
		DIAGRAME	$u_1+u_2 \leq 1$	$u_1=u_2=u \leq 0.5$	$u_1=u_2=0.5$
LEGEA 2 DREPTUNGHIULARĂ (PARAB.)	$\frac{v}{u_1}$ $-\frac{v}{u_2}$		$A_m = \frac{2v}{(\pi m)^2}\left[\frac{\sin \pi m u_1 - (-1)^m \sin \pi m u_2}{u_1}\right]$ $\frac{u_2}{u_2}$	$A_m = \frac{4v}{(\pi m)^2} \cdot \frac{\sin \pi m u}{u}$; m. impar.	$A_m = \pm \frac{8v}{(\pi m)^2}$ $m = \mu_4 + 1$ $m = \mu_4 - 1$
LEGEA 2-3	$\frac{2v}{u_1}$ $-\frac{2v}{u_2}$ $\frac{2v}{u_1^2}$ $\frac{2v}{u_2^2}$ $-\frac{2v}{u_2^2}$ $-\frac{2v}{u_1^2}$		$A_m = -\frac{8v}{(\pi m)^4}\left[\frac{\sin^2 \frac{\pi m u_1}{2}}{u_1^2} - (-1)^m \frac{\sin^2 \frac{\pi m u_2}{2}}{u_2^2}\right]$	$A_m = -\frac{16v}{(\pi m)^4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi m u}{2}}{u^2}$; m. impar.	$A_m = -\frac{128v}{(\pi m)^4}$ $m = \mu_4 \pm 1$ $A_m = -\frac{256v}{(\pi m)^4}$ $m = \mu_4 \pm 2$
LEGEA COSINUSOIDALĂ	$\frac{\pi v}{2u_1}$ $-\frac{\pi v}{2u_2}$ $\frac{\pi^2 v}{4u_1^2}$ $\frac{\pi^2 v}{4u_2^2}$ $-\frac{\pi^2 v}{4u_2^2}$ $-\frac{\pi^2 v}{4u_1^2}$		$A_m = \frac{2v}{(\pi m)^2}\left[\frac{\cos \pi m u_1 - (-1)^m \cos \pi m u_2}{(2mu_1)^2 - 1}\right]$	$A_m = \frac{4v}{(\pi m)^2} \cdot \frac{\cos \pi m u}{(2mu)^2 - 1}$; m. impar.	$A_m = 0$ pt. $m \neq 1$ $A_1 = -0.5$

Tabela 3

		DIAGRAME	$u_1+u_2\leq 1$	$u_1+u_2=u\leq 0{,}5$	$u_1=u_2=0{,}5$
LEGEA 3 – TRIUNGHIULARĂ	$\frac{2v}{u_1}$, -1, $-\frac{2v}{u_2}$, $\frac{4v}{u_1^2}$, $\frac{4v}{u_2^2}$, $-\frac{4v}{u_2^2}$, $-\frac{4v}{u_1^2}$	y'', y''', u_1, u_2, $+1$, x, 0	$A_m=\frac{32v}{(\pi m)^4}\left[\frac{\cos^2\frac{\pi m u_1}{2}\sin^2\frac{\pi m u_1}{4}}{u_1^2}+(-1)^m\frac{\cos^2\frac{\pi m u_2}{2}\sin^2\frac{\pi m u_2}{4}}{u_2^2}\right]$	$A_m=-\frac{64v}{(\pi m)^4}\cos^2\frac{\pi m u}{2}\frac{\sin^2\frac{\pi m u}{4}}{u^2}$; m. impar.	$A_m=-\frac{256v}{(\pi m)^4}\cos^2\frac{\pi m}{4}\sin^2\frac{\pi m}{8}$; m. impar.
LEGEA 3-4-5	$\frac{8v}{3\sqrt{3}u_1}$, $\frac{8v}{3\sqrt{3}u_2}$, $-\frac{8v}{u_1^2}$, $-\frac{4v}{u_1^2}$, $-\frac{4v}{u_2^2}$, $\frac{8v}{u_2^2}$, y'', y''', y^{IV}, y^{V}, $\frac{24v}{u_1^4}$, $\frac{24v}{u_2^4}$, $\frac{24v}{u_2^3}$, $-\frac{24v}{u_1^3}$, x	$A_m=\frac{96v}{(\pi m)^6}\left[\frac{\sin^2\frac{\pi m u_2}{2}}{u_2^4}+(-1)^m\frac{\sin^2\frac{\pi m u_1}{2}}{u_1^4}\right]$	$A_m=-\frac{192v}{(\pi m)^6}\sin^2\frac{\pi m u}{2}\frac{}{u^4}$; m. impar.	$A_m=-\frac{1536}{(\pi m)^6}$; m. impar.
LEGEA SINUSOIDALĂ	$\frac{\pi v}{2u_1}$, $-\frac{\pi v}{2u_2}$, y'', 0, $-\frac{\pi v}{2u_1}\sin\frac{\pi x}{u_1}$, $-\frac{\pi v}{2u_2}\sin\frac{\pi(1-x)}{u_2}$, $y''=\frac{\pi^2 v}{2u_1^2}\cos\frac{\pi x}{u_1}$, $+\frac{\pi^2 v}{2u_2^2}\sin\frac{\pi(1-x)}{u_2}$	$A_m=+\frac{2v}{(\pi m)^2}\left[\frac{\cos^2\frac{\pi m u_1}{2}}{1-m^2u_1^2}+(-1)^m\frac{\cos^2\frac{\pi m u_2}{2}}{1-m^2u_2^2}\right]$	$A_m=-\frac{4v}{(\pi m)^2}\frac{\cos^2\frac{\pi m u}{2}}{1-m^2u^2}$; m. impar.	$A_m=-\frac{8v}{(\pi m)^2(4-m^2)}$; m. impar.

Referindu-ne la perioada $\lambda = 2$, avem

$$A_m^{(k)} = -\frac{k}{\pi m} B_m^{(k-1)},$$

$$B_m^{(k)} = \frac{k}{\pi m} A_m^{(k-1)} \qquad \text{pentru } k \text{ par,} \tag{47}$$

$$B_m^{(k)} = \frac{k}{\pi m} A_m^{(k-1)} + \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi m} \qquad \text{pentru } k \text{ impar.}$$

Se găsesc, din aproape în aproape, valorile:

$$k=1 \qquad A_m^{(1)} = 0; \quad B_m^{(1)} = \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi m},$$

$$k=2 \qquad A_m^{(2)} = (-1)^m \frac{4}{(\pi m)^2}; \quad B_m^{(2)} = 0,$$

$$k=3 \qquad A_m^{(3)} = 0; \quad B_m^{(3)} = \frac{(-1)^{m+1} \cdot 2}{\pi m}\left[1 - \frac{6}{(\pi m)^2}\right],$$

$$k=4 \qquad A_m^{(4)} = \frac{(-1)^m 8}{(\pi m)^2}\left[1 - \frac{6}{(\pi m)^2}\right]; \quad B_m^{(4)} = 0, \tag{48}$$

$$k=5 \qquad A_m^{(5)} = 0; \quad B_m^{(5)} = \frac{(-1)^{m+1} \cdot 2}{\pi m}\left[1 - \frac{20}{(\pi m)^2} + \frac{120}{(\pi m)^4}\right],$$

$$k=6 \qquad A_m^{(6)} = \frac{(-1)^m \cdot 12}{(\pi m)^2}\left[1 - \frac{20}{(\pi m)^2} + \frac{120}{(\pi m)^4}\right]; \quad B_m^{(6)} = 0.$$

Cu aceste valori, pentru legea $y = 2x^2 - x^4$, (25) avem

$$A_m = 2A_m^{(2)} - A_m^{(4)} = \frac{(-1)^m \cdot 48}{(\pi m)^4},$$

$$B_m = 2B_m^{(2)} - B_m^{(4)} = 0, \tag{49}$$

iar pentru legea $y = \dfrac{7x^2 - 5x^4 + x^6}{3}$ (26) avem

$$A_m = \frac{7}{3} A_m^{(2)} - \frac{5}{3} A_m^{(4)} + \frac{A_m^{(6)}}{3} = \frac{(-1)^m \cdot 480}{(\pi m)^6},$$

$$B_m = \frac{7}{3} B_m^{(2)} - \frac{5}{3} B_m^{(4)} + \frac{1}{3} B_m^{(6)} = 0. \tag{50}$$

Pentru termenul liber, mai întîi se găseşte

$$C_0^{(k)} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} x^k \, dx = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{\lambda(k+1)} [1 - (-1)^{k+1}] \tag{51}$$

şi, dacă $\lambda = 2$, avem

$$C_0^{(0)} = 1; \quad C_0^{(1)} = 0; \quad C_0^{(2)} = \frac{1}{3}; \quad C_0^{(3)} = 0,$$
$$C_0^{(4)} = \frac{1}{5}; \quad C_0^{(5)} = 0; \quad C_0^{(6)} = \frac{1}{7} \tag{52}$$

şi deci

$$C_0 = 2\,C_0^{(2)} - C_0^{(4)} = \frac{7}{15},$$
$$C_0 = \frac{7}{3}\,C_0^{(2)} - \frac{5}{3}\,C_0^{(4)} + \frac{C_0^{(6)}}{3} = \frac{31}{63}, \tag{53}$$

care confirmă, desigur, valoarea cronosecţiunii pentru cele două legi anterioare.

Primită la redacţie la 6 aprilie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
2. Meyer zur Capellen, *Die Zweidimensionele Fourier-analyse spezieller Koppelkurven*, Z.A.M.M. 1/2 (1959).
3. W. Wunderlich, *Höhere Radlinien als Näherungskurven*, Öster. Ing. Arch. IV (1950).
4. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Legile generale ale mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl. **22**, *4* (1966).
5. — *Sinteză asupra legilor de mişcare ale mecanismelor cu came*, Conferinţa de motoare cu ardere internă, Bucureşti.
6. Chr. Pelecudi, I. Sava, Anca Matheescu, *Optimizarea legilor de funcţionare ale mecanismelor de distribuţie*, St. cerc. mec. apl.,
7 O. Munteanu, *Studiul mişcării unei came prin serii Fourier*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, **III** (*VII*), fasc. 3—4, 1957.

MODIFICĂRILE DIMENSIONALE ŞI VARIAŢIA MASEI LA IMERSIUNEA ÎN APĂ ŞI ÎN ULEI A UNOR MATERIALE PLASTICE ARMATE DE TIP TEXTOLIT

de VICTOR CALCAN şi CORNELIA OBEJDEANU

678.1

Se prezintă rezultatele cercetărilor privind modificările dimensionale şi ale masei la imersiunea în apă distilată şi în ulei mineral 405 aditivat a textolitelor tip *M* şi *E*, de fabricaţie indigenă, şi dytron, de fabricaţie germană, relevîndu-se comportarea în funcţie de gradul de prelucrare mecanică a suprafeţelor epruvetelor, variaţia temperaturii mediului de absorbţie şi a timpului de imersiune.

1. UNELE CONSIDERAŢII TEORETICE

Cercetările efectuate în numeroase ţări, confirmate şi de rezultatele obţinute în exploatare, au demonstrat că o gamă variată de materiale plastice — poliamidele, politetrafluoretilena, polioximetilena, textolitul ş.a. — posedă proprietăţile fizico-mecanice necesare pentru utilizarea lor în construcţia unor organe de maşini de mare importanţă funcţională ca angrenaje, cupluri de frecare etc. Acest fapt a sporit preocupările pentru studierea modificărilor dimensionale şi a variaţiei masei la imersiunea materialelor plastice în diferite medii de absorbţie — apă, lubrifianţi, lichide de răcire —, lucrările de specialitate trecînd, de la cunoaşterea şi generalizarea fenomenelor, la abordarea unor teme cu obiect aplicativ. Totodată, s-a avut în vedere influenţa prelucrării mecanice a suprafeţelor materialelor plastice, uzura abrazivă, care poate apărea în procesul de frecare, fiind asimilată cu un proces de aşchiere.

În cazul majorităţii materialelor plastice, absorbţia de apă şi de ulei este influenţată de următorii factori [3], [5]:

— polaritatea polimerului şi a mediului de absorbţie;
— porozitatea polimerului;
— proporţia polimer-material de şarjare sau armare;
— caracterul adsorbant şi absorbant al materialului de şarjare sau armare;

— mărimea suprafeţei de contact material plastic-mediu de absorbţie;

— starea suprafeţei de absorbţie (prelucrată sau neprelucrată mecanic).

Ţinînd seama că materialele plastice armate de tip textolit sînt sisteme eterogene anizotrope formate din două faze — polimerul constituind faza continuă, dispersată în toate direcţiile sistemului sub forma unor pelicule de grosime variabilă, iar materialul de armare faza discontinuă, inserţia textilă fiind separată prin pelicule de polimer —, intervin şi factori de influenţă particulari ca [1], [2]:

— discontinuitatea materialului de armare;

— structură cu proprietăţi mecanice diferenţiat orientate după direcţia urzelii inserţiei textile;

— existenţa unor tensiuni interne dirijate.

Mărimea absorbţiei este o valoare relativă, în funcţie de echilibrul dinamic de vapori între apa conţinută de material şi mediu [4], [5], echilibru variabil cu temperatura.

Absorbţia de apă şi de ulei a materialelor plastice se poate măsura la saturaţie [6], în timpi determinaţi, sau la intervale egale de timp pentru stabilirea evoluţiei fenomenului. În cazul apei, determinarea are două variante, respectiv cu şi fără considerarea substanţelor solubile în apă. Cercetările prezentate în această lucrare au avut ca scop obţinerea de informaţii asupra modificărilor dimensionale şi variaţiei masei la imersiunea în apă şi în ulei a materialelor plastice armate de tip textolit de fabricaţie indigenă, urmărind atît aspectele teoretice — legate de particularităţile lor, cît şi un interes practic — cunoaşterea posibilităţilor şi condiţiilor de utilizare a acestor materiale în construcţia unor organe de maşini.

Din studierea literaturii a rezultat că este prima lucrare ce abordează tema enunţată, avînd ca obiect stratificate produse în ţară.

2. MATERIALELE PLASTICE EXPERIMENTATE

Încercările s-au efectuat pe materialele plastice armate de tip textolit din producţia curentă a „Fabricii de cabluri şi materiale electroizolante" din Bucureşti, respectiv:

— textolit tip *M*, cu proprietăţi mecanice ridicate şi proprietăţi electrice normale şi

— textolit tip *E*, cu proprietăţi electrice superioare şi proprietăţi mecanice normale.

Totodată, s-au încercat comparativ şi epruvete din dytron (textolit german tip F 2082, conform DIN 7735/40606), utilizat în construcţia ghidajelor rectilinii plane pentru unele maşini-unelte grele. Materialele s-au obţinut prin suprapunerea în straturi şi presarea la cald a unor inserţii textile impregnate cu lac bachelitic (soluţie de răşină fenolformaldehidică în alcool, cu un conţinut de răşină minim 70%, fenol liber maxim 20%, timp de polimerizare a răşinii la 160°C între 1—2 min). Pentru textolitul tip *M* s-a folosit ca material de armare ţesătură de bumbac albită (şifon, art. 202, STAS 623—54), iar pentru tipul *E* ţesătură tehnică de bumbac

(pînză de inserţie pentru textolit, STAS 7275—65), condiţiile tehnice impuse fiind redate mai jos.

Tabela 1

Caracteristicile materialelor de armare

Nr. crt.	Caracteristici	U.M.	Valori	
			Şifon	Ţesătură tehnică
1	Sarcina de rupere a fişiei de 50 × × 200 mm;			
	— în urzeală, minim	kgf	29	35
	— în bătătură, minim	kgf	26	36
2	Desimea firelor pe 10 cm:			
	— în urzeală	—	315±10	246±5
	— în bătătură	—	290±10	238±8
3	Masa (ţesătură cu 8,5% umiditate)	g/m²	122±5	143±6

Proporţia dintre răşină şi inserţia textilă este:

Tipul textolitului	Răşină %	Material de armare %
M	52	48
E	60	40

Presarea plăcilor s-a făcut în următoarele condiţii:
— presiunea specifică: 80 kgf/cm²
— temperatura de presare: 160 ± 5°C
— timpul de presare: 4 min/mm

3. CONDIŢIILE EXPERIMENTALE

Atît literatura consultată, cît şi standardele pentru determinarea absorbţiei de apă şi ulei a materialelor plastice nu au un punct de vedere unitar în privinţa formei şi dimensiunilor epruvetelor, temperaturii mediului de absorbţie, timpului de imersiune etc., diversitatea condiţiilor experimentale citate în literatură fiind ilustrată sintetic în tabela 2.

Recomandările ISO/R 62 „Plastics determination of water absorption" şi DIN 7736 stabilesc epruvete de formă pătrată cu latura de 50 mm, în timp ce STAS 5690—57 prevede forma de disc cu diametrul de 50±1 mm. În cercetările diferiţilor autori s-au utilizat epruvete pătrate 50×50×10 mm [1], bară 120×15×10 mm sau plăci la dimensiuni apropiate de cele folosite în construcţia ghidajelor maşinilor-unelte, de exemplu 390×80×(10—13,5) mm [6], discuri ∅ 30×2, 5 mm şi ∅ 50×2,5 mm [13], suprafeţele plane ale epruvetelor putînd fi neprelucrate [1], [6], [7] sau prelucrate mecanic [6].

Tabela 2

Condiții experimentale citate în literatură

Nr. crt.	Materialul plastic cercetat	Dimensiunile epruvetelor mm	Tratament termic prealabil		Condițiile de absorbție		Mediul de absorbție	% Rezultate	Observații	Bibliografie
			Temperatura °C	Durata h	Temperatura °C	Durata h				
1	Textolit cu rășină furfurol-fenolică	50 × 50 × 10 neprelucrate	60 ; 90 ; 110 ; 130	12 ; 24 ; 48 ; 72	25 ; 50 ; 100	24	Apă distilată Ulei mineral grupa 2004			[1]
2	Textolit PT Textolit metalurgic B Kordovoloknit fără grafit Kordovoloknit cu grafit Steklotextolit KASP-V	120 × 15 × 10 neprelucrate	—	—	20	La saturare	Apă	4,7 4,4 4,0 3,6 1,8		[6]
3	Textolit PT Textolit metalurgic B Kordovoloknit 1G	390 × 80 × (10 — 13,5) — neprelucrate ; — parțial prelucrate ; — integral prelucrate	— 70 (în ulei)	— 55 (în ulei)	20 20	1335 1280	Ulei industrial 45 (complet lipsit de apă)		— După tratamentul termic, plăcile s-au răcit în ulei până la temperatura de 20°C (16 ore)	[6]
4	Textolit PT Poliamidă 68 Capron A Capron B Poliamidă AK-7 Poliamidă 54	Ø 50 × 2,5 neprelucrate Ø 30 × 2,5 neprelucrate	70 70	8 8	20 ; 50 20 ; 70 18 — 25	3.600	Apă distilată Ulei industrial 20 Emulsie cu 0,02 % sodă caustică liberă Lichid de răcire cu sodă Lichid de răcire cu trietanolamină Sulfofrezol Petrol lampant			[7]

Pentru încercările prezentate în această lucrare, s-au întrebuinţat epruvete în formă de disc cu dimensiunile $\varnothing\ 50 \pm 0{,}1 \times 5 \pm 0{,}2$ mm, concomitent cu epruvete de $\varnothing 50 \pm 0{,}1 \times 10 \pm 0{,}3$ mm pentru observarea influenţei grosimii materialului. Alegerea formei de disc a urmărit o precizie dimensională maximă prin tăierea epruvetelor cu o freză specială, precum şi eliminarea efectelor introduse de colţurile epruvetelor în formă de bară. Totodată, datorită faptului că pentru dimensiuni egale la epruvetele în formă de disc şi pătrată raportul dintre suprafaţa totală şi volum este acelaşi, se asigură posibilitatea de comparaţie cu marea majoritate a materialelor studiate de alţi cercetători. Epruvetele, cîntărite cu precizia de 0,001 g şi măsurate cu precizia de 0,005 mm (două diametre perpendiculare şi înălţimea la centrul discului), au fost condiţionate timp de 24 ± 1 h la temperatura de 50 ± 3°C şi răcite în exsicator. Introducerea lor în mediul de absorbţie s-a făcut fără contact între epruvete sau între epruvete şi recipient. La expirarea duratei stabilite, epruvetele au fost scoase, uscate prin ştergere cu hîrtie de filtru şi cîntărite în timp de maximum un minut de la scoaterea lor din recipient, după care au fost măsurate.

Ca medii de absorbţie s-au folosit apa distilată, pentru a elimina influenţa compoziţiei chimice a apei, şi ulei mineral rafinat, cu indice de viscozitate Dean Davis minimum 90, grupa 405, aditivat, cu următoarele caracteristici (STAS 751—49):

— densitate relativă la 15°C maximum 0,895,
— viscozitate la 50°C, în °E . . . . . 4,5—5,5,
— aciditate minerală . . . . . lipsă,
— alcalinitate . . . . . lipsă,
— aciditate organică, în mg KOH/g ulei, maximum . . . . . 0,05.

Ţinînd seama de datele din literatură, precum şi de unele observaţii din exploatarea maşinilor-unelte, s-au fixat următoarele condiţii experimentale pentru determinarea absorbţiei de apă şi de ulei:

— temperatura mediului de absorbţie $20 \pm 0{,}5$; 50 ± 2; 70 ± 2°C,
— timpul de absorbţie 24, 48, 72, 96, 120 ore.

Întrucît principalele modificări ale dimensiunilor şi masei epruvetelor au loc în primele 24 de ore, iar timpul de 5 zile de imersiune este apreciat în general ca suficient pentru a trage concluzii asupra evoluţiei absorbţiei, nu s-a considerat necesară prelungirea duratei încercărilor pînă la saturaţie.

Pentru fiecare mediu, temperatură şi timp de absorbţie s-au cercetat epruvete în trei variante de prelucrare mecanică:

— suprafeţele plane neprelucrate;
— o suprafaţă plană prelucrată prin frezare fină;
— ambele suprafeţe plane prelucrate prin frezare fină, ultimul caz corespunzînd situaţiei în care se utilizează practic textolitul în construcţia ghidajelor.

La fiecare variantă de prelucrare mecanică, mediu, temperatură şi timp de absorbţie s-au încercat cîte trei epruvete. Rezultatele au fost calculate atît în valori absolute, cît şi procentual faţă de valorile iniţiale, folosind relaţiile :

— cantitatea de apă sau ulei absorbită, M' :

$$M' = M_2 - M_1, \text{ în mg};$$

— modificarea diametrului epruvetei, d' :

$$d' = d_2 - d_1, \text{ în mm};$$

— modificarea grosimii epruvetei, h' :

$$h' = h_2 - h_1, \text{ în mm},$$

în care notaţiile reprezintă :

— M_1, d_1 şi h_1 — masa, diametrul şi grosimea iniţială a epruvetei ;

— M_2, d_2 şi d_1 — masa, diametrul şi grosimea epruvetei după imersiunea în mediul de absorbţie.

4. ABSORBŢIA DE APĂ ŞI ULEI

Absorbţia de apă şi ulei, în condiţiile experimentale prevăzute în STAS 5690—57 pentru determinarea absorbţiei de apă, respectiv imersiune timp de 24±1 h la temperatura de 20±0,5°C, este prezentată în tabela 3 pentru epruvete cu grosimea de 5 şi 10 mm, cu suprafeţele plane prelucrate mecanic.

Tabela 3

Materialul	U.M.	Apă		Ulei	
		∅ 50×5 mm	∅ 50×10 mm	∅ 50×5 mm	∅ 50×10 mm
Textolit tip M	mg	1528—1566 (1550)	1933—1982 (1969)	270—316 (302)	386—420 (405)
	%	1,12	0,71	0,22	0,15
Textolit tip E	mg	1283—1352 (1322)	1881—2026 (1946)	464—522 (496)	850—904 (883)
	%	0,97	0,72	0,37	0,34

În tabelă s-au înscris atît valorile absolute ale absorbţiei — limitele şi media aritmetică a rezultatelor parţiale — , cît şi valorile procentuale.

Se observă că absorbţia de apă este mai mică la textolitul tip E faţă de tipul M, în timp ce la imersiunea în ulei comportarea materialelor este inversă. În ambele cazuri, dublarea grosimii epruvetelor conduce la micşorarea valorilor relative ale absorbţiei.

5. MODIFICĂRILE DIMENSIONALE ŞI VARIAŢIA MASEI LA IMERSIUNEA EPRUVETELOR ÎN APĂ

La toate cele trei materiale plastice şi variante de prelucrare mecanică a suprafeţelor plane ale epruvetelor se desprind cîteva observaţii generale, valabile atît pentru epruvetele cu grosimea de 5 mm (fig. 1 şi 2), cît şi pentru cele cu grosimea de 10 mm (fig. 3) :

— în primele 24 de ore se produce cea mai intensă absorbţie, peste jumătate din modificările dimensionale şi în greutate înregistrate în 120 de ore de imersiune, ridicarea temperaturii apei distilate la 50°C şi 70°C mărind această proporţie prin accelerarea în general a procesului de absorbţie ;

— prelungirea duratei determinărilor de la 24 la 120 de ore, deşi conduce la creşterea modificărilor în valori absolute, are ca efect scăderea intensităţii lor ;

— după aproximativ 72 de ore de imersiune este evidentă tendinţa de stabilizare, fapt care indică apropierea de limita de saturaţie ;

— aspectul epruvetelor nu s-a modificat, nu au apărut defecte de suprafaţă sau exfolieri, iar apa distilată nu a prezentat urme de colorare.

5.1. MODIFICĂRILE DIMENSIONALE

Dintre dimensiuni, diametrul suferă foarte mici creşteri, în general sub 0,2%, indiferent de severitatea condiţiilor experimentale. Mai multă sensibilitate manifestă grosimea, care, deşi în mică măsură, este influenţată de mărimea suprafeţei prelucrate mecanic şi de temperatură, în special

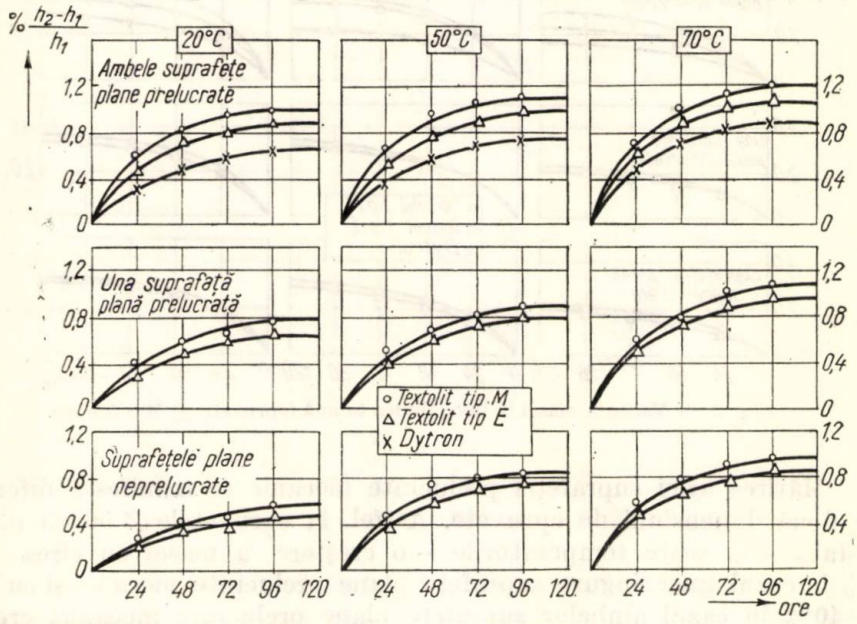


Fig. 1. — Modificările dimensionale la inversiunea în apă (epruvete ∅ 50 × 5 mm).

în cazul epruvetelor cu dimensiunile ∅ 50 × 5 mm (fig. 1) şi în primele 24 ore de imersiune.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Variaţiile grosimii textolitului tip *M*, de exemplu, sînt cuprinse pentru condiţiile extreme între 0,28% (0,014 mm) şi 0,58% (0,029 mm) — epruvete cu suprafeţele plane neprelucrate, temperatura mediului de absorbţie 20°C, timp de imersiune 24, respectiv 120 de ore — şi 0,72% (0,036 mm) şi 1,20% (0,06 mm) — epruvete cu ambele suprafeţe plane prelucrate, temperatura mediului de absorbţie 70°C, timp de imersiune 24, respectiv 120 de ore —, valorile relative reducîndu-se practic la jumătate prin dublarea grosimii materialului. Stabilitatea dimensională a dytronului este uşor superioară, diferenţierile faţă de textolitul tip *M* şi *E* diminuîndu-se cu creşterea temperaturii.

5.2. VARIAŢIA MASEI

Dintre materialele plastice cercetate dytronul are cea mai mică absorbţie, la epruvetele cu grosimea de 5 mm şi suprafeţele integral prelucrate mecanic (fig. 2), valorile fiind aproximativ duble la textolitul tip *M* faţă de dytron.

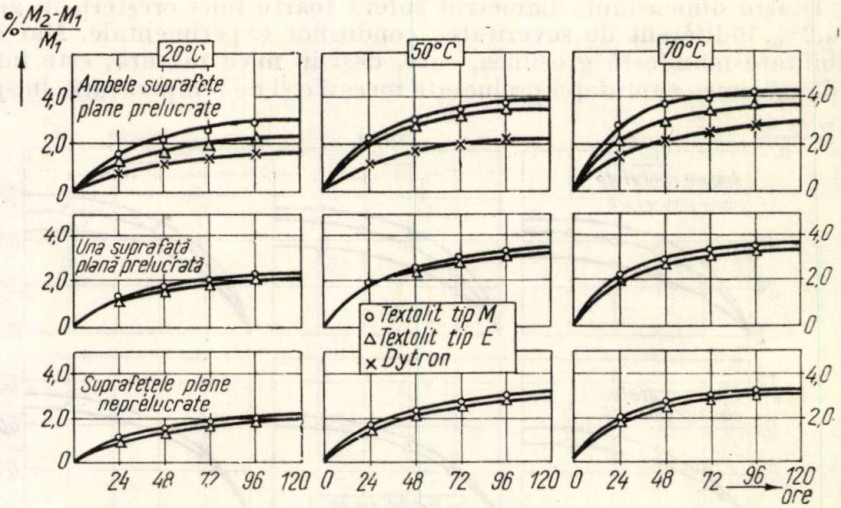


Fig. 2. — Variaţia masei la inversiunea în apă (epruvete ∅ 50×5 mm).

Mărirea ariei suprafeţei prelucrate mecanic se manifestă diferit la cele două dimensiuni de epruvete. Astfel, la epruvetele ∅ 50×5 mm se constată — la toate temperaturile — o creştere a masei cu circa 10—20% în cazul unei singure suprafeţe plane prelucrate mecanic şi cu circa 30—40% în cazul ambelor suprafeţe plane prelucrate mecanic, creşteri inferioare însă celor provocate de ridicarea temperaturii. Dublarea grosimii diminuează sau chiar anulează efectul prelucrării, la textolitul tip *E*, de exemplu, variaţia masei fiind dependentă numai de temperatură (fig. 3).

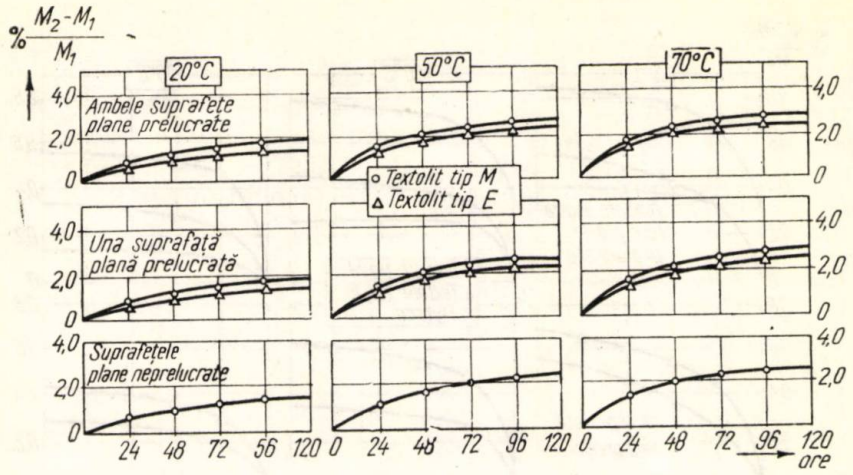


Fig. 3. — Variaţia masei la inversiunea în apă (epruvete ∅ 50 × 10 mm).

6. MODIFICĂRILE DIMENSIONALE ŞI VARIAŢIA MASEI LA IMERSIUNEA EPRUVETELOR ÎN ULEI

6.1. MODIFICĂRILE DIMENSIONALE

În limitele preciziei de măsurare adoptate (0,005 mm), nu s-au sesizat modificări dimensionale la nici unul din materialele plastice cercetate, indiferent de condiţiile experimentale.

6.2. VARIAŢIA MASEI

Analiza curbelor de absorbţie pentru epruvetele cu grosimea de 5 mm (fig. 4) şi 10 mm (fig. 5) permite următoarele constatări :

— cantitatea de ulei înmagazinată în primele 24 de ore variază de la 50—60% (pentru temperatura de 20°C)la 70—80% (pentru temperatura de 70°C) din cantitatea totală de ulei absorbită în 120 de ore de imersiune şi este influenţată de mărimea suprafeţei prelucrate mecanic ;

— prelungirea timpului de imersiune pînă la 120 de ore duce la continuarea procesului de absorbţie, intensitatea lui descrescînd însă foarte mult cu timpul ;

— tendinţa de stabilizare se manifestă după aproximativ 48 de ore de imersiune ;

— ridicarea temperaturii uleiului are ca efect o uşoară scădere a capacităţii de absorbţie, mai evidentă la grosimea de 5 mm ;

— menţinerea materialelor în ulei la diferite temperaturi nu a provocat exfolieri sau defecte de suprafaţă, culoarea epruvetelor devenind puţin mai închisă.

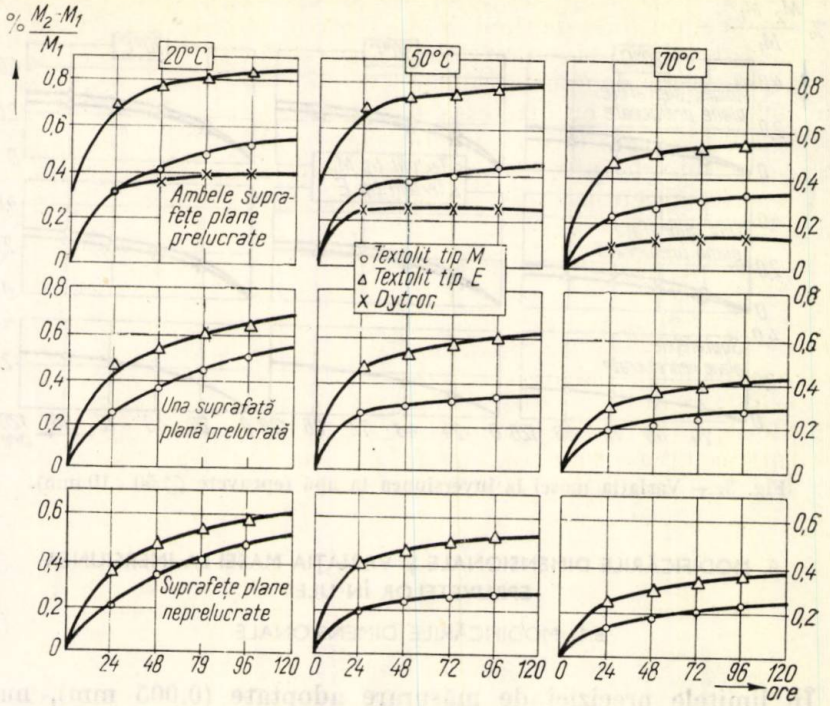


Fig. 4. — Variația masei la inversiunea în ulei (epruvete ∅ 50×5 mm).

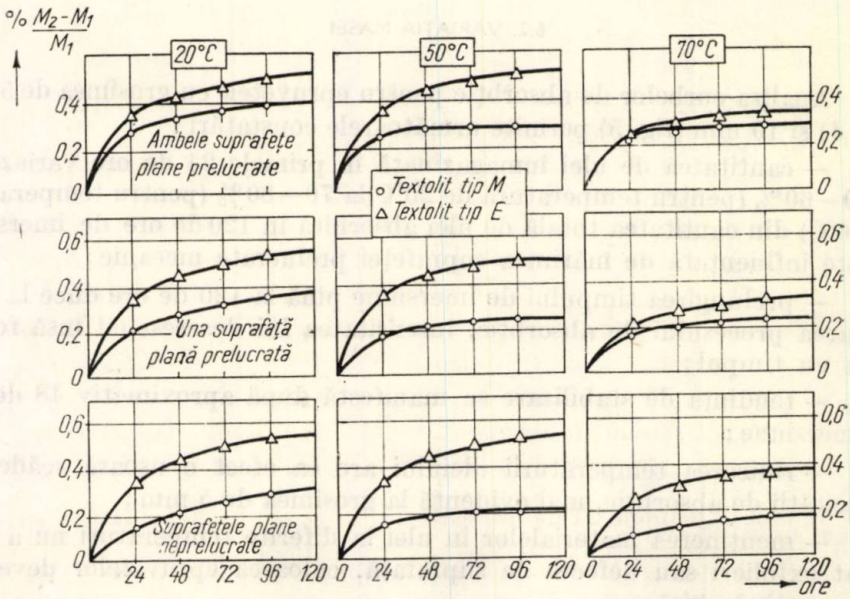


Fig. 5. — Variația masei la inversiunea în ulei (epruvete ∅ 50×10 mm).

Cele mai mari valori de absorbţie au fost înregistrate de textolitul tip *E*, aproape duble faţă de tipul *M*. La temperatura de 20°C, la epruvetele cu grosimea de 5 mm şi suprafeţele plane prelucrate mecanic, nu există practic diferenţe de comportare între dytron şi textolitul tip *M*, acestea evidenţiindu-se numai cu creşterea temperaturii.

Prelucrarea mecanică a suprafeţelor conduce la o accentuare a absorbţiei la textolitul tip *M*, la ambele grosimi de epruvete, în timp ce la tipul *E* această accentuare dispare la grosimea de 10 mm.

6.3. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Curbele prezentate în figurile 1—5 ilustrează că modificările dimensionale şi în greutate sînt mai mari în cazul absorbţiei de apă în comparaţie cu absorbţia de ulei, la toate variantele experimentale adoptate. Comportarea diferită faţă de apă şi ulei a materialelor plastice încercate este redată sugestiv de variaţia intensităţii de absorbţie în mg/mm în funcţie de timp şi temperatură, pentru epruvetele cu suprafeţele integral prelucrate mecanic (fig. 6). În cazul textolitului tip *M* cu grosimea de 5 mm de exemplu, ab-

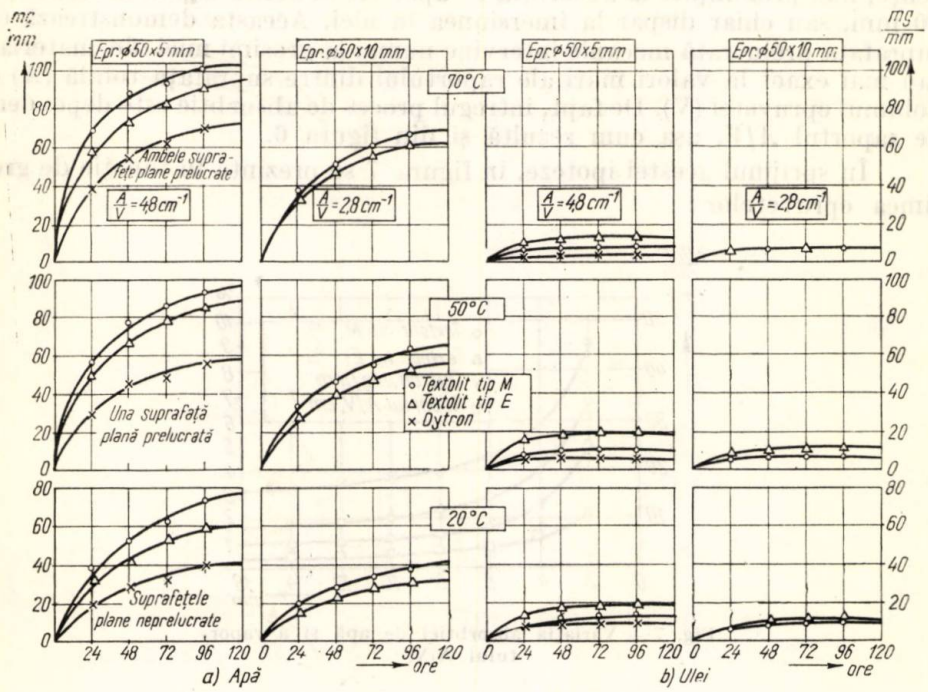


Fig. 6. — Variaţia intensităţii de absorbţie la inversiunea în apă şi ulei (epruvete cu ambele suprafeţe plane prelucrate)

sorbţia de ulei în primele 24 de ore este mai mică decît absorbţia de apă de 5 ori la temperatura de 20°C, de 7 ori la temperatura de 50°C şi de 12 ori la temperatura de 70°C, aceste rapoarte reducîndu-se sensibil la textolitul tip *E*.

Mărimea absorbţiei depinde în principal de natura şi proprietăţile materialelor utilizate la fabricarea stratificatelor, de proporţia răşină-material de armare, de afinitatea dintre ele şi mediul de absorbţie. Astfel, ţesătura textilă este hidrofilă şi lipofilă, în timp ce răşina fenol-formaldehidică este hidrofilă şi lipofobă. Hidrofilia răşinii şi materialelor de armare pledează pentru valorile ridicate ale absorbţiei de apă, iar lipofobia răşinii, viscozitatea şi densitatea relativă a uleiului pentru valorile mult mai mici ale absorbţiei de ulei.

Faptul că textolitul tip *E* înregistrează faţă de tipul *M* o absorbţie mai redusă de apă se explică prin proporţia inserţiei textile în materialul plastic (40%) şi desimea firelor pe 10 cm (pct. 2). Superioritatea textolitului tip *M* la absorbţia de ulei se datoreşte lipofiliei mai mici a şifonului în raport cu ţesătura tehnică. Creşterea temperaturii mediului de absorbţie are efecte opuse : intensificarea procesului în cazul apei şi diminuarea lui în cazul uleiului, cantitatea de substanţe volatile eliminate depăşind probabil aportul de ulei prin absorbţie.

Influenţa mărimii suprafeţei prelucrate mecanic este pusă în evidenţă de dublarea grosimii epruvetelor. Dacă la grosimea de 5 mm există diferenţe, mai pronunţate la absorbţia de apă, ele se atenuează la grosimea de 10 mm, sau chiar dispar la imersiunea în ulei. Aceasta demonstrează că suprafaţa prelucrată mecanic intervine numai la grosimi mici de material, sau mai exact la valori mari ale raportului dintre suprafaţa totală (A) şi volumul epruvetei (V). De fapt, întregul proces de absorbţie este dependent de raportul A/V, aşa cum rezultă şi din figura 6.

În sprijinul acestei ipoteze, în figura 7 se prezintă în funcţie de grosimea epruvetelor :

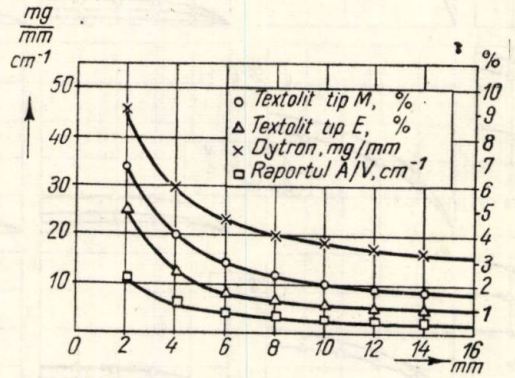


Fig. 7 — Variaţia absorbţiei de apă şi a raportului A/V.

— variaţia raportului A/V pentru epruvete de formă pătrată şi disc cu latura, respectiv diametrul, de 50 mm ;

— absorbţia de apă a dytronului, epruvete de 50×50 mm, timp de imersiune 4 zile (valori deduse din DIN 7735/1965) ;

— absorbţia de apă a textolitului tip *M* şi *E*, epruvete disc ∅ 50 mm, timp de imersiune 24 de ore (N.I.D. 1337/1963).

Alura curbelor de variaţie a masei şi a raportului A/V în funcţie de grosimea epruvetelor este similară, indiferent de materialul plastic, condiţiile experimentale sau modul de exprimare a rezultatelor. Continuarea investigaţiilor în această direcţie ar putea conduce la stabilirea unor relaţii matematice între valoarea absorbţiei şi a raportului A/V, deosebit de importante pentru proiectarea şi dimensionarea corectă a organelor de maşini construite din materiale plastice. Ca punct de plecare, ar fi suficiente determinări pe un număr limitat de forme de epruvete — cu frecvenţă mare de utilizare în practică — modificările introduse de variaţia dimensiunii principale fiind controlabile prin variaţia raportului A/V.

7. CONCLUZII

1. Cercetările efectuate au evidenţiat modificările dimensionale şi variaţia masei la imersiunea în apă şi în ulei a materialelor plastice armate de tip textolit fabricate în ţară, influenţa temperaturii mediului de absorbţie şi a prelucrării mecanice a suprafeţelor epruvetelor.

2. Principalele modificări au loc în primele 24 de ore; prelungirea timpului de imersiune diminuează intensitatea absorbţiei, tendinţa de stabilizare manifestîndu-se după circa 72 de ore pentru apă şi 48 de ore pentru ulei.

3. Absorbţia de apă conduce la o uşoară creştere a dimensiunilor — în special a grosimii; absorbţia de ulei nu provoacă modificări sesizabile, buna stabilitate dimensională a materialelor avînd o mare importanţă aplicativă.

4. Ridicarea temperaturii mediului de absorbţie accentuează modificările dimensionale şi în greutate la imersiunea materialelor în apă şi le diminuează la imersiunea lor în ulei.

5. Valorile reduse ale absorbţiei de ulei, precum şi buna stabilitate dimensională a textolitului tip M şi E, infirmă necesitatea unui tratament termic prealabil în ulei, recomandat uneori în literatură.

6. Influenţa mărimii suprafeţei prelucrate mecanic nu este esenţială şi scade o dată cu creşterea grosimii materialelor.

7. Dytronul are cea mai bună comportare, indiferent de mediul de absorbţie şi de temperatura lui, textolitul tip E înregistrează valori de absorbţie mai reduse la apă, iar tipul M la ulei. Între dytron şi textolitul tip M nu există — în cazul absorbţiei de ulei — diferenţieri de natură să influenţeze aplicaţiile în construcţia organelor de maşini.

8. Absorbţia de apă şi de ulei este dependentă de valoarea raportului dintre suprafaţa totală şi volumul epruvetelor, fiind posibilă stabilirea unei corespondenţe matematice.

Primită la redacţie la 8 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Calcan, V., Ionescu, I., Goldenberg, N., *Influenţa tratamentului termic asupra comportării faţă de apă şi ulei a textolitului cu răşină furfurol-fenolică*, St. cerc. mec. apl., **8**, *3*, 847—860, (1957).
2. Goldenberg, N., Horun, S., Didicescu, Cr., *Încercarea materialelor plastice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1967.
3. Houwink, R., *Elastomers and Plastomers*, New York, Elsevier Publishing Co. Inc., 1949, p. 56—61.
4. Kanavet, I. F., Şelion, V. A., *Modificarea proprietăţilor fizico-mecanice ale fenoplastelor în condiţii de exploatare*, Industria chimică, *3*, 19—35 (1954).
5. Kovacs, A., *Etude critique sur l'absorption de l'eau par les matières plastiques*, Industrie des plastiques modernes, *6*, 31—36 (1950), şi *1*, 30—33 (1951).
6. Lapidus, A. S., *Nakladnie napravliaiuşcie iz plastmass dlia stankov*, Stanki i instrument, *11*, 7—12 (1955).
7. Lapidus, A. S., Maiorova, E. A., *Nakladnie napravliaiuşcie iz kaprona dlia metallorejuşcih stankov*, Stanki i instrument, *10*, 19—23 (1965).

UTILIZAREA CORECȚIEI ELECTRICE PENTRU REDUCEREA ERORILOR DINAMICE ALE TRADUCTOARELOR DE MĂRIMI MECANICE

de A. ZAHARESCU
Institutul de cercetări electronice

621.317.39
621.3.088.6

În lucrare sînt expuse diferite moduri de a pune problema corecției erorilor dinamice în cazul diferitelor traductoare, inclusiv cele neliniare și cele cu constante repartizate, și se prezintă circuitele electrice utilizate în acest scop. Sînt prezentate rezultate teoretice și experimentale originale.

1. În cazul măsurării mărimilor mecanice și neelectrice în general, variabile în timp, metodele electrice și electronice sînt deseori singurele utilizabile, aparatura electronică avînd o mare viteză de reacție, o mare sensibilitate, permițînd înregistrarea comodă a fenomenelor singulare și totodată transmiterea cu ușurință a rezultatelor măsurărilor la distanță.

Totuși, în anumite cazuri, la utilizarea metodelor electrice de măsură, mărimea mecanică nu este reprodusă corect prin mărimea electrică de ieșire, erorile dinamice apărute datorîndu-se de cele mai multe ori traductorului ca sistem mecanic sau unei căi mecanice de transmitere a mărimii de măsurat la traductor. Într-adevăr, în timp ce se pot realiza relativ ușor amplificatoare electronice care să reproducă corect spectrul de frecvențe al mărimii de intrare pînă la cîțiva MHz, în cazul traductoarelor, reproducerea mărimii de măsurat (forță, presiune, un parametru al vibrațiilor etc.) prin mărimea mecanică intermediară (deplasare, deformație etc.) este incorectă deseori chiar într-un domeniu de frecvențe mult mai restrîns. Erorile dinamice pot să apară în acest caz sub forma unui răspuns lent la variații rapide sau a apariției oscilațiilor proprii ale sistemului. Uneori nu sînt reproduse corect frecvențele joase, deci variațiile lente. Ameliorarea comportării dinamice a sistemului de măsură se face pe două căi :

a) modificări constructive asupra traductorului și

b) efectuarea unei corecții în partea electrică a lanțului de măsură.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, 1969, P. 225–240

Prima cale duce, în cazul extinderii benzii de măsură către frecvenţele înalte, la dificultăţi tehnice de realizare a traductorului, iar în cazul extinderii benzii spre frecvenţe joase, la construcţii de dimensiuni foarte mari. De cea de-a doua cale se ocupă articolul de faţă.

2. Relaţia dintre mărimea mecanică de măsurat x şi mărimea mecanică intermediară a traductorului y se poate exprima, dacă traductorul este un sistem mecanic liniar cu constante concentrate, printr-o relaţie integro-diferenţială reductibilă la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi :

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_0 = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + a_0. \quad (1)$$

Aplicînd transformarea Laplace în ipoteza condiţiilor iniţiale nule, se obţine funcţia de transfer a traductorului

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_0}, \quad (2)$$

în care $X(p)$ şi $Y(p)$ sînt transformatele lui $x(t)$ şi $y(t)$. Dacă mărimea electrică de ieşire y_e a traductorului este proporţională cu y, atunci $F(p)$, în afara unui factor constant, este totodată şi funcţia de transfer globală a traductorului.

Aşa cum se sugerează prin admiterea proporţionalităţii dintre y_e şi y, problema corecţiei electrice se poate pune în condiţiile în care semnalul electric de ieşire al traductorului y_e nu depinde de parametrii circuitelor electrice de corecţie intercalate în lanţul de măsură. În acest caz, funcţia de transfer rezultantă a ansamblului traductor-circuit de corecţie este

$$F_c(p) = F(p) \cdot K(p), \quad (3)$$

în care $K(p)$ este funcţia de transfer a cvadripolului electric de corecţie. Acest mod de a pune problema corespunde în cele mai multe cazuri condiţiilor tehnice reale şi simplifică totodată sinteza circuitelor de corecţie.

Alteori [8] circuitul electric de ieşire al traductorului (care nu trebuie confundat cu modelul electric al sistemului mecanic al traductorului) şi circuitul de corecţie nu pot fi sau este mai avantajos să nu fie considerate funcţionînd separat.

Consideraţiile de mai sus sînt valabile, bineînţeles, cu adaptările respective, şi pentru traductoarele de ieşire, utilizate pentru obţinerea indicaţiei (cum sînt vibratoarele magnetice), care transformă mărimea electrică de ieşire într-o mărime neelectrică. În acest caz, prin corecţie se predistorsionează mărimea electrică pentru reducerea erorilor dinamice ale indicaţiei de ieşire.

3. Corecţia ideală în cazul independenţei circuitelor traductorului şi circuitelor de corecţie duce, pornind de la relaţia (3), la condiţia

$$F_e(p) = F(p) \cdot K(p) = \text{const} \quad (4)$$

şi deci

$$K(p) = \frac{\text{const}}{F(p)}.$$

În acest fel nulurile funcției de transfer a traductorului devin polii funcției de transfer a circuitului de corecție, și invers. Cum însă nulurile funcției de transfer a unui cvadripol [2] (în cazul de față traductorul) pot avea partea reală pozitivă, ceea ce nu este permis pentru polii unui

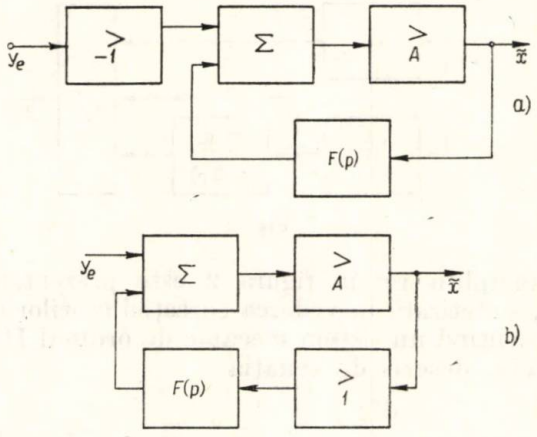


Fig. 1

sistem stabil, așa cum trebuie să fie circuitul de corecție, rezultă că, în principiu, corecția ideală conform relației (5) nu este întotdeauna posibilă.

Cîteva din metodele utilizate pentru sinteza circuitelor de corecție ale traductoarelor liniare cu constante concentrate, în ipoteza independenței circuitului de corecție și a traductorului, sînt următoarele :

a) *Metoda amplificatorului cu reacție.* Această metodă constă în a introduce în bucla de reacție a unui amplificator cu amplificarea A ($A>0$) constantă în bandă, un circuit electric avînd funcția de transfer $F(p)$ a traductorului (fig. 1).

În cele două variante (fig. 1*a* și 1*b*), dintre care se alege aceea care asigură stabilitatea circuitului, avem

$$K(p)=\frac{-A}{1-A\cdot F(p)}, \tag{6}$$

$$K(p)=\frac{A}{1+AF(p)}. \tag{7}$$

Se vede că avem

$$\lim_{A\to\infty} K(p)=\frac{1}{F(p)}. \tag{8}$$

Bineînțeles, apar limitări din faptul că amplificarea nu poate fi mărită oricît și totodată menținută reală și constantă într-o bandă largă de frecvențe.

b) *Metoda calculatorului analogic.* Această metodă constă în sinteza, cu procedeele specifice calculului analogic, a unei scheme de calculator care să construiască, cu ajutorul mărimii y_e furnizată de traductor, toţi termenii ecuaţiei integro-diferenţiale a traductorului.

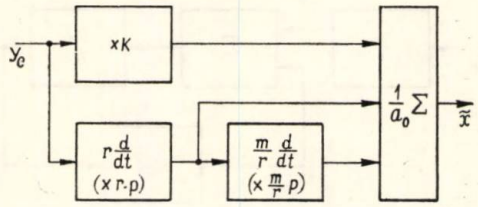


Fig. 2

Pentru exemplificare, în figura 2 este prezentată schema-bloc a unui calculator, sintetizată în vederea corecţiei erorilor dinamice ale unui traductor, reprezentînd un sistem mecanic de ordinul II liniar şi cu constante concentrate, descris de ecuaţia

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + r\frac{dy}{dt} + ky = a_0x, \tag{9}$$

în care m, r şi k reprezintă masa, amortizarea şi elasticitatea sistemului, iar a_0 o mărime constantă. În cazul de faţă, x poate fi o forţă sau o presiune.

Bineînţeles că metoda are limitări care se datoresc faptului că efectuarea exactă a operaţiilor de diferenţiere şi integrare necesită amplificări foarte mari.

c) *Metoda corecţiei „normale".* Această metodă, utilizată pînă în prezent numai pentru corecţia traductoarelor reprezentînd sisteme de ordinul I şi II, se bazează pe cunoaşterea influenţei pe care o au parametrii sistemului mecanic al traductorului $\left(\text{de exemplu } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ şi } \delta = \frac{r}{dm} \text{ sau } \tau = \frac{r}{k}\right)$ asupra erorilor dinamice, pentru o clasă de funcţii în care poate fi încadrată mărimea de măsurat $x(t)$. În cazul utilizării acestei metode, prin corecţie se urmăreşte ca ansamblul traductor-circuit de corecţie să fie echivalent cu un traductor de acelaşi tip cu cel corectat, avînd însă parametrii de care depinde comportarea sa dinamică aleşi astfel, încît erorile de măsură să nu depăşească o valoare admisibilă.

Astfel, în cazul traductoarelor descrise de o ecuaţie diferenţială de ordinul I şi avînd deci funcţia de transfer de forma

$$F(p) = \frac{a}{1 + p\tau}, \tag{10}$$

parametrul asupra căruia se acţionează prin corecţie este constanta de timp τ. Pentru aceasta trebuie cunoscută legătura dintre τ şi eroarea dinamică. O examinare calitativă a relaţiei (10) duce la concluzia că erorile de măsură la un traductor de acest tip vor fi cu atît mai mici, cu cît τ va fi mai mic, întrucît astfel aproximaţia $F(p) \simeq a = \text{const.}$ va fi valabilă într-o bandă mai largă de frecvenţe.

Un calcul concret, în cazul funcțiilor din clasa Bernstein de exemplu, caracterizate prin aceea că

$$\max_{-\infty < t < +\infty} |x(t)| \leqslant M \quad M > 0$$

și că funcția $\frac{1}{t}[x(t) - x(0)]$ are o frecvență limită de sus, arată că [3] eroarea relativă γ este limitată superior prin relația

$$\gamma < \frac{\tau\omega_s}{\tau\omega_s + 1}. \tag{11}$$

Punînd deci condiția

$$\frac{\tau_c\omega_s}{\tau_c\omega_s + 1} \leqslant \gamma_{max}, \tag{12}$$

în care cu τ_c s-a notat constanta de timp a traductorului echivalent după corecție, rezultă

$$\tau_c \leqslant \frac{\gamma_{max}}{\omega_s(1 - \gamma_{max})}. \tag{13}$$

Dacă din (13) rezultă $\tau_c < \tau$, este necesară introducerea unui circuit de corecție avînd funcția de transfer

$$K(p) = \frac{\dfrac{a'}{1 + p\tau_c}}{\dfrac{a}{1 + p\tau}} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{1 + p\tau}{1 + p\tau_c}. \tag{14}$$

Se obține în acest fel o nouă funcție de transfer

$$F_c(p) = \frac{a'}{1 + p\tau_c}. \tag{15}$$

În figura 3 este prezentat un circuit pasiv realizat cu elemente R și C

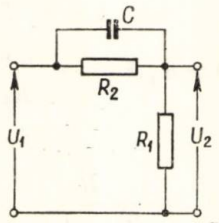


Fig. 3

care are o funcție de transfer de tipul (14), și anume

$$K(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + pCR_2}{1 + pC\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}. \tag{16 a}$$

Notînd $\frac{R_1}{R_1+R_2}=\frac{1}{m}$ și alegînd $CR_2=\tau$, așa cum rezultă din (14) avem

$$K(p)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1+p\tau}{1+p\tau/m}. \tag{16b}$$

Circuitul prezentat introduce deci o atenuare egală cu τ/τ_c.

În figura 4 sînt prezentate două circuite de corecție [3] realizate cu

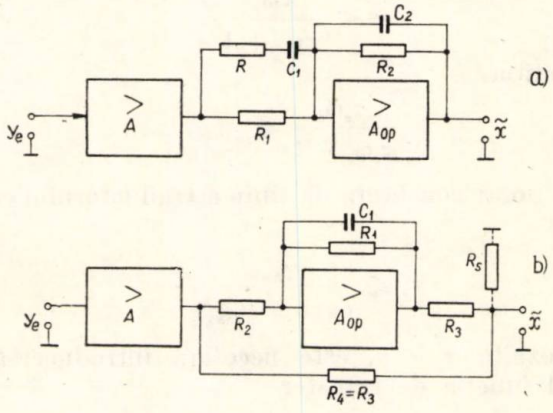


Fig. 4

amplificatoare operaționale. Dacă amplificarea acestora este destul de mare, avem în cazul circuitului din figura 4*a* funcția de transfer

$$K_a(p)\simeq -A\,\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1+pC_1R_1}{1+pC_2R_2} \tag{17}$$

cu condiția suplimentară $R\ll\left|\frac{1}{pC_1}\right|$, iar în cazul circuitului din figura 4*b*

$$K_b(p)\simeq K_1A\,\frac{\frac{1-C_1R_1}{1-R_1/R_2}\cdot p}{1+C_1R_1p} \tag{18}$$

în care

$$K_1=\frac{R_s}{R_3+2R_s}.$$

În primul caz se alege $C_1R_1=\tau$ și $C_2R_2=\tau_c$, iar în cel de-al doilea $\frac{C_1R_1}{1-R_1/R_2}=\tau$ și $C_1R_1=\tau_c$.

Circuitul din figura 4*b* are avantajul, important în cazul traductoarelor cu τ foarte mare, că permite realizarea corecției cu rezistențe și capacități mai mici decît cel din figura 4*a*.

Corecția expusă mai sus este aplicabilă nu numai traductoarelor de mărimi mecanice, ci și traductoarelor de temperatură rezistive și cu termocuplu utilizate curent în legătură cu studiul frecării și uzurii, precum și la determinarea transferului de căldură în scurgerile aerodinamice.

Traductoarelor de mărimi mecanice reprezentînd sisteme de ordinul II li se poate aplica de asemenea corecția „normală". În această categorie intră majoritatea traductoarelor pentru măsurarea parametrilor vibrațiilor mecanice, unele din cele pentru măsurarea forțelor și chiar unele traductoare de presiune. Aceste traductoare, a căror comportare este descrisă de ecuația (9), au funcția de transfer

$$F(p) = \frac{a}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}, \tag{19}$$

unde $a = \frac{a_0}{m}$. Comportarea lor dinamică depinde de parametrii $\delta = \frac{r}{2m}$ și $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (factorul de amortizare și frecvența proprie).

Prin corecție se poate obține un traductor echivalent avînd atît amortizarea, cît și frecvența proprie diferite de cele ale sistemului mecanic :

$$F_c(p) = \frac{a}{p^2 + 2\delta_c p + \omega_{0c}^2}. \tag{20}$$

Circuitul de corecție trebuie să aibă în acest caz funcția de transfer [4], [6]

$$K(p) = \frac{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}{p^2 + 2\delta_c p + \omega_{0c}^2}. \tag{21}$$

În figura 5 este prezentată oscilograma reprezentînd efectul aplicării corecției electrice [4], [5] unui traductor accelerometric avînd o amortizare mecanică neglijabilă ($\delta \simeq 0$) în vederea obținerii unei amortizări echivalente optime $\left(n = \frac{\delta}{\omega_0} \simeq 0{,}65\right)$ fără „modificarea" frecvenței proprii ω_0. Corecția a fost efectuată ținîndu-se seama că un sistem seismic de ordinul II are o funcție de transfer de tipul (19) pentru perechea de mărimi accelerație-deplasare. Schema-bloc a cvadripolului de corecție utilizat este prezentată în figura 7*a*. Ordinea înregistrărilor de sus în jos este : răspunsul traductorului necorectat la o treaptă de accelerație g, răspunsul traductorului corectat, baza de timp.

În figura 6 este prezentat efectul corecției electrice realizate cu circuitul din figura 7*b* în vederea reducerii erorilor dinamice ale unui vibrator (traductor de ieșire) de tipul IX utilizat în oscilograful magnetic МП02. Vibratorul are o amortizare inițială corectă realizată pe cale mecanică.

În figura 6*a* este prezentat răspunsul vibratorului necorectat la o treaptă de curent, iar în figurile 6*b* și 6*c* răspunsul ansamblului vibrator-circuit de corecție, avînd o frecvență proprie echivalentă cu $3\omega_0$ și, respectiv, $5\omega_0$. Timpul de răspuns s-a redus astfel de trei și, respectiv, de cinci ori.

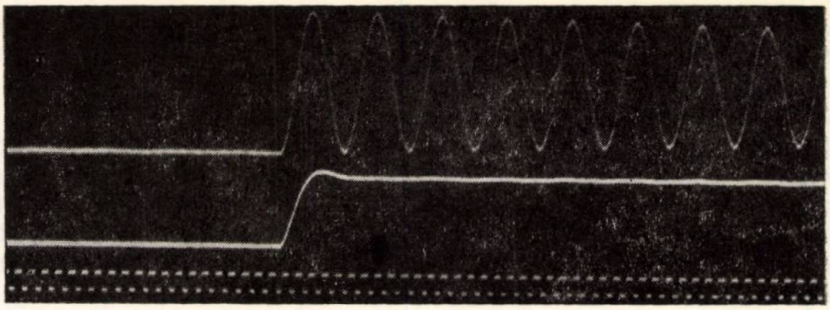
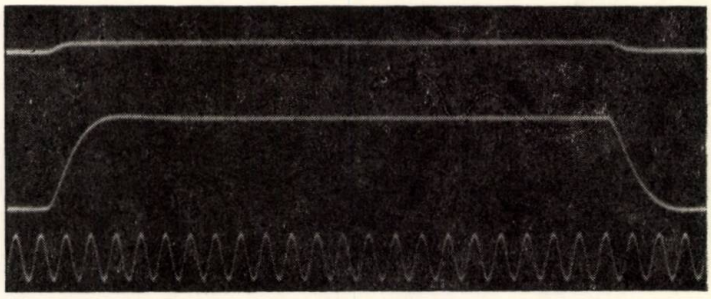
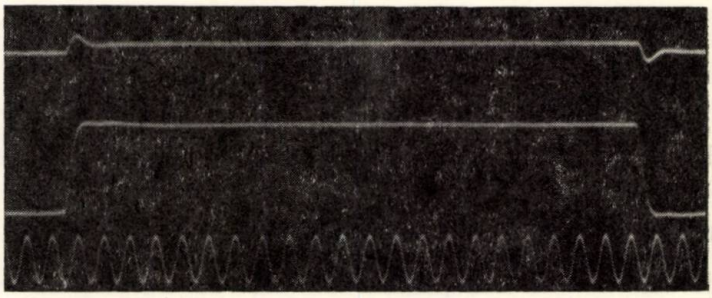


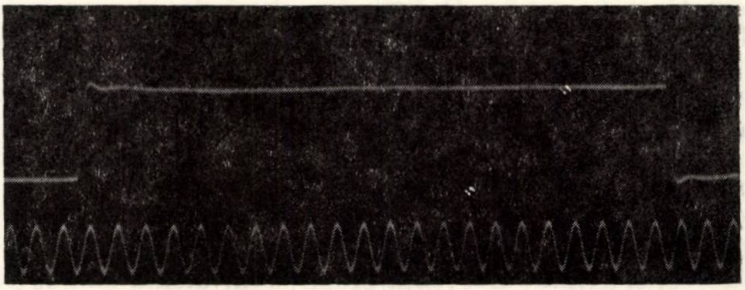
Fig. 5



a



b



c

Fig. 6

Prin corecție cu un circuit pasiv, după cum se observă din relația (21), sensibilitatea traductorului se reduce în raportul $\frac{\omega_0^2}{\omega_{0c}^2}$, deci mai mult decît la traductoarele de ordinul I, pentru o anumită reducere a timpului de răspuns. Acest lucru este explicabil dacă se ține seama că extinderea

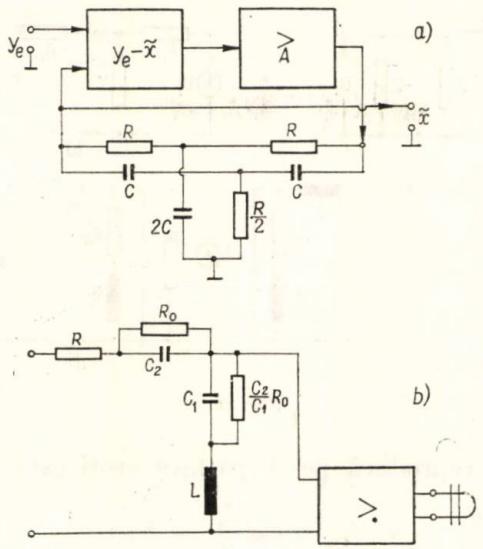


Fig. 7

benzii de frecvență se obține printr-o atenuare în banda de lucru, iar căderea caracteristicii de frecvență la frecvențe înalte este de 12 db/octavă la traductoarele de ordinul II și de 6 db/octavă la cele de ordinul I.

4. Corecția se poate efectua, de asemenea, considerînd că circuitul de ieșire al traductorului debitează direct pe cvadripolul de corecție (fig. 8) [7].

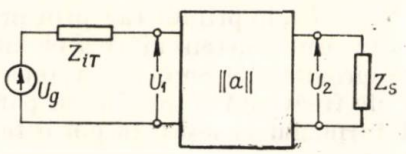


Fig. 8

Se ține seama, de fapt, de impedanța de ieșire a traductorului Z_{iT} și de impedanța de sarcină Z_s, care uneori poate fi impusă. Plecînd de la ecuațiile cvadripolului sub forma

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}I_2 \end{cases} \tag{22}$$

şi ţinînd seamă că $U_e = X(p)\cdot F(p)$, se poate scrie

$$U_2 = \frac{X(p)\cdot F(p)}{a_{11} + \frac{a_{12}}{Z_s} + a_{21}Z_{iT} + a_{22}\frac{Z_{iT}}{Z_s}}. \tag{23}$$

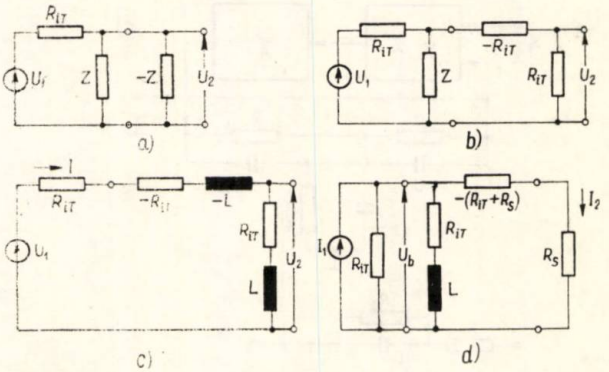


Fig. 9

Condiţia ca U_2 să reproducă pe $X(p)$ fără erori este

$$a_{11} + \frac{a_{12}}{Z_s} + a_{21}Z_{iT} + a_{22}\frac{Z_{iT}}{Z_s} = F(p). \tag{24}$$

Sinteza circuitului de corecţie trebuie să se efectueze [7] cu metode convenţionale, pornind de la relaţia (24), în care sînt de determinat parametrii a_{11}, a_{12}, a_{21} şi a_{22}.

Utilizarea unor impedanţe negative în cvadripolul de corecţie permite uneori [8] efectuarea acesteia fără atenuare. Astfel, în figurile 9*a* şi 9*b* sînt prezentate două scheme de corecţie pentru cazul cînd distorsiunile de frecvenţă sînt datorate unui element reactiv Z din circuitul de ieşire al traductorului.

Se vede că avem $U_2 = U_1$, în primul caz prin provocarea funcţionării în gol, iar în al doilea caz prin scurtcircuitarea elementului Z. În figurile 9*c* şi 9*d* sînt prezentate circuitele de corecţie în tensiune şi curent pentru cazul cînd distorsiunile de frecvenţă se produc în partea mecanică a unui traductor de ordinul I furnizînd la ieşire în gol o tensiune

$$U_1(p) = X(p)\frac{a}{1 + p\tau}$$

sau în scurtcircuit un curent

$$I_1(p) = X(p)\frac{b}{1 + p\tau}.$$

Se ţine seamă şi de rezistenţa R_{iT}, iar în cazul d şi de R_s, rezistenţa indicatorului de ieşire.

În cazul c avem

$$I = \frac{U_1}{R_{iT}}; \; U_2 = I(R_{iT} + pL) = U_1\left(1 + p\frac{L}{R_{iT}}\right)$$

și deci

$$U_2 = X(p)\frac{a}{1 + p\tau}\left(1 + p\frac{L}{R_{iT}}\right) \text{ și dacă se alege } \frac{L}{R_{iT}} = \tau,$$

$$U_2(p) = aX(p).$$

În cazul d, observînd că cele două ramuri rezistive plasate în paralel au ca rezultantă o rezistență infinită, se poate scrie

$$U_b = I_1(R_{iT} + pL); \; I_2 = -\frac{U_b}{R_{iT}} = -I_1\left(1 + p\frac{L}{R_{iT}}\right),$$

$$I_2 = -X(p)\frac{b}{1 + p\tau}\left(1 + p\frac{L}{R_{iT}}\right) \text{ și cu } \frac{L}{R_{iT}} = \tau,$$

$$I_2 = -bX(p).$$

Se observă că în toate cele patru cazuri corecția s-a făcut fără atenuare. Circuite de corecție similare [8] au fost concepute și pentru traductoarele de ieșire. Impedanțele negative se pot obține cu ajutorul convertoarelor cu tranzistoare [9]. În realitate corecția cu impedanțe negative nu se poate face perfect, așa cum ar rezulta din expunerea simplificată de mai sus. Limitările provin din pericolul instabilității și din complexitatea circuitelor cu ajutorul cărora se realizează impedanțele negative dorite.

5. O problemă din ce în ce mai actuală este corecția dinamică a traductoarelor neliniare. În cazul acestor traductoare, erorile dinamice depind de intensitatea excitației. Neliniaritatea poate fi de natură geometrică, manifestîndu-se la deformații foarte mari ale elementului elastic al traductorului. În anumite cazuri comportarea unui sistem mecanic de ordinul II cu neliniaritate geometrică, acționat de forța $f(t)$, este descrisă de o ecuație de tip Duffing:

$$m\ddot{x} + kx(1 + \alpha x^2) = f(t) \; (\alpha > 0). \tag{25}$$

O neliniaritate pronunțată, combinată cu inerția termică, prezintă traductorul anemometric cu fir cald, utilizat la măsurarea vitezei în fluide. La acest traductor, variația vitezei fluidului determină variația temperaturii unui fir metalic, încălzit electric, datorită convecției dependente de viteză. Modificarea temperaturii firului este pusă în evidență prin variația rezistenței electrice a acestuia. Ecuația care descrie fenomenul pentru un fir considerat infinit lung este

$$Ri^2 = (R - R_a)(A + B\sqrt{v}) + C\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Notațiile sînt următoarele: v — viteza fluidului; R_a — rezistența electrică la temperatura fluidului; A, B și C — constante depinzînd de parametrii fizici ai fluidului și firului, precum și de natura scurgerii și de geometria firului.

Corecția erorilor dinamice ale traductoarelor neliniare se face cu circuite electrice de asemenea neliniare.

O metodă de sinteză pentru un astfel de circuit este aceea a amplificatorului cu reacție, utilizată și în vederea corecției traductoarelor

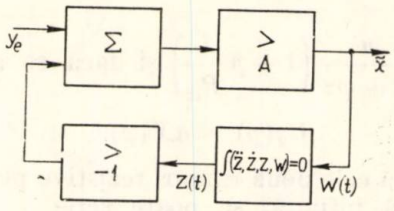


Fig. 10

liniare. De astă dată însă, cvadripolul introdus în bucla de reacție este neliniar, trebuind să reproducă, între tensiunile electrice de la intrarea și ieșirea sa, chiar dependența funcțională neliniară a traductorului (fig. 10).

Calea demonstrării acestui lucru [10] este schițată foarte sumar mai jos.

Fie ecuația diferențială neliniară de ordinul II, eventual neexplicitabilă :

$$f(\ddot{y}_e,\ \dot{y}_e,\ y_e,\ x) = 0, \tag{27}$$

care exprimă dependența dintre mărimea electrică de ieșire a traductorului $y_e(t)$ și mărimea neelectrică de măsurat $x(t)$. Întrucît mărimea $\tilde{x}(t)$ de la ieșirea circuitului de corecție, căruia i se aplică la intrare mărimea y_e, trebuie să reproducă pe $x(t)$, trebuie să avem de asemenea

$$f(\ddot{y}_e,\ \dot{y}_e,\ y_e,\ \tilde{x}) = 0, \tag{27b}$$

(27) și (27b) reprezentînd aceeași dependență funcțională. Notăm, în fine, cu w și z mărimile electrice de intrare și de ieșire ale cvadripolului din bucla de reacție, între care am convenit mai sus că avem aceeași relație

$$f(\ddot{z},\ \dot{z},\ z,\ w) = 0. \tag{27c}$$

Din figura 10 observăm că

$$\begin{cases} w = \tilde{x}(t), \\ z(t) = y_e(t) - \dfrac{\tilde{x}(t)}{A}. \end{cases} \tag{28}$$

Relația (27c) devine

$$f\left(\ddot{y}_e - \frac{1}{A}\dddot{\tilde{x}},\ \dot{y}_e - \frac{1}{A}\ddot{\tilde{x}},\ y_e - \frac{1}{A}\dot{\tilde{x}},\ \tilde{x}\right) = 0. \tag{29}$$

Cînd $A \to \infty$, în ipoteza stabilității sistemului, care trebuie demonstrată pentru fiecare caz în parte [10], relația (29) tinde către (27b), ceea ce demonstrează și faptul că $\tilde{x}(t) \to x(t)$.

O aplicare parțială a acestui principiu are loc în cazul efectuării corecției dinamice a anemometrului cu fir cald prin înlocuirea metodei curentului constant cu metoda temperaturii constante (fig. 11), mărimea de ieșire fiind curentul i de încălzire.

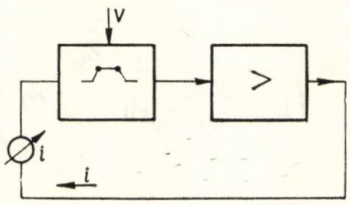


Fig. 11

Se poate arăta că în acest caz se obține o reducere considerabilă a inerției traductorului, care rămîne neliniar, neliniaritatea sa diferind de aceea a traductorului alimentat în curent constant. A doua fază a corecției este o corecție de neliniaritate statică. Este de observat că în cazul descris a fost introdus în bucla de reacție chiar traductorul (firul anemometric), dar nu prin dependența sa naturală viteză-temperatură, ci prin aceea curent-temperatură.

6. În cazul măsurării unor mărimi neelectrice foarte rapid variabile, canalul de transmitere al mărimii de măsurat la traductor, sau chiar însuși traductorul, trebuie privite ca fiind sisteme mecanice cu constante repartizate. Astfel de sisteme pot fi : membrane supuse la șocuri de presiune, coloane de fluid sau bare metalice prin care se transmit la punctul de măsură presiuni sau forțe, cristale piezoelectrice ale căror frecvențe proprii mecanice sînt plasate în spectrul mărimii de măsurat. De asemenea, în legătură cu măsurarea temperaturii, pot fi considerate sisteme cu constante repartizate de un anumit tip, din punctul de vedere al propagării căldurii, și corpurile prin care are loc această propagare.

În unele cazuri sistemele neelectrice menționate au parametrii distribuiți unidimensional sau sînt reductibile la acestea. Din prima categorie fac parte coloanele de fluid sau barele avînd dimensiunile transversale neglijabile, iar din cea de-a doua membranele cu simetrie axială excitate axial simetric, precum și o serie de alte corpuri în care au loc propagări de unde plane. În legătură cu abordarea problemei sintezei circuitelor de corecție în acest caz este util de menționat identitatea ecuațiilor liniilor lungi cu acelea ale sistemelor „liniilor mecanice" descrise. Astfel, pentru o bară omogenă solicitată axial [11], este valabilă ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \tag{30}$$

în care σ poate fi efortul unitar, deplasarea sau viteza unui punct curent, iar $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ viteza de propagare a sunetului de-a lungul barei (E este modulul de elasticitate, iar ρ densitatea). Se pot defini pentru „linia mecanică" constanta de propagare ν_m și impedanța caracteristică mecanică Z_{0m}, ia condițiile la limită pot fi descrise cu ajutorul unor impedanțe mecanice.

După cum se știe, în cazul rezolvării unei ecuații de tipul (30) pentru liniile electrice lungi, obținem în situația din figura 12*a* funcția de transfer

$$F(p) = \frac{U_2}{U_g} = \frac{\dfrac{Z_2}{Z_0}}{\left(1 + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_0^2}\right) \operatorname{sh} \nu l + \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_0} \operatorname{ch} \nu l}. \tag{31}$$

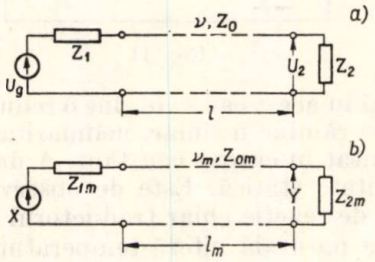


Fig. 12

Analog, la o „linie mecanică" se poate scrie pentru mărimile x și y

$$F_m(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\dfrac{Z_{2m}}{Z_{0m}}}{\left(1 + \dfrac{Z_{1m} Z_{2m}}{Z_{0m}^2}\right) \operatorname{sh} \nu_m l_m + \dfrac{Z_{1m} + Z_{2m}}{Z_0} \operatorname{ch} \nu_m l_m}. \tag{32}$$

Pentru corecția ideală ar trebui ca nulurile funcției de transfer a rețelei de corecție $K(p)$ să coincidă cu polii lui $F(p)$, iar polii lui $K(p)$ să fie chiar nulurile lui $F(p)$. Acest lucru în general nu este posibil. Reținem totuși că $F(p)$ are un număr infinit de poli și deci $K(p)$ ar trebui să aibă un număr infinit de nuluri plasate la fel în planul complex. Acest lucru sugerează ideea că pentru corecție trebuie utilizate sisteme electrice avînd de asemenea constantele repartizate, deci linii electrice lungi, deoarece sistemele cu constante concentrate și un număr finit de elemente au un număr finit de nuluri și poli.

Erorile dinamice provocate de sistemele mecanice cu constante repartizate se manifestă sub forma dispersiei fronturilor rapide și prin reflexii. Reflexiile sînt cele mai supărătoare, pentru că provoacă modificări radicale ale semnalului introdus în sistem. Pe de altă parte, apariția lor este frecventă deoarece, din motive constructive și tehnologice, sistemele mecanice cu constante repartizate care intră în componența traductoarelor sau transmit mărimea de măsurat la acestea nu pot fi adaptate acustic.

Corecția electrică își poate pune în acest caz ca scop realizarea unui ansamblu sistem mecanic — circuit de corecție, care să se comporte ca un sistem adaptat, deși sistemul mecanic continuă să rămînă neadaptat acustic. O astfel de corecție s-a realizat într-o schemă ca cea

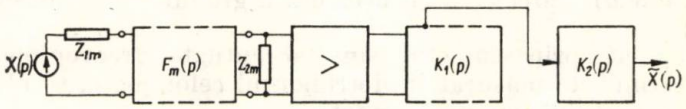


Fig. 13

din figura 13, traductorul fiind modelat tot printr-o linie electrică lungă (cablu coaxial).

Corecția electrică se face în două etape. Într-o primă etapă sînt corectate erorile dinamice rezultînd din reflexiile repetate în sistemul mecanic. Întrucît semnalul rezultat $u(t)$, în cazul cînd Z_{1_m} și Z_{2_m} nu sînt reale, nu reproduce corect pe $x(t)$, avînd o transformată

$$U(p) = G(p) \cdot X(p), \tag{33}$$

în care $G(p)$, este o funcție rațională în p, urmează o a doua etapă a corecției, care este de fapt corecția erorilor dinamice pe care le-ar introduce un sistem cu constante concentrate (dependent de Z_{0m}, Z_{1m} și Z_{2m}).

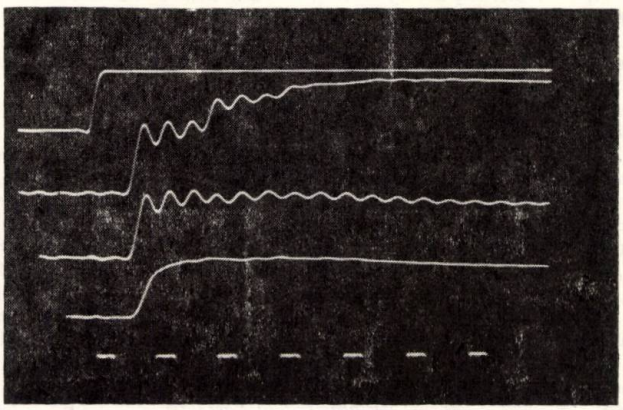


Fig. 14

În figura 14 sînt prezentate rezultatele experimentale ale unei astfel de corecții efectuate pe modele electrice (cable coaxiale). S-a modelat situația în care Z_{1_m} reprezintă o frecare, iar Z_{2_m} un sistem mecanic cu constante concentrate de ordinul II fără pierderi la care, dacă mărimea $x(t)$ este o forță, $y(t)$ este o deplasare.

Ordinea oscilogramelor de sus în jos este :

— impulsul de intrare,
— răspunsul modelului electric neadaptat,
— forma semnalului după prima etapă a corecției,
— forma semnalului după cea de-a doua etapă a corecției,
— baza de timp.

7. Din cele expuse se pot trage următoarele concluzii:

— problema efectuării corecției electrice dinamice a traductoarelor este pusă deseori sub forme particulare, în vederea obținerii unor circuite de corecție simple, cu metode de sinteză simple. Acest lucru permite de asemenea, uneori, aprecierea cu ușurință a gradului de reducere a erorilor dinamice;

— întrucît prin corecție sînt accentuate frecvențele înalte din spectrul mărimii de măsurat în detrimentul celor joase, se obține o înrăutățire a raportului semnal-zgomot;

— stabilitatea circuitelor de corecție este de asemenea o condiție care limitează posibilitățile corecției;

— corecția erorilor dinamice neliniare are aplicații practice importante;

— la măsurarea unor mărimi mecanice foarte rapid variabile, trebuie luat în considerare caracterul de sisteme cu constante repartizate al traductoarelor.

Primită la redacție 23 ianuarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. E. G. Woschni, *Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Messwandlern*, Z.m.s.r.2 caiet 7 297—300 (1960).
2. E. A. Guillemin, *Synthesis of passive networks*, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1967.
3. M. V. Ribasov, *Dinamiceskaia korrecția datcikov prosteișevo tipa*, Izmeritelnaia tehnika *12* (1962).
4. J. Iakab, *Un procedeu electric pentru amortizarea optimă a unor traductoare de mărimi mecanice*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 1021—1029 (1962).
5. J. Iakab, A. Zaharescu, I. Rugina, *Un accelerometru tensometric cu amortizare artificială realizată prin corecție electrică*, Automatica și electronica, **10**, *4*, 155—159 (1966).
6. A. Zaharescu, *Micșorarea prin corecție electrică a timpului de răspuns al unor traductoare de mărimi mecanice*, St. cerc. mec. apl., **18**, 3, 783—791 (1965).
7. H. Albrecht, F. H. Lange, *Nachrichten und regeltechnische Methode zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Messwndlern*, Nachrichten-technik 13 (1963), caiet 10, p. 373—376.
8. F. Bening, *Negative Impedanzen zur Frequenzgangverbesserung elektrischen Messwandler*, Messen-Steuern-Regeln, caiet 8, nr. 6 (iunie) 1965, p. 200—204.
9. F. Bening, *Zur Realisierung negativer Blindwiderstände mit Transistorgegentaktkonwertern*, Wiss. Ztschr. d. Elektrotechnik 2 (1964) caiet 4, p. 227—237.
10. M. V. Ribasov, *Nekotorie voprosî dinamiceskkoi korrekții, nelineinîh datcicov*, Izmeritelnaia tehnika *6*, 31—34 (1965).
11. György Fodor, *Laplace transforms in engineering*, Akademiai kiadó, Budapesta, 1965.

UNELE EFECTE ALE FRECĂRII INTERMITENTE ÎN CAZUL CUPLURILOR DIN ALIAJE SIMILARE NEFEROASE

de GH. VASILCA şi VETURIA RASZILLIER
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.893 ; 539.62

Se prezintă şi se interpretează rezultatele experimentale obţinute privind unele efecte ale proceselor de frecare staţionare şi intermitente asupra suprafeţelor de alunecare în cazurile cuplurilor similare din aliajele Y-Sn 83 şi Bz14T. Se analizează aspectele termice diferite rezultate din acţiunea continuă sau discontinuă a frecării şi se discută efectele acestora asupra unor parametri ai suprafeţelor de alunecare. Diagrame de variaţie a forţei de frecare, precum şi fotografii reprezentînd modificările parametrilor suprafeţelor, întregesc lucrarea.

Mişcarea relativă de alunecare, ca parametru caracteristic al cuplurilor de frecare, se realizează constructiv la marea majoritate a ansamblurilor tehnice de acest fel, făcînd una dintre suprafeţe imobilă. Cealaltă suprafaţă, mobilă, dacă este animată de o mişcare de rotaţie, se va afla în orice moment parţial activă în procesul de alunecare, în zona de suprapresiune, restul în afara acestui proces. Trecerea periodică prin aceste situaţii face ca diferitele porţiuni ale suprafeţei să fie supuse astfel unui proces de frecare cu caracter intermitent. Dacă suprafaţa mobilă execută o mişcare rectilinie alternativă, frecarea acţionează intermitent asupra suprafeţei imobile, deoarece aceasta este în general mai lungă în direcţia mişcării decît suprafaţa mobilă.

La orice cuplu, una din suprafeţe va fi deci supusă, în timpul funcţionării, unui proces de frecare cu caracter continuu, asupra celeilalte frecarea acţionînd cu întreruperi. În consecinţă, efectele procesului de frecare asupra celor două suprafeţe vor trebui să prezinte diferenţieri, deoarece materialul suprafeţelor este solicitat în mod diferit. Gradul de diferenţiere depinde de o serie de factori, ca intensitatea procesului de frecare, comportarea materialului la acţiuni chimice şi la solicitări fizice şi mecanice ciclice şi staţionare, natura şi proprietăţile fizico-chimice ale mediului în care se află porţiunea de suprafaţă de alunecare în perioada inactivă, frecvenţa ciclului de intermitenţă etc. Dacă regimul de funcţionare este hidrodinamic, cîmpul de temperaturi în suprafaţa

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, 1969, P. 241–249,

permanent activă corespunde unei variaţii funcţie de punct a temperaturii din filmul de lubrifiant. În stratul superficial al suprafeţei, materialul peretelui va fi deci solicitat termic în mod neuniform, un punct oarecare avînd însă permanent aceeaşi temperatură. În straturile următoare, către centrul geometric al piesei, neuniformitatea de temperatură se atenuează în funcţie de conductivitatea termică a materialului. La suprafaţa conjugată cu regim de frecare intermitent, distribuţia temperaturilor în stratul de suprafaţă se prezintă mai complex. În porţiunea de suprafaţă momentan activă, temperatura prezintă o variaţie, ca şi în filmul de lubrifiant. Intrînd, după faza activă, în mediul înconjurător, de obicei mai rece, temperaturile în stratul superficial scad însă în funcţie de condiţiile din acest mediu pînă ce porţiunea respectivă de suprafaţă devine din nou activă. În straturile următoare, către centrul piesei, diferenţele de temperatură existente în stratul superficial se atenuează şi în funcţie de conductivitatea termică a materialului. Un efect cert al procesului de frecare continuu şi intermitent poate fi deci considerată existenţa unor aceloraşi zone cu temperaturi maxime, respectiv minime, staţionare la una din suprafeţe şi solicitarea termică ciclică a suprafeţei celeilalte. Aceste aspecte pot apărea mai pronunţate în cazul lagărelor cu cuzinet parţial şi în cazul cuplurilor de tip glisieră şi mai puţin accentuate în cazul lagărelor cilindrice complete. Consideraţiile de mai sus rămîn în general valabile şi în cazul unui regim de funcţionare semifluid, cu observaţia că variaţia funcţie de punct a temperaturii suferă modificări prin salturile locale de temperatură în punctele de contact direct între suprafeţe. Datorită acestora, nivelul termic de ansamblu al cuplului se va prezenta mai ridicat. Solicitările termice de acest fel ar putea să stea la baza efectelor diferenţiate produse de frecare pe suprafeţele de alunecare ale cuplurilor.

Numeroase rezultate experimentale confirmă astfel de comportări diferite ale suprafeţelor aceluiaşi cuplu, acţionate la frecare una în mod continuu, iar cealaltă cu intermitenţă. Astfel Poppinga (1948), citat în [1], în cazul cuplurilor segment-cilindru de la motoare, arată că uzura totală a ambelor piese ale cuplului este mai redusă dacă partea mobilă este cea mai dură. Bowden şi Tabor pun de asemenea în evidenţă diferenţe de acest fel. Astfel [2] în cazul cuplului tip stift — disc din oţel — bronz de plumb, coeficientul de frecare este 0,18 cu piesa din oţel fixă, faţă de 0,3 cu partea din cupru fixă. În cazul cuplului oţel-aliaj de bază de staniu, cu partea din oţel fixă, valoarea coeficientului de frecare a fost 0,6—0,8, faţă de 0,8 cu piesa fixă din aliaj.

Alte lucrări [3] cu cupluri de tipul sabot-tambur construite din materiale similare şi în condiţii de lubrifiere cu apă au prezentat, în cazul oţelului 13CN25, uzuri mai reduse (10,3 mg) la sabotul fix, faţă de 26,3 mg la tamburul mobil. În cazul oţelului rapid RW90, sabotul fix a prezentat uzura cea mai mare (51,2 mg), faţă de numai 0,8 mg la tamburul mobil.

În cele ce urmează se analizează efectele procesului de frecare staţionar şi intermitent asupra suprafeţelor unor cupluri din materialele similare Y-Sn83 (83% Sn, 11% Sb, 6% Cu) şi Bz14T (14% Sn, Cu rest).

Modelele experimentale au fost de tipul sabot-tambur cu sabotul fix, avînd diametrul nominal Ø 23 mm, alungirea specifică $\lambda = 0{,}65$, fără joc radial și cu unghiul de înfășurare a sabotului $\theta = 80°$.

1. CONDIȚII DE ÎNCERCARE ȘI REZULTATE OBȚINUTE

Experimentările au fost făcute în următoarele condiții:
— viteza relativă de alunecare . . . . . $V = 1{,}26$ m/s,
— regimul de sarcină

0— 1 min · . . $p_m = 3{,}3$ kgf/cm².
1— 3 ,, . . . $p_m = 23$,, ,
3—10 ,, . . . $p_m = 56$,, ,

— lubrifiantul folosit: ulei tip 405 STAS,
— modul de lubrifiere: cuplul imersat complet în lubrifiant (0,350 g fără circulație artificială sau răcire),
— durata totală de funcționare: 10 min,
— felul rodajului: fără rodaj, pornirea în plină viteză și aplicarea sarcinii în treptele arătate mai sus fără oprire în acest scop.

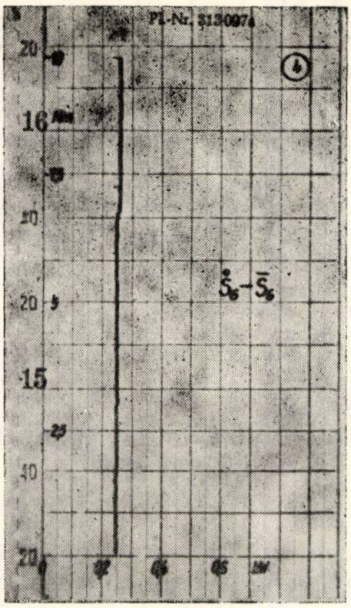
Condițiile de experimentare de mai sus au fost stabilite prin încercări prealabile, urmărindu-se realizarea unui regim de funcționare într-un oarecare grad semifluid. Aceasta deoarece în zonele de contact direct al suprafețelor efectele procesului de frecare, urmărite în cazul de față, sînt mai pregnante.

Tamburii din Y-Sn83, respectiv Bz14T, sînt notați în cele ce urmează cu $\overset{\circ}{S}$, respectiv $\overset{\circ}{B}_{15}$, iar saboții cu $\bar{S}$, respectiv $\bar{B}_{15}$.

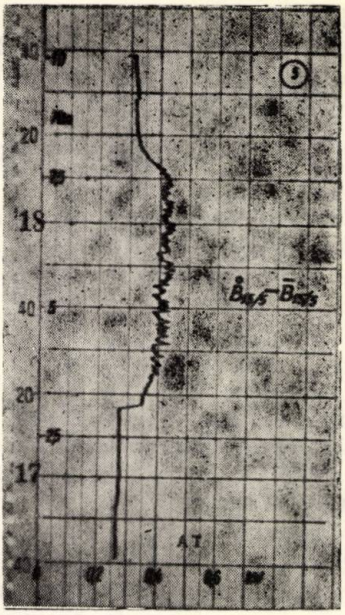
În timpul încercării au fost înregistrate grafic variația forței de frecare, sub forma puterii electrice absorbite de motorul de antrenare a tamburului, arătată în figurile 1...3. De asemenea s-a determinat pierderea sau aportul de material datorite procesului de alunecare pentru sabot și pentru tambur, precum și temperatura inițială și finală a lubrifiantului din cuvă, care sînt arătate în tabela 1.

Parametrii urmăriți		Modelul experimental			
		$\overset{\circ}{S}_5 - \bar{S}_5$	$\overset{\circ}{S}_6 - \bar{S}_6$	$\overset{\circ}{B}_{15/5} - \bar{B}_{15/5}$	$\overset{\circ}{B}_{15/6} - \bar{B}_{15/6}$
Sarcina maximă,	kgf/cm²	56	56	56	56
Viteza,	m/s	1,26	1,26	1,26	1,26
Temperatura lubrifiantului °C	inițială	28	28,5	29	29
	finală	39	39,5	121	122
Transferul de material*), mg	sabot	+ 0,00247	— 0,00005	— 0,02086	— 0,02051
	tambur	— 0,00924	— 0,00414	— 0,01533	+ 0,00109
	Total transfer (sab. + tamb.)	— 0,00924	— 0,00419	— 0,03714	— 0,04176

*) Cu — s-a însemnat pierderea, iar cu + sporul de greutate; sporurile (+) provenind din pierderi (—) nu au mai fost cuprinse în totalul transferului.



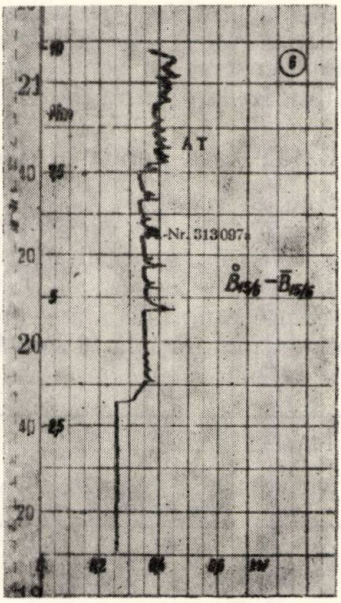
1



2

Fig. 1. — Modelul $\overset{\circ}{S}_6 - \overline{S}_6$ din Y-Sn83, puterea absorbită pentru frecare.

Fig. 2— Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/5} - \overline{B}_{15/5}$ din Bz14T, variaţia puterii absorbite pentru frecare. Aspectul funcţionării instabile.



3

Fig. 3. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/6} - \overline{B}_{15/6}$ din Bz14T, variaţia puterii absorbite pentru frecare cu zonele de instabilitate.

Din figurile 2 şi 3 se poate vedea că regimul de funcţionare a fost în cazul cuplurilor din Bz14T accentuat semifluid, zonele de variaţie ale puterii absorbite marcînd duratele şi gradul de instabilitate al procesului de frecare. Coeficientul de frecare a variat pentru sarcina maximă între 0,105 şi 0,237 în cazul modelului $\overset{\circ}{B}_{15/5} - \overline{B}_{15/5}$ şi între 0,111 şi 0,26 la modelul $\overset{\circ}{B}_{15/6} - \overline{B}_{15/6}$. Comportarea mai favorabilă în regim semifluid a

aliajului Y-Sn83 a condus la o valoare aproape constantă a coeficientului de frecare (0,083) şi la un regim de frecare fără perioade de instabilitate (fig. 1). Valoarea de 0,083 a acestui coeficient este totuşi ridicată, marcînd şi în acest caz regimul de funcţionare semifluid. Diagrama pentru modelul $\overset{\circ}{S}_5-\overline{S}_5$ nu prezintă nici o deosebire faţă de figura 1.

Datele privind transferul de material arată că în cazul cuplului din Y-Sn83 pierderea de material la saboţii ficşi a fost mai mică decît la tamburii mobili. În cazul cuplurilor din Bz14T, situaţia se prezintă inversată, saboţii ficşi pierzînd material mai mult decît tamburii. Natura substanţei influenţează deci transferul de material din suprafaţă produs ca efect al frecării, în funcţie de acţiunea continuă sau intermitentă a acestui proces.

2. EFECTELE FRECĂRII ASUPRA SUPRAFEŢELOR

Efectele procesului de frecare staţionar sau intermitent asupra suprafeţelor au fost puse în evidenţă în cazul de faţă prin studiul modificărilor suferite de constituenţii de structură din straturile superficiale şi prin studiul, prin intermediul microdurităţii, al ecruisării materialului produse ca urmare a deformării sale plastice. Sabotul avînd o încărcare termică neuniformă, dar staţionară, se va numi în cele ce urmează zona h_2 cea cu temperatura maximă şi zona h_1 cea cu temperatura minimă.

Modelul $\overset{\circ}{S}_6-\overline{S}_6$ *din materialul Y-Sn83.* În figurile 5, 6, 7 se prezintă aspecte din suprafaţa activă a tamburului mobil, în figurile 8, 9, 10, 11 suprafaţa activă a sabotului fix, iar în figura 4 ansamblul celor două suprafeţe, direcţia striurilor indicînd direcţia mişcării de alunecare.

O caracteristică comună a modificării structurii, la sabot şi la tambur, constă în distrugerea prin fărîmiţare totală a fazei Cu_6Sn_5, a cărei formă lamelară nu mai poate fi constatată (fig. 7 şi 11). Gradul de distrugere apărînd egal, se poate admite că se datoreşte deformărilor plastice ale materialului. Faptul că în această privinţă nu se constată nici o deosebire între zona h_2 şi zona h_1 de la sabot înseamnă că solicitarea termică nu a avut o influenţă sesizabilă. Această ipoteză este întărită şi prin faptul că lubrifiantul din baie s-a încălzit numai cu $\sim 10°C$, iar temperatura de topire a fazei Cu_6Sn_5 este de 640°C [4].

La modificările suferite de faza SnSb pot fi constatate însă unele uşoare deosebiri în cazul celor două suprafeţe. Astfel, în cazul sabotului, mai ales în zona h_2 cu temperatură constantă mai ridicată, cuboizii se prezintă mai distruşi (fig. 11 faţă de fig. 7). Solicitarea termică mai ridicată şi constantă în stratul superficial din zona h_2, precum şi temperatura de topire mai coborîtă, de numai 425°C [5], a acestei faze pot fi consideraţi unii din factorii care produc astfel de deteriorări mai accentuate în cazul proceselor de frecare continue. În zona h_1, mai puţin solicitată termic, a sabotului şi în suprafaţa tamburului, faza SnSb mai prezintă modificări constînd din striuri fine pe suprafaţa cuboizilor, orientate în direcţia mişcării. Aceste striuri nu prezintă deosebiri pronunţate în cazul celor două suprafeţe (fig. 6 şi 10).

Nu au putut fi constatate în nici una din suprafeţe pete albe continue necorodabile prin atac [6], deci formate din fărîmituri de SnSb şi Cu_6Sn_5.

Matricea aliajului formată din faza eutectică α, ductilă şi cu temperatura de topire foarte joasă (230°C) se prezintă în mod asemănător în ambele suprafeţe, şi anume sub formă de strat superficial, albicios şi nestriat uniform (fig. 5 şi 8), corodabil prin atac cu Nital 5%. În zona h_2 a sabotului cu temperatură mai ridicată uniformitatea stratului este mai accentuată (fig. 8), dar există şi zone, în cazul ambelor suprafeţe, în care stratul apare discontinuu, ca pete albe neregulate (fig. 9). Formarea stratului de eutectic se datoreşte mai ales curgerii plastice a materialului. Curgerea plastică, mai uşoară în apropierea punctului de topire, nu a putut juca în cazul de faţă un rol mai important din cauza temperaturii de topire foarte joase a acestei faze, care se atinge relativ uşor.

Suprafeţele ambelor piese au fost examinate în mod deosebit în privinţa unui eventual efect de oboseală termică, dată fiind sensibilitatea staniului la acest efect. Nu au putut fi constatate fisuri care marchează în general astfel de efecte nici la suprafaţa tamburului, care a fost solicitată termic în mod ciclic cel puţin în stratul superficial. S-ar putea ca, dat fiind gradul redus de solicitare termică, eventualele fisuri mici în suprafaţă să nu poată fi observate din cauza rugozităţii.

Măsurătorile de microduritate, în condiţiile $P = 25$ g, $\sphericalangle 136°$ şi durata de apăsare 15 secunde, au dat, în zonele fără atac, următoarele rezultate:

la tambur:

— eutecticul α (amprentele mari fig. 5 şi 6). . . $H = 25$ kgf/mm²

— faza SnSb (amprentele mici fig. 5 şi 6) . . . $H = 122$ „

la sabot:

— eutecticul α (fig. 8) . . . . . $H = 27$ „

Microduritatea în faza eutectică nu prezintă diferenţe concludente, iar împrăştierile relativ mari obţinute la măsurători pot fi atribuite în mare măsură şi rugozităţii suprafeţelor. Faţă de valoarea $H = 23$ kgf/mm² obţinută în faza α din masa materialului, microduritatea ceva mai mare arătată mai sus s-ar putea datora unei ecruisări sau unei contaminări a suprafeţei cu oxizi sau alte corpuri străine. Date cu privire la ecruisibilitatea fazei ternare complexe α a acestui aliaj nu se cunosc însă, ceea ce constituie în cazul de faţă o piedică în separarea efectelor acestor două cauze. Faptul că stratul superficial de fază α este uşor corodat de reactiv arată că el posedă un grad oarecare de ecruisare, atacul fiind favorizat de energia internă sporită a substanţei [7]. Compusul definit SnSb fiind sub formă de incluziuni dure şi foarte friabil, o eventuală ecruisare a acestuia nu poate avea în cazul de faţă o importanţă hotărîtoare asupra comportării la frecare a materialului în ansamblu.

Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/6}-\overline{B}_{16/6}$ *din bronzul Bz14T.* Figurile 13, 14, 15 redau suprafaţa activă a tamburului, figurile 16, 17, 18, 19 suprafaţa activă a sabotului, iar figura 12 suprafaţa activă a ansamblului sabot-tambur, direcţia striurilor de pe suprafeţe indicînd direcţia mişcării relative.

Cunoscuta comportare mai slabă a aliajelor pe bază de cupru la începutul funcţionării şi sub sarcină a ieşit în evidenţă şi în acest caz,

pe suprafaţa sabotului şi a tamburului putînd fi constatate modificări adînci ale microgeometriei (fig. 12). În aceste zone s-au produs, de asemenea, şi cele mai pronunţate modificări ale fazelor de structură. Aliajul avînd numai două faze de structură şi soluţia solidă de cupru prezentîndu-se uşor dendritic, eventualele modificări ale fazei entectoide $\alpha + \delta$ trebuie să apară sub formă de distrugere, fie a distribuţiei de cvasireţea a acesteia, fie a figurinelor izolate respective. Atît pe o suprafaţă, cît şi pe cealaltă a cuplului pot fi constatate ambele forme de modificare a fazei eutectoide mai ales în gulere (fig. 15 şi 19).

În zonele fără gripaj ale suprafeţelor nu pot fi constatate diferenţe sesizabile, privind modificarea fazei eutectoide, între cazul cu acţiunea continuă a frecării (sabot) şi cazul cu acţiunea intermitentă a acesteia la tambur. Aceasta cu toate că, în ultima perioadă de funcţionare a cuplului, procesul de frecare s-a desfăşurat la o temperatură ridicată, temperatura lubrifiantului în baie fiind de 121°C, ceea ce pentru zona h_2 a sabotului înseamnă temperaturi permanente foarte ridicate. Lipsa unei diferenţe între felul de prezentare a fazei $\alpha + \delta$ la sabot şi la tambur poate fi explicată numai prin temperatura foarte înaltă de muiere, respectiv de topire (800°C), a acestei faze, dacă, bineînţeles, se ţine seama că temperaturile de 350°, 520° şi 586°C [4] nu sînt decît temperaturi de transformare eutectoidă a fazelor β şi δ.

Al doilea constituent al materialului care poate suferi modificări sub influenţa procesului de frecare este soluţia solidă α. Aceasta avînd în structură textura de matrice, modificările se pot produce numai în direcţia schimbării concentraţiei de substanţă dizolvată şi sub formă de deformaţii plastice. Prima dintre acestea este legată de un proces de difuziune în sensul omogenizării sau neomogenizării şi de un proces de precipitare condiţionat de variaţia solubilităţii cu temperatura a substanţei dizolvate în cupru. În cazul frecării intermitente, variaţia ciclică a temperaturii în suprafaţă ar putea favoriza procese de asemenea alternanţe de precipitare-dizolvare. În suprafaţa cu frecare continuă poate predomina procesul de difuziune, dat fiind regimul de temperaturi constant şi de durată. Gradul de omogenizare va creşte deci de la zona h_1 către zona h_2 cu temperatură mai ridicată. Gradaţia de temperatură între cele două zone nu exclude însă nici posibilitatea existenţei grăunţilor de soluţie solidă cu concentraţii variate de staniu, dat fiind creşterea solubilităţii acestuia în cupru la temperaturi mai mari. Atît difuziunea de omogenizare, cît şi modificările de concentraţie sînt însă procese fizico-metalurgice cu inerţie relativ mare. Cu toate acestea, ele s-ar putea produce în suprafeţele supuse la frecare mai ales continuă. Investigarea lor trebuind însă să fie trecută la temperatura respectivă de funcţionare a cuplului, precum şi intensitatea redusă a acestuia în comparaţie cu acea curentă din metalurgie, fac ca efectuarea unor astfel de lucrări să fie legată de greutăţi. Din aceste motive se analizează în cele ce urmează numai aspectele modificării matricei privind deformarea sa plastică.

Din acest punct de vedere efectele acţiunii continue sau intermitente a procesului de frecare sînt în cazul de faţă mai bine sesizabile decît la faza eutectoidă. Un aspect al acestei diferenţe reiese din figurile 13 şi 18, în prima, partea de jos reprezentînd o zonă cu microgeometrie mai fină din suprafaţa tamburului, iar a doua o zonă similară din supra-

faţa sabotului fix. La sabot deformarea plastică apare ca un strat cu microgeometria în formă de solzi fini, care acoperă în mare parte şi faza eutectoidă, abia vizibilă. Caracterul de strat rezultă şi din faptul că prin atac cu clorură ferică dispare, faza $\alpha + \delta$ apărînd ca în figura 19. Solzii nu pot fi decît suprafeţe de grăunţi din zona nedentritică, rezultate dintr-o curgere plastică într-o mişcare cu vibraţii şi cu materialul parţial muiat în microzonele respective. Prezenţa concomitentă a unui proces de adeziune de intensitate slabă pare a fi de asemenea posibilă. Acest aspect al deformaţiei poate fi considerat în concordanţă cu regimul mai sever de temperaturi din suprafaţa sabotului solicitată continuu la frecare. Zona corespunzătoare din suprafaţa tamburului (fig. 13) prezintă o deformaţie plastică relativ uniformă, stratul respectiv fiind de asemenea uşor atacat de clorura ferică, iar faza eutectoidă de sub acesta se prezintă ca în figura 15. Aspectul corespunde în general cazului curgerii plastice cu proprietăţile mecanice ale materialului mai slab influenţate de temperatură. Aceasta este de altfel în concordanţă cu condiţiile termice de lucru mai puţin severe ale suprafeţei tamburului.

La scară micro, date fiind concentraţiile locale ridicate de temperaturi, care pot apărea în orice condiţii de frecare, figurile 14 şi 17 arată că în unele locuri există efecte de deformare plastică aproape identice pe ambele suprafeţe ale cuplului. O altă diferenţiere între efectele frecării diferite se prezintă în figura 13 (sus) şi figura 16. Aceasta constă în existenţa pe suprafaţa sabotului fix a unor zone extinse de suprafaţă, în care faza eutectoidă este vizibilă şi fără atac (fig. 16). Faptul se datoreşte stratului superficial de deformare plastică din soluţie solidă, de grosime foarte mică, care a putut rezulta astfel datorită unei corodări chimice. Ipoteza pare posibilă dacă se ţine seama de reactivitatea chimică crescîndă cu temperatura, a compuşilor acizi din lubrifiant. Măsurătorile de microduritate în suprafaţa activă, efectuate în condiţiile $P = 100$ g, $\sphericalangle$ 136 şi durata de menţinere 15 secunde, au condus în cazul suprafeţei tamburului şi a sabotului la următoarele rezultate (suprafaţa fără atac):

la sabotul $B_{15/6}$:

— în soluţie solidă (fig. 16) . . . . . $H = 310$ kgf/mm²,
— în faza eutectoidă (fig. 16) . . . . . $H = 542$ „ ,

la tambur:

— în soluţia solidă . . . . . $H = 383$ kgf/mm²,
— în faza eutectoidă . . . . . $H = 560$ „ ,

faţă de $H = 297$ kgf/mm², valoare obţinută în soluţia solidă din masa materialului, în stare de asemenea fără atac. Aceste date indică un grad oarecare de ecruisare la soluţia solidă, ceea ce este în concordanţă cu faptul că cuprul este un material ecruisabil.

Cele de mai sus arată deci că, datorită regimurilor termice, diferite rezultate din acţiunea continuă, respectiv discontinuă, a procesului de frecare pe cele două suprafeţe ale cuplurilor, apar diferenţe privind modificarea suprafeţelor care pot fi sesizate la microgeometrie şi la structură. Prin microanalize s-ar putea pune în evidenţă de asemenea şi diferenţe privind gradul de deformare plastică în stratul superficial, for-

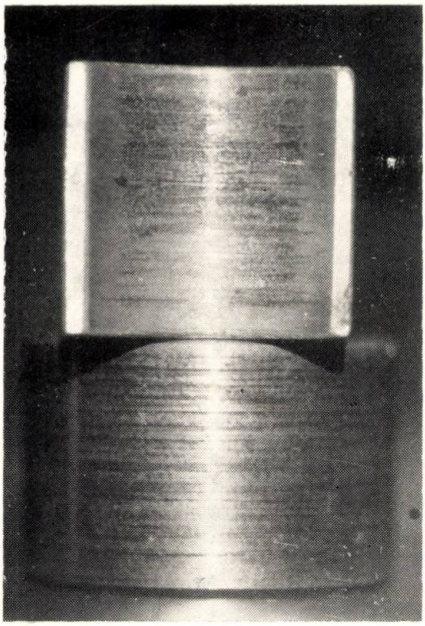


Fig. 4 — Modelul $\overset{\circ}{S}_6 - \overline{S}_6$. Suprafața activă de ansamblu, 2, 3 : 1.

Fig. 5. — Zonă lucioasă din suprafața activă a tamburului $\overset{\circ}{S}_6$, 125 : 1.

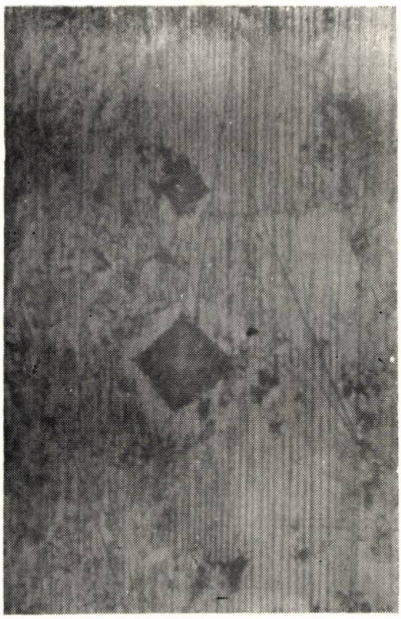


Fig. 6. — Suprafața striată a fazei SnSb la tamburul $\overset{\circ}{S}_6$, 320 : 1.

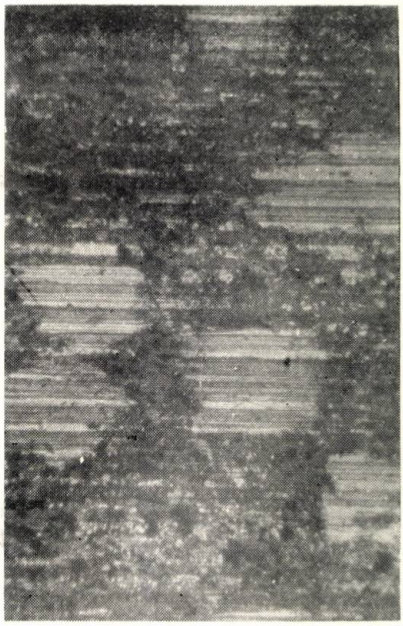


Fig. 7. — Suprafața tamburului $\overset{\circ}{S}_6$, modificarea fazei SnSb, cu atac, 125 : 1.

Fig. 8 — Zona lucioasă din suprafaţa sabotului $\bar{S}_6$, 125 : 1.

Fig. 9. — Strat discontinuu de deformare plastică la sabotul $\bar{S}_6$, 125 : 1.

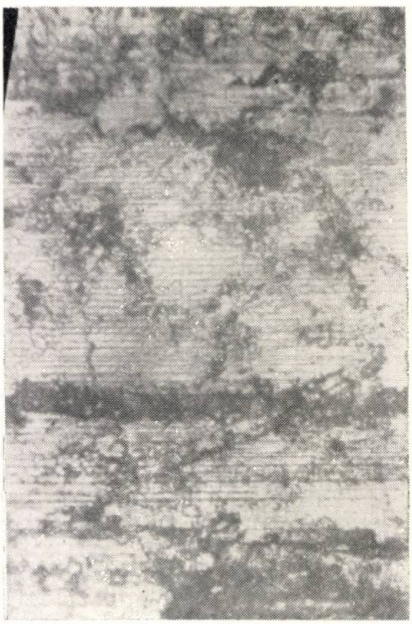


Fig. 10. — Faza SnSb striată fin la sabotul $\mathring{S}_6$, 320 : 1.

Fig. 11. — Modificarea fazei SnSb la sabotul $\mathring{S}_6$, cu atac, 125 : 1.

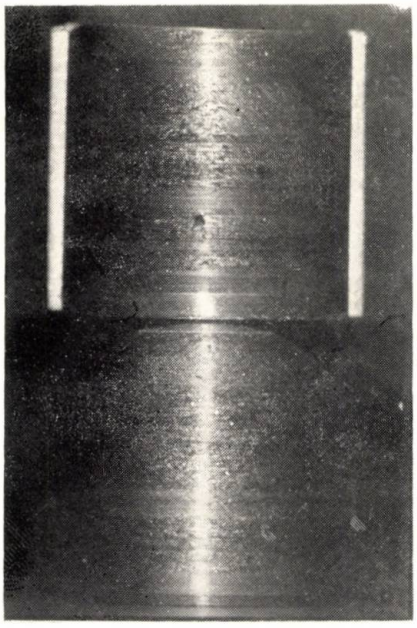


Fig. 12.— Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/6}-\overline{B}_{15/6}$. Suprafața activă de ansamblu, 2,3 : 1.

Fig. 13. — Zone cu deformări plastice diferite la tamburul $\overset{\circ}{B}_{15/6}$, 125 : 1.

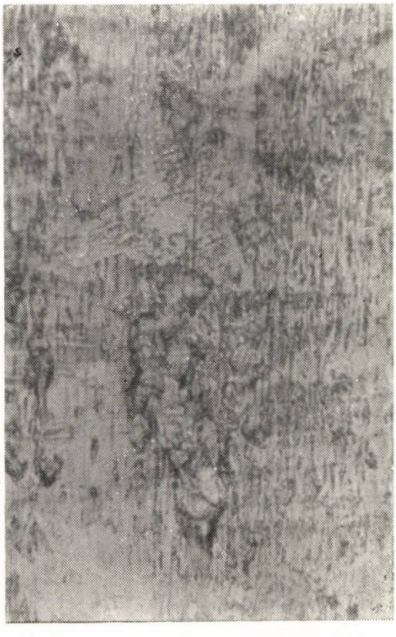


Fig. 14. — Detaliu de deformare plastică la tamburul $\overset{\circ}{B}_{15/6}$, 320 : 1.

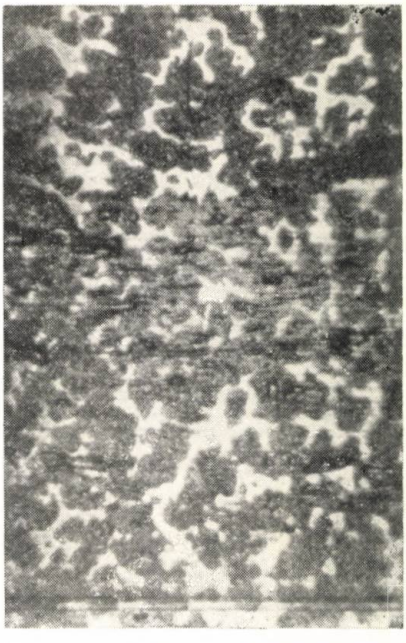


Fig. 15. — Guler cu deformare accentuată a fazei eutectoide la tamburul $\overset{\circ}{B}_{15/6}$, cu atac, 320 : 1.

Fig. 16. — Zonă din suprafaţa sabotului $\overset{\circ}{B}_{15/6}$, cu faza eutectoidă vizibilă fără atac, 125 : 1.

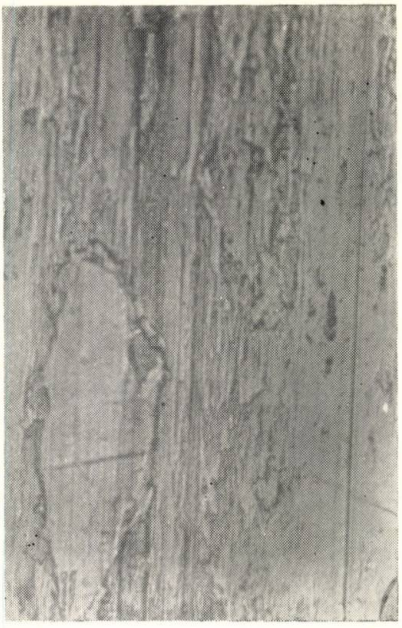


Fig. 17. — Detaliu de deformare plastică la sabotul $\overset{\circ}{B}_{15/6}$, 320 : 1.

Fig. 18. — Deformare plastică în formă de solzi la sabotul $\overline{B}_{15/6}$, 125 : 1.

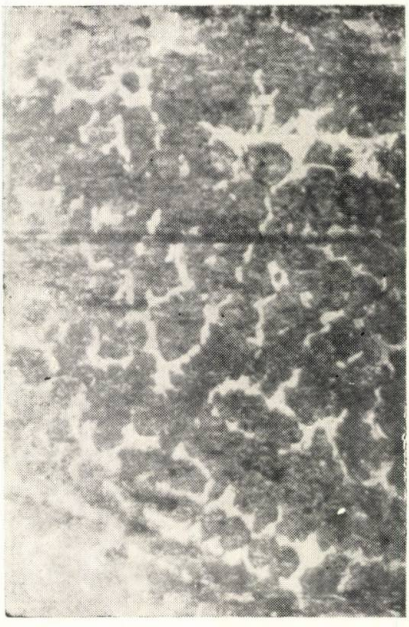


Fig. 19. — Faza eutectoidă, parţial modificată, la sabotul $\overline{B}_{15/6}$, cu atac, 35 : 1.

marea de noi compuşi chimici, încorporări de produse străine, precum şi prezenţa altor impurităţi care contaminează suprafeţele şi influenţează comportarea acestora la frecare.

Primită la redacţie la 30 noiembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. FULLER, *Theory and Practice of Lubrication for Engineer*, New York, 1956, p. 397.
2. F. P. BOWDEN, D. TABOR, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1967, p. 123.
3. GH. VASILCA, O. BIŢĂ, I. DINCĂ, *Studii în vederea îmbunătăţirii performanţelor şi durabilităţii sapelor cu role*, 1966 (lucrare nepublicată).
4. E. SCHMID, R. WEBER, *Gleitlager*, Springer Verlag, Berlin, 1953, p. 110.
5. M. HANSEN, *Constitution of Binary Alloys*, McGraw-Hill, New York, 1958, p. 1175.
6. GH. VASILCA, O. BIŢĂ, *Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.
7. H. SCHUMANN, *Metalurgie fizică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1962, p. 263.

GRUP ELECTROGEN PE LAGĂRE CU AER

de V. N. CONSTANTINESCU şi GH. MARIN
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Se descrie construcţia unui grup electrogen compus dintr-un motor electric (7kW, 1500 rot/min) şi un generator de curent alternativ (4 kVA) de construcţie obişnuită, la care rulmenţii au fost înlocuiţi prin lagăre cu aer radiale şi axiale, funcţionînd în regim autoportant.

În continuarea unor preocupări anterioare [1]—[3] de realizare a unor agregate şi modele experimentale pe lagăre cu aer, în cele ce urmează se va prezenta un grup electrogen compus dintr-un motor electric de 7 kW, 1500 rot/min, şi un generator de curent alternativ de 4,5 kVA, 1500 rot/min, ambele agregate fiind realizate pe lagăre cu aer.

Prin alegerea acestei aplicaţii s-a urmărit să se pună în evidenţă posibilităţile lagărelor cu aer, atît ale celor alimentate sub presiune, cît şi ale celor funcţionînd în regim pur aerodinamic (autoportant), de a funcţiona cu dimensiuni relativ mari şi turaţii reduse. Într-adevăr, se consideră ca domenii de aplicaţii specifice ale lagărelor cu aer domeniul turaţiilor mari sau domeniul aparatelor şi maşinilor de dimensiuni absolute mici. În realitate, mai ales pentru o serie de aplicaţii industriale curente, lagărele cu aer de dimensiuni absolute mai mari şi de turaţii mari şi medii pot oferi posibilităţi de folosire deosebit de interesante. Dintre acestea domeniul maşinilor electrice oferă posibilităţile cele mai largi din cauza condiţiilor de funcţionare şi a încărcărilor transversale, care sînt relativ reduse. Cu toate acestea, cu excepţia unor aplicaţii speciale (ca, de exemplu, compresoare antrenate electric pentru instalaţii nucleare [4]), domeniul maşinilor electrice de puteri medii a constituit mai rar obiectul unor aplicaţii ale lagărelor cu aer.

În acest sens, în afara realizărilor deja menţionate mai sus, se mai pot cita realizările de motoare electrice şi două grupuri electrogene în R. F. a Germaniei [5] sau un grup generator realizat în S.U.A. [6]. Din punct de vedere funcţional, grupul electrogen ce va fi descris în cele ce urmează este asemănător cu cele menţionate în lucrarea [5]. Există însă o serie de deosebiri constructive, de montaj, ca şi în privinţa materialelor folosite, a tipurilor de lagăre şi a condiţiilor de prelucrare. Grupul electrogen a fost realizat plecînd de la maşini electrice existente (motor electric tip Electroputere Craiova, alternator fabricat de Uzina

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 1, 1969, P. 251–262

de maşini electrice Bucureşti), la care s-au înlocuit rulmenţii cu lagăre cu aer. De asemenea s-a urmărit folosirea unor materiale curente. Din aceste motive fiecare agregat (motor, alternator) a fost prevăzut cu

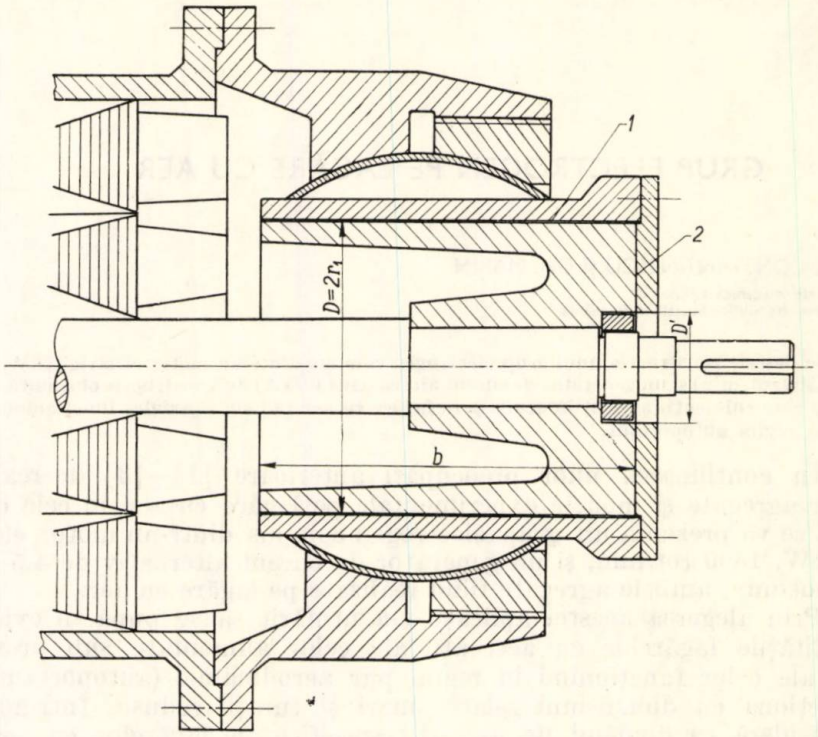


Fig. 1 — Construcţia şi dispozitivul de montaj pe articulaţie sferică a unui ansamblu lagăr radial-axial: 1 — lagăr radial; 2 — lagăr axial.

cîte două lagăre radiale şi două lagăre axiale. În acelaşi timp, cele două agregate au fost cuplate prin intermediul unui sistem elastic pentru a se evita introducerea unor sarcini radiale sau axiale importante.

Lagărele motorului electric de 7 kW. Ţinînd seamă de dimensiunile carcasei şi ale rotorului, s-a ales, pentru fiecare din cele două lagăre radiale, o construcţie de cuzinet circular neted cu diametrul $D = 135$ mm şi lăţimea $b = 169$ mm (alungire $b/D = 1{,}25$). În vederea facilităţii operaţiilor de montaj, fiecare ansamblu lagăr radial-lagăr axial este montat pe o articulaţie sferică (fig. 1). În acest mod se asigură posibilitatea de reglare a paralelismului celor două lagăre radiale.

Pentru jocul radial din lagărul circular s-au prevăzut iniţial limitele $c = 0{,}04 - 0{,}0675$ mm, ceea ce corespunde unui joc relativ variind între limitele $\psi = \frac{c}{r_1} = 0{,}6 - 1\ ^0/_{00}$.

În aceste condiţii, impunînd o grosime minimă a peliculei de $h_2 = 0{,}02$ mm (respectiv o excentricitate maximă $\varepsilon = \frac{e}{c} = 0{,}5$ în cazul

$\psi = 0{,}6^0/_{00}$ şi $\varepsilon = 0{,}7$ pentru $\psi = 1^0/_{00}$), rezultă din calcule [2] o capacitate maximă de încărcare per lagăr circular de ordinul a 250 kg. Mai precis, capacitatea de încărcare în regim de funcţionare cu 1500 rot/min este redată în funcţie de jocul radial în figura 2.

Încărcarea lagărelor în condiţii normale de funcţionare este mult mai redusă în realitate, de circa 40 kg per lagăr (greutatea rotorului este

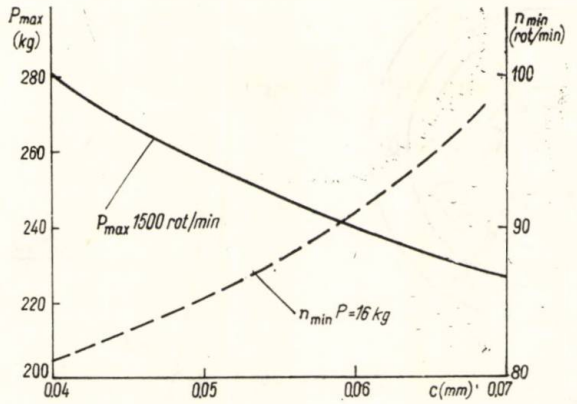


Fig. 2. — Capacitatea de încărcare şi turaţia minimă de formare a peliculei de aer, pentru lagărele radiale ale motorului, $h_{min} = 0{,}02$ mm.

de circa 32 kg cu cuplaj şi ventilator, la care se mai adaugă circa 3 kg sarcini dinamice şi, acoperitor, circa 40 kg sarcini electromagnetice). Această supradimensionare a fost făcută intenţionat, deoarece era de aşteptat ca, din cauza inexactităţilor de prelucrare (conicităţi, ovalităţi etc.), geometria reală a lagărelor să se depărteze de geometria corectă, iar capacitatea reală să fie mai redusă. Valorile teoretice de mai sus pot fi admise ca reale dacă geometria corectă este realizată cu o abatere egală cu cel mult 50% din jocul minim admis (în consecinţă, ovalităţi etc. de cel mult 0,01 mm). O asemenea precizie este perfect compatibilă cu posibilităţile actuale de prelucrare. Pentru o greutate proprie de 32 kg rezultă că se poate forma o peliculă portantă de aer de circa 0,02 mm la o turaţie de ordinul a 90 rot/min. Mai precis, turaţia minimă pînă la care se poate menţine pelicula de aer (respectiv turaţia de la care dispare frecarea uscată la pornire) este dată în funcţie de jocul radial în diagrama din figura 2.

Lagărele axiale ale motorului au geometria prezentată în figura 3. Sînt constituite din şase sectoare, despărţite prin canale radiale de 3 mm. Diametrul exterior este egal cu diametrul lagărului circular (135 mm), iar diametrul interior de 55 mm. Fiecare sector are în zona centrală o porţiune în pantă, pe aproximativ 2/3 din lungimea sectorului şi cu o denivelare totală de 0,06 mm. Capacitatea de încărcare a unui asemenea lagăr la 1500 rot/min, în funcţie de distanţa h dintre suprafeţe, este prezentată în figura 4. Se constată că posibilităţile de încărcare ale

lagărului axial sînt mult mai reduse decît ale lagărelor circulare. Acest fapt este perfect normal dacă se ţine seamă că lagărul circular are dimensiunile de 135×169 mm (circa 240 cm^2), în timp ce lagărul axial este compus din şase sectoare (lagăre independent cu dimensiunile de aproximativ 47×40 mm (19 cm^2). În plus, presiunea cade la valoarea atmos-

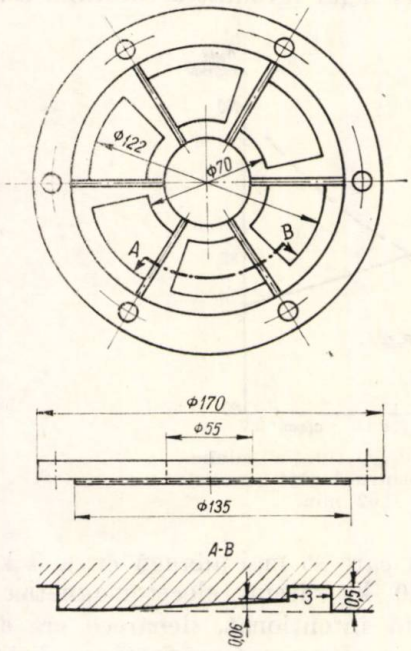


Fig. 3 — Lagăre axiale ale motorului electric.

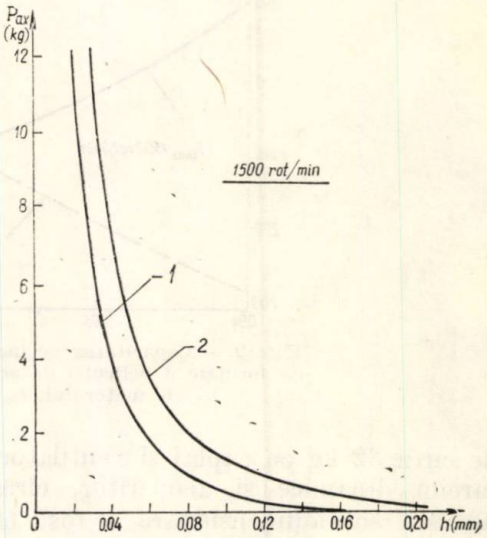


Fig. 4 — Capacitatea de încărcare a lagărelor axiale la 1500 rot/min în funcţie de grosimea filmului de aer. 1 — lagăr axial motor; 2 — lagăr axial alternator.

ferică pe fiecare canal radial, ceea ce reduce şi mai mult eficienţa. Din aceste motive, sarcina ce o poate suporta lagărul axial este de circa 20 de ori mai redusă. În plus, în sfîrşit, grosimea peliculei trebuie să fie ceva mai mare, deoarece abaterile de la perpendicularitate sînt mai greu de controlat. Din aceste motive se poate conta pe o capacitate de încărcare de numai 4 kg la o grosime a peliculei de 0,04 mm.

Din cauza turaţiei reduse nu este necesar un calcul riguros dinamic al lagărelor. Singura precauţie care trebuie luată este ca frecvenţa vibraţiilor exterioare lagărelor să nu fie apropiată de frecvenţa proprie a peliculei de gaz şi de frecvenţa corespunzătoare jumătăţii turaţiei axului.

Aceste condiţii sînt îndeplinite în mod cu totul acoperitor pentru lagărele radiale. Astfel vibraţiile datorită cîmpurilor magnetice au frecvenţa de 50 Hz. Frecvenţa proprie a peliculei are valori mult superioare (de ordinul a 1000 Hz), iar frecvenţa jumătăţii turaţiei axului este de 25 Hz.

În cazul lagărelor axiale, frecvenţa proprie a peliculei de grosime 0,04 mm este de circa 180 Hz, deci de patru ori mai mare decît frecvenţa

cîmpurilor electromagnetice. Totuşi există pericolul apariţiei unor vibraţii nocive în lagărele axiale, dacă din cauza inexactităţilor de prelucrare capacitatea portantă a acestora scade, deoarece atunci şi frecvenţa proprie a peliculei scade, putînd ajunge la valori apropiate de 50 Hz, cînd poate apărea un regim de cvasirezonanţă.

Piesele componente ale motorului electric sînt prezentate în fotografia din figura 5.

Lagărele alternatorului de 4 kVA. Lagărele radiale şi axiale ale alternatorului sînt de construcţie similară, cu dimensiuni ceva mai mari,

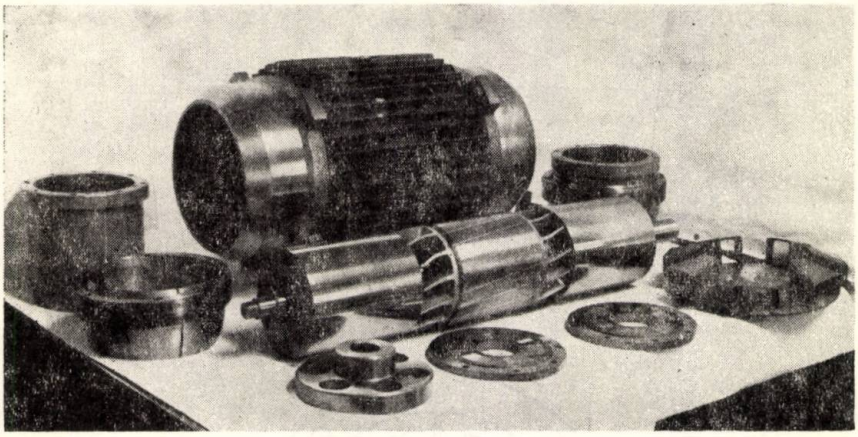


Fig. 5. — Piesele componente ale motorului electric de 7 kW.

deoarece rotorul alternatorului este mai greu (circa 34 kg greutate proprie, la care se adaugă circa 6 kg greutatea cuplajului, ventilatorului şi inelelor de colectare).

Astfel, lagărele radiale au diametrul de $D = 160$ mm şi lăţimea $b = 176$ mm (alungire $b/D = 1{,}1$). Jocul radial a fost prevăzut să aibă o valoare între 0,05 şi 0,08 mm (joc relativ $\psi = 0{,}6 - 1\,^0/_{00}$). În aceste condiţii, admiţînd aceleaşi valori pentru grosimea minimă de 0,02 mm, rezultă o excentricitate maximă admisibilă de $\varepsilon = 0{,}6 - 0{,}75$. Capacitatea de încărcare este redată în figura 6. Se constată că, dacă precizia de prelucrare (ovalitate etc.) este de ordinul 0,01 mm, se poate conta pe o capacitate portantă maximă la 1500 rot/min de circa 360 kg per lagăr. În aceleaşi condiţii turaţia minimă de formare a peliculei (în ipoteza unei greutăţi a rotorului de 40 kg) este de ordinul a 100 rot/min, respectiv aproximativ aceleaşi ca şi pentru motorul electric (de altfel aceasta a fost una din condiţiile impuse în proiectare).

Lagărele axiale au construcţia redată în figura 7. Se constată că s-a adoptat un număr de sectoare de 8 (faţă de 6 în cazul lagărelor motorului — fig. 3) din cauza dimensiunilor geometrice mai mari. De asemenea denivelarea totală a zonelor în pantă este acum de 0,08 mm. În aceste condiţii, capacitatea portantă a lagărelor axiale este prezentată în figura 4. Se constată că, la o grosime minimă a peliculei de aer de 0,04 mm, fiecare lagăr axial poate suporta o sarcină de circa 7,5 kg. Pentru caracteristicile dinamice rezultă cifre aproximativ egale cu cele

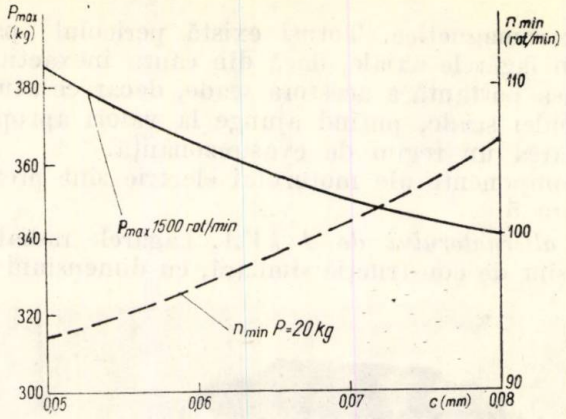


Fig. 6

Fig. 6 — Capacitatea de încărcare și turația minimă de formare a peliculei de aer pentru lagărele radiale ale alternatorului, pentru $h_{min} = 0{,}02$ mm.

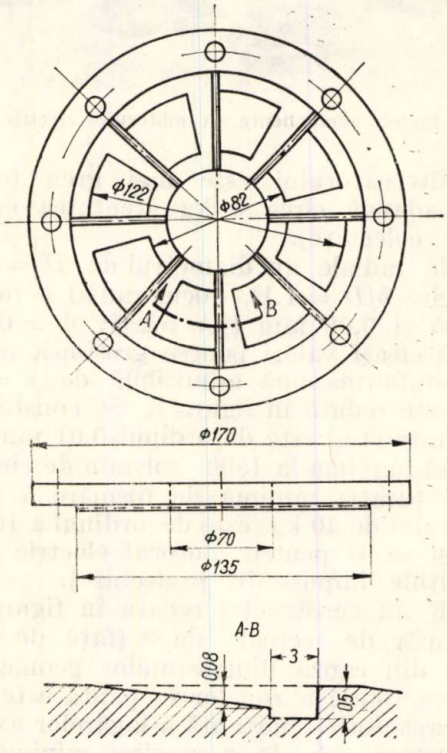


Fig. 7 — Lagărele axiale ale alternatorului.

obținute în cazul motorului, deoarece lagărele sînt ceva mai mari, dar în schimb masele în rotații sînt de asemenea mai mari.

Piesele componente ale alternatorului sînt prezentate în fotografia din figura 8.

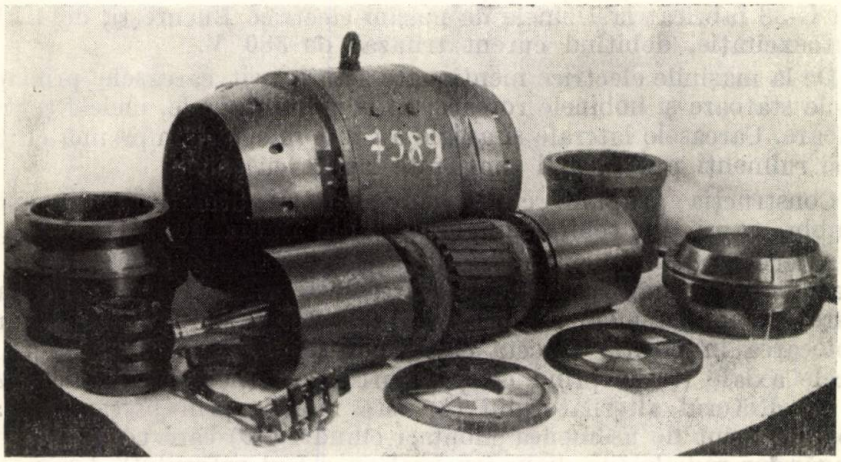


Fig. 8 — Piesele componente ale alternatorului de 4 kVA.

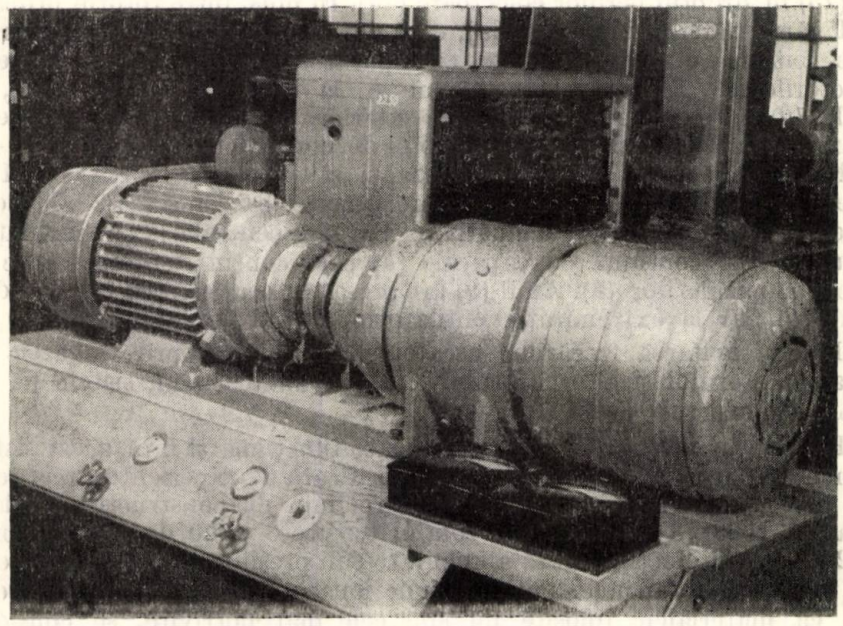


Fig. 9 — Vederea prototipului în stare de funcționare.

Prototipul de laborator executat este prezentat în stare de funcționare în fotografia din figura 9. Se constată că motorul electric și alternatorul au fost montate pe un șasiu care conține unele aparate de control, ca și, în interior, releele de pornire, transformatorul și redresorul pentru

excitarea alternatorului. Gabaritul grupului (fără şasiu) este de 1550 × ×380×350 mm, iar greutatea totală de 240 kg.

După cum s-a menţionat, motorul electric este de tip Electroputere de 7 kW la 1500 rot/min, funcţionînd la 220—380 V. Alternatorul este de tip G-38 fabricat la Uzinele de maşini electrice Bucureşti, de 4 kWA, cu autoexcitaţie, debitînd curent trifazat de 380 V.

De la maşinile electrice menţionate s-au folosit carcasele principale, bobinele statoare şi bobinele rotoare, ca şi ventilatoarele, inelele şi periile colectoare. Carcasele laterale şi axiale au fost înlocuite împreună cu lagărele pe rulmenţi pentru a fi construite lagăre cu aer.

Construcţia grupului electrogen poate fi urmărit în desenul de ansamblu, ca şi din schiţa simplificată din figura 10.

Alternatorul se compune din carcasa centrală (*1*), în care sînt montate bobinele statorului (*2*). De carcasă se prind cu şuruburi capacele (*3*) care conţin sistemele de prindere pe sectoare sferice (*4*) a lagărelor (*5*), blocarea în poziţia corectă efectuîndu-se cu ajutorul piuliţelor (*6*). Lagărele axiale (*7*) se prind cu şuruburi pe părţile frontale ale cuzineţilor (*5*). Rotorul alternatorului (*8*) este montat prin presare pe axul (*9*), pe care sînt de asemenea montaţi cilindri (*10*) care constituie fusurile lagărelor radiale (de diametru egal cu cel al rotorului). La o extremitate a axului (*9*) s-a montat cuplajul (*11*), iar la cealaltă inelele colectoare (*13*) în dreptul periilor colectoare (*14*). În plus, între rotorul propriuzis şi lagărul radial, dinspre cuplaj, este montat ventilatorul (*12*). Părţile mobile exterioare sînt protejate cu apărătorile (*15*). Pentru trecerea conductorilor de la bobinele rotorului (8) la inelele colectoare (*13*), cilindrul (*10*) a fost prevăzut, dinspre exterior, cu patru găuri plasate la 90°. Axul (*9*) a fost confecţionat din oţel de construcţie obişnuit (OL 45), iar cilindrii-arbori din OLC 14 cementaţi şi trataţi la circa 45 HRc. Cuzineţii şi lagărele axiale au fost confecţionate din fontă Fc-28. Motorul are o construcţie absolut asemănătoare. Carcasa centrală (*1*), care conţine statorul (*2*), se continuă cu capacele (*3*) care conţin sistemul sferic de prindere a cuzineţilor (*5*). Axul (*9*) are presat rotorul central (*8*), cilindrii-arbori (*10*), iar la extremităţi ventilatorul (*12*) şi cuplajul (*11*).

Pentru evitarea frecărilor uscate la pornire şi oprire lagărele radiale ale motorului şi alternatorului sînt prevăzute cu un sistem de alimentare cu aer sub presiune.

Este de menţionat că agregatul poate funcţiona şi fără acest sistem suplimentar. Această afirmaţie a fost verificată de experienţe precedente la un motor electric de 7 kW şi 2800 rot/min de construcţie similară, realizat în 1963 [3] şi care, din totalul de peste 1000 de porniri-opriri, circa 200 au fost efectuate fără alimentare sub presiune, fără a se observa uzuri prohibitive sau accidente de funcţionare. Totuşi, avînd în vedere faptul că materialele folosite nu sînt cele mai potrivite, se consideră prudent de a se amenaja sistemul suplimentar de alimentare cu aer sub presiune. În acest scop fiecare lagăr radial are prevăzute patru găuri de 1 mm diametru, dispuse simetric faţă de planul vertical şi formînd un unghi la centru de 70° (fig. 11). Aerul comprimat este adus prin conductele (*1*) care se continuă cu două canale cilindrice (*2*) practicate în cuzinet, în legătură cu orificiile de alimentare (*3*).

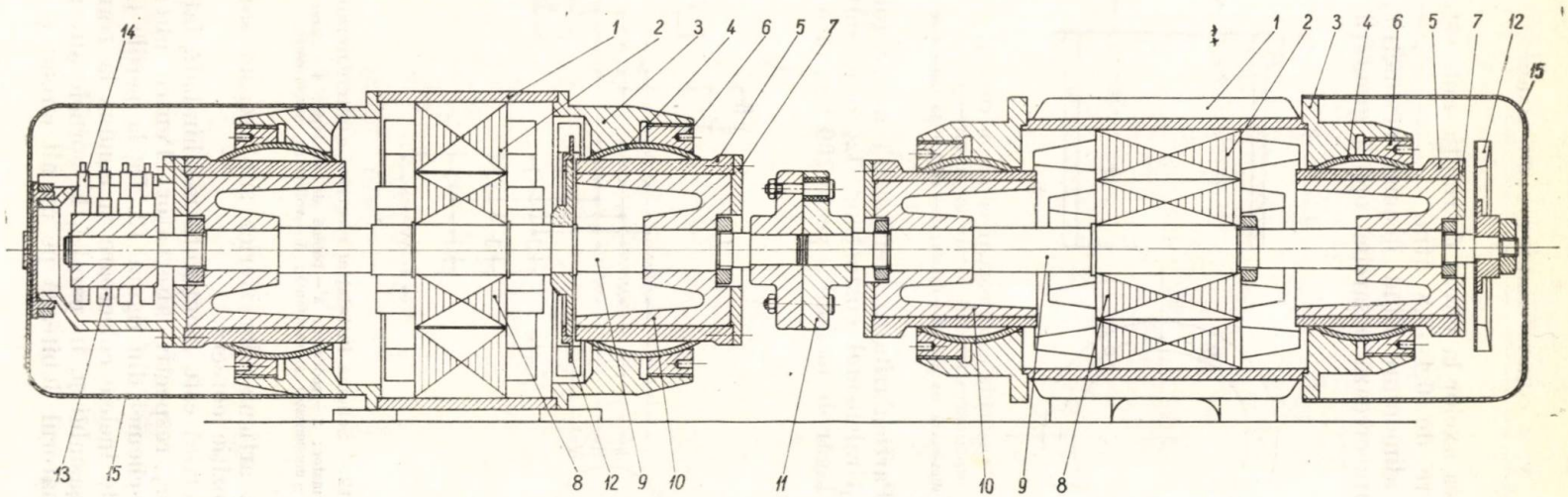


Fig. 10 — Schiță de ansamblu a grupului electrogen pe lagăre cu aer.

1 — Carcasă; 2 — stator; 3 — capac; 4 — sistem sferic; 5 — lagăr radial; 6 — piuliță; 7 — lagăr axial; 8 — rotor; 9 — axă; 10 — cilindru; 11 — cuplaj; 12 — ventilator; 13 — inele colectoare; 14 — perii colectoare; 15 — apărători.

Pentru plutirea axelor la viteza de rotaţie nulă este necesară o presiune de alimentare de 0,4—0,8 atm.

Orificiile de alimentare fiind dispuse nesimetric, o presiune de alimentare mai mare creează o sarcină opusă greutăţii proprii şi mai

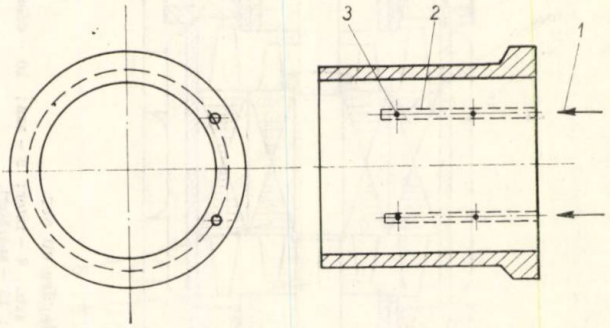


Fig. 11 — Orificiile de alimentare cu aer în cuzineţi pentru suprimarea frecării uscate la pornire-oprire.
1 — alimentare cu aer; 2 — canale; 3 — orificii de alimentare.

mare ca aceasta. Particularitatea menţionată a fost folosită la montaj pentru a asigura paralelismul cuzineţilor. La o presiune de 6—8 atm se obţin sarcini pe lagăr de ordinul a peste 100 kg; prin strîngerea piuli-

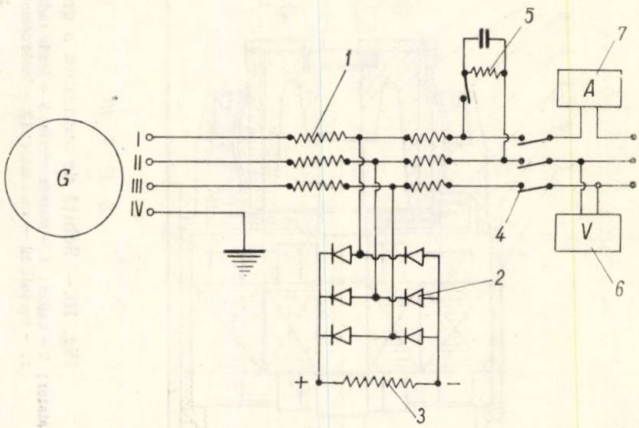


Fig. 12 — Schema instalaţiei electrice a alternatorului.
1 — transformator; 2 — redresor; 3 — bobină de excitaţie; 4 — întrerupător; 5 — condensator şi rezistenţă; 6 — voltmetru, ampermetru.

ţelor de blocare a articulaţiilor sferice sub această sarcină se asigură blocarea lor în opoziţie corectă.

Instalaţia electrică este menţinută neschimbată faţă de cea prevăzută pentru motor, respectiv alternator. Pentru alternator ea a fost realizată conform schemei din figura 12. De la periile (*14*) (fig. 10) curentul este cules de inelele colectoare şi condus la transformatorul (*1*) aflat în interiorul şasiului şi, în paralel, la bornele alternatorului pentru consum. Transformatorul debitează pe un alt circuit şi curent de 40 V,

care se redresează cu redresorul (*2*), după care alimentează bobinele excitatoare (*3*). Pentru amorsarea excitației se folosește o instalație suplimentară (*5*) compusă dintr-un condensator și o rezistență cu care se scurtcircuitează două faze ale alternatorului, pentru scurt timp, la pornire. Între consumator și alternator este interpus un releu (*4*). De asemenea, conectarea alimentării motorului se efectuează printr-un releu (automat).

Aparatura de control se compune din ampermetru și voltmetru pentru verificarea tensiunii și curentului consumat.

Supravegherea funcționării lagărelor se efectuează în mod simplu, plasînd în serie carcasa instalației cu axul rotor pe un circuit de 4 V, cu un bec electric. Funcționarea normală a grupului electrogen avînd loc fără contacte metalice între suprafețele de frecare mobile și cele fixe ale lagărelor, circuitul este întrerupt, iar becul de control stins. Orice contact metalic între lagăre este pus în evidență prin aprinderea becului de control. În plus, axul motorului fiind cuplat elastic cu axul alternatorului prin intermediul unei piese de cauciuc, cele două axe sînt izolate din punct de vedere electric, astfel încît există posibilitatea efectuării controlului funcționării separat pe cele două agregate : motor-alternator. Pentru controlul presiunii de alimentare cu aer comprimat sînt prevăzute două manometre.

Întrucît agregatul a fost proiectat pentru studiu de laborator pe o construcție economică s-au folosit ca materiale pentru fusuri și lagăre oțeluri și fonte de calități obișnuite. Acest cuplu de materiale permite contacte directe (frecare uscată) pentru scurt timp datorită grafitului din fontă care se comportă ca un lubrifiant solid. Totuși experiența proprie a arătat că această combinație de materiale nu este corespunzătoare, mai ales pentru a obține concluzii în privința durabilității în funcționare (fonta este sensibilă la coroziune datorită umidității atmosferice). În plus, grafitul expulzat între suprafețele de frecare în timpul contactelor metalice se acumulează în timp, particulele respective acționînd ca impurități. Totodată stabilitatea dimensională a fontei în timp este slabă.

Pentru evitarea accidentelor la porniri-opriri s-a construit un automat electropneumatic astfel încît pornirea și oprirea grupului să nu fie posibilă fără prezența aerului între suprafețele de frecare la presiunile necesare creării unei pelicule portante a pieselor în mișcare.

După efectuarea montajului grupul a fost pornit mai întîi în gol, după care s-a încărcat progresiv. Dat fiind faptul că pericolul cel mai evident este la pornire și oprire, s-au efectuat pînă în prezent încercări cu precădere în acest sens și numai în mică parte încercări de durată.

Funcționarea grupului a dat rezultate satisfăcătoare în toate cazurile cercetate. Totuși datorită forțelor electromagnetice manifestate axial, atît la motor, cît și la alternator, a cuplajului elastic care facilitează unele deplasări axiale independente ambelor componente ale grupului, cum și portanței reduse a lagărelor axiale, în cazuri de încărcări sau descărcări bruște se produc deplasări axiale de genul oscilațiilor amortizate. Acestea pot uneori depăși chiar capacitatea portantă a lagărelor axiale, în acest caz putîndu-se ivi cazuri de frecări uscate intense între aceste suprafețe.

De altfel, desigur că pentru agregatele de acest tip concepute de la început pentru a funcţiona pe lagăre cu aer este mai raţional să se folosească construcţia monoax, în acest caz avînd numai două lagăre radiale şi două axiale calculate pentru o capacitate de încărcare acoperitoare. În orice caz, realizarea grupului electrogen de 4 kVA pe lagăre cu aer descris mai sus demonstrează posibilitatea de utilizare a lubrificaţiei cu aer în domeniul construcţiilor de agregate la turaţii mijlocii sau chiar mici, dacă se iau măsurile necesare la proiectarea lor.

Primită la redacţie la 18 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, GH. MARIN, *Motor pneumatic pe lagăre cu aer*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *1* (1960).
2. V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
3. V. N. CONSTANTINESCU, GH. MARIN, *Unele studii de laborator privind lubrificaţia cu gaze*, St. cerc. mec. apl. **XVI**, *6* (1965).
4. N. S. GRASSAM, J. W. POWELL, editors, *Gas lubricated bearings*, Butterworths, London, 1964.
5. H. DRESCHER, *Gasgeschmierte Lager*, Schmiertechnik, 1961, Heft 5, p. 237—248, Heft 6, p. 315—323.
6. J. W. BEAMS, B. STERNLICHT, W. F. HUGHES, *Gas, magnetic and MHD bearings filling new needs*, The SAE Journal, vol. 72, Nr. 3, March 1964, 72—75.

RECENZII

MICHAEL B. ABBOT, *An Introduction to the Method of Characteristics* (O introducere în metoda caracteristicilor), Thames and Hudson, London, 1966, IX+242 pag., 117 fig.

Ecuaţiile cu derivate parţiale de primul ordin, şi în special sistemele de două astfel de ecuaţii, de tip hiperbolic, precum şi ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul al doilea de acelaşi tip, intervin în numeroase probleme din fizica matematică şi din tehnică. Pentru găsirea soluţiilor acestor ecuaţii, metoda caracteristicilor s-a dovedit un instrument foarte util, care este folosit pe o scară din ce în ce mai largă. Din acest motiv, apariţia unei lucrări care să pună la îndemînă celor interesaţi bazele matematice ale metodei şi o serie de exemple ilustrative de aplicaţii este binevenită. Cartea de care ne ocupăm se adresează în primul rînd inginerilor şi, ca atare, caută să prezinte atît problemele teoretice ale metodei, cît şi problemele de aplicaţii rezolvate cu ajutorul ei sub o formă cît mai accesibilă.

Primul capitol are un caracter introductiv, căutînd să precizeze noţiunea de caracteristică în legătură cu procesele de propagare şi utilizînd în acest scop cîteva exemple, dintre care unele vor fi reluate ulterior mai amănunţit.

Capitolul al doilea şi al treilea conţin expunerea problemelor matematice legate de determinarea caracteristicilor ecuaţiilor cu derivate parţiale de primul şi de al doilea ordin.

În continuare, se tratează în trei capitole aplicaţii ale metodei la studiul valurilor lungi în mişcarea cu suprafaţă liberă a lichidelor incompresibile, în dinamica gazelor, în teoria plasticităţii şi în mecanica materialelor granulare.

În capitolul al şaptelea se prezintă o scurtă sinteză a metodei, scoţîndu-se în evidenţă o serie de proprietăţi cu caracter general. Ultimul capitol, de asemenea foarte concis, dă o serie de indicaţii asupra utilizării caracteristicilor în metodele de calcul numeric. Un apendice este consacrat expunerii proprietăţilor matricelor şi determinanţilor care au fost utilizaţi în capitolele anterioare.

În general, expunerea este clară şi problemele pot fi uşor urmărite, ceea ce face ca această carte să fie utilă pentru iniţierea în utilizarea metodei caracteristicilor. Însă, chiar dacă lăsăm la o parte faptul că introducerea matematică din primele trei capitole nu lasă o impresie complet satisfăcătoare, exemplele tratate în capitolele următoare sînt prea cunoscute, devenite oarecum clasice. Într-adevăr, probleme de acest gen pot fi găsite în numeroase cărţi de specialitate şi ar fi fost poate mai interesant ca să se prezinte şi alte probleme mai complicate, de exemplu scurgeri de fluide reale, în care nu mai există invarianţii lui Riemann. Este drept că această situaţie este amintită în carte, dar, după părerea noastră, fără a se insista suficient asupra ei.

T. Oroveanu

T. OROVEANU

533.15

ASUPRA DIFUZIEI CONVECTIVE ÎN REGIM NEPERMANENT

Se studiază difuzia convectivă în scurgerea unidimensională a cărei viteză este variabilă în timp. Este propus un procedeu aproximativ de rezolvare a problemei, bazat pe utilizarea transformatelor integrale.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 3—15
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

H. PASCAL

532.546: 532.529.3

CURGEREA NESTAȚIONARĂ A FLUIDELOR ETEROGENE PRINTR-UN MEDIU POROS

În lucrare se studiază curgerea fluidelor eterogene, gaze-țiței, printr-un mediu poros în regim tranzitoriu. Se examinează cîteva probleme de hidrodinamică subterană care apar în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în regim de gaze dizolvate.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 33—52
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

ADRIANA NĂSTASE

533.6.011.5: 533.691.11

ASUPRA PROBLEMEI DE REZISTENȚĂ MINIMĂ A ARIPII TRAPEZOIDALE SIMETRICE, DE GROSIME SIMETRICĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

În prezenta lucrare se determină forma suprafeței unei aripi trapezoidale simetrice, de grosime simetrică, avînd rezistența minimă la înaintare prevăzută și cu o muchie de separație, pentru care sînt impuse: proiecția în plan a aripii (un trapez isoscel) și a muchiei, volumul aripii și condițiile ca aripa să fie închisă în lungul bordurilor sale de atac laterale, frontal și de fugă și în lungul muchiei sale de separație.
Prin utilizarea metodei variaționale, problema de extremum propusă se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 17—31
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

DAN MATEESCU

533.695.6: 533.691.11

ARIPI CRUCIFORME ȘI AMPENAJE PREVĂZUTE CU FUZELAJ CONIC ÎN REGIM SUPERSONIC

II. *Mișcări conice de ordin superior*

Lucrarea tratează mișcările conice de ordin superior în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj și ampenaj-fuzelaj avînd incidențele sau pantele date sub forma unor sume de polinoame omogene de diferite ordine.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 53—74
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

ION SETEANU 532.546

DEZLOCUIREA PLANĂ NEGRAVITAȚIONALĂ A DOUĂ FLUIDE NEMISCIBILE ÎNTR-UN MEDIU POROS (II). PROCEDEUL „FIVE-SPOT"

Se aplică metoda de calcul aproximativ a procesului de dezlocuire expusă în partea anterioară la cazul unei distribuții de sonde de injecție și de extracție care posedă o dublă periodicitate (procedeul „five-spot"). Se determină frontul de dezlocuire, liniile de curent și curbele izosaturație ale procesului nestaționar.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 75—94
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

AL. MARINESCU, L. BEINER, MARIA GAVRILĂ 521.1

STUDIUL MANEVREI OPTIME DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL ÎN FAZA DE APROPIERE PE ORBITE ELIPTICE ȘI HIPERBOLICE (TEORIA NELINIARĂ)

După ce se stabilesc ecuațiile generale ale mișcării relative a aparatului urmăritor față de un sistem orbital legat de țintă, se formulează problema variațională a manevrei și se deduc ecuațiile diferențiale ale extremalelor, care apoi se integrează pentru orbite eliptice și hiperbolice, obținîndu-se legile optime de variație a parametrilor mișcării aparatului urmăritor în faza de apropiere.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 111—135
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

T. OROVEANU, I. SPULBER 532.546

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR PROBLEME DE SCURGERE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ A LICHIDELOR PRIN MEDII POROASE

Se studiază scurgerea cu suprafață liberă printr-un mediu cu porozitatea și coeficientul de filtrare variabile. Sînt date soluții exacte pentru scurgerea staționară și soluții aproximative pentru scurgerea nestaționară plană și radial-simetrică. Metoda propusă este aplicată, prin particularizare, și la studiul scurgerii cu suprafață liberă prin medii poroase omogene.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 95—110
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

S. RĂUTU și VENTURIA CHIROIU 624.07: 539.374

UNELE PROBLEME ALE CALCULULUI STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE ÎN DOMENIUL PLASTIC

Se dau metode de lucru simplificate privind calculul capacității portante a structurilor static nedeterminate, renunțînd la sistemul de bază.
Se prezintă, de asemenea, calculul structurilor de greutate minimă la sarcina de rupere, sub acțiunea a *S* tipuri de încărcări exterioare (ținîndu-se seama de adaptarea structurii), utilizînd mijloacele de programare liniară.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 137—152
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

L. LIBRESCU 539.312

STABILITATEA PANOURILOR ELASTIC-NELINIARE PLASATE ÎNTR-UN CURENT DE GAZ SUPERSONIC

Luînd în considerare studiul stabilităţii aeroelastice a efectului neliniarităţilor de natură fizică, se determină condiţiile ce definesc caracterul ,,periculos'' şi ,,nepericulos'' al frontierei critice de flutter şi, implicit, caracterul influenţei pe care neliniarităţile de natură fizică îl au în acest sens.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 153—167
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

A. PAVEL 621.643.411

LEGILE DE VARIAŢIE A PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL ÎMBINĂRILOR PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE (II)

Se prezintă o metodă analitică de calcul a presiunii instantanee de contact, elaborată pentru îmbinările prin mandrinare lisă folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activităţii industriale.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 183—194
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

EUGEN DÎMBOIU 531.1: 534: 620.179.1: 621.317.39

CONSIDERAŢII ASUPRA MĂSURĂRII FRECĂRII INTERNE ÎN SOLIDE

Se prezintă bazele teoretice ale diferitelor metode de măsurare a frecării interne în solide: metoda directă, metoda indirectă a vibraţiilor libere, metoda indirectă a vibraţiilor forţate (metoda rezonanţei) şi metodele indirecte cu impulsuri ultrasonice. La sfîrşit se dau rezultatele obţinute prin aplicarea metodei rezonanţei în cazul vibraţiilor forţate longitudinale asupra fontelor cenuşii şi se fac aprecieri asupra preciziei măsurărilor.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 169—182
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

CHR. PELECUDI, ANCA MATHEESCU 621.835

ANALIZA ARMONICĂ A LEGILOR DE MIŞCARE LA MECANISMELE CU CAME

Se calculează şi se interpretează comparativ coeficienţii Fourier pentru diversele legi de mişcare ale mecanismelor de distribuţie.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 195—209
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

VICTOR CALCAN, CORNELIA OBEJDEANU 678.1

MODIFICĂRILE DIMENSIONALE ŞI VARIAŢIA MASEI LA IMERSIUNEA ÎN APĂ ŞI ÎN ULEI A UNOR MATERIALE PLASTICE ARMATE DE TIP TEXTOLIT

Se prezintă rezultatele cercetărilor privind modificările dimensionale şi ale masei la imersiunea în apă distilată şi în ulei mineral 405 aditivat a textolitelor tip M şi E, de fabricaţie indigenă, şi dytron, de fabricaţie germană, relevîndu-se comportarea în funcţie de gradul de prelucrare mecanică a suprafeţelor epruvetelor, variaţia temperaturii mediului de absorbţie şi a timpului de imersiune.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 211—224
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 13

GH. VASILCA, VETURIA RASZILLIER 621.893: 539.62

UNELE EFECTE ALE FRECĂRII INTERMITENTE ÎN CAZUL CUPLURILOR DIN ALIAJE SIMILARE NEFEROASE

Se prezintă şi se interpretează rezultatele experimentale obţinute privind unele efecte ale proceselor de frecare staţionare şi intermitente asupra suprafeţelor de alunecare în cazurile cuplurilor similare din aliajele Y-Sn83 şi Bz14T. Se analizează aspectele termice diferite rezultate din acţiunea continuă sau discontinuă a frecării şi se discută efectele acestora asupra unor parametri ai suprafeţelor de alunecare. Diagrame de variaţie a forţei de frecare, precum şi fotografii reprezentînd modificările parametrilor suprafeţelor, întregesc lucrarea.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 241—249
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

A. ZAHARESCU 621.317.39
621.3.088.6

UTILIZAREA CORECŢIEI ELECTRICE PENTRU REDUCEREA ERORILOR DINAMICE ALE TRADUCTOARELOR DE MĂRIMI MECANICE

În lucrare sînt expuse diferite moduri de a pune problema corecţiei erorilor dinamice în cazul diferitelor traductoare, inclusiv cele neliniare şi cele cu constante repartizate, şi se prezintă circuitele electrice utilizate în acest scop. Sînt prezentate rezultate teoretice şi experimentale originale.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 225—240
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

V. N. CONSTANTINESCU, GH. MARIN 621.822

GRUP ELECTROGEN PE LAGĂRE CU AER

Se descrie construcţia unui grup electrogen compus dintr-un motor electric (7 kW, 1500 rot/min) şi un generator de curent alternativ (4 kVA) de construcţie obişnuită, la care rulmenţii au fost înlocuiţi prin lagăre cu aer radiale şi axiale, funcţionînd în regim autoportant.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 1, 1969, p. 251—262
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 2 1969

SUMAR

STUDII

Pag.

A. PETRE, Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante datorită efectelor combinate de rezistenţă la înaintare şi portanţă produse de vînt 267

VALERIU PETCU, Generalizarea teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat 289

A. PETRE şi V. COSAC, Vibraţiile verticale ale grinzilor pendulare luînd în considerare efectele de flambaj dinamic 309

LEON BEINER şi MARIA GAVRILĂ, O soluţie riguroasă în problema întîlnirii cu minimum de combustibil pe orbite circulare 325

AL. VAICUM, Modele reologice pentru calculul deformaţiilor pămînturilor saturate . . 339

ADRIANA NĂSTASE, Aripă delta de rezistenţă minimă în curent hipersonic moderat 349

IOAN DAVID, Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu limitat cu condiţii mixte pe contur 361

I. SETEANU, Mişcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu simplu conex nemărginit 369

PĂUN ANTONESCU, Contribuţii la sinteza cinematică a mecanismelor bielă-manivelă spaţiale 381

D. TUTUNARU, Mecanisme pentru conducerea rectiliniară a mişcării 393

N. I. MANOLESCU, Pentru adoptarea unui punct de vedere unitar în studiul analizei structurale a lanţurilor cinematice şi a mecanismelor 403

P. DODOC, Fenomene de rezonanţă la axele principale ale maşinilor-unelte şi influenţa lor asupra preciziei de prelucrare 427

MARTHA SĂLCUDEAN şi GH. MARIN, Verificarea experimentală a unei metode analitice de calcul a lagărelor circulare alimentate sub presiune 439

M. GR. NĂSTASE, Alegerea judicioasă a parametrilor de expunere în radiologia industrială 453

VASILE MARCU şi TRAIAN CIOBANU, Unele aplicaţii speciale ale metalizării prin pulverizare în Republica Socialistă România 463

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

ILIUC IVAN, Metode fizice şi electrice folosite în studiul frecării şi uzării 481

RECENZII 491

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 2 1969

SUMAR

STUDII

Pag.

A. PETRE, Divergența aeroelastică la suprafețe portante dotate cu elemente combinate de rezistență la înaintare și portanță proprie de vînt 257

VALERIU TEȚCU, Generalizarea teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat 259

A. PETRE și V. COSAC, Vibrațiile verticale ale grinzilor pendulare luînd în considerare efectele de tiranți dinamici 309

LEON BEȘNER și MARIA CAVRILĂ, O soluție rigurosă în problema înfășurii cu minimum de combustibil pe orbite circulare 325

AL. VALCUM, Modele reologice pentru calculul deformațiilor plăcilor subțiri de rezistență la întindere 339

ADRIANA NĂSTASE, Arhipelag delta de rezistență minimă în curent bipersonic moderat 349

IOAN DAVID, Asupra mișcării apelor arteziene într-un domeniu limitat cu condiții mixte pe contur 361

I. ȘTEFĂNEL, Mișcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu simplu conex mărginit 369

PĂUN ANTONESCU, Contribuții la sinteza cinematică a mecanismelor bielă-manivelă spațiale 381

D. TUTUNARU, Mecanisme pentru conducerea rectilinie a mișcării 393

N. I. MANOLESCU, Pentru adoptarea unui punct de vedere unitar în studiul analizei structurale a lanțurilor cinematice și a mecanismelor 403

P. DODOC, Fenomene de rezonanță în axele principale ale mașinilor-unelte și influența lor asupra preciziei de prelucrare 427

MARTHA SĂLCUDEAN și GH. MARIN, Verificarea experimentală a unei metode analitice de calcul a ingrănajelor circulare alimentate sub presiune 439

M. GH. NĂSTASE, Alegerea judicioasă a parametrilor de exploatare în radiologia industrială 453

VASILE MARCU și TRAIAN CIOBANU, Unele aplicații speciale ale metalizării prin pulverizare în Republica Socialistă România 463

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

ILIJOC IVAN, Metode fizice și electrice folosite în studiul frecării și uzării 481

RECENZII 489

DIVERGENȚA AEROELASTICĂ LA SUPRAFEȚE PORTANTE DATORITĂ EFECTELOR COMBINATE DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚĂ PRODUSE DE VÎNT

de A. PETRE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

Se prezintă calculul vitezei critice de divergență pentru cazul structurilor în consolă și al structurilor rezemate la capete. Ecuațiile integro-diferențiale care se obțin sînt soluționate, pe de o parte, pe cale aproximativă pentru a se putea obține formule de calcul simplificate funcție de caracteristicile elastice și aerodinamice ale structurii, iar pe de altă parte este dat un algoritm de calcul care permite soluționarea problemei cu mașinile electronice de calcul.

Domeniul de stabilitate este dat funcție de parametrii adimensionali. Rezultatele obținute arată că acest domeniu este redus în mod apreciabil ca urmare a deformațiilor de încovoiere și a rezistenței la înaintare, neglijate pînă în prezent.

În general este cunoscut efectul vîntului cînd acesta acționează asupra unui element de construcție. Dacă însă aceste elemente de construcție permit deformații elastice, pot apărea fenomene aeroelastice, care, în anumite situații, pot deveni periculoase. Aceste fenomene pot apărea, în afară de cazul suprafețelor portante ale construcțiilor aeronautice sau ale navelor cu aripi subacvatice, și în cazul învelitorilor în consolă sau pe două reazeme de deschideri importante, cum sînt la peroane, tribune etc. Dintre fenomenele aeroelastice staționare care pot interveni, unul dintre cele mai importante este fenomenul de divergență, care reprezintă un fenomen de limită de stabilitate și se produce pentru un element dat la o anumită viteză a vîntului.

Structura elastică ce se ia în considerare se presupune a avea rigiditățile la încovoiere față de cele două direcții principale ale secțiunii transversale, mult diferite. Se presupune astfel că rigiditatea la încovoiere într-un plan orizontal este mult mai mare decît cea la încovoiere în plan vertical. Structura astfel considerată se presupune suficient de lungă pentru a se putea vorbi de o încovoiere sau de o răsucire de ansamblu a ei, iar ca mod de rezemare ea se presupune în consolă sau simplu rezemată la capete.

Pentru a se studia fenomenul de divergență aeroelastică se consideră o mică deformație inițială fie de încovoiere, fie de răsucire. Ca urmare a

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969 P. 267–288

deformației datorită încovoierii, rezistența la înaintare produce o solicitare de răsucire. Dacă suprafața portantă în poziție inițială este la incidență nulă, în urma deformației produse de răsucire se produce o portanță. Portanța produce la rîndul ei o solicitare de încovoiere, combinată eventual cu una de răsucire. Rezultă astfel că, în urma deformațiilor de încovoiere și de răsucire, se produc solicitări suplimentare, de asemenea de răsucire și de încovoiere. Deoarece forțele suplimentare care se produc ca urmare unei deformații inițiale sînt de natură aerodinamică, ele vor depinde în principal de viteza vîntului.

Pentru viteze mici ale vîntului, forțele suplimentare produse ca urmare unei deformații inițiale sînt mai mici decît cele necesare menținerii deformației respective. În aceste condiții, deformația inițială se va anula o dată cu forțele suplimentare produse. Suprafața portantă se va găsi în echilibru stabil și valoarea forțelor aerodinamice va fi bine precizată. Dacă incidența aerodinamică de montaj este nulă, portanța va fi nulă, iar rezistența la înaintare va da o componentă de sarcină corespunzătoare aceleiași structuri, însă ca și cum ar fi rigidă.

Pentru viteze mari ale vîntului, forțele suplimentare produse, ca urmare unei deformații inițiale, pot fi mai mari decît cele necesare producerii acelei deformații. Condițiile de echilibru cer ca deformațiile să crească pentru a putea prelua sub formă de forțe elastice, forțele aerodinamice care se produc. Datorită deformațiilor, însă, forțele aerodinamice cresc și fenomenul devine divergent, continuînd teoretic pînă la rupere.

Există o viteză critică a vîntului, denumită viteză critică de divergență, pentru care forțele aerodinamice care se produc ca urmare a deformațiilor inițiale sînt cele necesare pentru a produce deformațiile inițiale considerate. În această situație, în cazul deformațiilor mici, suprafața portantă se găsește în echilibru labil, lucrurile petrecîndu-se ca și cum această suprafață portantă și-ar fi pierdut rigiditatea la încovoiere și la răsucire.

Calculul acestei situații critice se va face pornind de la ecuațiile diferențiale de încovoiere în plan vertical și de răsucire.

Ca sistem de axe se alege Oy în lungul suprafeței portante, iar axele Ox și Oz astfel încît să coincidă cu direcțiile principale a secțiunii transversale, axa Oz fiind aproximativ verticală. Acest sistem de axe privesc suprafața portantă nedeformată.

Ca urmare a deformațiilor, secțiunea transversală va avea o deplasare aproximativ verticală w și o rotire φ. Sistemul de axe legat de suprafața portantă deformată se va nota $O\xi\eta\zeta$, iar orientarea lui va depinde de secțiunea considerată.

Pentru a se putea scrie ecuațiile de deformație este necesar a se stabili solicitarea raportată la sistemul de axe legat de suprafața portantă deformată $O\xi\eta\zeta$, respectiv față de axa elastică a structurii deformate și la axele principale de inerție a secțiunii transversale în aceleași condiții.

Momentele încovoietoare față de acest nou sistem de axe funcție de momentele încovoietoare față de vechiul sistem se vor scrie

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_x \cos\varphi + M_z \sin\varphi, \\ M_\zeta &= M_x \sin\varphi - M_z \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Momentul M_η, dirijat în direcția axei η, va reprezenta un moment de răsucire și se obține observînd că unghiul dintre axele Oy și $O\eta$ este $\frac{dw}{dy}$. Acest moment va avea expresia

$$M_\eta = M_y \cos\frac{dw}{dy} + M_z \sin\frac{dw}{dy}. \tag{2}$$

Ecuațiile generale de deformație la încovoiere și la răsucire se vor scrie respectiv

$$\begin{aligned} EI_\zeta \frac{d^2\xi}{dy^2} &= -M_\zeta, \\ EI_\xi \frac{d^2\zeta}{dy^2} &= -M_\xi, \\ GI_d \frac{d\varphi}{dy} &= M_\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Observînd că, în conformitate cu ipoteza menționată inițial, rigiditatea la încovoiere EI_ζ este mult mai mare decît rigiditatea la încovoiere EI_ξ, se vor putea neglija efectele deplasărilor ξ. De asemenea se observă că deplasarea ζ este foarte puțin diferită de deplasarea w, astfel încît se va putea scrie

$$\begin{aligned} EI_\xi \frac{d^2w}{dy^2} &= -M_\xi, \\ GI_d \frac{d\varphi}{dy} &= M_\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Ținînd seama de expresiile (1), acest sistem devine

$$\begin{aligned} EI_\xi \frac{d^2w}{dy^2} &= -M_x \cos\varphi - M_z \sin\varphi, \\ GI_d \frac{d\varphi}{dy} &= M_y \cos\frac{dw}{dy} + M_z \sin\frac{dw}{dy}. \end{aligned} \tag{5}$$

Observînd că deformațiile sînt mici, se va putea considera

$$\begin{aligned} \cos\varphi &\approx \cos\frac{dw}{xy} \approx 1, \\ \sin\varphi &\approx \varphi, \\ \sin\frac{dw}{xy} &\approx \frac{dw}{xy}, \end{aligned} \tag{6}$$

astfel încît sistemul de mai sus se poate scrie

$$EI_\xi \frac{d^2w}{dy^2} = - M_x - M_z \varphi,$$
$$GI_d \frac{d\varphi}{dy} = M_y + M_z \frac{dw}{dy}. \tag{7}$$

Calculul momentelor încovoietoare şi de răsucire faţă de sistemul iniţial de axe $Oxyz$ se va face pornind de la sarcinile şi momentele repartizate în lungul suprafeţei portante. Deoarece între deplasările w şi rotirile φ produse respectiv prin solicitările de încovoiere şi răsucire, pe de o parte, şi sarcinile şi momentele repartizate p şi m_t, pe de altă parte, se pot scrie cu ajutorul funcţiilor Green $G(y, \eta)$ relaţiile

$$w = \int_0^l G_w(y, \eta)\, p_w(\eta)\, d\eta\,; \quad u = \int_0^l G_u(y, \eta)\, p_u(\eta)\, d\eta,$$
$$\varphi = \int_0^l G_{\varphi p}(y, \eta)\, p(\eta)\, d\eta + \int_0^l G_{\varphi m}(y, \eta)\, m_t(\eta)\, d\eta, \tag{8}$$

rezultă că expresiile momentelor încovoietoare şi a celui de răsucire sînt următoarele:

$$M_x = EI_\xi \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\int_0^l G_w(y, \eta)\, p_w(\eta)\, d\eta\right],$$
$$M_z = EI_\zeta \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\int_0^l G_u(y, \eta)\, p_u(\eta)\, d\eta\right], \tag{9}$$
$$M_y = GI_d \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^l G_{\varphi p}(y, \eta)\, p(\eta)\, d\eta + \int_0^l G_{\varphi m}(y, \eta)\, m(\eta)\, d\eta\right].$$

Ţinînd seama de discontinuitatea funcţiei Green, prin cîteva calcule elementare expresiile de mai sus devin

$$M_x = EI_\xi \frac{\partial^2 G_w(y, \eta)}{y^2} p_w(\eta) d\eta,$$
$$M_z = EI_\zeta \frac{\partial^2 G_u(y, \eta)}{\partial y^2} p_u(\eta) d\eta, \tag{10}$$
$$M_y = GI_d \int_0^l \frac{\partial G_{\varphi m}(y, \eta)}{\partial y} m_t(\eta) d\eta,$$

astfel încît sistemul (7) se poate scrie

$$\frac{d^2w}{dy^2} = -\int_0^l \frac{\partial^2 G_w(y, \eta)}{\partial y^2} p_w(\eta)\, d\eta - \frac{EI_\zeta}{EI_\xi} \frac{\partial^2 G_u(y, \eta)}{\partial y^2} p_u(\eta) d\eta,$$
$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_0^l \frac{\partial G_\varphi(y, \eta)}{\partial y} m_t(\eta)\, d\eta + \frac{EI_\zeta}{GI_d} \frac{dw}{dy} \int \frac{\partial^2 G_u(y, \eta)}{\partial y^2} p_u(\eta) d\eta. \tag{11}$$

Sarcinile și momentele repartizate se datoresc forțelor aerodinamice, iar expresiile lor pot fi scrise

$$p_w(\eta) = q\,c(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta),$$

$$p_u(\eta) = qc(\eta)\,C_x, \tag{12}$$

$$m_t(\eta) = qc(\eta)\left\{e(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta) + C_x[e(\eta)\varphi(\eta)+w(\eta)-w(y)]\right\}.$$

În aceste expresii q reprezintă presiunea dinamică produsă de vînt, respectiv $q = \frac{\rho}{2} v^2$ (unde v este viteza vîntului și ρ masa specifică a aerului), c coarda structurii, e distanța dintre centrul de presiune al forțelor aerodinamice și axa elastică a structurii iar C_z și C_x respectiv coeficienții unitari de portanță și de rezistență la înaintare. În expresia momentului de răsucire s-a ținut seama că o forță elementară produsă de rezistența la înaintare situată într-o secțiune η produce față de secțiunea y un moment de răsucire în care distanța între linia de acțiune a forței și axa elastică depinde și de diferența deplasărilor dintre cele două secțiuni menționate.

Cu aceste notații, sistemul (11) se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}y^2} = -\int_0^y \frac{\partial^2 G_w(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,qc(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta - \frac{EI_\zeta}{EI_\xi}\int_0^y \frac{\partial^2 G_u(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,q\,c\,(\eta)C_x\mathrm{d}\eta +$$

$$+\int_y^l \frac{\partial^2 G_w(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,qc(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta - \frac{EI_\zeta}{EI_\xi}\int_y^l \frac{\partial G_u(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,qc(\eta)\,C_x\,\mathrm{d}\eta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \int_0^y \frac{\partial G_\varphi(y,\,\eta)}{\partial y}\,qc\,(\eta)\left\{e(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\varphi(\eta)+C_x[e\,(\eta)\,\varphi(\eta)+w\,(\eta)-w(y)]\right\}\mathrm{d}\eta +$$

$$+\int_y^l \frac{\partial G_\varphi(y,\,\eta)}{\partial y}\,qc\,(\eta)\left\{e\,(\eta)\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\varphi\,(\eta) + C_x\times[e(\eta)\varphi(\eta)+w(\eta)-w(y)]\mathrm{d}\eta +\right.$$

$$\left. + \frac{EI_\zeta}{GI_d}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\left[\int_0^y \frac{\partial^2 G_u(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,qc(\eta)C_x\mathrm{d}\eta + \int_y^l \frac{\partial^2 G_u(y,\,\eta)}{\partial y^2}\,qc(\eta)C_x\,\mathrm{d}\eta\right]\right. . \tag{13}$$

Valoarea presiunii dinamice q, care conduce pentru acest sistem la soluții neidentic nule, va fi presiunea critică de divergență, iar viteza corespunzătoare este viteza critică de divergență. Pentru o soluționare completă este necesar a se calcula funcțiile Green $G_w(y,\,\eta)$, $G_u(y,\,\eta)$ pentru încovoiere și funcția Green $G_\varphi(y,\,\eta)$ pentru răsucire. Expresiile acestor funcții Green depind de condițiile de fixare ale structurilor portante corespunzătoare.

În cele ce urmează se vor considera două tipuri de structuri, și anume structuri rezemate la capete și structuri în consolă.

Funcțiile Green pentru încovoiere se pot obține pornind de la dezvoltarea Taylor:

$$w = w\,(0) + \frac{y}{1!}w'(0) - \frac{y^2}{2!}\,\frac{M(0)}{EI_\xi} - \frac{y^3}{3!}\,\frac{T(0)}{EI_\xi}\ldots, \tag{14}$$

unde $M(0)$ şi $T(0)$ reprezintă, respectiv, momentul şi forţa tăietoare, iar $w(0)$ şi $w'(0)$ sînt, respectiv, săgeata şi rotirea, toate aceste mărimi în origine. Pentru cazul unei structuri încastrate la un capăt şi libere la celălalt, luînd originea în încastrare şi considerînd o forţă unitară aplicată în secţiunea situată la distanţă η de origine, funcţia Green corespunzătoare se va scrie în cazul unei rigidităţi constante sub forma

$$G(y, \eta) = \frac{y^2}{2}\frac{\eta}{EI} - \frac{y^3}{3!EI}$$

pentru cazul $y < \eta$, respectiv sub forma

$$G(y, \eta) = \frac{y^2}{2}\frac{y}{EI} - \frac{y^3}{3!EI} + \frac{(y-\eta)^3}{3!EI}$$

dacă $\eta < y$, astfel încît această funcţie devine

$$G_w(y, \eta) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{GEI}(3\eta - y), & \text{pentru } y \leqslant \eta, \\ \dfrac{\eta^2}{GEI}(3y - \eta), & \text{pentru } \eta \leqslant y. \end{cases} \tag{15}$$

În această expresie a funcţiei Green nu s-a specificat indicele rigidităţii la încovoiere, deoarece expresia este valabilă pentru ambele direcţii principale de inerţie a secţiunii transversale.

Dacă în loc de o forţă unitară se consideră că pe structură acţionează o forţă elementară provenită din sarcina repartizată $p(\eta)$, a cărei valoare este $p(\eta)\,d\eta$, săgeata va avea expresia (8), care, în cazul considerat, va fi

$$w(y) = \int_0^y \frac{\eta^2}{6EI}(3y - \eta)\,d\eta + \int_y \frac{y^2}{6EI}(3\eta - y)d\eta, \tag{16}$$

iar expresia momentelor încovoietoare corespunzătoare primelor două relaţii (9) este

$$M = -\int_0^l EI\,\frac{\partial^2 G(y, \eta)}{\partial y^2}\,p(\eta)\,d\eta, \tag{17}$$

unde

$$-EI\,\frac{\partial^2 G(y, \eta)}{\partial y^2} = \begin{cases} y - \eta, & \text{pentru } y \leqslant \eta, \\ 0, & \text{pentru } \eta \leqslant y. \end{cases}$$

Calculul funcţiei Green în aceleaşi condiţii de rezemare, însă pentru structuri de rigiditate valabilă, se face pornind de la dezvoltarea Taylor sub forma

$$w = w(0) + \frac{y}{1}w'(0) - \int_0^y \frac{M(\bar{\eta})}{EI(\bar{\eta})}(y, \bar{\eta})\,d\bar{\eta}. \tag{18}$$

Introducînd aici sub integrală expresia (17) a momentului încovoietor, funcția Green se calculează în modul arătat mai sus, și pentru cazul considerat rezultă

$$G_w(y, \eta) = \begin{cases} \int_0^y \frac{(y-\bar{\eta})(\eta-\bar{\eta})}{EI_\xi(\bar{\eta})} d\bar{\eta}, & \text{pentru } \eta \leqslant y, \\ \int_0^\eta \frac{(y-\bar{\eta})(\eta-\bar{\eta})}{EI_\xi(\bar{\eta})} d\bar{\eta}, & \text{pentru } y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{19}$$

Funcția Green $G_\eta(y, \eta)$ pentru deformațiile din planul ξOy are o expresie asemănătoare, care se obține înlocuind în (19) rigiditatea EI_ξ prin EI_ζ.

Pentru suprafețe portante rezemate la capete, de lungime l în cazul unei structuri de rigiditate constantă, pornind de asemenea de la dezvoltarea (14) pentru o forță unitară aplicată în secțiunea η, se obține

$$w = y\,w'(0) - \frac{y^3}{6\,EI_\xi}\,\frac{l-\eta}{l}. \tag{20}$$

În acest caz, rotirea pe reazemul din stînga, considerat origine, nu este nulă. Pentru determinarea acestei rotiri se consideră regiunea $y \geqslant \eta$, pentru care

$$w = y\,w'(0) - \frac{y^3}{6\,EI_\xi}\,\frac{l-\eta}{l} + \frac{(y-\eta)^3}{6\,EI_\xi}, \tag{21}$$

de unde, introducînd $y = l$, se obține

$$w'(0) = \frac{2l^2\eta - 3\eta^2 l + \eta^3}{6\,l\,EI_\xi}, \tag{22}$$

astfel încît funcția Green pentru cazul considerat devine

$$G_w(y, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{6\,l\,EI_\xi}[2l^2y\eta - 3\,ly^2\eta + y^3\eta + y\eta^3 - l\eta^3], & \text{pentru } \eta \leqslant y, \\ \frac{1}{6\,l\,EI_\xi}[2\,l^2y\eta - 3l\eta^2y + y^3\eta + y\eta^3 - ly^3], & \text{pentru } y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{23}$$

Expresia momentelor încovoietoare scrise prin intermediul funcțiilor Green va fi

$$M_\xi = -\int_0^l EI_\xi \frac{\partial^2 G(y, \eta)}{\partial y^2}\, q(\eta)d\eta, \text{ unde}$$

$$-EI_\xi \frac{\partial^2 G(y,\eta)}{\partial y^2} = \begin{cases} \eta\left(1 - \frac{y}{l}\right), & \text{pentru } \eta \leqslant y, \\ y\left(1 - \frac{\eta}{l}\right), & \text{pentru } y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{24}$$

Calculul funcției Green pentru structuri rezemate la capete, însă de secțiune variabilă, se va face, de asemenea, pornind de la dezvoltarea (18). Introducînd aci expresia momentului sub forma (24), pentru regiunea $\eta \leqslant y$ se obține

$$w(y) = y\,w'(0) - \int_0^{\eta} (y-\bar{\eta})\bar{\eta}\,\frac{l-\eta}{lEI(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta} - \int_{\eta}^{y} (y-\bar{\eta})\eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)\frac{1}{EI(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta}. \quad (25)$$

Punînd condiția

$$w(l) = 0, \quad (26)$$

rezultă

$$w'(0) = \int_0^{\eta} (y-\bar{\eta})\bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\frac{1}{lEI(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta} + \int_{\eta}^{y} (y-\bar{\eta})\eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)\frac{1}{lEI(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta}. \quad (27)$$

Odată determinată expresia rotirii pe reazemul de origine, funcția Green se poate calcula cu ajutorul expresiei (25) și devine

$$G_w(y,\eta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y} (y-\bar{\eta})\eta\left(\frac{\bar{\eta}}{l}-1\right)\frac{1}{EI_{\xi}(\xi)}\,d\bar{\eta} - y\int_0^{\eta} (y-\bar{\eta})\bar{\eta}\left(\frac{y}{l}-1\right)\frac{1}{lEI(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta} - \\ \quad - y\displaystyle\int_{\eta}^{l} (y-\bar{\eta})\eta\left(\frac{\bar{\eta}}{l}-1\right)\frac{d\bar{\eta}}{lEI(\bar{\eta})} \qquad \text{pentru } y \leqslant \eta, \\ \displaystyle\int_0^{\eta} (y-\bar{\eta})\bar{\eta}\left(\frac{\eta}{l}-1\right)\frac{d\bar{\eta}}{EI_{\xi}(\eta)} + \int_{\eta}^{y} (y-\bar{\eta})\eta\left(\frac{\bar{\eta}}{l}-1\right)\frac{d\bar{\eta}}{lEI(\bar{\eta})} - \\ \quad - y\displaystyle\int_0^{y} (y-\bar{\eta})\bar{\eta}\left(\frac{\eta}{l}-1\right)\frac{d\bar{\eta}}{lEI_{\xi}(\eta)}\,d\bar{\eta} - y\int_{\eta}^{l} (y-\bar{\eta})\eta\left(\frac{\bar{\eta}}{l}-1\right)\frac{d\bar{\eta}}{lEI_{\xi}(\eta)} \\ \qquad\qquad \text{pentru } \eta \leqslant y. \end{cases} \quad (28)$$

Funcția Green $G_{\xi}(y,\eta)$ pentru deformațiile din planul Oy are o expresie asemănătoare, care se obține înlocuind în (28) rigiditatea EI_{ξ} prin EI_{ζ}.

În cazul răsucirii pentru structuri de secțiune constantă încastrate într-un capăt și libere la celălalt, funcția Green $G_{\varphi}(y,\eta)$ se obține pornind de la relația

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{M_t}{GI_d}$$

calculînd deformațiile pentru un cuplu unitar așezat la distanță η de origine, iar funcția căutată va fi

$$G_{\varphi}(y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{GI_d}, & \eta \leqslant y, \\ \dfrac{y}{GI_d}, & y \leqslant \eta. \end{cases} \quad (29)$$

Expresia momentului de răsucire scrisă prin intermediul funcției Green va fi

$$M_t = \int_0^{l} GI_d \frac{dG_{\varphi}(y,\eta)}{dy}\, m_t\, d\eta, \quad (30)$$

unde

$$GI_a \frac{dG_\varphi(y, \eta)}{dy} = \begin{cases} 0, & \eta \leqslant y, \\ 1, & y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{31}$$

Pentru structuri de rigiditate variabilă în lungul ei se va porni de la dezvoltarea

$$\varphi(y) = \varphi(0) + \int_0^y \frac{M_t(\bar{\eta})}{GI_a(\bar{\eta})} d\bar{\eta}, \tag{32}$$

în care, introducînd (29), se obține

$$G(y, \eta) = \begin{cases} \int_0^\eta \frac{d\bar{\eta}}{GI_a(\bar{\eta})}, & \eta \leqslant y, \\ \int_0^y \frac{d\bar{y}}{GI_a(\bar{\eta})}, & y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{33}$$

Pentru structuri de secțiune constantă împiedicate să se rotească la ambele capete, funcția Green $G_\varphi(y,)$ se obține de asemenea calculînd deformațiile pentru un cuplu unitar așezat la distanță η de origine. Expresia funcției Green va fi, în consecință,

$$G(y, \eta) = \begin{cases} \frac{y-l}{GI_a} \cdot \frac{\eta}{l}, & \text{pentru } \eta \leqslant y, \\ \frac{\eta-l}{GI_a} \frac{y}{l}, & \text{pentru } y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{34}$$

Expresia momentului de răsucire scrisă prin intermediul funcției Green va fi, de asemenea,

$$M_t = \int_0^l GI_a \frac{dG_\varphi(y, \eta)}{dy} m_t d\eta,$$

unde

$$GI_a \frac{dG_\varphi(y, \eta)}{dy} = \begin{cases} \frac{\eta}{l}, & \text{pentru } \eta \leqslant y, \\ \frac{\eta-l}{l}, & \text{pentru } y \leqslant \eta. \end{cases} \tag{35}$$

Pentru structuri de rigiditate la răsucire variabilă în lungul ei, funcția Green se obține pornind de la dezvoltarea (32), de unde, ținînd seama de (30) și (35), rezultă

$$\varphi = \int_0^y \frac{\eta - l}{l GI_a(\bar{\eta})} d\bar{\eta},$$

pentru $y \leqslant \eta$ și

$$\varphi = \int_0^\eta \frac{\eta - l}{l GI_a(\bar{\eta})} d\bar{\eta} + \int_\eta^y \frac{\eta}{l GI_a(\bar{\eta})} d\bar{\eta},$$

pentru $\eta \leqslant y$, respectiv

$$\varphi = \begin{cases} \int_0^{\nu} \frac{\eta - l}{l\, GI_d(\bar{\eta})}\, d\bar{\eta}, & \text{pentru } y \leqslant \eta, \\ \frac{y}{l}\int_0^{\nu} \frac{d\bar{\eta}}{GI_d(\bar{\eta})} - \int_0^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{GI_d(\bar{\eta})}, & \text{pentru } \eta \leqslant y. \end{cases} \tag{36}$$

Cunoscînd funcţiile Green şi derivatele lor, soluţionarea problemei se va face pornind de la sistemul (13). Soluţionarea se va face pentru cele două tipuri de probleme menţionate, respectiv pentru structuri rezemate la capete şi structuri în consolă.

STRUCTURI REZEMATE LA CAPETE

Analizînd ecuaţiile (13), se observă că, în general, termenii care intervin nu au aceeaşi importanţă. Astfel, în prima ecuaţie se pot neglija termenii care conţin pe C_x faţă de termenii care conţin pe $\frac{dC_z}{d_i}$. În a doua ecuaţie se poate neglija în expresia momentului de răsucire repartizat, produs ca urmare a excentricităţii e, efectul rezistenţei la înaintare faţă de cel al portanţei, respectiv se poate neglija termenul $e\, C_x \varphi$ faţă de termenul $e \frac{dC_z}{di}\varphi$.

Cu aceste observaţii, ţinînd seama de (24) şi (35), sistemul (13) se poate scrie

$$\begin{aligned} EI_\xi \frac{d^2w}{dy^2} &= -\int_0^{\nu} \eta\left(1-\frac{y}{l}\right) qc \frac{dC_z}{di}\varphi(\eta)d\eta + \int_{\nu}^{l} y\left(1-\frac{\eta}{l}\right) qc \frac{dC_z}{di}\varphi(\eta)\, d\eta, \\ GI_d \frac{d\varphi}{dy} &= -\int_0^{\nu} \eta qce \frac{dC_z}{di}\varphi\, d\eta - \int_{\nu}^{l} (\eta - l)\, qce \frac{dC_z}{di}\varphi d\eta - \\ &- \int_0^{\nu} \eta qcC_x[w(\eta) - w(y)]\, d\eta - \int_{\nu}^{l} (\eta - l) qcC_x[w(\eta) - w(y)]d\eta + \\ &+ \frac{dw}{dy}\int_0^{\nu} \eta\left(1-\frac{y}{l}\right) qc\, C_x d\eta + \frac{dw}{dy}\int_{\nu}^{l} y\left(1-\frac{\eta}{l}\right) qc\, C_x\, d\eta. \end{aligned} \tag{37}$$

Dacă se derivă ultima ecuaţie în raport cu y, rezultă

$$\frac{d}{dy}\left(GI_d \frac{d\varphi}{dy}\right) = -qce \frac{dC_z}{di}\varphi + \frac{d^2w}{dy^2} \times$$

$$\times \left[\int_0^{\nu} \eta\left(1-\frac{y}{l}\right) qc\, C_x\, d\eta + \int_{\nu}^{l} y\left(1-\frac{\eta}{l}\right) qc\, C_x\, d\eta\right],$$

astfel încît între cele două ecuații ale sistemului (37) se poate elimina funcția w, obținîndu-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right) = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi - \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \right.$$

$$\left. + \int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\cdot\left[\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\eta + \int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\eta\right]. \tag{38}$$

Determinarea vitezei critice de divergență înseamnă determinarea valorilor proprii a acestei ecuații integro-diferențiale cu coeficienți variabili. Ecuația (38) poate fi pusă sub formă de ecuație integrală cu ajutorul funcției Green (36) pentru structuri de secțiune variabilă sau cu ajutorul funcției Green (34) pentru structuri de rigiditate aproximativ constantă. Pentru structuri de secțiune variabilă, ecuația (38) sub formă de ecuație integrală devine

$$\varphi = \int_0^y\left[\int_0^y \frac{\eta - l}{lGI_a(\bar{\eta})}\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\left\{qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta) + \right.$$

$$+ \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \int_y^l\left[\frac{\eta}{l}\int_0^y \frac{\mathrm{d}\bar{\eta}}{GI_a(\bar{\eta})} - \int_0^\eta \frac{\mathrm{d}\bar{\eta}}{GI_a(\bar{\eta})}\right]\left\{qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\eta) + \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\times\right.\right.$$

$$\times qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta}\Big]\times$$

$$\left.\left.\times\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qcC_z\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta. \tag{39}$$

În cazul structurilor de secțiune aproximativ constantă, ecuația (38) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{qce}{GI_a}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi - \frac{q^2c^2C_x}{GI_aEI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{yl-y^2}{2}\times$$

$$\times\left[\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]. \tag{40}$$

Această ecuație se poate pune sub formă integrală, utilizînd funcția Green (34), și va fi

$$\varphi = \int_0^y \frac{(l-y)}{GI_d}\frac{\eta}{l}\left\{\frac{qce}{GI_d}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi + \frac{q^2c^2C_x}{GI_dEI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{\eta l-\eta^2}{2}\times\right.$$
$$\times\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{y}{l}\right)\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\Bigg\}\mathrm{d}\eta +$$
$$+\int_y^l \frac{(l-\eta)}{GI_d}\frac{y}{l}\left\{\frac{qce}{GI_d}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi + \frac{q^2c^2C_x}{CI_dEI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{\eta l-\eta^2}{2}\times\right. \tag{41}$$
$$\left.\times\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta.$$

În cele ce urmează, soluționarea problemei se va face exemplificată pentru cazul structurilor de secțiune aproximativ constantă prin metode care pot fi ușor aplicate în cazul structurilor de secțiune variabilă.

Pentru ușurința soluționării numerice, intervalul de definiție se va schimba de la $\{0, l\}$ la $\{0, 1\}$, înlocuind variabila y prin raportul $\frac{y}{l}$.

Notînd

$$\frac{qce}{GI_d}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}l^2 = a; \qquad \frac{q^2c^2C_x}{GI_dEI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}l^6 = b, \tag{42}$$

cuațiile (40) și (41) devin, respectiv,

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} + a\varphi + b(y-y^2)\left[\int_0^y \eta(1-y)\,\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta + \int_y^1 y(1-\eta)\,\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right] = 0 \tag{43}$$

și

$$\varphi = \int_0^y (1-y)\eta\left\{a\varphi + b(\eta-\eta^2)\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\,(1-\eta)\,\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_y^1 \eta(1-\bar{\eta})\,\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta})\right]\right\}\mathrm{d}\eta +$$
$$+\int_y^1 (1-\eta)\,y\left\{a\varphi + b(\eta-\eta^2)\left[\int_0^\eta \bar{\eta}(1-\eta)\,\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \right.\right. \tag{44}$$
$$\left.\left. + \int_y^1 \eta(1-\bar{\eta})\,\varphi(\bar{\eta})\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta.$$

O soluționare într-o primă aproximație se poate face utilizînd metoda lui Galerkin. Pornind de la ecuația (43), se obține

$$\int_0 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}\varphi\mathrm{d}y + \int_0^1 a\varphi^2\mathrm{d}y + \int_0^1 b(y-y^2)\times$$
$$\times\left[\int_0^y \eta(1-y)\,\varphi\mathrm{d}\eta + \int_y^1 y(1-\eta)\,\varphi\mathrm{d}\eta\right]\varphi\mathrm{d}y = 0. \tag{45}$$

Alegînd pentru φ o funcție de forma

$$\varphi(y) = y(1-y), \tag{46}$$

care satisface condițiile la limită, din ecuația de mai sus, prin cîteva calcule elementare, se obține

$$\frac{11}{6040} b + \frac{a}{10} = 1. \tag{47}$$

Din această ecuație, viteza critică de divergență se poate obține în modul următor. Se consideră raportul

$$k = \frac{a^2}{b} = 2\left[\frac{e}{l}\right]^2 \frac{\frac{dC_z}{di}}{C_x} \frac{EI_\xi}{GI_d}, \tag{48}$$

care nu depinde de viteza vîntului. Cu această notație se poate scrie în (47) b în funcție de a și se obține

$$a = -\frac{252}{11} k + \sqrt{\frac{252^2}{121} k^2 + \frac{5040}{11} k}. \tag{49}$$

Ținînd seama de notațiile utilizate, presiunea dinamică critică de divergență devine

$$q = -\frac{504}{11} \frac{e}{cl^4} \frac{EI_\xi}{C_x} + \sqrt{\frac{504^2}{121} \frac{e^2}{c^2 l^8} \frac{(EI_\xi)^2}{C_x^2} + \frac{5040}{11} \frac{2}{c^2 l^6} \frac{GI_d EI_\xi}{C_x \frac{dC_z}{di}}}, \tag{50}$$

respectiv viteza critică de divergență se va scrie

$$V_D = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[-\frac{504}{11} \frac{e}{cl^4} \frac{EI_\xi}{C_x} + \sqrt{\frac{504^2}{121} \frac{e^2}{c^2 l^8} \frac{(EI_\xi)^2}{C_x^2} + \frac{5040}{11} \frac{2}{c^2 l^6} \frac{GI_d EI_\xi}{C_x \frac{dC_z}{di}}}\right]}. \tag{51}$$

Evident, rezultatul obținut este aproximativ, eroarea fiind introdusă prin alegerea funcției (46). Metoda utilizată poate fi utilizată și în cazul structurilor de secțiune variabilă, pornind de această dată de la ecuația (38) în locul ecuației (43).

Pentru rezultate mai precise se pot utiliza metode aproximative de calcul care permit o soluționare ușoară pe mașinile electronice cifrice

de calcul, obținîndu-se precizia de calcul dorită. Pornind astfel de la ecuația (44), aceasta se poate scrie

$$\varphi_i = a\left[\sum_{j=1}^{i}(1-\eta_i)\eta_j\varphi_j\Delta\eta_j + \sum_{j=i+1}^{n}(1-\eta_j)\eta_j\varphi_j\cdot\Delta\eta_j\right] +$$
$$+ b\left\{\sum_{j=1}^{i}(1-\eta_j)\eta_j^2(1-\eta_j)\left[\sum_{k=1}^{j}\eta_k(1-\eta_j)\varphi_k\Delta\eta_k + \right.\right.$$
$$\left.+\sum_{k=j+1}^{n}\eta_j(1-\eta_k)\varphi_k\Delta\eta_k\right]\Delta\eta_j + \sum_{j=i+1}^{n}(1-\eta_j)\eta_i\eta_j(1-\eta_j)\times$$
$$\left.\times\left[\sum_{k=1}^{j}\eta_k(1-\eta_j)\varphi_k\Delta\eta_k + \sum_{k=j+1}^{n}\eta_j(1-\eta_k)\varphi_k\Delta\eta_k\right]\Delta\eta_j\right\}, \qquad (52)$$

respectiv

$$\varphi_1 = a\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \ldots + \frac{1}{4n^3}\varphi_n\right] +$$
$$+ b\left\{\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \ldots + \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{4n^3}\varphi_n\Big] + \frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \right.$$
$$\left.+ \frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}\frac{1}{n}\varphi_3 + \frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\right] + \ldots +$$
$$\left.+ \frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \ldots + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\right]\right\},$$
$$\varphi_2 = a\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}\frac{1}{n}\varphi_3 + \ldots + \right.$$
$$\left.+ \frac{3}{4n}\varphi_n\right] + b\left\{\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{3n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \right.\right.$$
$$+ \ldots + \frac{1}{4n}\varphi_n\Big] + \frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \right.$$
$$+ \frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\varphi_2 + \frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}\varphi_3 + \ldots + \frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\Big] + \ldots +$$
$$\left.+ \frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \ldots + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\right]\right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n = a\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_2 + \ldots + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\right] +$$
$$+ b\left\{\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_1 + \ldots + \frac{1}{4n^3}\varphi_n\right] + \ldots + \right.$$
$$\left.+ \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{\eta}\varphi_1 + \ldots + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\varphi_n\right]\right\}. \qquad (53)$$

În acest sistem, metoda de aproximație utilizată pentru aproximarea funcției φ, a fost metoda tangentelor.

Soluționarea acestui sistem liniar și omogen permite determinarea vitezei critice de divergență cuprinsă în coeficienții a și b. Ca metodă iterativă de calcul suficient de rapidă, se poate menționa următoarea: se alege un vector propriu inițial care să se apropie ca formă cu modul de informație dorit; se normează și se introduce în ecuația care prezintă în membrul stîng valoarea maximă pentru φ. Dînd aici, de exemplu, o anumită valoare pentru a, se obține o valoare pentru b. Cu această valoare, introdusă în membrul drept al sistemului, se determină prin membrul stîng un nou vector propriu. Operația se repetă pînă cînd valoarea proprie calculată în ultima etapă diferă de cea precedentă cu o cantitate mai mică decît precizia dorită.

Luînd în sistemul (53) $n = 20$ și observînd simetria lui, aceasta, după cîteva operații elementare, se reduce la

$$\varphi_1 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_1 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}108840\,\alpha_2 + 0{,}17090\,\alpha_3 + 0{,}22559\,\alpha_4 + 0{,}27346\,\alpha_5 + 0{,}31152\,\alpha_6 + 0{,}34277\,\alpha_7 + 0{,}36621\,\alpha_8 + 0{,}38183\,\alpha_9 + 0{,}38965\,\alpha_{10}\},$$

$$\varphi_2 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_2 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}5127\,\alpha_3 + 0{,}67677\,\alpha_4 + 0{,}81738\,\alpha_5 + 0{,}93456\,\alpha_6 + 1{,}02831\,\alpha_7 + 1{,}09863\,\alpha_8 + 1{,}14549\,\alpha_9 + 1{,}16895\,\alpha_{10}\},$$

$$\varphi_3 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_3 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\alpha_2 + 0{,}85450\,\alpha_3 + 1{,}12795\alpha_4 + 1{,}36230\,\alpha_5 + 1{,}55760\,\alpha_6 + 1{,}71385\,\alpha_7 + 1{,}83105\,\alpha_8 + 1{,}90915\,\alpha_9 + 1{,}94825\,\alpha_{10}\},$$

$$\alpha_4 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_4 + b10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}85450\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 1{,}90722\,\alpha_5 + 2{,}18064\,\alpha_6 + 2{,}39939\,\alpha_7 + 2{,}56347\,\alpha_8 + 2{,}67218\,\alpha_9 + 2{,}72755\,\alpha_{10}\},$$

$$\alpha_5 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_5 + b10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 2{,}80368\,\alpha_6 + 3{,}08493\,\alpha_7 + 3{,}29589\,\alpha_8 + 3{,}43647\,\alpha_9 + 3{,}50685\,\alpha_{10}\},$$

$$\alpha_6 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_6 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 3{,}42672\,\alpha_6 + 3{,}77047\,\alpha_7 + 4{,}02831\,\alpha_8 + 4{,}20013\,\alpha_9 + 4{,}28615\,\alpha_{10}\},$$

$$\alpha_7 = 1{,}25\times10^{-3}a\alpha_7 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 3{,}42677\,\alpha_6 + 4{,}45601\,\alpha_7 + 4{,}76073\,\alpha_8 + 4{,}96379\,\alpha_9 + 5{,}06549\,\alpha_{10}\},$$

$$\varphi^8 = 1{,}25\times10^{-3}\,a\alpha_8 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 3{,}42672\,\alpha_6 + 4{,}45601\,\alpha_7 + 5{,}49315\,\alpha_8 + 5{,}72745\,\alpha_9 + 5{,}84475\,\alpha_{10}\},$$

$$\varphi_9 = 1{,}25\times10^{-3}\,a\alpha_9 + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 3{,}42672\,\alpha_6 + 4{,}45601\,\alpha_7 + 5{,}49315\,\alpha_8 + 6{,}49111\,\alpha_9 + 6{,}62405\,\alpha_{10}\},$$

$$\varphi_{10} = 1{,}25\times10^{-3}\,a\alpha_{10} + b\,10^{-6}\{0{,}038086\,\alpha_1 + 0{,}32520\,\alpha_2 + 0{,}8545\,\alpha_3 + 1{,}57913\,\alpha_4 + 2{,}45214\,\alpha_5 + 3{,}42672\,\alpha_6 + 4{,}45601\,\alpha_7 + 5{,}49315\,\alpha_8 + 6{,}49111\,\alpha_9 + 7{,}40335\,\alpha_{10}\}, \tag{54}$$

unde

$$\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{10},$$

$$\alpha_2 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 3\varphi_3 + 3\varphi_4 + 3\varphi_5 + 3\varphi_6 + 3\varphi_7 + 3\varphi_8 + 3\varphi_9 + 3\varphi_{10},$$

$$\alpha_3 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 5\varphi_4 + 5\varphi_5 + 5\varphi_6 + 5\varphi_7 + 5\varphi_8 + 5\varphi_9 + 5\varphi_{10},$$

$$\alpha_4 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 7\varphi_5 + 7\varphi_6 + 7\varphi_7 + 7\varphi_8 + 7\varphi_9 + 7\varphi_{10},$$

$$\alpha_5 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 9\varphi_6 + 9\varphi_7 + 9\varphi_8 + 9\varphi_9 + 9\varphi_{10},$$

$$\alpha_6 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 11\varphi_6 + 11\varphi_7 + 11\varphi_8 + 11\varphi_9 + 11\varphi_{10},$$

$$\alpha_7 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 11\varphi_6 + 13\varphi_7 + 13\varphi_8 + 13\varphi_9 + 13\varphi_{10},$$

$$\alpha_8 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 11\varphi_6 + 13\varphi_7 + 15\varphi_8 + 15\varphi_9 + 15\varphi_{10},$$

$$\alpha_9 = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 11\varphi_6 + 13\varphi_7 + 15\varphi_8 + 17\varphi_9 + 17\varphi_{10},$$

$$\alpha_{10} = \varphi_1 + 3\varphi_2 + 5\varphi_3 + 7\varphi_4 + 9\varphi_5 + 11\varphi_6 + 13\varphi_7 + 15\varphi_8 + 17\varphi_9 + 19\varphi_{10}.$$

Soluţionînd acest sistem în modul arătat, cu ajutorul unei maşini electronice de calcul se obţine combinaţiile critice ale valorilor a şi b date în tabela 1 şi în figura 1. Vectorii proprii corespunzători sînt daţi în acelaşi tabel.

Studiul stabilităţii unei structuri elastice la acţiunea vîntului poate fi făcută calculînd valorile maxime posibile ale coeficienţilor a şi b. Dacă valorile obţinute se găsesc sub curba limită din figura 1, nu apare fenomenul de divergenţă.

Pentru determinarea vitezei critice de divergenţă se calculează mai întîi cu raportul (48). Ducînd o dreaptă cu acest coeficient unghiular în sistemul de axe a^2, b din figura 2, punctul de intersecţie între această

Tabela 1

a	b	$\frac{a^2}{b}$	$\varphi \times 10^4$									
			$\frac{2y}{l} = 0{,}05$	0,015	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,00	445,85	0,0000000	718	2 153	3 570	4 940	6 228	7 389	8 382	9 180	9 722	10 000
0,50	423,22	0,0005907	722	2 162	3 582	4 954	6 241	7 400	8 389	9 184	9 724	10 000
1,00	400,59	0,0024963	725	2 171	3 595	4 967	6 254	7 411	8 397	9 187	9 725	10 000
1,50	377,97	0,0059529	728	2 179	3 607	4 981	6 267	7 422	8 405	9 191	9 727	10 000
2,00	355,34	0,0125682	731	2 188	3 620	4 995	6 280	7 433	8 413	9 196	9 728	10 000
2,50	332,71	0,0187850	734	2 197	3 632	5 009	6 294	7 444	8 421	9 200	9 730	10 000
3,00	310,08	0,0290246	738	2 206	3 645	5 024	6 308	7 455	8 429	9 204	9 731	10 000
3,50	287,45	0,0426159	741	2 215	3 658	5 038	6 321	7 467	8 438	9 208	9 733	10 000
4,00	264,82	0,0604183	744	2 284	3 671	5 053	6 335	7 479	8 446	9 212	9 734	10 000
4,50	242,19	0,0836126	748	2 233	3 685	5 068	6 350	7 490	8 454	9 217	9 736	10 000
5,00	219,56	0,1138663	751	2 243	3 698	5 083	6 364	7 502	8 463	9 221	9 737	10 000
5,50	196,92	0,1536141	755	2 253	3 712	5 099	6 379	7 515	8 472	9 226	9 739	10 000
6,00	174,29	0,2065554	758	2 262	3 726	5 114	6 393	7 527	8 480	9 230	9 740	10 000
6,50	151,65	0,2785986	762	2 272	3 740	5 130	6 408	7 539	8 489	9 235	9 742	10 000
7,00	129,01	0,3797994	765	2 282	3 754	5 146	6 424	7 552	8 499	9 239	9 744	10 000
7,50	106,38	0,5287742	769	2 292	3 768	5 162	6 439	7 565	8 508	9 244	9 745	10 000
8,00	83,74	0,7642731	773	2 303	3 783	5 178	6 455	7 578	8 517	9 249	9 747	10 000
8,50	61,10	1,1824773	777	2 313	3 798	5 195	6 471	7 591	8 527	9 254	9 749	10 000
9,00	38,46	2,1060686	780	2 323	3 813	5 212	6 487	7 604	8 536	9 259	9 751	10 000
9,50	15,82	5,7051534	784	2 334	3 828	5 229	6 503	7 618	8 546	9 264	9 752	10 000
10,00	−6,82	−14,65579	788	2 345	3 943	5 246	6 520	7 632	8 556	9 269	9 754	10 000

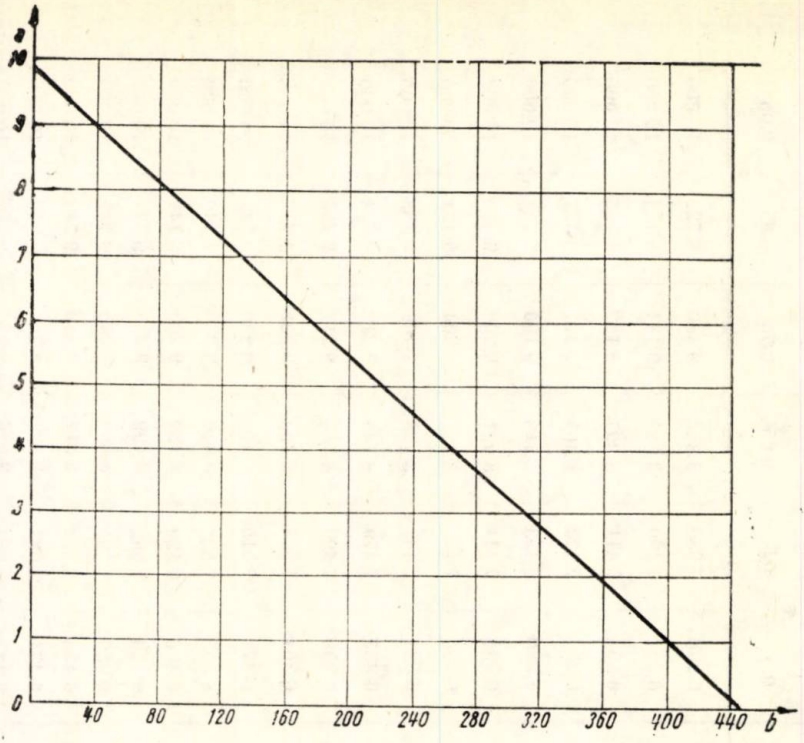

a
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400
440
b

Fig. 1

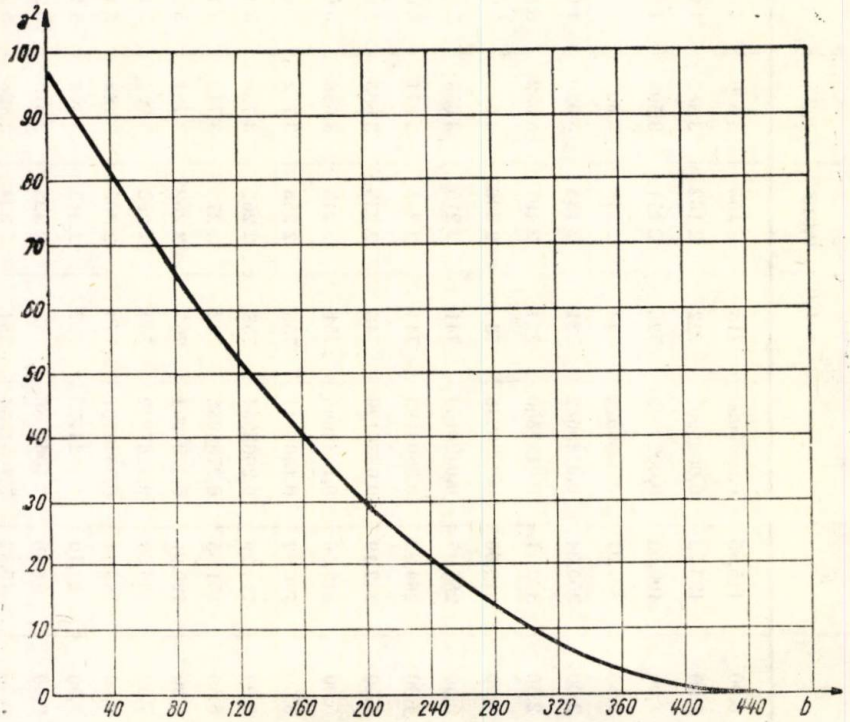

a^2
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
40
80
120
160
200
240
280
320
360
400
440
b

Fig. 2

dreaptă și curba din figură va avea drept coordonate valorile a_{cr} și b_{cr}. Viteza critică de divergență din figură se obține cu ajutorul uneia dintre relațiile

$$V_D = \sqrt{\frac{a_{cr} GI_d}{\frac{\rho}{2} ce \frac{dC_z}{di} l^2}} \text{ sau } V_D = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{b_{cr} GI_d EI_\xi}{c^2 C_x \frac{dC_z}{di} l^6}}. \tag{55}$$

Se observă că relația (47), respectiv formula corespunzătoare (51), prezintă o precizie tehnică oarecum satisfăcătoare, îndepărtîndu-se de soluția dată în tabela 1 doar cu cîteva procente.

Metoda menționată poate fi ușor extrapolată pentru structuri de secțiune variabilă. În acest caz, sistemul liniar se formează pornind de la ecuația integrală (39).

STRUCTURI ÎN CONSOLĂ

Admițînd aceleași simplificări ca și cele menționate în cazul structurilor rezemate la capete, ținînd seama de (17) și (29), sistemul (13) se poate scrie

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dy^2} &= \frac{1}{EI_\xi} \int_y^l (y - \eta) qc \frac{dC_z}{di} \varphi(\eta) \, d\eta, \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{1}{GI_d} \int_y^l qce \frac{dC_z}{di} \varphi(\eta) \, d\eta + \\ &+ \frac{1}{GI_d} \int_y^l qc C_x [w(\eta) - w(y)] \, d\eta + w' \frac{1}{GI_d} \int_y^l (y - \eta) qc C_x \, d\eta. \end{aligned} \tag{56}$$

Eliminînd funcția w între cele două ecuații în același mod, se obține

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\left(GI_d \frac{d\varphi}{dy}\right) = &- qce \frac{dC_z}{di} \varphi - \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_y^l (y-\eta) qc \frac{dC_z}{di} \varphi d\bar{\eta}\right] \times \\ &\times \left[\int_y^l (y - \bar{\eta}) qc C_x \, d\eta\right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Această ecuație poate fi pusă sub formă de ecuație integrală cu ajutorul funcției Green (33) pentru structuri de secțiune variabilă sau cu ajutorul funcției Green (29) pentru secțiuni de rigiditate aproximativ constantă. Pentru structuri de secțiune și rigiditate variabilă ecuația (57) scrisă, sub forma de ecuație integrală, devine

$$\begin{aligned} \varphi = &\int_0^y \left[\int_0^y \frac{d\eta}{GI_d(\eta)}\right]\left\{qce \frac{dC_z}{di} \varphi(\eta) + \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_\eta^l (\eta - \bar{\eta}) qc \frac{dC_z}{di} \varphi(\bar{\eta}) \, d\bar{\eta}\right] \times \right. \\ &\left. \times \left[(\eta - \bar{\eta}) qc C_x d\bar{\eta}\right]\right\} d\eta + \int_y^l \left[\int_0^l \frac{d\eta}{GI_d(\eta)}\right]\left\{qce \frac{dC_z}{di} \varphi(\eta) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_\eta^l (\eta - \bar{\eta}) qc \frac{dC_z}{di} \varphi(\bar{\eta}) \, d\bar{\eta}\right] \cdot \left[\int_\eta^l (\eta - \bar{\eta}) qc C_x \, d\bar{\eta}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{58}$$

În cazul structurilor de secțiune aproximativ constantă, aceeași ecuație devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{qce}{GI_d}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi - \frac{q^2c^2C_x}{GI_dEI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{(l-y)^2}{2}\int_y^l(\eta-y)\,\varphi(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{59}$$

iar sub formă de ecuație integrală, prin utilizarea funcției Green (29), ecuația devine

$$\varphi = \int_0^y \frac{\eta}{GI_d}\left[qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi + \frac{q^2c^2C_x}{EI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{(l-\eta)^2}{2}\int_\eta^l(\bar\eta-\eta)\,\varphi(\bar\eta)\,\mathrm{d}\bar\eta\right]\mathrm{d}\eta + \tag{60}$$
$$+\int_y^l \frac{y}{GI_d}\left[qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi + \frac{q^2c^2C_x}{EI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{(l-\eta)^2}{2}\int_\eta^l(\bar\eta-\eta)\,\varphi(\bar\eta)\,\mathrm{d}\bar\eta\right]\mathrm{d}\eta.$$

Efectuînd schimbarea de variabilă menționată în cazul precedent și utilizînd notațiile (42), ecuațiile (59) și (60) devin

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} + a\varphi + b(1-y)\int_y^1(\eta-y)\,\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta = 0 \tag{61}$$

și, respectiv,

$$\varphi = \int_0^y \eta\left[a\varphi + b(1-\eta)^2\int_\eta^1(\bar\eta-\eta)\,\varphi(\bar\eta)\,\mathrm{d}\bar\eta\right]\mathrm{d}\eta +$$
$$+\int_y^1 y\left[a\varphi + b(1-\eta)^2\int_\eta^1(\bar\eta-\eta)\,\varphi(\bar\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\eta. \tag{62}$$

Soluționarea aproximativă a problemei cu ajutorul metodei Galerkin prin alegerea unei funcții de forma

$$\varphi = 2y - y^2 \tag{63}$$

conduce la ecuația

$$\frac{7}{360}b + \frac{2}{5}a = 1. \tag{64}$$

Cu notația

$$k = \frac{a^2}{b} = 2\left(\frac{e}{l}\right)^2\frac{\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}{C_x}\frac{EI_\xi}{GI_d}$$

se obține

$$a = -\frac{72}{7}k + \sqrt{\frac{72^2}{49}k^2 + \frac{360}{7}k}, \tag{65}$$

astfel încît presiunea critică de divergență devine

$$q = -\frac{144}{7}\frac{e}{cl^4}\frac{EI_\xi}{C_x} + \sqrt{\frac{144^2}{49}\frac{e^2}{c^2l^2}\frac{(EI_\xi)^2}{C_x^2} + \frac{360}{7}\frac{2}{c^2l^6}\frac{GI_dEI_\xi}{C_x\dfrac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}}}, \tag{66}$$

iar viteza critică de divergență va fi

$$V_D = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[-\frac{144}{7}\frac{e}{cl^4}\frac{EI_\xi}{C_x} + \sqrt{\frac{144^2}{49}\frac{e^2}{c^2l^8}\frac{(EI_\xi)^2}{C_x^2} + \frac{360}{7}\frac{2}{c^2l^6}\frac{GI_dEI_\xi}{C_x\dfrac{dC_z}{di}}}\right]}. \quad (67)$$

Pentru obținerea de rezultate mai precise se va utiliza metoda iterativă descrisă pentru suprafețele portante pe două reazeme. Pornind astfel de la ecuația (62), aceasta se poate scrie

$$\varphi_i = a\left[\sum_{j=1}^{i}\eta_j y_j \Delta\eta_j + \sum_{j=i+1}^{n}\eta_i\,\varphi_j\,\Delta\eta_j\right] + b\left\{\sum_{j=1}^{i}\eta_j(1-\eta_j)^2 \times \right.$$

$$\times\left[\sum_{k=j+}^{n}(\eta_k - \eta_j)\,\varphi_k\,\Delta\eta_k\right]\Delta\eta_j +$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n}\eta_i(1-\eta_j)^2\left[\sum_{k=j+1}^{n}(\eta_k-\eta_j)\,\varphi_k\,\Delta\eta_k\right]\Delta\eta_j\right\}, \quad (68)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

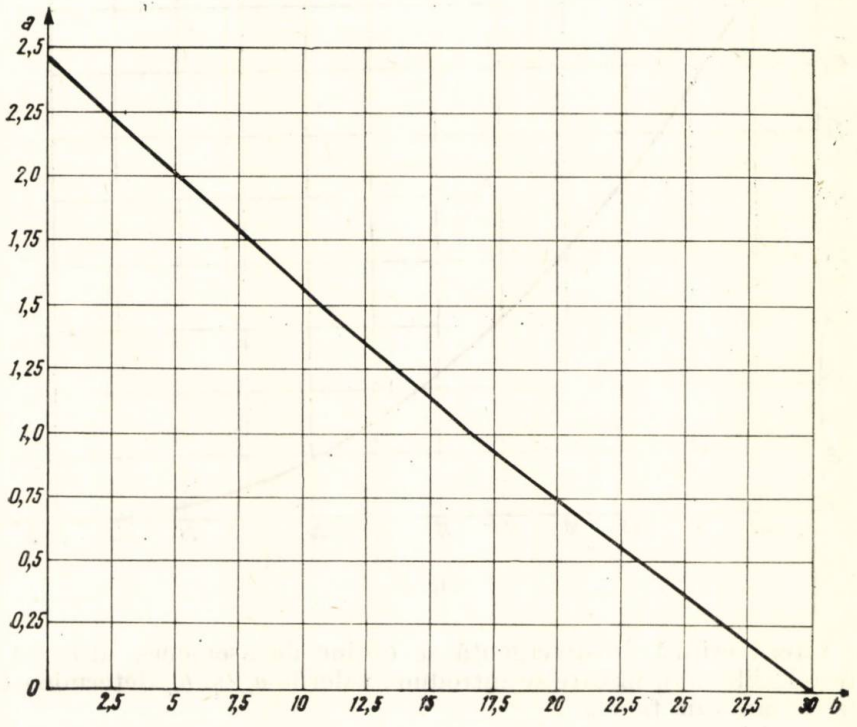


Fig. 3

Soluţionînd acest sistem pentru $n = 10$ în modul arătat, vitezele critice de divergenţă se obţin pentru curba-limită din figura 3 trasată pe baza valorilor determinate şi trecute în tabela 2. Modul de calcul efectiv al vitezei critice de divergenţă, pornind de la valorile limită a şi b, se face după cum s-a arătat în cazul precedent.

Tabela 2

a	b	$\frac{a^2}{b}$	a	b	$\frac{a^2}{b}$
2,4623	0,0000	∞	1,1520	15,0000	0,08851
2,2322	2,5000	1,9937	0,9506	17,5000	0,05166
2,0067	5,0000	0,8055	0,7543	20,0000	0,02846
1,7859	7,5000	0,4251	0,5635	22,5000	0,01411
1,5698	10,0000	0,2465	0,3814	25,0000	0,00582
1,3585	12,5000	0,1476	0,0000	30,0374	0,00000

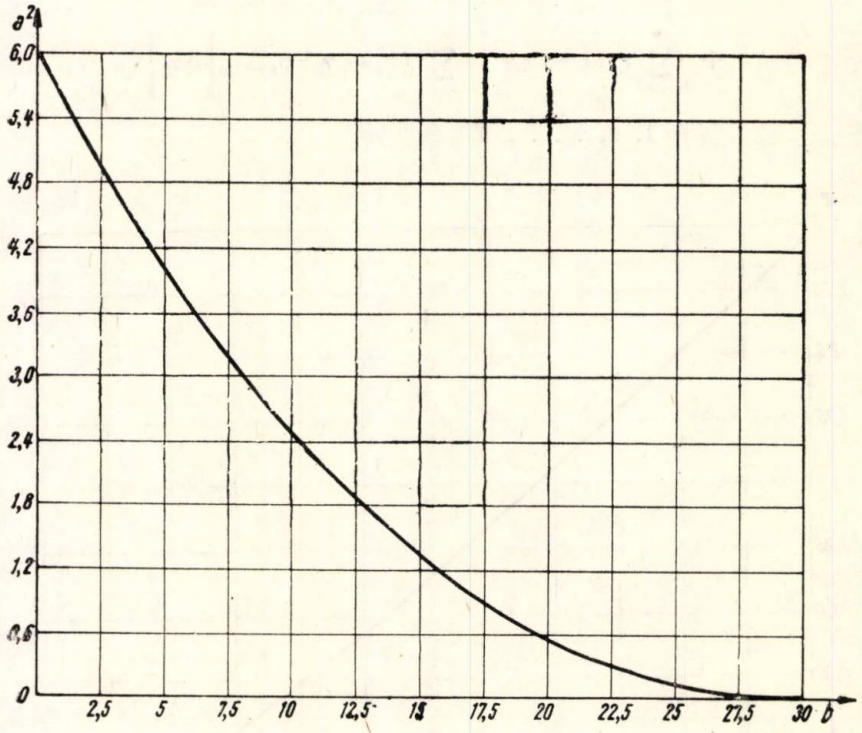


Fig. 4

Viteza critică de divergenţă se obţine de asemenea utilizînd una dintre relaţiile (55), în care se introduc valorile a_{cr} şi b_{cr} determinate din figura 4 sau din tabela 2.

Primită la redacţie la 12 iulie 1968

GENERALIZAREA TEORIEI CALCULULUI PLASTIC OPTIM AL STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT[1])

de VALERIU PETCU

Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

Teoria calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat solicitate de sarcini permanente și temporare aplicate concentrat este extinsă la cazul general în care atît sarcinile permanente, cît și sarcinile temporare sînt variabile, primele variind independent de ultimele. Teoria dezvoltată se bazează pe optimizarea condițiilor de rupere și de exploatare specifice structurilor de beton armat, prin minimizarea limitei superioare a dimensiunilor domeniilor plastice de comportare a structurilor, corespunzătoare tuturor schemelor nefavorabile de încărcare. În lucrare se enunță și se demonstrează trei teoreme ale calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat. În final se prezintă un exemplu de calcul care ilustrează modul de aplicare a teoriei elaborate.

I. INTRODUCERE

Bazele teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat au fost elaborate în 1961, ca rezultat al cercetărilor efectuate pentru obținerea unei teorii a calculului plastic specifice acestor structuri [1]. Ulterior, numeroase contribuții teoretice și practice au fost aduse în acest domeniu. Ca rezultat al acestei activități, teoria calculului plastic optim a devenit în prezent familiară multor specialiști ai betonului armat din țară și din străinătate, ea fiind apreciată ca un instrument adecvat pentru obținerea unor soluții raționale la proiectarea structurilor continue de beton armat în domeniul plastic [2], [3].

Atît lucrarea [1], cît și contribuțiile ulterioare aduse teoriei calculului plastic optim s-au referit la structuri continue solicitate numai de sarcini permanente și temporare aplicate vertical. Sarcinile permanente au fost presupuse constante și egale cu valorile lor de calcul, iar sarcinile temporare s-au considerat că pot varia de la valorile lor normate la valorile lor de calcul în funcție de un singur parametru.

---

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée" **14**, *2* (1969) (în limba engleză).

Ipoteza referitoare la sarcinile permanente este acceptabilă numai în cazurile în care secțiunile elementelor componente ale structurilor se dimensionează prin metoda de calcul la starea-limită de rezistență, în care sarcinile permanente normate sînt afectate de coeficienți de supraîncărcare apropiați de unitate. Un astfel de exemplu îl constituie normativul condiționat [4], care specifică pentru cazurile curente valori egale cu 1,1 sau 1,2 pentru coeficienții de supraîncărcare ai sarcinilor permanente. Este evident că ipoteza conform căreia sarcinile permanente se consideră constante și egale cu valorile lor de calcul, adoptată pînă în prezent în procesul de elaborare și de dezvoltare a teoriei calculului plastic optim, este acoperitoare din punctul de vedere al modului de comportare a structurilor în domeniul elastic. Această ipoteză devine însă prea conservatoare în cazurile în care metodele de dimensionare a elementelor de beton armat prevăd pentru sarcinile permanente coeficienți de supraîncărcare sensibil mai mari decît unitatea. Acesta este cazul metodei de calcul la rupere aplicate încă în țara noastră [5], al metodei de calcul la rupere în vigoare în S.U.A. [6], precum și al metodei de calcul recomandate de Comitetul european pentru beton [7]. În cadrul acestor metode, sarcinile permanente se amplifică cu coeficienți de supraîncărcare egali cu 1,8, 1,5 și, respectiv, 1,4. În aceste condiții, variația sarcinilor permanente de la valorile lor normate la valorile lor de calcul nu mai poate fi neglijată la stabilirea soluțiilor optime ale valorilor momentelor plastice ale structurilor continue de beton armat. Această variație reprezintă, de fapt, o variabilă suplimentară de calcul, care conferă o mai mare generalitate calculului plastic optim.

Scopul prezentei lucrări este de a generaliza teoria calculului plastic optim prin luarea în considerație a posibilităților naturale ale sarcinilor permanente și temporare de a varia de la valorile lor normate la valorile lor de calcul. Teoria este însoțită de un exemplu de calcul prin care se ilustrează modul de determinare a momentelor plastice optime ale structurilor continue de beton armat.

II. DEFINIȚII ȘI NOTAȚII

Terminologia și notațiile folosite în cadrul acestei lucrări sînt următoarele:

— *sarcină normată*, sarcină care solicită structura în condiții normale de exploatare. Valoarea ei este dată în prescripții oficiale de calcul;

— *coeficient de supraîncărcare de calcul*, coeficient supraunitar care afectează sarcina normată în calculul de rezistență al elementelor de construcție. Valoarea lui este dată în prescripții oficiale pentru fiecare categorie de sarcini;

— *sarcină de calcul*, produsul dintre sarcina normată și coeficientul de supraîncărcare de calcul corespunzător;

— *secțiune critică*, secțiune transversală în care apare o articulație plastică într-un anumit moment al procesului de creștere a sarcinilor;

— *moment plastic*, moment încovoietor care acționează într-o articulație plastică. În calculele practice el este luat egal cu momentul capabil al secțiunii critice corespunzătoare;

— *moment de calcul*, moment capabil al unei secţiuni critice care satisface condiţiile de rupere şi de exploatare ale structurii.

a_i — coeficientul de influenţă al momentului elastic produs de sarcinile permanente în secţiunea critică i;

b_i — coeficientul de influenţă al momentului elastic maxim din secţiunea critică i produs de sarcinile temporare formînd cea mai defavorabilă schemă de încărcare pentru această secţiune critică;

D_i — mărimea domeniului plastic corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în secţiunea critică i;

D_0 — valoarea comună a mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare secţiunilor critice ale unui mecanism plastic;

D_0^x — valoarea comună a mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare secţiunilor critice ale mecanismului X;

G — valoarea normată a sarcinii permanente de referinţă;

G_c — valoarea de calcul a sarcinii permanente de referinţă;

G_i — valoarea sarcinii permanente de referinţă corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în secţiunea critică i în cazul general sau în cazul particular în care $G_i + P_c > G + P_c$;

G_0 — valoarea comună a sarcinilor permanente G_i corespunzătoare secţiunilor critice ale unui mecanism plastic pentru $G_0 + P_c > G + P_c$;

G_0^x — valoarea comună a sarcinilor permanente G_i corespunzătoare secţiunilor critice ale mecanismului X pentru $G_0^x + P_c > G + P_c$;

H — raport definit de relaţia (59);

i — indice exprimînd numărul de ordine al secţiunilor critice ale structurii ($i = 1, 2, 3, \ldots, n_s$);

$k-1, k, k+1$ — indici exprimînd numerele de ordine ale secţiunilor critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul şi de pe reazemul din dreapta ale unei deschideri de grindă;

l — lungimea deschiderii de referinţă;

M_k — momentul de simplă rezemare al unei deschideri de grindă, măsurat în dreptul secţiunii critice k din cîmp, produs de sarcinile permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul;

M_{pi} — momentul plastic din secţiunea critică i;

n_e — numărul de ecuaţii distincte de echilibru plastic, egal cu numărul de mecanisme plastice distincte ale structurii;

n_s — numărul secţiunilor critice ale structurii;

P — valoarea normată a sarcinii temporare de referinţă;

P_c — valoarea de calcul a sarcinii temporare de referinţă;

P_i — valoarea sarcinii temporare de referinţă corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în secţiunea critică i în cazul general sau în cazul particular în care $G + P_i < G + P_c$;

P_0 — valoarea comună a sarcinilor temporare P_i corespunzătoare secțiunilor critice ale unui mecanism plastic pentru $G+P_0<G+P_c$;

P_0^X — valoarea comună a sarcinilor temporare P_i corespunzătoare secțiunilor critice ale mecanismului X pentru $G+P_0^X < G+P_c$;

Q_c, Q_i, Q_0 — sarcini definite de relațiile (11), (12), (26) și (30);

s — numărul secțiunilor critice ale unui mecanism plastic;

W_G — lucrul mecanic virtual al sarcinilor permanente de calcul în stadiul de mecanism al unei deschideri de grindă sau de placă;

W_P — lucrul mecanic virtual al sarcinilor temporare de calcul în stadiul de mecanism al unei deschideri de grindă sau de placă;

X — exponent exprimînd numărul de ordine al mecanismelor plastice ($X = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots, L$);

α_k, β_k — coeficienți definiți de relațiile (53) și (54);

α_k^X, β_k^X — coeficienții α_k și β_k corespunzători mecanismului X;

γ — coeficient definit de relațiile (62) și (75);

γ^X — coeficientul γ corespunzător mecanismului X;

λ_c — coeficientul de supraîncărcare de calcul al sarcinilor permanente;

λ_0, μ_0 — coeficienți de supraîncărcare definiți de relațiile (72) și (58);

μ_c — coeficientul de supraîncărcare de calcul al sarcinilor temporare;

μ_0^X — coeficientul μ_0 corespunzător mecanismului X;

θ_i — deplasarea unghiulară virtuală a articulației plastice i;

ξ_k — raportul dintre distanța de la reazemul din stînga pînă la secțiunea critică din cîmpul unei deschideri de grindă și lungimea deschiderii respective.

III. SARCINI ȘI COEFICIENȚI DE SUPRAÎNCĂRCARE

Conform celor precizate anterior, teoria calculului plastic optim a a fost elaborată și s-a aplicat în cazul structurilor continue de beton armat solicitate numai de sarcini permanente și temporare aplicate vertical. În consecință, această teorie se referă la grinzi continue, plăci continue armate pe una sau pe două direcții, cadre continue cu noduri fixe și cadre cu noduri deplasabile la care forțele orizontale sînt neglijate în prima etapă de calcul. Cu alte cuvinte, teoria calculului plastic optim se aplică structurilor a căror rupere se caracterizează prin formarea unuia sau mai multor mecanisme de grindă sau de placă. Motivele pentru care nu este recomandabil să se elaboreze o teorie a calculului plastic optim care să includă și efectul forțelor orizontale ce acționează asupra cadrelor cu noduri deplasabile vor fi prezentate într-un studiu ulterior.

În mod obișnuit, sarcinile permanente care solicită structurile continue pot fi exprimate în funcție de o sarcină permanentă de referință, care poate varia de la valoarea ei normată, G, pînă la valoarea ei de calcul,

G_c. În mod similar, sarcinile temporare pot fi exprimate în funcţie de o sarcină temporară de referinţă, care poate varia de la valoarea ei normată, P, pînă la valoarea ei de calcul, P_c. Din cele de mai sus rezultă că atît sarcinile permanente, cît şi sarcinile temporare, considerate separat, pot varia de la valorile lor normate la valorile lor de calcul în funcţie de un singur parametru, care este chiar sarcina de referinţă respectivă.

Sarcinile permanente se caracterizează prin direcţie şi puncte de aplicaţie fixe. Pe lîngă aceasta, toate sarcinile permanente se aplică asupra structurii în mod simultan. De aceea ele formează întotdeauna o singură schemă de încărcare.

Sarcinile temporare au de asemenea aceeaşi direcţie şi aceleaşi puncte de aplicaţie ca şi sarcinile permanente, dar ele se pot aplica într-una sau simultan în mai multe deschideri ale structurii. Ca urmare, sarcinile temporare pot forma scheme diferite de încărcare.

Prin definiţie, rapoartele

$$\lambda_c = \frac{G_c}{G} \tag{1}$$

şi

$$\mu_c = \frac{P_c}{P} \tag{2}$$

se numesc coeficienţi de supraîncărcare de calcul ai sarcinilor permanente şi temporare. Se subliniază că valorile acestor coeficienţi sînt date prin prescripţii ca date iniţiale de calcul.

Dimensionarea structurilor de beton armat în domeniul elastic impune determinarea solicitărilor produse de sarcinile permanente şi temporare, luate cu valorile lor de calcul, în ipoteza comportării perfect elastice a structurilor sub acţiunea acestor sarcini. De aceea modul de variaţie a sarcinilor permanente şi temporare de la valorile lor normate la valorile lor de calcul nu prezintă interes într-o astfel de dimensionare. Spre deosebire de aceasta, în cazul dimensionării structurilor de beton armat pe baza calculului plastic optim, modul în care variază atît sarcinile permanente, cît şi sarcinile temporare de la valorile lor normate la valorile lor de calcul prezintă o importanţă de prim ordin. Aceasta provine din faptul că, la o astfel de dimensionare, momentele plastice din secţiunile critice ale structurilor se determină pe baza distribuţiei elastice a momentelor încovoietoare pentru cea mai defavorabilă schemă de încărcare a sarcinilor temporare corespunzătoare fiecărei secţiuni critice. Această distribuţie este întotdeauna necesară, întrucît cu ajutorul ei se stabilesc valorile sarcinilor permanente şi temporare corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în structură. Referitor la această problemă se face observaţia că, în realitate, variaţia sarcinilor temporare este independentă de cea a sarcinilor permanente. De aceea, din punct de vedere teoretic există o infinitate de posibilităţi de variaţie a acestor sarcini de la valorile lor normate la valorile lor de calcul. Dintre acestea este necesar să se adopte însă acea lege de variaţie a sarcinilor permanente şi temporare care să conducă la o dimensionare raţională a structurilor şi care să asigure în acelaşi timp condiţiile de siguranţă impuse prin prescripţii. Pentru stabilirea acestei legi de variaţie este necesar să se ia în consideraţie două

aspecte. Primul aspect se referă la faptul că sarcinile permanente care solicită structurile sînt în mod obișnuit constante și egale cu valorile lor normate. De aceea, în condiții normale, coeficientul de supraîncărcare de calcul care afectează sarcinile permanente în calculul de rezistență nu exprimă de fapt posibilitatea efectivă a acestor sarcini de a depăși valorile lor normate în decursul vieții construcției. Rolul principal al coeficientului de supraîncărcare de calcul al sarcinilor permanente constă în asigurarea gradului necesar de siguranță al structurilor în raport cu ruperea lor, precum și în asigurarea unei comportări normale a structurilor în stadiul de exploatare. Spre deosebire de aceasta, sarcinile temporare pot varia efectiv între limite destul de largi, care uneori depășesc sensibil valorile normate ale acestor sarcini. De aceea coeficientul de supraîncărcare de calcul al sarcinilor temporare reflectă un fapt real, deși valoarea lui se stabilește în principal pe aceleași considerente care se au în vedere la stabilirea coeficientului de supraîncărcare de calcul al sarcinilor permanente. În consecință, din punct de vedere fizic este logic să se adopte acea lege de variație a sarcinilor conform căreia se admite creșterea în primul rînd a sarcinilor temporare de la valorile lor normate la valorile lor de calcul, sarcinile permanente fiind păstrate constante și egale cu valorile lor normate. În continuare se admite creșterea convențională a sarcinilor permanente de la valorile lor normate la valorile lor de calcul, sarcinile temporare fiind păstrate constante și egale cu valorile lor de calcul.

Al doilea aspect se referă la comportarea structurilor în stadiul de exploatare. Este cunoscut faptul că, dacă valorile coeficienților λ_c și μ_c sînt date prin prescripții ca date inițiale de calcul, comportarea în stadiul de exploatare a structurilor de beton armat dimensionate în domeniul plastic depinde de valorile sarcinilor permanente și temporare corespunzătoare formării primei articulații plastice. Această comportare devine cu atît mai nefavorabilă, cu cît valorile sarcinilor permanente și temporare care produc formarea primei articulații plastice sînt mai mici. De aceea, pentru fiecare schemă nefavorabilă a sarcinilor temporare, cele mai nefavorabile condiții de exploatare care trebuie avute în vedere la dimensionarea structurilor de beton armat în domeniul plastic corespund cazului cînd suma sarcinilor permanente și temporare de referință care produc formarea primei articulații plastice este minimă. Modul în care se poate obține minimul acestei sume rezultă din expresia generală a momentului plastic al unei secțiuni critice oarecare i, care este

$$M_{pi} = (a_i G_i + b_i P_i)l. \tag{3}$$

În relația (3), coeficienții elastici a_i și b_i îndeplinesc întotdeauna inegalitatea

$$a_i < b_i. \tag{4}$$

Această inegalitate se bazează pe faptul că momentul elastic produs de sarcinile permanente provine dintr-o singură schemă de încărcare a acestor sarcini, în timp ce momentul elastic produs de sarcinile temporare se determină luîndu-se în considerație acea schemă de încărcare a acestor sarcini care conduce la obținerea momentului maxim în secțiunea critică i.

Dacă valoarea momentului plastic M_{pi} se păstrează constantă, din punct de vedere teoretic se pot obține o infinitate de valori ale sumei

$G_i + P_i$ care să satisfacă relaţia (3). Problema care se pune constă în găsirea acelei valori a sumei $G_i + P_i$ care îndeplineşte condiţia

$$G_i + P_i = \text{minimum}. \tag{5}$$

În acest scop, din ecuaţia (3) se obţine succesiv

$$P_i = \frac{M_{pi}}{b_i l} - \frac{a_i G_i}{b_i} \tag{6}$$

şi

$$G_i = \frac{M_{pi}}{a_i l} - \frac{b_i P_i}{a_i} \tag{7}$$

Dacă valorile sarcinilor P_i şi G_i date de relaţiile (6) şi (7) se substituie succesiv în relaţia (5), după efectuarea simplificărilor posibile se obţin următoarele rezultate:

$$G_i (b_i - a_i) = \text{minimum} \tag{8}$$

şi

$$P_i (b_i - a_i) = \text{maximum}. \tag{9}$$

Deoarece a_i şi b_i satisfac inegalitatea (4), rezultă că condiţiile (8) şi (9) sînt îndeplinite simultan dacă sarcina G_i se ia cît mai mică cu putinţă, iar sarcina P_i cît mai mare posibil.

Prin urmare, din punct de vedere structural, valoarea minimă a sumei sarcinilor permanente şi temporare de referinţă corespunzătoare formării primei articulaţii plastice într-o anumită secţiune critică se obţine în cazul cînd sarcinile temporare cresc în primul rînd, sarcinile permanente fiind păstrate constante şi egale cu valorile lor normate.

Cele două aspecte prezentate mai sus arată că din punct de vedere fizic şi structural este necesar ca în calculul plastic al structurilor continue de beton armat să se adopte legea de variaţie a sarcinilor, conform căreia are loc în primul rînd creşterea sarcinilor temporare şi numai după aceea creşterea sarcinilor permanente.

IV. MĂRIMILE DOMENIILOR PLASTICE ALE UNEI STRUCTURI

Domeniul plastic de comportare al unei structuri continue de beton armat, corespunzător schemei de încărcare a sarcinilor temporare care produce formarea primei articulaţii plastice în secţiunea critică i, are o anumită mărime. Prin definiţie, această mărime este egală cu diferenţa

$$D_i = (G_c + P_c) - (G_i + P_i) = Q_c - Q_i, \tag{10}$$

în care

$$Q_c = G_c + P_c \tag{11}$$

şi

$$Q_i = G_i + P_i. \tag{12}$$

Luînd în considerație legea de variație a sarcinilor adoptată mai sus, se disting următoarele două cazuri în procesul de determinare a mărimii domeniului plastic corespunzător secțiunii critice i :

— *cazul A*, în care prima articulație plastică apare înainte ca sarcinile temporare să atingă valorile lor de calcul, adică

$$Q_i = G + P_i < G + P_c ; \tag{13}$$

— *cazul B*, în care prima articulație plastică apare după ce sarcinile temporare au atins valorile lor de calcul, adică

$$Q_i = G_i + P_c > G + P_c. \tag{14}$$

Este evident că din punct de vedere teoretic o structură continuă de beton armat are n_s mărimi ale domeniilor plastice, corespunzătoare celor n_s secțiuni critice ale ei.

V. EXPRESIILE MOMENTELOR PLASTICE

Una dintre ipotezele de bază ale teoriei calculului plastic optim este cea conform căreia pentru fiecare secțiune critică a unei structuri există o anumită schemă nefavorabilă a sarcinilor temporare, care conduce la formarea primei articulații plastice în acea secțiune. Pe lîngă aceasta se presupune că structura se comportă elastic pînă în momentul formării primei articulații plastice. Datorită acestor două ipoteze, momentul plastic dintr-o secțiune critică oarecare se obține pe baza calculului static în domeniul elastic. Ca urmare, relația (3) reprezintă expresia generală a momentului plastic din secțiunea critică i a unei structuri continue de beton armat.

Luînd în considerație cazurile A și B definite de relațiile (13) și (14), expresia (3) devine

$$M_{pi} = (a_i G + b_i P_i) l \tag{15}$$

pentru cazul A și

$$M_{pi} = (a_i G_i + b_i P_c) l \tag{16}$$

pentru cazul B.

VI. IDEEA CALCULULUI PLASTIC OPTIM

Calculul plastic al unei structuri continue de beton armat solicitate de sarcini permanente și temporare aplicate vertical, care formează schema de încărcare cea mai defavorabilă pentru fiecare secțiune critică, implică următoarele operații :

a) determinarea valorilor momentelor plastice din toate secțiunile critice în ipoteza redistribuirii complete a momentelor încovoietoare pentru fiecare schemă defavorabilă formată de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Cu alte cuvinte, se admite, că structura se transformă în totalitate sau în parte în mecanism sub acțiunea sarcinilor permanente și temporare de calcul, respectiv se consideră că structura are același grad de siguranță pentru toate schemele posibile de încărcare ;

b) deducerea momentelor de calcul din valorile momentelor plastice stabilite în etapa anterioară, luîndu-se în considerație toate condițiile de rupere și de exploatare specifice structurilor de beton armat.

Prima operație poate fi efectuată în diferite moduri, datorită posibilității de a varia procentele de armare din secțiunile critice, precum și inegalității $n_s > n_e$. Aceste două particularități arată că pentru obținerea unei soluții a valorilor momentelor plastice din cele n_s secțiuni critice ale structurii sînt necesare $n_s - n_e$ ecuații suplimentare care trebuie adăugate la cele n_e ecuații de echilibru ale mecanismelor plastice ale structurii. Prin urmare, alcătuirea celor $n_s - n_e$ ecuații suplimentare reprezintă una dintre problemele principale ale calculului plastic al structurilor continue de beton armat. Este evident că pentru soluționarea acestei probleme pot fi adoptate diferite criterii, fiecare dintre ele corespunzînd unui anumit punct de vedere teoretic sau practic. Obținerea unui consum minim de oțel sau folosirea unei reguli simple de distribuire a armăturii de-a lungul elementelor structurii reprezintă, de exemplu, două astfel de criterii. O soluționare rațională și totodată utilă scopurilor practice a problemei menționate mai sus poate fi obținută însă numai prin luarea în considerație a particularităților comportării structurii atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic. În acest scop se face apel la ipoteza conform căreia sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul produc întotdeauna formarea unui mecanism plastic al structurii pentru fiecare schemă de încărcare. Din această ipoteză rezultă că fiecărei scheme defavorabile de încărcare îi corespunde o anumită mărime a domeniului plastic al structurii. Pe de altă parte, comportarea structurii atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic se îmbunătățește cu atît mai mult, cu cît mărimea domeniului plastic descrește. Această din urmă remarcă sugerează ideea de a calcula structurile continue de beton armat în domeniul plastic, astfel încît mărimile domeniilor plastice corespunzătoare tuturor schemelor nefavorabile de încărcare să fie cît mai mici cu putință. Pentru valorificarea acestei idei este necesar să se sublinieze că, pentru fiecare soluție a momentelor plastice, ansamblul mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare tuturor schemelor nefavorabile de încărcare are, evident, o anumită limită superioară. În consecință, cele mai bune condiții de comportare ale unei structuri atît în domeniul elastic, cît și în domeniul plastic se obțin pentru o soluție a momentelor plastice care conduce la cea mai mică valoare a limitei superioare a mărimilor domeniilor plastice.

Calculul plastic bazat pe ideea minimizării limitei superioare a mărimilor domeniilor plastice în vederea obținerii valorilor momentelor plastice din secțiunile critice ale structurilor continue de beton armat a fost considerat ca fiind optim pentru aceste structuri.

Din relația (10) rezultă că a minimiza limita superioară a mărimilor domeniilor plastice înseamnă a maximiza limita inferioară a sarcinilor Q_i. În continuare, relațiile (13) și (14) arată că a maximiza limita inferioară a sarcinilor Q_i înseamnă a maximiza limita inferioară a sarcinilor temporare P_i în cazul A, respectiv a maximiza limita inferioară a sarcinilor permanente G_i în cazul B.

În concluzie, soluția plastică optimă a unei structuri continue de beton armat se obține prin maximizarea limitei inferioare a sarcinilor P_i în cazul A, respectiv prin maximizarea limitei inferioare a sarcinilor G_i în cazul B.

VII. TEORIA CALCULULUI PLASTIC OPTIM

Teoria pe care se bazează operaţia de minimizare a limitei superioare a mărimilor domeniilor plastice ale unei structuri continue de beton armat conţine următoarele trei teoreme.

TEOREMA 1. *În calculul plastic al unei structuri continue de beton armat este posibilă egalitatea dintre toate mărimile domeniilor plastice corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în fiecare secţiune critică numai dacă numărul de ecuaţii distincte de echilibru plastic este egal cu unitatea.*

DEMONSTRAŢIE. Prin egalarea tuturor mărimilor domeniilor plastice ale structurii se obţin $n_s - 1$ ecuaţii. Pe de altă parte însă, numărul de ecuaţii suplimentare necesare pentru determinarea valorilor momentelor plastice din cele n_s secţiuni critice este egal cu diferenţa $n_s - n_e$. În consecinţă, egalitatea tuturor mărimilor domeniilor plastice ale structurii este posibilă numai dacă condiţia

$$n_s - 1 = n_s - n_e \tag{17}$$

este satisfăcută.

Din această condiţie se obţine

$$n_e = 1, \tag{18}$$

rezultat care demonstrează teorema enunţată.

TEOREMA 2. *Limita superioară a mărimilor domeniilor plastice corsespunzătoare formării primei articulaţii plastice în fiecare din secţiunile critice ale unui mecanism plastic al unei structuri continue de beton armat atinge valoarea sa minimă cînd toate mărimile domeniilor plastice sînt egale între ele.*

DEMONSTRAŢIE. Ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului considerat, care exprimă egalitatea dintre lucrul mecanic virtual efectuat de momentele plastice şi cel efectuat de sarcinile permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul, este

$$\sum_{i=1}^{i=s} M_{pi}\theta_i = W_G + W_P. \tag{19}$$

Ţinînd seama de expresiile (15) şi (16) ale momentului plastic M_{pi}, ecuaţia (19) devine

$$l\sum_{i=1}^{i=s} b_i P_i \theta_i = W_G + W_P - Gl\sum_{i=1}^{i=s} a_i\theta_i \tag{20}$$

în cazul A, respectiv

$$l\sum_{i=1}^{i=s} a_i G_i \theta_i = W_G + W_P - P_c l\sum_{i=1}^{i=s} b_i\theta_i \tag{21}$$

în cazul B.

În ecuaţiile (20) şi (21), părţile din dreapta sînt constante. Din aceste ecuaţii rezultă că, pentru a obţine o soluţie a momentelor plastice din secţiunile critice ale structurii care să satisfacă ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului considerat, este necesar să se aleagă o soluţie a

sarcinilor P_i care să satisfacă ecuaţia (20) în cazul A, respectiv o soluţie a sarcinilor G_i care să satisfacă ecuaţia (21) în cazul B. Este evident că în fiecare dintre cazurile A şi B numărul unor astfel de soluţii este infinit. Printre aceste soluţii există însă una particulară în care toate sarcinile P_i sînt egale între ele în cazul A, respectiv toate sarcinile G_i sînt egale între ele în cazul B.

Fie P_0 şi G_0 valorile comune ale acestor sarcini, adică

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_s = P_0 \tag{22}$$

pentru cazul A şi

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_s = G_0 \tag{23}$$

pentru cazul B.

Luîndu-se în consideraţie egalităţile (22) şi (23), din ecuţiile (20) şi (21) se obţine

$$P_0 = \frac{W_G + W_P - Gl \sum_{i=1}^{i=s} a_i \theta_i}{l \sum_{i=1}^{i=s} b_i \theta_i}. \tag{24}$$

şi, respectiv,

$$G_0 = \frac{W_G + W_P - P_c l \sum_{i=1}^{i=s} b_i \theta_i}{l \sum_{i=1}^{i=s} a_i \theta_i}. \tag{25}$$

Ecuaţiile (20) şi (24) arată că orice altă soluţie a sarcinilor P_i diferită de cea dată de egalităţile (22) trebuie să conţină în mod necesar una sau mai multe sarcini mai mari decît P_0 şi deci una sau mai multe sarcini mai mici decît P_0 pentru ca ecuaţia (20) să fie satisfăcută. În mod asemănător, ecuaţiile (21) şi (25) arată că orice altă soluţie a sarcinilor G_i diferită de cea dată de egalităţile (23) trebuie să conţină în mod necesar una sau mai multe sarcini mai mari decît G_0 şi deci una sau mai multe sarcini mai mici decît G_0 pentru ca ecuaţia (21) să fie satisfăcută.

Prin urmare, P_0 este valoarea maximă a limitei inferioare a sarcinilor P_i în cazul A, iar G_0 este valoarea maximă a limitei inferioare a sarcinilor G_i în cazul B.

Din ecuaţiile (10), (13) şi (22) se obţine în cazul A :

$$Q_0 = G + P_0, \tag{26}$$

$$Q_1 = Q_2 = \ldots Q_s = Q_0, \tag{27}$$

$$D_0 = Q_c - Q_0, \tag{28}$$

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_s = D_0, \tag{29}$$

iar din ecuaţiile (10), (14) şi (23) se obţine în cazul B :

$$Q_0 = G_0 + P_c, \tag{30}$$

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_s = Q_0, \tag{31}$$

$$D_0 = Q_c - Q_0, \tag{32}$$

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_s = D_0. \tag{33}$$

Egalităţile (29) şi (33), care au fost stabilite pe baza condiţiilor exprimate prin egalităţile (22) şi (23), demonstrează teorema enunţată.

Se menţionează că o demonstraţie similară poate fi făcută pentru oricare altă lege de variaţie a sarcinilor permanente şi temporare.

TEOREMA 3. *În calculul plastic al unei structuri continue de beton armat cu două sau mai multe ecuaţii distincte de echilibru plastic există întotdeauna o soluţie a valorilor momentelor plastice pentru care* $n_s - n_e + 1$ *mărimi ale domeniilor plastice sînt egale între ele, celelalte* $n_e - 1$ *mărimi ale domeniilor plastice fiind mai mici decît valoarea comună a celor* $n_s - n_e + 1$ *mărimi ale domeniilor plastice.*

Observaţie preliminară. În cazul A se consideră o soluţie a sarcinilor P_i ale unui mecanism al structurii cu s secţiuni critice care satisface ecuaţia respectivă de echilibru plastic. O altă soluţie poate fi dedusă din prima prin micşorarea sarcinilor P_i corespunzătoare unui număr de secţiuni critice egal cu $s-1$. Din ecuaţia (20) rezultă că sarcina P_i corespunzătoare secţiunii critice rămase va fi mai mare în raport cu valoarea ei din prima soluţie pentru ca ecuaţia de echilibru plastic a mecanismului considerat să fie satisfăcută.

Un rezultat întru totul asemănător se obţine în cazul B, referitor la sarcinile G_i.

DEMONSTRAŢIE. Conform teoremei 1, pentru fiecare mecanism al structurii considerat separat se poate efectua egalarea mărimilor domeniilor plastice corespunzătaoare secţiunilor lui critice.

Fie D_0^{I}, D_0^{II}, D_0^{III}, ..., D_0^{L} valorile comune ale mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare mecanismelor plastice I, II, III, ..., L ale structurii, obţinute ca rezultat al acestei operaţii.

Se consideră că aceste valori satisfac inegalităţile

$$D_0^{\mathrm{I}} > D_0^{\mathrm{II}} > D_0^{\mathrm{III}} > \ldots > D_0^{L}. \tag{34}$$

Dacă se neglijează iniţial cîte o secţiune critică aparţinînd fiecăruia dintre mecanismele II, III, ..., L şi dacă mărimile domeniilor plastice corespunzătoare secţiunilor critice rămase se egalează cu valoarea comună D_0^{I} a mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare tuturor secţiunilor critice ale mecanismului I, atunci se obţin $n_s - n_e + 1$ mărimi ale domeniilor plastice egale cu D_0^{I} şi $n_e - 1$ mărimi ale domeniilor plastice mai mici decît D_0^{I}. Această concluzie are următoarea justificare.

Considerînd demonstraţia teoremei 2 şi relaţia (10), se pot scrie următoarele egalităţi în cazul A :

$$D_0^{\mathrm{I}} = (G_c - G + P_c) - P_0^{\mathrm{I}}, \tag{35}$$
$$D_0^{\mathrm{II}} = (G_c - G + P_c) - P_0^{\mathrm{II}}, \tag{36}$$
$$D_0^{\mathrm{III}} = (G_c - G + P_c) - P_0^{\mathrm{III}}, \tag{37}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_0^{L} = (G_c - G + P_c) - P_0^{L} \tag{38}$$

şi, respectiv, următoarele egalităţi în cazul B :

$$D_0^{\mathrm{I}} = G_c - G_0^{\mathrm{I}}, \tag{39}$$
$$D_0^{\mathrm{II}} = G_c - G_0^{\mathrm{II}}, \tag{40}$$
$$D_0^{\mathrm{III}} = G_c - G_0^{\mathrm{III}}, \tag{41}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$D_0^{L} = G_c - G_0^{L}. \tag{42}$$

Ca urmare, inegalitățile (34) pot fi înlocuite prin

$$P_0^{\mathrm{I}} < P_0^{\mathrm{II}} < P_0^{\mathrm{III}} < \ldots < P_0^{L} \tag{43}$$

în cazul A și

$$G_0^{\mathrm{I}} < G_0^{\mathrm{II}} < G_0^{\mathrm{III}} < \ldots < G_0^{L} \tag{44}$$

în cazul B.

Dacă se neglijează inițial cîte o secțiune critică aparținînd fiecăruia dintre mecanismele II, III, ..., L și dacă sarcinile P_i (sau G_i) corespunzătoare secțiunilor critice rămase ale acestor mecanisme se egalează cu valoarea comună a sarcinilor P_0^{I} (sau G_0^{I}) corespunzătoare tuturor secțiunilor critice ale mecanismului I, atunci se obțin $n_s - n_e + 1$ sarcini P_i (sau G_i) egale cu P_0^{I} (sau G_0^{I}) și $n_e - 1$ sarcini P_i (sau G_i) mai mari decît P_0^{I} (sau G_0^{I}). Această concluzie este consecința logică a faptului că sarcina P_i (sau G_i) corespunzătoare fiecăreia dintre secțiunile critice neglijate inițial (al căror număr este egal cu $n_e - 1$) se încadrează în observația preliminară care precedă această demonstrație.

Egalitatea dintre cele $n_s - n_e + 1$ sarcini P_i (sau G_i) dau naștere la $n_s - n_e$ ecuații, care sînt chiar ecuațiile suplimentare necesare pentru obținerea unei soluții a momentelor plastice din secțiunile critice ale structurii.

Conform teoremei 2, un astfel de procedeu de calcul conduce la minimizarea tuturor mărimilor domeniilor plastice ale structurii. În consecință, momentele plastice obținute în acest mod constituie soluția optimă a structurii, întrucît ele sînt în deplin acord cu ideea calculului plastic optim.

VIII. PRINCIPIUL REDISTRIBUȚIEI OPTIME

Rezultatul practic al teoriei calculului plastic optim este reprezentat de *principiul redistribuției optime*, care indică modul de alcătuire a ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea soluției optime a valorilor momentelor plastice din secțiunile critice ale unei structuri continue de beton armat. Conform acestui principiu, *soluția plastică optimă a unei structuri continue de beton armat se obține din egalarea între ele a unui anumit număr de mărimi ale domeniilor plastice în funcție de numărul de ecuații suplimentare necesare pentru obținerea valorilor momentelor plastice din secțiunile critice ale structurii, astfel încît mărimile domeniilor plastice rămase să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primelor mărimi ale domeniilor plastice.*

Conform teoremei 2, metoda de calcul bazată pe principiul redistribuției optime conduce la o redistribuție plastică a solicitărilor care asigură obținerea valorii minime a limitei superioare a tuturor domeniilor plastice ale structurii. De aceea s-a considerat că principiul enunțat mai sus conduce la o redistribuție plastică optimă a solicitărilor.

IX. EXPRESIILE SARCINILOR P_0 ȘI G_0 PENTRU GRINZI CONTINUE ȘI CADRE

La aplicarea teoriei calculului plastic optim la grinzi continue și cadre solicitate de sarcini verticale este necesar să se determine sarcina P_0 în cazul A sau sarcina G_0 în cazul B pentru fiecare deschidere de grindă.

Pentru simplificarea efectuării acestei operaţii, în cele ce urmează se stabilesc expresiile generale ale sarcinilor P_0 şi G_0. În acest scop se consideră o deschidere oarecare de grindă şi se notează cu $k-1$, k şi $k+1$ secţiunile critice de pe reazemul din stînga, din cîmp şi de pe reazemul din dreapta, ca în figura 1*a*.

Cazul A. $G + P_i < G + P_c$

Momentele plastice din secţiunile critice ale deschiderii grinzii au următoarele expresii :

$$M_{pk-1} = (a_{k-1} G + b_{k-1} P_{k-1}) l, \tag{45}$$

$$M_{pk} = (a_k G + b_k P_k) l, \tag{46}$$

$$M_{pk+1} = (a_{k+1} G + b_{k+1} P_{k+1}) l. \tag{47}$$

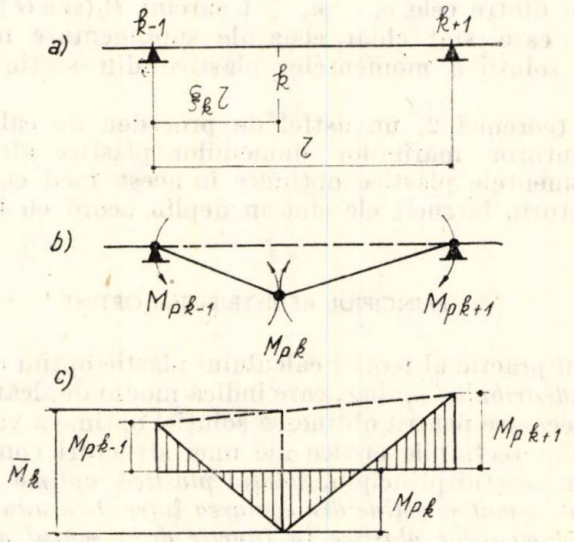


Fig. 1

Conform teoremei 2, sarcina P_0 se obţine din condiţiile

$$P_{k-1} = P_k = P_{k+1} = P_0. \tag{48}$$

Momentele plastice devin în acest caz

$$M_{pk-1} = (a_{k-1} G + b_{k-1} P_0) l, \tag{49}$$

$$M_{pk} = (a_k G + b_k P_0) l, \tag{50}$$

$$M_{pk+1} = (a_{k+1} G + b_{k+1} P_0) l. \tag{51}$$

Ecuaţia de echilibru plastic a deschiderii considerate este (fig. 1*b*, *c*) :

$$(1 - \xi_k) M_{pk-1} + M_{pk} + \xi_k M_{pk+1} = \overline{M}_k. \tag{52}$$

Se fac notațiile

$$\alpha_k = (1 - \xi_k)\, a_{k-1} + a_k + \xi_k\, a_{k+1} \tag{53}$$

și

$$\beta_k = (1 - \xi_k)\, b_{k-1} + b_k + \xi_k b_{k+1}. \tag{54}$$

Momentul de simplă rezemare $\overline{M}_k$ se poate scrie sub forma

$$\overline{M}_k = \alpha_k (G_c + P_c)\, l. \tag{55}$$

În aceste condiții, ecuația (52) devine

$$\alpha_k G + \beta_k P_0 = \alpha_k (G_c + P_c), \tag{56}$$

din care se obține

$$P_0 = \frac{\alpha_k (G_c + P_c - G)}{\beta_k}. \tag{57}$$

Luîndu-se în considerație relațiile (1) și (2), precum și notațiile

$$\mu_0 = \frac{P_0}{P} \tag{58}$$

și

$$H = \frac{P}{G}, \tag{59}$$

din relația (57) se obține

$$\mu_0 = \frac{\alpha_k (\lambda_c + \mu_c H - 1)}{\beta_k H}. \tag{60}$$

Expresia (60) este valabilă numai dacă μ_0 satisface condiția

$$\mu_0 \leqslant \mu_c, \tag{61}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\gamma = \frac{\alpha_k (\lambda_c - 1)}{\mu_c (\beta_k - \alpha_k)} < H. \tag{62}$$

Cazul B. $G_i + P_c > G + P_c$

Momentele plastice din secțiunile critice ale deschiderii au expresiile

$$M_{pk-1} = (a_{k-1} G_{k-1} + b_{k-1} P_c)\, l, \tag{63}$$

$$M_{pk} = (a_k G_k + b_k P_c)\, l, \tag{64}$$

$$M_{pk+1} = (a_{k+1} G_{k+1} + b_{k+1} P_c)\, l. \tag{65}$$

Conform teoremei 2, sarcina G_0 se obține din condițiile

$$G_{k-1} = G_k = G_{k+1} = G_0. \tag{66}$$

Momentele plastice devin în acest caz

$$M_{pk-1} = (a_{k-1} G_0 + b_{k-1} P_c) l, \tag{67}$$

$$M_{pk} = (a_k G_0 + b_k P_c) l, \tag{68}$$

$$M_{pk+1} = (a_{k+1} G_0 + b_{k+1} P_c) l. \tag{69}$$

Relaţiile (52)—(55) rămîn valabile şi în acest caz. Din aceste relaţii şi din expresiile (67)—(69) se obţine

$$\alpha_k G_0 + \beta_k P_c = \alpha_k (G_c + P_c). \tag{70}$$

Din relaţia de mai sus rezultă

$$G_0 = \frac{\alpha_k (G_c + P_c) - \beta_k P_c}{\alpha_k}. \tag{71}$$

Luîndu-se în consideraţie relaţiile (1), (2) şi (59), precum şi notaţia

$$\lambda_0 = \frac{G_0}{G}, \tag{72}$$

din relaţia (71) se obţine

$$\lambda_0 = \lambda_c - \frac{(\beta_k - \alpha_k)\,\mu_c H}{\alpha_k}. \tag{73}$$

Expresia (73) este valabilă numai dacă λ_0 satisface inegalitatea

$$\lambda_0 > 1, \tag{74}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\gamma = \frac{\alpha_k (\lambda_c - 1)}{(\beta_k - \alpha_k)\,\mu_c} > H. \tag{75}$$

X. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă continuă de beton armat cu secţiunea constantă, simplu rezemată la extremităţi, avînd cinci deschideri egale. Grinda este solicitată de sarcini permanente şi temporare, aplicate concentrat la treimile fiecărei deschideri. Sarcinile permanente sînt aplicate în toate deschiderile grinzii, iar sarcinile temporare pot fi aplicate într-una sau în mai multe deschideri. Secţiunile critice ale grinzii sînt situate în dreptul reazemelor intermediare şi în punctul de aplicaţie a sarcinilor din fiecare deschidere în care momentul elastic produs de sarcinile temporare este maxim. Schema generală a grinzii este dată în figura 2*a*.

În cele ce urmează se aplică teoria calculului plastic optim pentru determinarea momentelor plastice din secţiunile critice ale grinzii. În acest scop se adoptă pentru coeficienţii de supraîncărcare de calcul următoarele valori :

$$\lambda_c = 1{,}4 \tag{76}$$

şi

$$\mu_c = 1{,}4. \tag{77}$$

Acest valori sînt luate în conformitate cu recomandările Comitetului european pentru beton [7].

De asemenea, pentru raportul dintre valorile normate ale sarcinilor temporare și permanente de referință se alege valoarea

$$H = \frac{P}{G} = 1. \tag{78}$$

Valorile coeficienților elastici a_i și b_i sînt date în tabela 1 [8]. Coeficienții a_i ocorespund schemei de încărcare a sarcinilor permanente reprezentate în figura 2*b*, iar coeficienții b_i corespund celor mai nefavorabile scheme de încărcare ale sarcinilor temporare, reprezentate în figura 2*c*, *d*, *e*, *f*.

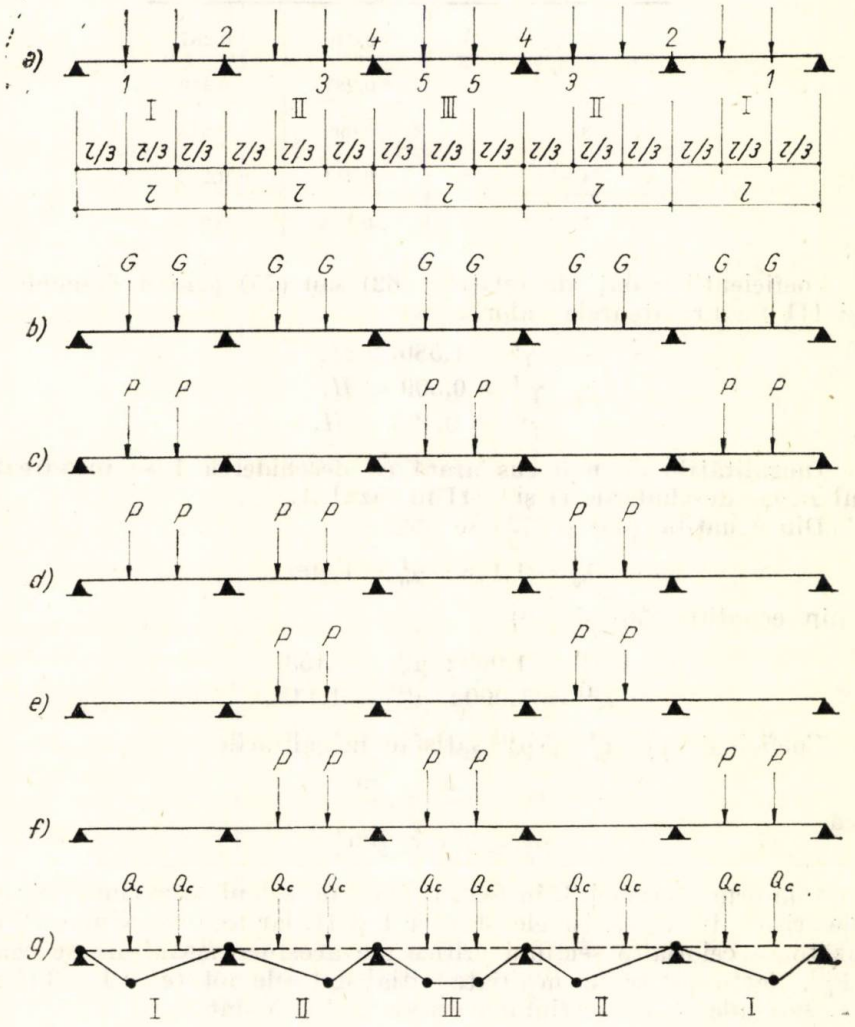


Fig. 2

Pentru deschiderile I, II şi III ale grinzii (fig. 2*a*), din ecuaţiile (53) şi (54) se obţine

$$\alpha_1^{\mathrm{I}} = \alpha_3^{\mathrm{II}} = \alpha_5^{\mathrm{III}} = 0{,}333, \tag{79}$$

$$\beta_1^{\mathrm{I}} = 0{,}393, \tag{80}$$

$$\beta_3^{\mathrm{II}} = 0{,}520, \tag{81}$$

$$\beta_5^{\mathrm{III}} = 0{,}525. \tag{82}$$

Tabela 1

Coeficienţii a_i şi b_i

Secţiunea critică	a_i	b_i
1	0,240	0,287
2	0,281	0,319
3	0,099	0,216
4	0,211	0,297
5	0,123	0,228

Coeficienţii γ daţi de relaţiile (62) sau (75) pentru deschiderile I, II şi III au următoarele valori:

$$\gamma^{\mathrm{I}} = 1{,}586 > H, \tag{83}$$

$$\gamma^{\mathrm{II}} = 0{,}509 < H, \tag{84}$$

$$\gamma^{\mathrm{III}} = 0{,}495 < H. \tag{85}$$

Inegalităţile de mai sus arată că deschiderea I se încadrează în cazul *B*, iar deschiderile II şi III în cazul *A*.

Din ecuaţiile (60) şi (73) se obţine

$$\lambda_0^{\mathrm{I}} = 1{,}148\,; \quad \mu_0^{\mathrm{I}} = 1{,}400, \tag{86}$$

iar din ecuaţiile (56) şi (60)

$$\lambda_0^{\mathrm{II}} = 1{,}000\,; \quad \mu_0^{\mathrm{II}} = 1{,}153, \tag{87}$$

$$\lambda_0^{\mathrm{III}} = 1{,}000\,; \quad \mu_0^{\mathrm{III}} = 1{,}142. \tag{88}$$

Coeficienţii μ_0^{I}, μ_0^{II}, şi μ_0^{III} satisfac inegalităţile

$$\mu_0^{\mathrm{I}} > \mu_0^{\mathrm{II}} > \mu_0^{\mathrm{III}}, \tag{89}$$

adică

$$P_0^{\mathrm{I}} > P_0^{\mathrm{II}} > P_0^{\mathrm{III}}. \tag{90}$$

Conform teoremei 3, în faza iniţială de calcul se exclude cîte o secţiune critică din mecanismele plastice I şi II, iar toate sarcinile P_i corespunzătoare celorlalte secţiuni critice ale acestor mecanisme se egalează cu P_0^{III}. Secţiunile critice neglijate iniţial sînt cele notate cu 1 şi 3 (fig. 2*a*).

Sarcinile P_i ale secţiunilor critice 2, 4 şi 5 sînt deci

$$P_2 = P_4 = P_5 = P_0^{\mathrm{III}} = 1{,}142\ P. \tag{91}$$

Luînd în considerație relațiile (15), (22) și (58), precum și coeficienții elastici dați în tabela 1, se obțin următoarele valori ale momentelor plastice optime ale secțiunilor critice 2, 4 și 5 :

$$M_{p2} = 0{,}645\ Gl, \tag{92}$$

$$M_{p4} = 0{,}550\ Gl, \tag{93}$$

$$M_{p5} = 0{,}383\ Gl. \tag{84}$$

Momentele plastice optime ale secțiunilor critice 1 și 3 se obțin din ecuația de echilibru plastic (52) aplicată fiecăruia dintre mecanismele I și II, în care momentul de simplă rezemare $\overline{M}_k$ dat de relația (55) poate fi scris sub forma

$$\overline{M}_k = \alpha_k (\lambda_c + \mu_c H)\, Gl. \tag{95}$$

Rezultă (fig. 2 *g*)

$$M_{p1} + 0{,}333\ M_{p2} = 0{,}932\ Gl \tag{96}$$

și

$$0{,}333\ M_{p2} + M_{p3} + 0{,}667\ M_{p4} = 0{,}932\ Gl. \tag{97}$$

Din aceste ecuații se obține

$$M_{p1} = 0{,}717\ Gl \tag{98}$$

și

$$M_{p3} = 0{,}350\ Gl. \tag{99}$$

XI. CONCLUZII

În cadrul acestui studiu s-a prezentat într-o formă generalizată teoria calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat solicitate de sarcini permanente și temporare aplicate vertical. În acest scop s-a introdus și s-a utilizat conceptul de mărime a domeniului plastic. Acest concept permite dezvoltarea a diferite variante ale teoriei calculului plastic optim pentru diferite legi de variație a sarcinilor permanente și temporare, dînd în acest fel o largă generalitate acestei teorii.

Teoria calculului plastic optim se bazează pe ideea minimizării limitei superioare a mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare tuturor schemelor nefavorabile de încărcare formate de sarcinile permanente și temporare. S-a considerat că sarcinile temporare variază independent de sarcinile permanente. Dintre toate posibilitățile s-a ales pentru aceste sarcini legea de variație cea mai apropiată de realitate. Conform acestei legi, orice structură intră în domeniul plastic ca rezultat al creșterii în primul rînd a sarcinilor temporare, creșterea sarcinilor permanente avînd loc după ce sarcinile temporare au atins valorile lor de calcul.

Prezentările anterioare ale calculului plastic optim în prima formă [1], [9] sau în variantele lui ulterioare [10], [11] pot fi obținute din teoria generală expusă în cadrul acestui studiu prin înlocuirea sarcinii permanente normate G cu sarcina permanentă de calcul G_c în toate relațiile de calcul.

Momentele plastice optime rezultă din condiția ca fiecare deschidere de grindă sau de placă să se transforme într-un mecanism plastic sub ac-

țiunea sarcinilor permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Cu alte cuvinte, se admite același grad de siguranță la rupere pentru toate deschiderile de grindă sau de placă ale structurilor.

Momentele plastice optime corespund celor mai favorabile condiții de rupere și de exploatare ce se pot obține în ipoteza transformării structurilor în mecanisme sub acțiunea sarcinilor permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Cînd condițiile efective de rupere și de exploatare sînt mai puțin restrictive decît cele obținute din calculul plastic optim al structurilor, momentele plastice optime reprezintă chiar momentele de calcul în raport cu care se face dimensionarea secțiunilor critice. Există însă cazuri cînd condițiile efective de rupere și de exploatare sînt mai restrictive decît cele oferite de calculul plastic optim. În astfel de cazuri, momentele de calcul se obțin prin creșterea momentelor plastice optime corespunzătoare, astfel încît condițiile efective de rupere și de exploatare să fie satisfăcute.

Se consideră că pentru introducerea calculului plastic optim în practica proiectării este necesar să se determine în prealabil soluțiile plastice optime pentru cele mai uzuale structuri continue de beton armat și, în același timp, să se elaboreze procedee aproximative simple de calcul plastic optim. Această problemă va face obiectul unui studiu ulterior.

Aspectele specifice ale calculului plastic optim al cadrelor continue și al plăcilor continue armate pe două direcții, ca și influența condițiilor de rupere și de exploatare asupra rezultatelor date de calculul plastic optim, vor fi de asemenea prezentate și discutate în cadrul unor studii ulterioare.

Primită la redacție la 4 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. Petcu, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., **12**, *5*, 1017—1023 (1961).
2. E. F. P. Burnett, C. W. Yu, *Reinforced concrete linear structures at ultimate load*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposium, Miami, 1964, ASCE-ACI Volume, 1965 p. 29—47.
3. D. H. Clyde, *Conservatism in reinforced concrete frame theory*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proceedings of the International Symposiun, Miami, 1964, ASCE-ACI volume, 1965, p. 383—397.
4. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită*, vol. I, partea a III-a, „Calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții civile și industriale din beton, beton armat și beton precomprimat", București, Edit. tehnică, 1963.
5. * * * *STAS 1546—50 : Construcții civile și industriale. Calculul elementelor de beton armat. Prescripții.*
6. * * * *Building Code Requirements for Reinforced Concrete* (ACI 318—63), American Concrete Institute, June 1963.
7. * * * *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'execution des ouvrages en béton armé.* Paris, Comité Européen du Béton, 1964.
8. C. N. Avram, *Grinzi continue.* București, Edit. tehnică, 1965.
9. V. Petcu, *The optimum redistribution principle*, The Indian Concrete Journal, **35**, *7*, 259—260 (1961).
10. M. Z. Cohn, *Limit design of reinforced concrete structures for maximum yield safety*, The Indian Concrete Journal, **36**, *6*, 214—221, 224 (1962).
11. V. Petcu, *O concepție nouă în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **14**, *6*, 1259 — 1276 (1963).

VIBRAȚIILE VERTICALE ALE GRINZILOR PENDULARE LUÎND ÎN CONSIDERARE EFECTELE DE FLAMBAJ DINAMIC

de A. PETRE și V. COSAC
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

În lucrare se studiază vibrațiile verticale ale grinzilor cu rigiditate transversală mai mică decît cea verticală și care, datorită încărcării, își pierd stabilitatea, rotindu-se cu un unghi α.
Se stabilesc relații de calcul pentru unghiul de rotire α și pentru raportul dintre frecvența vibrației pe verticală a grinzii rotite și frecvența proprie a vibrației pe verticală a grinzii nerotite.

Se consideră o grindă cu rigiditate transversală mai mică decît cea verticală, suspendată la capete și încărcată cu o sarcină verticală P, concentrată la mijlocul grinzii. Se presupune că reazemele permit atît rotiri în toate sensurile, cît și deplasări în lungul barei. Distanța de la linia reazemelor la punctul de aplicație al sarcinii, măsurată pe verticală, are valoarea h, iar distanța dintre cele două reazeme se notează cu l.

Pentru valori mici ale sarcinii P, grinda rămîne în plan vertical, singurele deformații care se produc fiind cele datorită încovoierii în acest plan. Mărind forța P se ajunge la o valoare critică, P_{cr}, pentru care poziția grinzii în plan vertical trece în domeniul nestabil și grinda poate lua și rămîne într-o nouă poziție, rotită în jurul liniei ce conține cele două reazeme, încovoiată lateral și eventual răsucită.

În lucrarea [1] s-a arătat că în mod obișnuit, efectele solicitării de răsucire asupra grinzii pot fi neglijate față de celelalte efecte, respectiv față de rotirea și încovoierea ei laterală.

În cele ce urmează se va neglija efectul solicitării de răsucire a grinzii și masa proprie a grinzii față de masa sarcinii aplicate.

Pentru calculul forței critice se va considera o secțiune transversală în grinda pendulară încovoiată și rotită cu unghiul α, ca în figura 1.

Expresiile săgeților după direcțiile de rigiditate maximă, respectiv minimă vor fi

$$w = \frac{P \sin \alpha \, l^3}{48 \, EI_y}, \qquad v = \frac{P \cos \alpha \, l^3}{48 \, EI_z}. \tag{1}$$

Deoarece linia de acțiune a forței P trebuie să coincidă cu cea a reacțiunilor din reazeme, are loc relația geometrică

$$h\operatorname{tg}\alpha = w - v\operatorname{tg}\alpha \tag{2}$$

sau

$$h = \frac{P\cos\alpha \cdot l^3}{48\,E}\left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z}\right),$$

de unde se obține

$$P = \frac{48\,EI_y\,h}{l^3\cos\alpha}\,\frac{1}{1-\dfrac{I_y}{I_z}}. \tag{3}$$

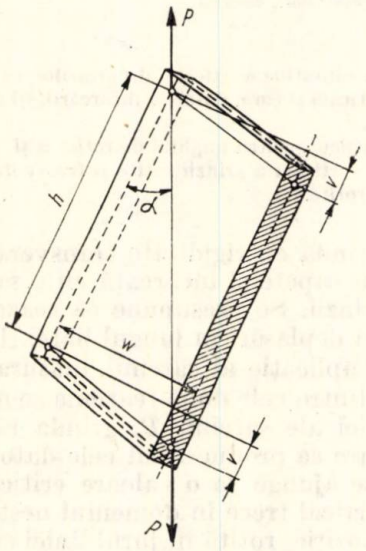


Fig. 1

Este ușor de observat că sarcina critică pentru care începe să apară și această a doua poziție de echilibru (în afara celei verticale) se obține pentru $\alpha=0$. Rezultă deci că

$$P_{cr} = \frac{48\,EI_y\,h}{l^3}\,\frac{1}{1-\dfrac{I_y}{I_z}}. \tag{4}$$

Pentru forțe mai mari decît P_{cr}, grinda va avea două poziții de echilibru, și anume una nestabilă pentru $\alpha = 0$ și una stabilă, grinda fiind rotită cu unghiul α.

Săgeata pe verticală datorită deformațiilor și rotirii va fi

$$f = h\cos\alpha + w\sin\alpha + v\cos\alpha - h \tag{5}$$

sau

$$f = h\cos\alpha + \frac{P\sin^2\alpha . l^3}{48\,EI_y} + \frac{P\cos^2\alpha . l^3}{48\,EI_z} - h.$$

Ținînd cont de relația (3) între forța P și unghiul de rotire α, expresia săgeții f va deveni

$$f = h\left(\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{1}{1-\frac{I_y}{I_z}} - 1\right). \tag{6}$$

Pentru a se determina relația între forța P și săgeata f în regim postcritic, se va elimina $\cos\alpha$ între expresiile (3) și (6), obținîndu-se

$$\frac{P\,l^3}{48\,EI_y} = f + h. \tag{7}$$

Relația între sarcină și săgeată va avea două expresii :

$$P = \frac{48\,EI_z}{l^3} f, \tag{8}$$

valabilă pentru

$$P \geqslant \frac{48\,EI_y h}{l^3}\,\frac{1}{1-\frac{I_y}{I_z}} \tag{9}$$

și

$$P = \frac{48\,EI_y}{l^3}(f + h), \tag{10}$$

valabilă pentru

$$f \geqslant \frac{\frac{I_y}{I_z}}{1-\frac{I_y}{I_z}} h. \tag{11}$$

Relația dintre sarcină și săgeată pentru astfel de grinzi va fi neliniară, conform reprezentării din figura 2, dar compusă din două porțiuni liniare.

Pentru valori negative ale sarcinii, grinda se va roti în jurul liniei de reazeme cu 180°, avînd în continuare aceeași curbă caracteristică.

Pentru calculul vibrației verticale ale acestor tipuri de grinzi se va presupune grinda încărcată inițial, la mijloc, cu o sarcină P_0. Peste această sarcină se admite că se aplică, fără pierdere de energie, o sarcină suplimentară Q cu viteza inițială v_0. Energia introdusă astfel în sistem, brusc sau succesiv, va produce vibrații. Dacă sarcina la care se adaugă forța masică corespunzătoare mișcării nu depășește sarcina critică, vibrația se va produce în plan vertical, fără o rotire a grinzii, unghiul α rămînînd egal cu zero. Dacă suma celor două sarcini depășește sarcina critică, va

rezulta, de asemenea, o vibrație verticală pentru sarcini, însă în timpul vibrațiilor se va produce și o rotire a grinzii cu un unghi α.

Deoarece buna funcționare a unor grinzi rulante care se încadrează în prezentul studiu depinde în mare măsură de lipsa unor rotiri accentuate, este interesant a se studia valoarea maximă a unghiurilor de rotire α ca urmare a unor pierderi momentane de stabilitate în urma unor sarcini impulsive.

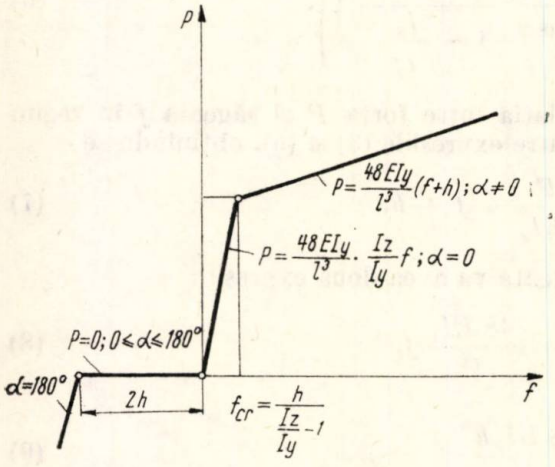


Fig. 2

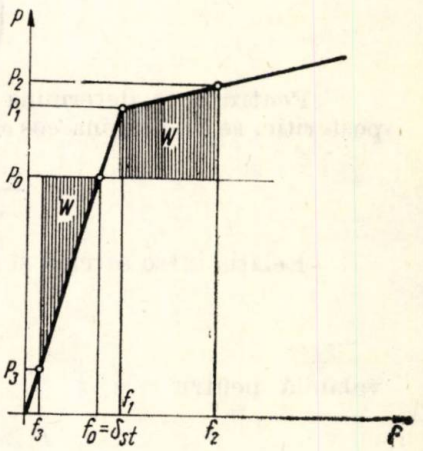


Fig. 3

Se va presupune că în timpul vibrațiilor sarcina totală nu schimbă de semn, aceasta oscilînd în jurul săgeții produse de forța inițială P_0.

Utilizînd metoda energetică, se va presupune că energia introdusă inițial în sistem sub formă de energie cinetică,

$$W = \frac{Q}{2g} v^2, \tag{12}$$

se transformă în energie potențială de deformație a barei. Cu ajutorul curbei caracteristice și al notațiilor din figura 3 se poate scrie

$$\frac{1}{2}(f_1-f_0)(P_1-P_0)+\frac{1}{2}(f_2-f_1)(P_2-P_0+P_1-P_0)=\frac{Q}{2g}v^2. \tag{13}$$

Notînd

$$\frac{48\,EI_y}{l^3}=k, \tag{14}$$

se obține succesiv din relațiile (7), (8), (9), (10), (11)

$$f_1=\frac{h}{\frac{I_z}{I_y}-1}, \tag{15}$$

$$P_1 = K\frac{I_z}{I_y}\frac{h}{\frac{I_z}{I_y}-1}, \tag{16}$$

$$P_0 = K\frac{I_z}{I_y}f_0, \tag{17}$$

$$P_2 = K(f_2 + h), \tag{18}$$

astfel încît ecuația (13) devine

$$\frac{1}{2}\left\{f_2\left[K(f_2+h)+K\frac{I_z}{I_y}\frac{h}{\frac{I_z}{I_y}-1}-2P_0\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{h}{\frac{I_z}{I_y}-1}[K(f_2+h)-P_0]-\frac{P_0}{K\frac{I_z}{I_y}}\left(K\frac{I_z}{I_y}\frac{h}{\frac{I_z}{I_y}-1}-P_0\right)\right\}=\frac{Q}{2g}v^2. \tag{19}$$

Din ecuația (19) se obține următoarea expresie pentru săgeata maximă necunoscută, notată cu f_2:

$$f_2 = -h+\frac{P_0}{K}\pm\sqrt{\frac{\frac{I_z}{I_y}}{\frac{I_z}{I_y}-1}\left[h-\frac{P_0}{K}\frac{\left(\frac{I_z}{I_y}-1\right)}{\frac{I_z}{I_y}}\right]^2+\frac{Q}{Kg}v^2}. \tag{20}$$

Luînd în considerare relația (6), expresia săgeții maxime f_2 se va scrie:

$$\frac{h}{\cos\alpha}\frac{\frac{I_z}{I_y}}{\frac{I_z}{I_y}-1}-h=-h+\frac{P_0}{K}\pm\sqrt{\frac{\frac{I_z}{I_y}}{\frac{I_z}{I_y}-1}\left[h-\frac{P_0}{K}\frac{\left(\frac{I_z}{I_y}-1\right)}{\frac{I_z}{I_y}}\right]^2+\frac{Q}{Kg}v^2},$$

de unde rezultă valoarea maximă a unghiului α în timpul oscilațiilor verticale:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\frac{P_0}{Kh}\left(1-\frac{I_y}{I_z}\right)+\sqrt{\left(1-\frac{I_y}{I_z}\right)\left[1-\frac{P_0}{Kh}\left(1-\frac{I_y}{I_z}\right)\right]^2+\left(1-\frac{I_y}{I_z}\right)^2\frac{Q}{Kg}\frac{v^2}{h^2}}}. \tag{21}$$

Introducînd notațiile

$$\frac{P_0}{K}=\delta_{st}, \tag{22}$$

$$\frac{I_y}{I_z}=a, \tag{23}$$

$$\frac{\delta_{st}}{h} = b, \tag{24}$$

$$\frac{Q}{P_0} = m, \tag{25}$$

$$\frac{v_0^2}{g\delta_{st}} = n^2, \tag{26}$$

$$mn^2 b^2 = \frac{Q}{Kg}\frac{v^2}{h^2} = c, \tag{27}$$

expresia (21) devine

$$\cos\alpha = \frac{1}{b(1-a) + \sqrt{(1-a)[1-b(1-a)]^2 + (1-a)^2 c}}. \tag{28}$$

De remarcat că valoarea maximă a rotirilor grinzii în timpul unei oscilaţii verticale produse ca urmare a unui impuls care introduce în sistem o energie dată depinde de trei parametri a, b, şi c, a căror semnificaţie este dată de expresiile (23), (24) şi (27).

Valorile acestui unghi sînt date funcţie de parametrii menţionaţi în diagramele din figurile 4*a*, *b*, *c* şi 5 *a*, *b*, *c*.

Este de asemenea de menţionat că introducerea energiei în sistem, dacă se neglijează pierderile, se poate face şi prin impulsuri succesive, suma tuturor energiilor efectiv introduse fiind energia luată în considerare. Pe de altă parte, se poate observa că valoarea expresiei din membrul drept al ecuaţiei (28) este mai mică decît unitatea. Se demonstrează uşor că, dacă această expresie este egală cu unitatea, oscilaţia grinzii care se face în jurul săgeţii iniţiale f_0 are amplitudinea $f_1 - f_0$ şi corespunde în ceea ce priveşte sarcina maximă instantanee cu cea critică de flambaj, P_1. Pentru oscilaţii de amplitudine mai mică, unghiul α rămîne nul, oscilaţiile se produc fără pierderi de stabilitate, fiind identice cu oscilaţiile clasice de încovoiere ale unei grinzi în plan vertical, stabilite evident în aceleaşi ipoteze de calcul, respectiv neglijînd efectul masei proprii a grinzii faţă de cea a sarcinilor aplicate. În aceste condiţii, expresia (28) nu mai este valabilă, ea conducînd pentru $\cos\alpha$ la valori mai mari decît unitatea.

La aceeaşi situaţie se ajunge dacă se consideră $a = 1$. În acest caz, rigidităţile la încovoiere pentru cele două direcţii principale de inerţie a secţiunii transversale devin identice, forţa critică de flambaj pendular (3) devine infinită, fenomenul nemaiproducîndu-se, astfel încît α rămîne tot timpul identic nul.

În relaţiile stabilite se presupune că f_3 (vezi fig. 3) are valori pozitive, respectiv se presupune că grinda încărcată iniţial cu sarcina P_0 oscilează în jurul unei poziţii date de săgeata f_0, fără ca în timpul oscilaţiei să se ajungă la o descărcare completă a ei. În aceste condiţii, amplitudinea oscilaţiei pentru cazul în care sarcina se deplasează în jos sub poziţia de echilibru are valoarea $f_2 - f_0$ şi este mai mare decît amplitudinea $f_0 - f_3$ corespunzătoare cazului în care sarcina atinge poziţia maximă superioară.

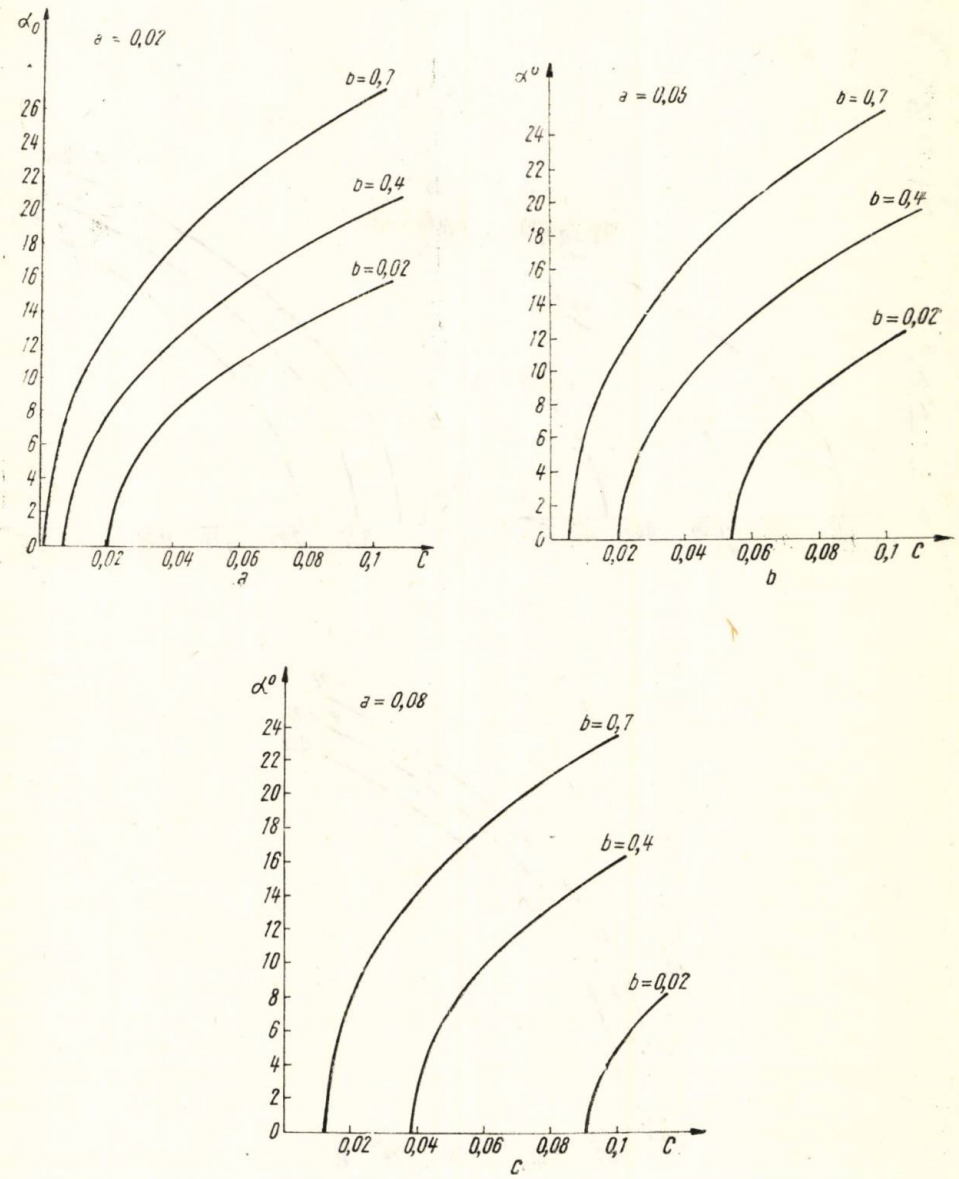

α°
a = 0,02
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26
0,02 0,04 0,06 0,08 0,1 C
a
a = 0,05
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
0,02 0,04 0,06 0,08 0,1 C
b
a = 0,08
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
0,02 0,04 0,06 0,08 0,1 C
c

Fig. 4

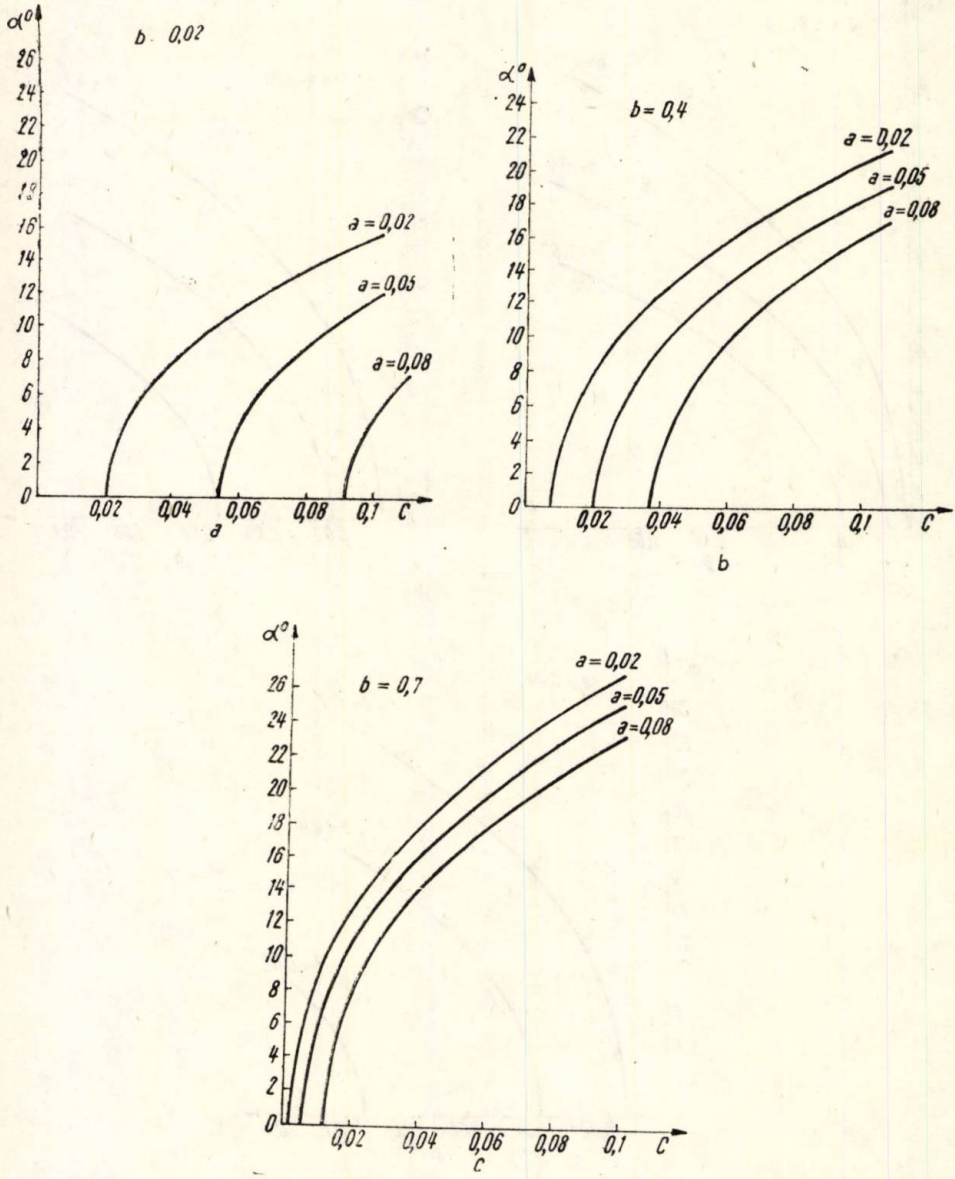

α°
b 0,02
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
0,02 0,04 0,06 0,08 0,1 c
a
b = 0,4
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
b
b = 0,7
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
c

Fig. 5

Sînt rare în practică cazurile în care vibrațiile conduc la o descărcare completă a barei. În acest caz, f_3 ia valori negative, iar grinda trece din nou în domeniul nestabil și tinde să se rotească de această dată liber pînă la 180° fără a se produce nici o reacțiune.

Pentru determinarea frecvenței proprii a vibrațiilor grinzii în jurul poziției de echilibru dat de săgeata f_0, se vor integra analitic ecuațiile mișcării.

Folosind notațiile din figurile 2 și 3, ecuațiile mișcării sînt

$$m\ddot{f} + K'f = 0, \qquad \text{pentru } 0 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_1, \tag{29}$$

$$m\ddot{f} + Kf + (K' - K)\overset{\times}{f}_1 = 0, \qquad \text{pentru } \overset{\times}{f}_1 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_2, \tag{30}$$

unde

$$m = \frac{P_0 + Q}{g},$$

$$K' = K\frac{I_z}{I_y},$$

$$K = \frac{48\,E\,I_y}{l^3},$$

$$\overset{\times}{f}_1 = f_1 - f_0,$$

$$\overset{\times}{f}_2 = f_2 - f_0.$$

Ecuațiile (29) și (30) mai pot fi scrise sub forma

$$\begin{cases} \ddot{f} + \omega_1^2 f = 0, \\ \ddot{f} + \omega_2^2 f + (\omega_1^2 - \omega_2^2)\overset{\times}{f}_1 = 0, \end{cases} \tag{31}$$

în care s-a notat

$$\omega_1^2 = \frac{K'}{m},$$

$$\omega_2^2 = \frac{K}{m}.$$

Soluțiile ecuațiilor (31) sînt respectiv

$$\begin{cases} f = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t, & \text{pentru } 0 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_1, \\ f = D \sin \omega_2 t + E \cos \omega_2 t + \dfrac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2}\overset{\times}{f}_1, & \text{pentru } \overset{\times}{f}_1 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_2. \end{cases} \tag{32}$$

Scriind condițiile la limită

$$\begin{cases} t = 0, \quad f = 0, \\ t = 0, \quad \dot{f} = \dot{f}_0, \end{cases} \tag{33}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

se obține

$$B = 0, \tag{34}$$

$$A = \frac{\dot{f}_0}{\omega_1}. \tag{35}$$

Dacă bara își pierde stabilitatea la timpul t_1, aplicînd condițiile de continuitate pentru săgeată și viteză, se obțin celelalte două constante:

$$E = \frac{\omega_2^2 \dot{f}_0 \sin \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_1 - \omega_2 \dot{f}_0 \omega_1 \cdot \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_1}{\omega_1 \omega_2^2} +$$

$$+ \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2) \omega_1 \overset{\times}{f}_1 \cos \omega_2 t_1}{\omega_1 \omega_2^2}, \tag{36}$$

$$D = \frac{\dot{f}_0 \omega_2^2 \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_1 + \omega_2 \dot{f}_0 \omega_1 \cos \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_1}{\omega_1 \omega_2^2} +$$

$$+ \frac{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \overset{\times}{f}_1 \sin \omega_2 t_1}{\omega_1 \omega_2^2}. \tag{37}$$

Înlocuind valoarea constantelor A, B, D, E în soluțiile (32), după o serie de simplificări rezultă pentru săgeți următoarele expresii:

$$f = \frac{\dot{f}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \qquad \text{pentru } 0 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_1, \tag{38}$$

$$f = \frac{\dot{f}_0 \omega_2^2 \sin \omega_1 t_1 \cos (t - t_1) \omega_2 + \omega_2 \dot{f}_0 \omega_1 \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_2 (t - t_1)}{\omega_1 \omega_2^2} +$$

$$+ \frac{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \overset{\times}{f}_1 \cos (t - t_1) \omega_2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2) \overset{\times}{f}_1 \omega_1}{\omega_1 \omega_2^2}, \tag{39}$$

$$\text{pentru } \overset{\times}{f}_1 \leqslant f \leqslant \overset{\times}{f}_2.$$

Ne interesează valoarea maximă a săgeții dată de expresia (39) și timpul, pe care-l notăm cu t_2, la care se obține acest maxim:

$$t_2 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{arc\,sin} \frac{f_1 - f_0}{\dot{f}_0} \omega_1 + \frac{1}{\omega_2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\dot{f}_0 \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t_1}{\dot{f}_0 \omega_2^2 \sin \omega_1 t_1 + \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \overset{\times}{f}_1} \right), \tag{40}$$

pentru care săgeata f devine maximă și are următoarea expresie:

$$f_{\max} = \overset{\times}{f}_2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2^2} \sqrt{[\dot{f}_0 \omega_2^2 \sin \omega_1 t_1 + (\omega_1^2 - \omega_2^2) \overset{\times}{f}_1 \omega_1]^2 + (f_0' \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t)^2} +$$

$$+ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} f_1. \tag{41}$$

Avînd în vedere că

$$\overset{\times}{f}_1 = \frac{\dot{f}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t_1,$$

și

$$\cos^2 \omega_1 t_1 = 1 - \frac{\overset{\times}{f}_1^2 \omega_1^2}{\dot{f}_0^2},$$

$$\overset{\times}{f}_1 = f_1 - f_0,$$

$$\overset{\times}{f}_2 = f_2 - f_0,$$

relația (41) devine

$$f_2 = f_0 + (f_1 - f_0)\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) + \sqrt{(f_1 - f_0)^2\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1\right] + \dot{f}_0^2 \frac{1}{\omega_2^2}}. \quad (42)$$

În relația (42) $\dot{f}_0$ reprezintă viteza cu care se mișcă sistemul după ce i s-a aplicat cu viteza v_0 sarcina Q. Viteza $\dot{f}_0$ se poate calcula aplicînd principiul conservării energiei și neglijînd efectul frecărilor :

$$\dot{f}_0^2 = \frac{Q}{Q + P_0} v_0^2. \quad (43)$$

Raportul pulsațiilor proprii care intră în relația (42) este

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{I_z}{I_y}, \quad (44)$$

iar din (15) și (16) rezultă

$$f_1 = \frac{h}{\frac{I_z}{I_y} - 1},$$

$$f_0 = \frac{P_0}{K}\frac{I_y}{I_z}.$$

Înlocuind în relația (42) mărimile cunoscute f_0, f_1 și $\dot{f}_0$, rezultă pentru f_2 aceeași relație cu cea obținută prin metoda energetică, adică

$$f_2 = -h + \frac{P_0}{K} \pm \sqrt{\frac{\frac{I_z}{I_y}}{\frac{I_z}{I_y} - 1}\left[h - \frac{P_0}{K}\frac{\left(\frac{I_z}{I_y} - 1\right)}{\frac{I_z}{I_y}}\right]^2 + \frac{Q v^2}{Kg}}.$$

Ea mai poate fi scrisă sub forma adimensională

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(a-1) + b(1-a) + \sqrt{[1 - b(1-a)]^2(1-a) + c(1-a)^2}}{a}. \quad (45)$$

Variația raportului $\frac{f_2}{f_1}$ este reprezentată în figurile 6 *a*, *b*, *c* și 7 *a*, *b*, *c*.

Pentru calculul perioadei vibrației proprii se observă că perioada oscilației T va fi suma dintre :

— timpul t_2 necesar pentru ca grinda să se deplaseze sub poziția de echilibru pînă la realizarea săgeții maxime egale cu f_2 ;

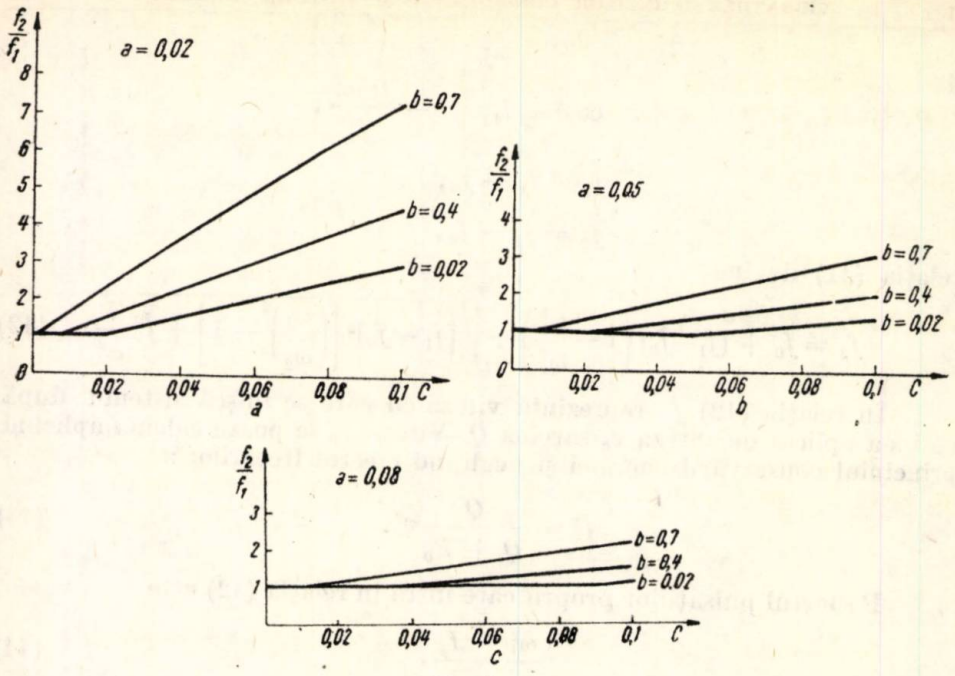

$\frac{f_2}{f_1}$
a = 0,02
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
0,02 0,04 0,06 0,08 0,1 C
a
a = 0,05
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
b
a = 0,08
b = 0,7
b = 0,4
b = 0,02
c

Fig. 6

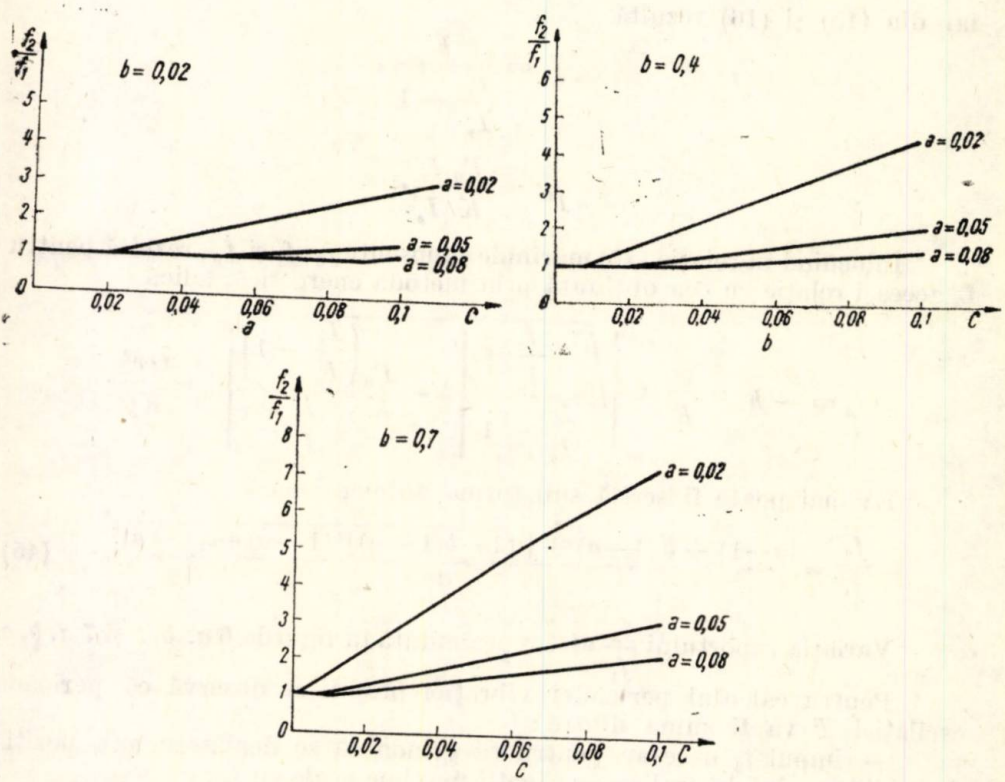

$\frac{f_2}{f_1}$
b = 0,02
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
a
b = 0,4
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
b
b = 0,7
a = 0,02
a = 0,05
a = 0,08
c

Fig. 7

— intervalul de timp t_2' necesar pentru revenirea la poziția de echilibru static, adică la săgeata f_0;

— intervalul de timp t_3 necesar pentru atingerea poziției maxime superioare realizînd săgeata f_3;

— intervalul de timp t_3' necesar pentru revenirea din nou în poziție de echilibru, rămînînd la săgeata f_0.

Intervalele de timp t_2 și t_2' sînt egale și sînt date de relația (40).

Ecuația mișcării grinzii în poziția maximă superioară dată de săgeata f_3 este de aceeași formă ca și ecuația mișcării dată de realația (38):

$$f = \frac{f_1'}{\omega_1} \sin \omega_1 t.$$

Intervalele de timp t_3 și t_3' sînt egale între ele și reprezintă fiecare un sfert din perioada mișcării de mai sus. Se poate scrie deci

$$t_3 = t_3' = \frac{\pi}{2\omega_1}. \tag{46}$$

Perioada vibrației proprii a grinzii are în consecință expresia

$$T = 2t_2 + 2t_3, \tag{47}$$

adică

$$T = \frac{2}{\omega_1} \operatorname{arc\,sin} \frac{f_1 - f_0}{f_0} \omega_1 + \frac{\pi}{\omega_1} + \\ + \frac{2}{\omega_2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{f}_0 \omega_1 \omega_2 \cos \omega_1 t_1}{\dot{f}_0 \omega_2^2 \sin \omega_1 t_1 + \omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)(f_1 - f_0)}. \tag{48}$$

Înlocuind în realația (48) pe $f_1, f_0, \dot{f}_0, \omega_1, \omega_2$ cu expresiile cunoscute și utilizînd parametrii adimensionali dați de relațiile (23), (24), (27), se poate scrie perioada T sub forma

$$T = \frac{2}{\omega_1} \operatorname{arc\,sin} \frac{1 - b(1-a)}{(1-a)} \sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{\pi}{\omega_1} + \\ + \frac{2}{\omega_2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{c(1-a)^2 - [1-b(1-a)]^2 a}}{1-(1-a)b} \right). \tag{49}$$

Cunoscînd perioada vibrației se poate scrie frecvența ν, sub forma

$$\nu = \frac{1}{\frac{2}{\omega_1} \operatorname{arc\,sin} \frac{1-b(1-a)}{(1-a)} \sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{2}{\omega_2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{c(1-a)^2 - [1-b(1-a)]^2 a}}{1-(1-a)b} \right)}.$$

Din relația (50) rezultă raportul adimensional dintre frecvența ν a oscilației pe verticală a grinzii în cazul rotirii ei cu unghiul α și frecvența

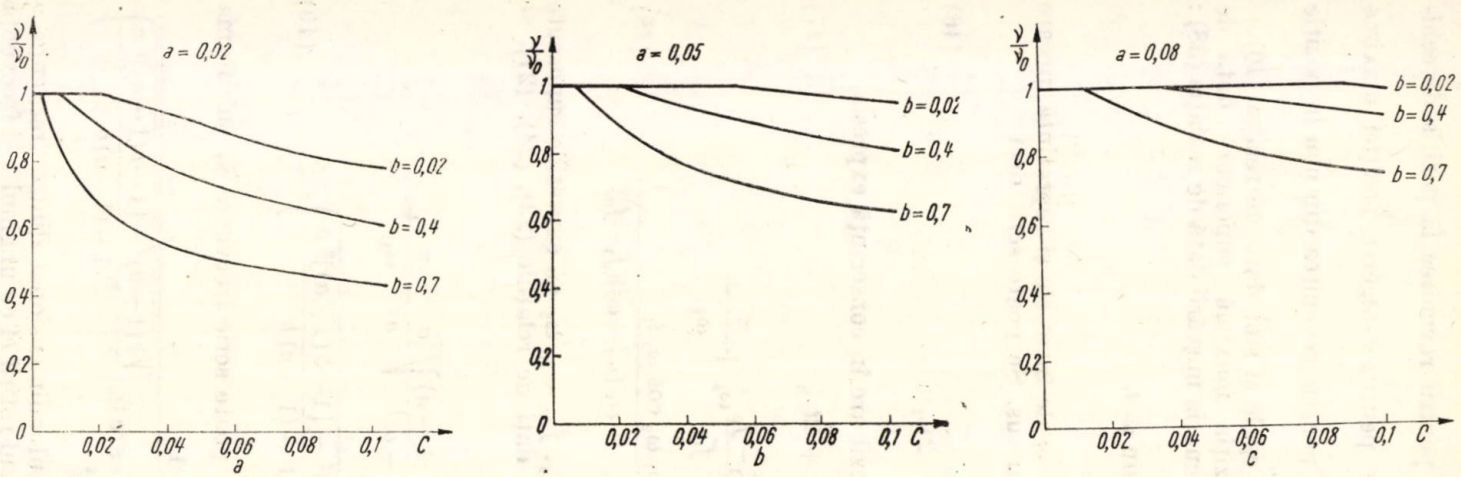

ν/ν0
a = 0,02
b=0,02
b=0,4
b=0,7
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,1
C
a
a = 0,05
b=0,02
b=0,4
b=0,7
b
a = 0,08
b=0,02
b=0,4
b=0,7
c

Fig. 8

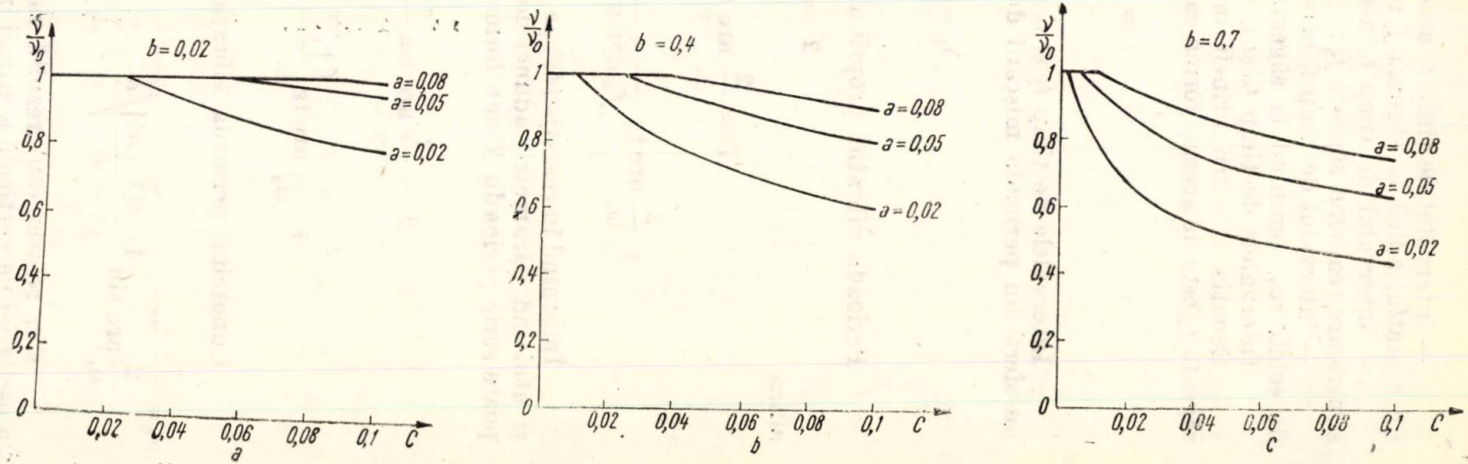

ν/ν0
b = 0,02
a=0,08
a=0,05
a=0,02
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,1
C
a
b = 0,4
a=0,08
a=0,05
a=0,02
b
b = 0,7
a=0,08
a=0,05
a=0,02
c

Fig. 9

ν_0 a vibrației grinzii fără rotirea ei cu unghiul α :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\pi}{\arcsin\frac{1-b(1-a)}{1-a}\sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{c(1-a)^2-[1-b(1-a)]^2 a}}{1-(1-a)b}\right)}.$$

În diagramele din figurile 8 *a*, *b*, *c*, și 9 *a*, *b*, *c* sînt reprezentate variațiile acestui raport în funcție de parametrii *a*, *b*, și *c*.

Primită la redacție la 21 august 1968

BIBLIOGRAFIE

1. A. Petre, V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1964).
2. — *Flambajul lateral al grinzilor pendulare ținînd seama și de solicitarea de răsucire a acestora*, St. cerc. mec. apl., **27**, *5* (1968).

O SOLUȚIE RIGUROASĂ ÎN PROBLEMA ÎNTÎLNIRII CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL PE ORBITE CIRCULARE

de LEON BEINER și MARIA GAVRILĂ
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În lucrarea [1] s-a studiat manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil a două aparate cosmice pe orbite circulare, în ipoteza că aparatul urmărit (fără instalație de propulsie) se află în mișcare pe o orbită circulară, în timp ce aparatul urmăritor, prevăzut cu instalație de propulsie, se mișcă pe o orbită apropiată. S-au obținut soluții aproximative ale problemei variaționale de extremum condiționat, bazate pe condițiile de anulare a accelerațiilor datorită tracțiunii la acostare.

În lucrarea de față se dau soluții exacte ale aceleiași probleme fără a mai impune condiții restrictive accelerației datorită tracțiunii la acostare.

NOTAȚII

$Axzy$ — sistem de axe coordonate legat de aparatul urmărit (țintă) lipsit de instalație de propulsie (fig. 1);

x, z, y — coordonate ale aparatului urmăritor prevăzut cu instalație de propulsie în sistemul $Axzy$;

μ — parametrul gravitațional;

R — raza orbitei țintei;

ω — viteza unghiulară a țintei;

t — timpul;

τ — durata combustiei;

V_x, V_z, V_y — componentele vitezei relative a aparatului urmăritor în sistemul $Axzy$;

a_x, a_z, a_y — componentele accelerației datorită tracțiunii în sistemul $Axzy$;

g_x, g_z, g_y — componentele accelerației gravitaționale în sistemul $Axzy$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 325–338

1. INTRODUCERE

Manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil a două aparate cosmice pe orbite circulare, tratată ca o problemă variațională de extremum condiționat, a fost studiată în [1] în următoarele ipoteze:

— aparatul urmărit A (fig. 1), lipsit de instalație de propulsie, se mișcă în jurul Pămîntului pe o orbită circulară de rază R avînd viteza unghiulară constantă ω;

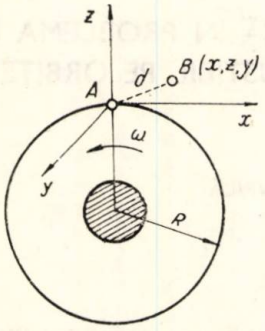


Fig. 1

— aparatul urmăritor B, prevăzut cu instalație de propulsie, se mișcă pe o orbită apropiată de cea a țintei;

— se neglijează influența perturbațiilor altor planete și a rezistenței la înaintare, considerîndu-se că aparatele se mișcă într-un cîmp de atracție newtonian.

Rezolvarea problemei variaționale în lucrarea sus-menționată conducea în final la obținerea expresiilor parametrilor mișcării $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_6(t)$ și de aici ale accelerațiilor datorită tracțiunii $a_x = \frac{\lambda_2}{2}$, $a_z = \frac{\lambda_4}{2}$, $a_y = \frac{\lambda_6}{2}$.

Pentru determinarea constantelor de integrare cuprinse în aceste expresii se foloseau drept condiții la limită valorile cunoscute ale parametrilor mișcării, $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, la $t = 0$ și $t = \tau$, precum și condițiile $a_x(\tau) = 0$, $a_z(\tau) = 0$, $a_y(\tau) = 0$.

În prezenta lucrare se vor indica soluțiile exacte ale aceleiași probleme fără a se impune vreo restricție accelerațiilor datorită tracțiunii a_x, a_z, a_y la acostare.

2. STUDIUL MANEVREI OPTIME DE ÎNTÎLNIRE CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL

Să considerăm sistemul de axe $Axzy$, legat de ținta A și orientat cu z în direcția razei R, x în direcția tangentei la orbită și y normală pe planul xz (fig. 1), aparatul urmăritor $B(x, z, y)$ aflîndu-se pe o orbită în apropierea aparatului A. Considerînd $\sqrt{x^2 + z^2 + y^2} \ll R$, ecuațiile

liniarizate ale mişcării relative a aparatului urmăritor B faţă de sistemul $Axzy$ sînt [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = V_x,\\
&\frac{dV_x}{dt} = 2\omega V_z + a_x,\\
&\frac{dz}{dt} = V_z,\\
&\frac{dV_z}{dt} = -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z,\\
&\frac{dy}{dt} = V_y,\\
&\frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 y + a_y.
\end{aligned} \tag{1}$$

În intervalul de timp dat, problema manevrei de întîlnire cu minimum de combustibil revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^\tau a^2 dt, \tag{2}$$

cu condiţia (1).

Ecuaţiile (1) le scriem sub forma

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = \frac{dx}{dt} - V_x = 0,\\
&\Phi_2 = \frac{dV_x}{dt} - 2\omega V_z - a_x = 0,\\
&\Phi_3 = \frac{dz}{dt} - V_z = 0,\\
&\Phi_4 = \frac{dV_z}{dt} + 2\omega V_x - 3\omega^2 z - a_z = 0,\\
&\Phi_5 = \frac{dy}{dt} - V_y = 0,\\
&\Phi_6 = \frac{dV_y}{dt} + \omega^2 y - a_y = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Introducînd multiplicatorii langrangeeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ în legătură cu condiţiile (1) şi alcătuind funcţia

$$F = a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4 + \lambda_5\Phi_5 + \lambda_6\Phi_6, \tag{4}$$

problema se reduce la găsirea minimului necondiționat al integralei :

$$J' = \int_0^\tau F dt. \tag{5}$$

Deoarece funcția F depinde liniar de derivatele $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ..., $\frac{dV_y}{dt}$, condiția lui Lagrange ca variația a doua a funcționalei (5) să fie nenegativă este îndeplinită.

Folosind funcția (4), ecuațiile lui Euler

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_x}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial V_z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_z}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial V_y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_y}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial a_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_x}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial a_z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_z}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial a_y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{da_y}{dt}} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

conduc în urma calculelor la sistemul [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_1}{dt} = 0,\\
&-\lambda_1 + 2\omega\lambda_4 - \frac{d\lambda_2}{dt} = 0,\\
&-3\omega^2\lambda_4 - \frac{d\lambda_3}{dt} = 0,\\
&-2\omega\lambda_2 - \lambda_3 - \frac{d\lambda_4}{dt} = 0,\\
&\omega^2\lambda_6 - \frac{d\lambda_5}{dt} = 0,\\
&-\lambda_5 - \frac{d\lambda_6}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{7 a}$$

şi la relaţiile algebrice

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\lambda_2}{2},\\
a_z &= \frac{\lambda_4}{2},\\
a_y &= \frac{\lambda_6}{2}.
\end{aligned} \tag{7 b}$$

Din prima ecuaţie (7)

$$\lambda_1 = C_1,$$

iar din celelalte

$$\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_2}{dt} = 2\omega\lambda_4 - C_1,\\
&\lambda_3 = -\frac{d\lambda_4}{dt} - 2\omega\lambda_2,\\
&\frac{d^2\lambda_4}{dt^2} + \omega^2\lambda_4 = 2\omega C_1,\\
&\lambda_5 = -\frac{d\lambda_6}{dt},\\
&\frac{d^2\lambda_6}{dt^2} + \omega^2\lambda_6 = 0.
\end{aligned}$$

Soluţiile sistemului (7 a) vor fi

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= C_1,\\
\lambda_2 &= 2C_2 \sin \omega t - 2C_3 \cos \omega t + 3C_1 t + C_4,\\
\lambda_3 &= -3\omega C_2 \sin \omega t + 3\omega C_3 \cos \omega t - 6\omega C_1 t - 2\omega C_4,\\
\lambda_4 &= C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \omega t + \frac{2C_1}{\omega},\\
\lambda_5 &= \omega C_5 \sin \omega t - \omega C_6 \cos \omega t,\\
\lambda_6 &= C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{8}$$

Expresiile componentelor acceleraţiei datorită tracţiunii devin

$$\begin{aligned}
a_x &= C_2 \sin \omega t - C_3 \cos \omega t + \frac{3}{2} C_1 t + \frac{C_4}{2},\\
a_z &= \frac{C_2}{2} \cos \omega t + \frac{C_3}{2} \sin \omega t + \frac{C_1}{\omega},\\
a_y &= \frac{C_5}{2} \cos \omega t + \frac{C_6}{2} \sin \omega t.
\end{aligned} \tag{9}$$

Cu aceste expresii putem trece la integrarea sistemului (1) pentru a deduce x, z, y, V_x, V_z, V_y. Derivînd a patra ecuaţie (1) şi înlocuind $\frac{dV_x}{dt}$ din a doua ecuaţie, obţinem

$$\frac{d^2 V_z}{dt^2} + \omega^2 V_z = \frac{da_z}{dt} - 2\omega a_x, \tag{10}$$

iar din a şasea ecuaţie (1) avem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = a_y. \tag{11}$$

Ţinînd seama de expresiile (9) ale componentelor acceleraţiei reactive, deducem

$$V_z = \frac{5C_2 t + 4C_7}{4} \cos \omega t + \frac{5C_3 t + 4C_8}{4} \sin \omega t - \frac{3C_1}{\omega} t - \frac{C_4}{\omega}, \tag{12}$$

$$y = \frac{C_5}{4\omega} t \sin \omega t - \frac{C_6}{4\omega} t \cos \omega t + C_9 \cos \omega t + C_{10} \sin \omega t.$$

Cu ajutorul expresiilor V_z şi y, în baza ecuaţiilor (1) se pot deduce în ordine prin simple integrări şi derivări z, V_y, V_x şi x; rezultă

$$\begin{aligned}
z = {} & \frac{5C_2}{4\omega} t \sin \omega t - \frac{5C_3}{4\omega} t \cos \omega t + \left(\frac{C_7}{\omega} + \frac{5C_3}{4\omega^2}\right) \sin \omega t +\\
& + \left(\frac{5C_2}{4\omega^2} - \frac{C_8}{\omega}\right) \cos \omega t - \frac{3C_1}{2\omega} t^2 - \frac{C_4}{\omega} t + C_{11},
\end{aligned}$$

$$V_y = \frac{C_6}{4} t \sin \omega t + \frac{C_5}{4} t \cos \omega t + \left(\frac{C_5}{4\omega} - \omega C_9\right) \sin \omega t +$$

$$+ \left(\omega C_{10} - \frac{C_6}{4\omega}\right) \cos \omega t, \tag{13}$$

$$V_x = \frac{5C_2}{2} t \sin \omega t - \frac{5C_3}{2} t \cos \omega t + \left(\frac{3C_3}{2\omega} + 2C_7\right) \sin \omega t +$$

$$+ \left(\frac{3C_2}{2\omega} - 2C_8\right) \cos \omega t - \frac{9}{4} C_1 t^2 - \frac{3}{2} C_4 t + C_{12},$$

$$x = -\frac{5C_3}{2\omega} t \sin \omega t - \frac{5C_2}{2\omega} t \cos \omega t + \left(\frac{4C_2}{\omega^2} - \frac{2C_8}{\omega}\right) \sin \omega t -$$

$$- \left(\frac{4C_3}{\omega^2} + \frac{2C_7}{\omega}\right) \cos \omega t - \frac{3}{4} C_1 t^3 - \frac{3}{4} C_4 t^2 + C_{12} t + C_{13}.$$

Am obținut astfel, pe baza soluționării problemei cu ajutorul metodelor variaționale, expresiile celor 12 funcții $x(t)$, $z(t)$, $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_6(t)$ care determină complet mișcarea. Aceste expresii sînt similare cu cele obținute la soluționarea aceleiași probleme în lucrarea [3] pe baza metodei mai generale a jocurilor diferențiale, deosebirile provenind din alegerea unei alte variabile independente. Soluția variațională apare deci ca un caz particular al metodei jocurilor diferențiale (principiul maximului).

Relațiile obținute (8), (12), (13) conțin 13 constante arbitrare C_1, C_2, ..., C_{13}, pentru determinarea cărora dispunem de următoarele 12 condiții la limită (șase date inițiale și șase condiții de acostare):

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; & V_x(0) &= V_{x_0}, \\ z(0) &= z_0; & V_z(0) &= V_{z_0}, \\ y(0) &= y_0; & V_y(0) &= V_{y_0}, \\ x(\tau) &= 0; & V_x(\tau) &= 0, \\ z(\tau) &= 0; & V_z(\tau) &= 0, \\ y(\tau) &= 0; & V_y(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Constanta suplimentară, introdusă datorită derivării celei de-a patra ecuații (1), se determină scriind că soluțiile obținute verifică ecuația respectivă. Se capătă astfel relația

$$4C_1 + 3\omega^3 C_{11} - 2\omega^2 C_{12} = 0. \tag{15}$$

Din condițiile (10 și (11) s-au calculat expresiile constantelor

$$C_1 = \frac{-A_6 C_2 - \frac{5\tau}{8} C_3 + A_7 C_4 - A_8}{A_5},$$

$$C_2 = \frac{D_2}{D_1},$$

$$C_3 = \frac{D_3}{D_1},$$

$$C_4 = \frac{D_4}{D_1},$$

$$C_5 = \frac{A_4 - \frac{\tau \sin \omega\tau}{4} \frac{A_2}{A_1}}{\frac{\tau^2 \sin^2 \omega\tau}{16\omega A_1} - A_3},$$

$$C_6 = -\frac{\tau \sin \omega\tau}{4\omega A_1} C_5 - \frac{A_2}{A_1},$$

$$C_7 = V_{z_0} + \frac{1}{\omega} C_4,$$

$$C_8 = \frac{3\tau}{\omega \sin \omega\tau} C_1 - \frac{5\tau}{4} \operatorname{ctg} \omega\tau C_2 - \frac{5\tau}{4} C_3 + \\ + \left(\frac{1}{\omega \sin \omega\tau} - \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega}\right) C_4 - \operatorname{ctg} \omega\tau V_{z0},$$

$$C_9 = y_0,$$

$$C_{10} = \frac{1}{4\omega^2} C_6 + \frac{V_{y0}}{\omega},$$

$$C_{11} = \frac{3\tau}{\omega^2 \sin \omega\tau} C_1 - \left(\frac{5\tau}{4\omega} \operatorname{ctg} \omega\tau + \frac{5}{4\omega^2}\right) C_2 - \frac{5\tau}{4\omega} C_3 + \\ + \left(\frac{1}{\omega^2 \sin \omega\tau} - \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega^2}\right) C_4 - \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega} V_{z0} + z_0,$$

$$C_{12} = \frac{2}{\omega^2} C_1 + \frac{3\omega}{2} C_{11},$$

$$C_{13} = \frac{4}{\omega^2} C_3 + \frac{2}{\omega^2} C_4 + \frac{2}{\omega} V_{z0} + x_0,$$

în car es-a notat

$$D_1 = B_1 B_6 B_{11} + B_3 B_5 B_{10} + B_2 B_7 B_9 - B_3 B_6 B_9 - \\ - B_1 B_7 B_{10} - B_2 B_5 B_{11},$$

$$D_2 = B_3 B_6 B_{12} + B_4 B_7 B_{10} + B_2 B_8 B_{11} - B_4 B_6 B_{11} - \\ - B_3 B_8 B_{10} - B_2 B_7 B_{12},$$

$$D_3 = B_3 B_8 B_9 + B_1 B_7 B_{12} + B_4 B_5 B_{11} - B_1 B_8 B_{11} - \\ - B_3 B_5 B_{12} - B_4 B_7 B_9,$$

$$D_4 = B_4 B_6 B_9 + B_1 B_8 B_{10} + B_2 B_5 B_{12} - \\ - B_1 B_6 B_{12} - B_4 B_5 B_{10} - B_2 B_8 B_9,$$

$$B_1 = \frac{3\tau^3 A_6}{4A_5} + A_9 + \frac{5\tau \cos \omega\tau}{2\omega} - \frac{15\tau^2}{8} \operatorname{ctg} \omega\tau - \frac{15\tau}{8\omega} + \\ + \frac{4\tau A_6}{\omega^2 A_5} - \frac{9\tau^2 A_6}{2\omega \sin \omega\tau A_5},$$

$$B_2 = \frac{15\tau^4}{32A_5} - A_{10} + \frac{5\tau \sin \omega\tau}{2\omega} - \frac{15\tau^2}{8} + \frac{4}{\omega^2} - \\ - \frac{45\tau^3}{16\omega \sin \omega\tau A_5} + \frac{5\tau^2}{2\omega^2 A_5},$$

$$B_3 = \frac{3\tau}{2\omega \sin \omega\tau} - \frac{3\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{2\omega} - \frac{3\tau^2}{4} - \frac{3\tau^3 A_7}{4A_5} + \\ + \frac{9\tau^2 A_7}{2\omega \sin \omega\tau A_5} - \frac{4\tau A_7}{\omega^2 A_5},$$

$$B_4 = - \frac{3\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{2} V_{z_0} + \frac{2V_{z_0}}{\omega} + \frac{3\omega \tau z_0}{2} + x_0 - \\ - \frac{9\tau^2 A_8}{2\omega \sin \omega\tau A_5} + \frac{4\tau A_8}{\omega^2 A_5} + \frac{3\tau^3 A_8}{4A_5},$$

$$B_5 = \frac{3\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_6}{\omega^2 A_5} - \frac{3\tau A_6}{\omega^2 \sin \omega\tau A_5} + \frac{3\tau^2 A_6}{2\omega A_5} + \frac{5\tau \sin \omega\tau}{4\omega} + \\ + \frac{5 \cos \omega\tau}{4\omega^2} + \frac{5\tau \cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{4\omega} - \frac{5\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{4\omega} - \frac{5}{4\omega^2},$$

$$B_6 = \frac{15\tau^2 \operatorname{ctg} \omega\tau}{8\omega^2 A_5} + \frac{15\tau^3}{16\omega A_5} - \frac{15\tau^2}{8\omega^2 \sin \omega\tau A_5} + \\ + \frac{5 \sin \omega\tau}{4\omega^2} - \frac{5\tau}{4\omega},$$

$$B_7 = \frac{3\tau A_7}{\omega^2 \sin \omega\tau A_5} - \frac{3\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_7}{\omega^2 A_5} - \frac{3\tau^2 A_7}{2\omega A_5} - \frac{\tau}{\omega} + \\ + \frac{\sin \omega\tau}{\omega^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega^2} + \frac{\cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2 \sin \omega\tau},$$

$$B_8 = \frac{3\tau^2 A_8}{2\omega A_5} + \frac{\sin \omega\tau}{\omega} V_{z_0} + \frac{\cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega} V_{z_0} -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega} V_{z_0} + z_0 + \frac{3\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_8}{\omega^2 A_5} - \frac{3\tau A_8}{\omega^2 \sin \omega\tau A_5},$$

$$B_9 = \frac{6\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_6}{\omega A_5} - \frac{2A_6}{\omega^2 A_5} - \frac{9\tau A_6}{2\omega \sin \omega\tau A_5} + \frac{9\tau^2 A_6}{4A_5} +$$

$$+ \frac{5\tau \sin \omega\tau}{2} + \frac{3 \cos \omega\tau}{2\omega} + \frac{5\tau \cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{2} - \frac{15\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{8} - \frac{15}{8\omega},$$

$$B_{10} = \frac{15\tau^2 \operatorname{ctg} \omega\tau}{4\omega A_5} - \frac{5\tau}{4\omega^2 A_5} - \frac{45\tau^2}{16\omega \sin \omega\tau A_5} +$$

$$+ \frac{45\tau^3}{32A_5} - \frac{15\tau}{8} + \frac{3 \sin \omega\tau}{2\omega},$$

$$B_{11} = - \frac{6\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_7}{\omega A_5} + \frac{2A_7}{\omega^2 A_5} + \frac{9\tau A_7}{2\omega \sin \omega\tau A_5} - \frac{9\tau^2 A_7}{4A_5} -$$

$$- \frac{3\tau}{2} + \frac{2 \sin \omega\tau}{\omega} - \frac{7 \operatorname{ctg} \omega\tau}{2\omega} + \frac{2 \cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{\omega} + \frac{3}{2\omega \sin \omega\tau},$$

$$B_{12} = \frac{6\tau \operatorname{ctg} \omega\tau A_8}{\omega A_5} - \frac{2A_8}{\omega^2 A_5} - \frac{9\tau A_8}{2\omega \sin \omega\tau A_5} + \frac{9\tau^2 A_8}{4A_5} +$$

$$+ 2 \sin \omega\tau V_{z_0} + 2 \cos \omega\tau \operatorname{ctg} \omega\tau V_{z_0} - \frac{3 \operatorname{ctg} \omega\tau}{2} V_{z_0} + \frac{3\omega z_0}{2},$$

$$A_1 = \frac{\sin \omega\tau}{4\omega^2} - \frac{\tau \cos \omega\tau}{4\omega},$$

$$A_2 = y_0 \cos \omega\tau + \frac{\sin \omega\tau}{\omega} V_{y_0},$$

$$A_3 = \frac{\tau \cos \omega\tau}{4} + \frac{\sin \omega\tau}{4\omega},$$

$$A_4 = \cos \omega\tau V_{y_0} - \omega \sin \omega\tau y_0,$$

$$A_5 = \frac{2}{\omega^2} - \frac{3\tau}{2\omega \sin \omega\tau},$$

$$A_6 = \frac{5\tau \operatorname{ctg} \omega\tau}{8} - \frac{15}{8\omega},$$

$$A_7 = \frac{1}{2\omega \sin \omega\tau} - \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau}{2\omega},$$

$$A_8 = \frac{3\omega z_0}{2} + \frac{\operatorname{ctg} \omega\tau \, V_{z_0}}{2} - V_{x_0},$$

$$A_9 = -\frac{5\tau \cos \omega\tau}{2\omega} + \frac{4 \sin \omega\tau}{\omega^2},$$

$$A_{10} = \frac{5\tau \sin \omega\tau}{2\omega} + \frac{4 \cos \omega\tau}{\omega^2}.$$

În lucrarea [2] s-a tratat aceeași problemă a manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare, considerînd ecuațiile neliniare de mișcare a aparatului urmăritor. În acest caz, spre deosebire de cazul cînd se consideră ecuațiile liniare de mișcare, legile optime de variație ale parametrilor mișcării aparatului urmăritor se deduc printr-un procedeu de aproximații succesive, folosindu-se ca valori inițiale ale parametrilor langrangeeni λ_{10}, λ_{20}, ..., λ_{60} valorile date de teoria liniară expusă mai înainte.

Cu titlul informativ vom da mai jos [2] expresiile neliniare ale parametrilor langrangeeni $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_4^{(1)}$, $\lambda_6^{(1)}$, în primă aproximație, pentru a servi în cadrul aplicației la calculul accelerațiilor neliniare datorită tracțiunii în prima aproximație, $a_x^{(1)} = \frac{\lambda_2^{(1)}}{2}$, $a_z^{(1)} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{2}$, $a_y^{(1)} = \frac{\lambda_6^{(1)}}{2}$, spre a putea face astfel o comparație între valorile date de teoria liniară și cea neliniară:

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(1)} &= \lambda_{20} + (-\lambda_{10} + 2\omega \lambda_{40})t, \\ \lambda_4^{(1)} &= \lambda_{40} - (\lambda_{30} + 2\omega \lambda_{20})t, \\ \lambda_6^{(1)} &= \lambda_{60} - \lambda_{50} t. \end{aligned} \tag{17}$$

3. APLICAȚIE

Cu următoarele date

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 \cdot 10^3 \text{ m}, & V_{x_0} &= -100 \text{ m/s}, \\ z_0 &= 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ m}, & V_{z_0} &= -38 \text{ m/s}, \\ y_0 &= 1 \cdot 10^3 \text{ m}, & V_{y_0} &= -25 \text{ m/s}, \\ R &= 6{,}678 \cdot 10^6 \text{ m}, & \omega &= 0{,}001158 \text{ rad/s}, \end{aligned}$$

$$\tau = 80 \text{ s},$$

s-au calculat după teoria dezvoltată mai sus componentele accelerației datorită tracțiunii, a_x, a_z, a_y, rezultatele fiind înscrise în graficele din figurile 2, 3 și 4. În aceleași figuri au fost trasate diagramele de variație ale accelerațiilor relative totale $a_{xr} = \frac{dV_x}{dt}$, $a_{zr} = \frac{dV_z}{dt}$, $a_{yr} = \frac{dV_y}{dt}$, în conformitate cu expresiile lor date în sistemul (1), precum și cele ale acce-

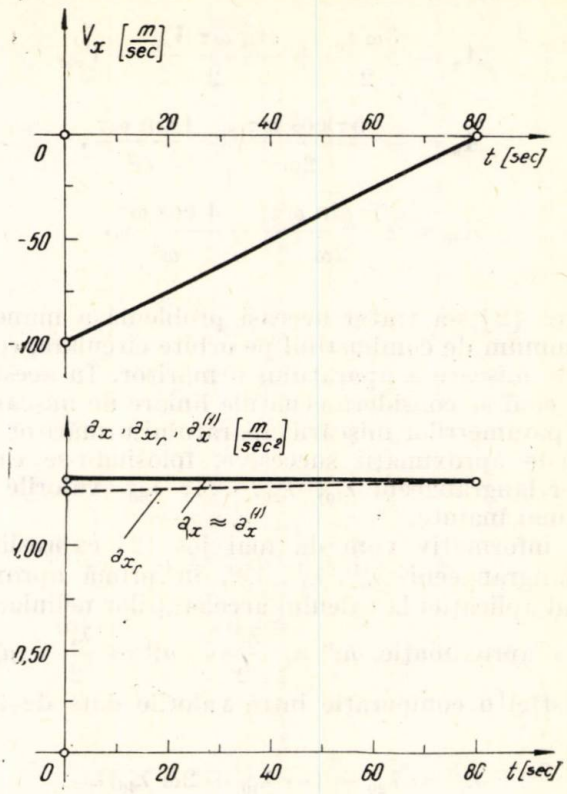

V_x $\left[\frac{m}{sec}\right]$
20
40
60
80
0
-50
-100
t [sec]
a_x , a_{x_r} , $a_x^{(1)}$ $\left[\frac{m}{sec^2}\right]$
$a_x \approx a_x^{(1)}$
a_{x_r}
1,00
0,50
0
20
40
60
80
t [sec]

Fig. 2

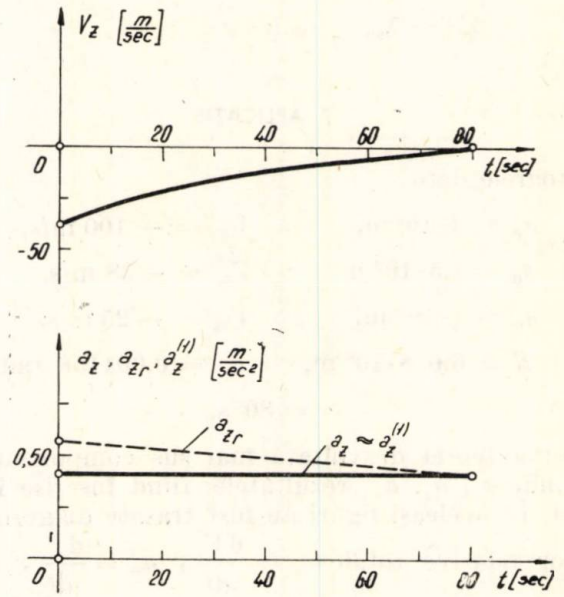

V_z $\left[\frac{m}{sec}\right]$
20
40
60
80
0
-50
t [sec]
a_z , a_{z_r} , $a_z^{(1)}$ $\left[\frac{m}{sec^2}\right]$
a_{z_r}
$a_z \approx a_z^{(1)}$
0,50
1
0
20
40
60
80
t [sec]

Fig.

leraţiilor neliniare datorită tracţiunii în primă aproximaţie $a_x^{(1)}$, $a_z^{(1)}$, $a_y^{(1)}$, date de relaţiile (17). S-au trasat de asemenea diagramele de variaţie ale vitezelor relative V_x, V_z, V_y.

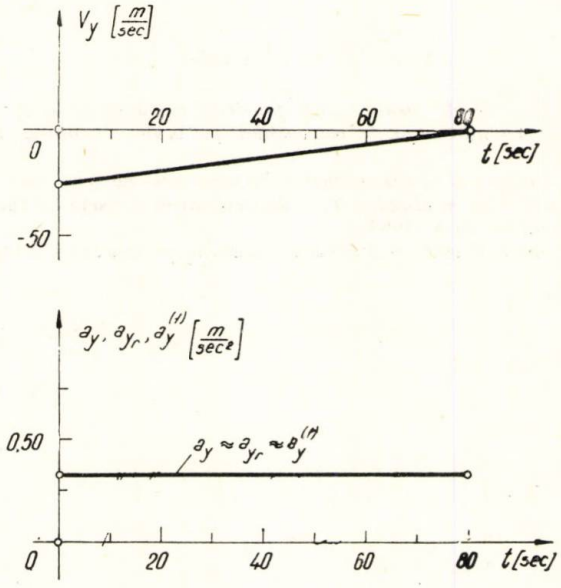


Fig. 4

4. CONCLUZII

Rezultatele aplicaţiei numerice arată că, în ciuda calculelor foarte laborioase, programul acceleraţiei datorită tracţiunii pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil cu date iniţiale de ordinul celor alese rezultă simplu, a_x, a_z şi a_y fiind aproximativ constante. Din examinarea figurilor 2, 3 şi 4 mai rezultă că :

— acceleraţiile datorită tracţiunii sînt predominante pe direcţiile x şi y, în timp ce pe direcţia z se evidenţiază rolul acceleraţiei centrifuge în cadrul acceleraţiei relative totale, ceea ce este fizic real ;

— programul acceleraţiei datorită tracţiunii indică o frînare, ceea ce este în acord cu datele iniţiale, anularea vitezelor relative la acostare putîndu-se verifica uşor pe considerente cinematice simple $\left(\int_0^\tau a_{xr}\, dt = -V_{x_0} \text{ etc.}\right)$;

— acceleraţiile neliniare datorite tracţiunii se confundă cu cele liniare, ceea ce este normal, întrucît datele iniţiale x_0, z_0, y_0 sînt mult mai mici decît R ;

— în cazul vitezelor iniţiale mici, pentru realizarea întîlnirii se obţin pe această cale programe ale acceleraţiilor datorită tracţiunii de tip accelerare-frînare care coincid ca efect cu cele din lucrarea [2].

Înainte de a încheia, autorii țin să mulțumească dr. ing. Al. Marinescu pentru sprijinul acordat în realizarea lucrării.

Primită la redacție la 7 mai 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Marinescu, *Considerații asupra unei probleme variaționale pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare.* St. cerc. mec. apl. *1* (1967).
2. Al. Marinescu, *Untersuchung des optimalen Rendez-vous manövres von Raumfahrzeugen auf Kreisbahne, bei minimalen Treibstoffverbrauch,* Zeitschrifft für Flugwissenschaften, (Braunschweig), *5* (1968).
3. B. H. Billik, *Some optimal low-acceleration rendez vous maneuvers,* AIAA Journal, *3* (1964).

MODELE REOLOGICE PENTRU CALCULUL DEFORMAȚIILOR PĂMÎNTURILOR SATURATE

de AL. VAICUM
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare se prezintă modele reologice pentru pămînturile saturate (cu sau fără schelet rigid-elastic), stabilite prin urmărirea schematizată a procesului de deformare. De asemenea se dau funcțiile reologice și diagramele de fluaj și de relaxare.

Studiile teoretice și experimentale efectuate în diferite țări au arătat că în calculul deformațiilor pămînturilor rezultatele teoretice sînt de multe ori diferite de cele măsurate, ceea ce nu permite o proiectare mai judicioasă a construcțiilor amplasate pe terenurile puternic compresibile. Natura pămînturilor (materiale neomogene, disperse, anizotrope) și complexitatea fenomenelor care apar în timpul încărcării masivelor de pămînt nu au permis pînă acum să se elaboreze modele matematice specifice acestor materiale și s-au utilizat cele existente pentru mediile continue, omogene și izotrope. De cele mai multe ori se caută o rezolvare empirică totală sau parțială, care de multe ori a dat rezultate satisfăcătoare (datorită unei supradimensionări apreciabile), dar uneori a dus la consolidări costisitoare sau chiar la renunțarea exploatării construcției. Acest mod de rezolvare nu poate fi acceptat decît pentru perioade limitate, deoarece nu permite o generalizare și o dezvoltare a mecanicii pămînturilor și nici o proiectare mai rațională a fundațiilor construcțiilor.

De aceea sînt necesare a se elabora scheme noi de calcul, plecînd de la o cunoaștere mai accentuată a fenomenului fizic și a proprietăților pămînturilor, și a se urmări procesul de deformare, la început chiar cu un model matematic mai simplificat, dar care să nu neglijeze anumite proprietăți esențiale ale mediului.

Sub acțiunea încărcărilor se modifică atît starea de tensiune din masiv, cît și cea de deformație, dar, în timp ce prima se efectuează aproape instantaneu, cea de-a doua are nevoie de o perioadă de timp uneori destul de lungă pentru a se stabiliza fenomenul. Acest lucru ne arată că, dacă în

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 339–347

problemele de capacitate portantă parametrul timp poate fi neglijat, în problemele de deformație caracterul reologic este un factor determinant.

Se va căuta a se prezenta un model reologic pentru pămînturile puternic compresibile saturate, pentru care metodele de calcul actuale dau valori mai reduse decît cele care apar în exploatare.

După cum s-a arătat într-o lucrare anterioară [5], pămîntul se va considera ca un mediu vîsco-elastic și se va căuta pe baza fenomenului fizic real schematizat a se elabora un model mecanic structural care să reprezinte cît mai fidel esența fenomenului de deformare. Pe baza acestui model se vor elabora funcțiile reologice și ecuațiile curbelor fundamentale corespunzătoare, utilizînd modelul matematic al teoriei elasticității, dar cu alte relații de legătură între tensiuni și deformații specifice. Se fac următoarele ipoteze :

1) pămîntul este mediu vîsco-elastic liniar (deci este valabil principiul lui Boltzman) ;

2) pămîntul este complet saturat cu apă ;

3) deformațiile pămîntului sînt datorite exclusiv tensiunilor efective, cele neutre neavînd decît un rol întîrzietor ;

4) creșterile de tensiuni și de deformații sînt mici ;

5) pămînturile sînt medii omogene, izotrope și continue.

Pămînturile puternic compresibile se pot împărți după rigiditatea legăturilor în două categorii ; fără schelet structural și cu schelet rigid-elastic. Prima categorie de pămînturi este alcătuită de obicei din prafuri argiloase fine cu mari cantități de substanțe organice, o parte din particule fiind în stare de suspensie. Nivelul apei subterane se consideră același cu al terenului.

În prima etapă de deformare, încărcarea este preluată atît de faza lichidă, cît și de cea solidă. Pe măsură ce încărcările cresc, se creează o supra presiune în lichid care începe să fie evacuat și în același timp apare o îndesare a particulelor și o creștere a valorii tensiunilor. În această perioadă, tensiunile efective sînt proporționale cu viteza de deformare, care la rîndul ei este în funcție de viteza de evacuare a apei. Deci în această etapă putem considera că sînt încărcate numai legăturile vîscoase de slabă intensitate. Apa care se evacuează are un rol întîrzietor în producerea deformațiilor și efectul ei va fi cuprins în caracteristica de viscozitate a amortizorului. Cu timpul se micșorează volumul porilor, deplasările dintre particule devin apreciabile, ceea ce provoacă ruperea unor legături vîscoase, dar concomitent, datorită apropierii lor de alte particule, apar și legături elastice care iau locul celor vîscoase distruse și care inițial au aceeași valoare a tensiunii. În această etapă de deformare se poate considera că legături vîscoase lucrează în serie cu cele elastice, iar pe măsură ce continuă să rămînă încărcat masivul fenomenul se repetă : legăturile vîscoase se distrug și concomitent apar legături elastice.

Procesul de consolidare se termină atunci cînd toate legăturile vîscoase au fost înlocuite cu cele elastice. Acest mod de deformare poate fi exprimat cu ajutorul unui model mecanic structural, alcătuit dintr-un amortizor și un resort legați în serie (model Maxwell). Deoarece particulele de pămînt sînt extrem de neomogene, fenomenele de suprafață, avînd forme și intensități diferite, asocierea lor dă naștere la complexe vîsco-elastice de rigidități diferite și deci cu valori diferite a tensiunilor din ele,

fapt care se poate prezenta în modelul mecanic prin legarea în paralel a două sau a mai multor complexe Maxwell. Deci, ca model structural, pentru aceste pămînturi se poate utiliza un model Maxwell generalizat, format, eventual, din două ramuri într-o primă aproximație (fig. 1). Un astfel de model a fost studiat de diferiți autori [3], determinîndu-se atît funcțiile reologice, cît și diagramele fundamentale.

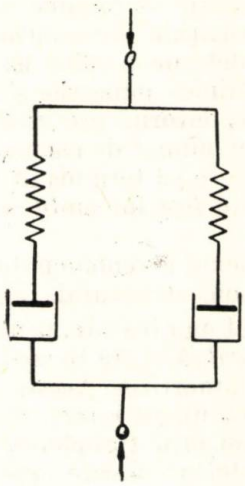


Fig. 1

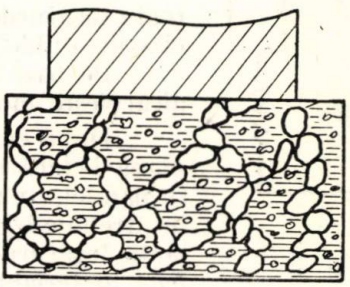


Fig. 2

O comportare mai complexă o are a doua categorie de pămînturi cu schelet rigid-elastic, în care caz preluarea eforturilor de către particulele de pămînt comportă mai multe etape. Trebuie menționat că ne ocupăm de tensiunile efective și nu de cele totale, deoarece acestea produc tasările construcțiilor. Structura acestor pămînturi este alcătuită dintr-o serie de particule argilo-nisipoase legate între ele printr-un liant mineral, format în timpul depunerilor stratelor (cînd nu există apă în exces) sau prin diferiți lianți organici, formînd scheletul rigid-elastic. Între golurile scheletului se află un material de umplutură, alcătuit din particule foarte fine argiloase și diferite substanțe organice. Acest material de umplutură parțial se află în stare de suspensie (fig. 2).

Cînd începe încărcarea masivului de pămînt, eforturile sînt preluate de particulele scheletului și de apa din pori. Din cauza presiunii create, apa începe să fie evacuată și încarcă și particulele materialului de umplutură. Deci în prima etapă de deformare apar tensiuni atît în particulele scheletului, cît și în materialul de umplutură, unde valoarea tensiunilor este mult mai redusă, deoarece o parte din ele sînt luate de apa care se evacuează. Această etapă de încărcare se va reprezenta în model printr-un complex visco-elastic cu cele două elemente legate în paralel. În continuare, legăturile dintre particulele scheletului se distrug progresiv și materialul de umplutură se compactează. Prin apropierea particulelor apar legături elastice suplimentare, care înlocuiesc treptat pe cele vîscoase ce se distrug datorită deplasărilor și care transferă tensiunile legăturilor elastice noi (datorită apropierii particulelor și înmulțirii suprafețelor de

contact). Deci în ambele legături valoarea tensiunii este aceeaşi, dar mărimea deformaţiilor este mai mare în cele vîscoase, care sînt mai puţin rigide. Aceasta înseamnă că noile legături elastice care apar în locul celor vîscoase ce se distrug sînt legate în serie cu cele vîscoase nerupte şi tot complexul acesta vîsco-elastic va lucra în paralel cu legăturile elastice ale particulelor rămase legate din vechiul schelet. Chiar dacă valoarea încărcării va rămîne constantă la un moment dat, deformaţiile vor continua să se dezvolte pînă cînd particulele de pămînt îşi vor găsi noi poziţii stabile prin mărimea punctelor şi a suprafeţelor de contact şi unde, datorită presiunilor locale importante, legăturile sînt numai de natură elastică. Deci procesul de deformare se va termina atunci cînd toate legăturile vîscoase au fost înlocuite cu legături elastice duble.

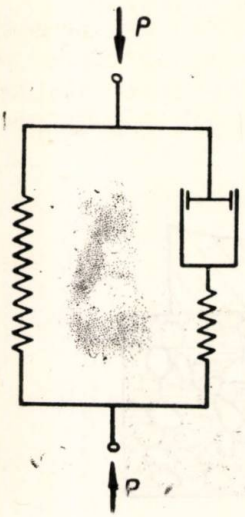


Fig. 3

Pe baza acestei scheme a fenomenului fizic se alcătuieşte modelul mecanic structural.

După cum s-a arătat mai înainte, pentru prima etapă de încărcare vor trebui să apară în model, legate în paralel, un resort şi un amortizor. Acesta, la rîndul lui, trebuie legat în serie cu un alt resort, care reprezintă legăturile elastice noi prin apropierea particulelor materialului de umplutură şi care înlocuiesc pe cele vîscoase distruse (fig. 3).

Se caută să se determine cele două funcţii reologice (una sferică şi alta deviatorică) pentru modelul de mai sus). Tensorul tensiunilor (sferic sau deviatoric) totale din masivul de pămînt este egal cu suma celor doi tensori din cele două ramuri, deci

$$\begin{aligned} p_v &= p_{v1} + p_{v2}, \\ p_0 &= p_{01} + p_{02}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dar componentele tensorului deformaţiilor sînt aceleaşi în cele două ramuri (e_v şi e_0). Deci pentru ramura din stînga relaţiile dintre tensiuni şi deformaţii vor fi

$$\begin{aligned} p_{v1} &= \alpha \cdot e_v, \\ p_{01} &= \beta \cdot e_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pentru ramura din dreapta, unde sînt legate în serie un corp vîscos şi unul elastic, în ambele vor exista aceleaşi componente ale tensorului tensiune (p_{v2} şi p_{02}); în schimb, componentele tensorului deformaţiilor vor diferi în cele două corpuri :

— în corpul vîscos :

$$\begin{aligned} p_{v2} &= A \cdot \dot{e}_{v2}, \\ p_{02} &= B \cdot \dot{e}_{02}; \end{aligned} \tag{3}$$

— în corpul elastic :

$$\left.\begin{aligned} p_{v2} &= \alpha_1 \cdot e_{v1}, \\ p_{02} &= \beta_1 \cdot e_{01}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$e_v = e_{v1} + e_{v2} \text{ și } e_0 = e_{01} + e_{02}. \tag{5}$$

Pentru a găsi ecuația reologică a corpului vîsco-elastic este necesar să se determine relația dintre părțile sferice ale tensorilor tensiunilor și deformațiilor totale și de asemenea între părțile deviatorice și deformațiile totale :

$$\dot{e}_v = \dot{e}_{v1} + \dot{e}_{v2}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{v1} &= \frac{p_{v2}}{\alpha_1}, \\ \dot{e}_{v2} &= \frac{\dot{p}_{v2}}{A}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Deci valoarea vitezei totale de deformare este

$$\dot{e}_v = \frac{p_{v2}}{A} + \frac{\dot{p}_{v2}}{\alpha_1}. \tag{8}$$

Pentru componentele deviatorice se obține

$$\dot{e}_0 = \dot{e}_{01} + \dot{e}_{02}, \tag{9}$$

$$\dot{e}_{01} = \frac{\dot{p}_{02}}{\beta_1}; \quad \dot{e}_{02} = \frac{p_{02}}{B}, \tag{10}$$

$$\dot{e}_0 = \frac{p_{02}}{B} + \frac{\dot{p}_{02}}{\beta_1}. \tag{11}$$

În determinarea funcțiilor reologice pentru întregul model se pornește de la relațiile (2), (8) și (11). Relațiile (2) se pun sub o altă formă :

$$\left.\begin{aligned} p_v &= p_{v1} + p_{v2}, \text{ de unde } p_{v2} = p_v - p_{v1} \text{ și } \dot{p}_{v2} = \dot{p}_v - \dot{p}_{v1}, \\ p_0 &= p_{01} + p_{02}, \text{ de unde } p_{02} = p_0 - p_{01} \text{ și } \dot{p}_{02} = \dot{p}_0 - \dot{p}_{01}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Introducem valorile tensorilor din (12) în relațiile (8) și (11) deci

$$\dot{e}_v = \frac{p_v - p_{v1}}{A} + \frac{\dot{p}_v - \dot{p}_{v1}}{\alpha_1}; \tag{13}$$

dar

$$p_{v1} = \alpha \cdot e_v, \text{ iar } \dot{p}_{v1} = \alpha \cdot \dot{e}_v,$$

$$\dot{e}_v = \frac{p_v - \alpha \cdot e_v}{A} + \frac{\dot{p}_v - \alpha \cdot \dot{e}_v}{\alpha_1}, \tag{14}$$

de unde se obține ecuația reologică a componentelor sferice :

$$\frac{\alpha}{A} e_v + \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_1}\right) \dot{e}_v = \frac{p_v}{A} + \frac{\dot{p}_v}{\alpha_1}. \tag{15}$$

În mod similar pentru componentele deviatorice se determină ecuația reologică de stare :

$$\dot{e}_0 = \frac{p_{02}}{B} + \frac{\dot{p}_{02}}{\beta_1} = \frac{p_0 - p_{01}}{B} + \frac{\dot{p}_0 - \dot{p}_{01}}{\beta_1}; \tag{16}$$

dar

$$p_{01} = \beta \cdot e_0, \text{ iar } \dot{p}_{01} = \beta \cdot \dot{e}_0.$$

Rezultă

$$\dot{e}_0 = \frac{p_0 - \beta \cdot e_0}{B} + \frac{\dot{p}_0 - \beta \cdot \dot{e}_0}{\beta_1}, \tag{17}$$

$$\frac{\beta}{B} e_0 + \left(1 + \frac{\beta}{\beta_1}\right) \dot{e}_0 = \frac{p_0}{B} + \frac{\dot{p}_0}{\beta_1}. \tag{18}$$

Pentru a se vedea dacă ipoteza făcută de deformare a masivului este verificată de funcțiile reologice obținute, și anume că încetează procesul de deformare, cînd rămîn să lucreze numai legăturile elastice, în relațiile (15) și (18) se va considera că viteza de deformare este nulă, deci $\dot{e}_v = 0$ și $\dot{e}_0 = 0$, iar tensorul tensiunilor este constant, deci $\dot{p}_v = 0$ și $\dot{p}_0 = 0$.

În această ipoteză, ecuațiile (15) și (18) vor avea forma

$$\frac{\alpha}{A} e_v = \frac{p_v}{A}, \text{ rezultă } p_v = \alpha \cdot e_v,$$

$$\frac{\beta}{B} e_0 = \frac{p_0}{B}, \text{ rezultă } p_0 = \beta \cdot e_0,$$

deci au rezultat ecuațiile reologice ale corpului cu legături perfect elastice, conform ipotezei făcute că procesul de tasare în timp încetează cînd toate legăturile vîscoase au fost înlocuite cu cele elastice.

Să se analizeze în continuare modul de comportare în timp al masivului sub acțiunea încărcărilor, adică să se determine curbele reologice fundamentale (de relaxare și de fluaj).

Pentru obținerea curbei de relaxare se va considera că se menține o valoare constantă pentru tensorul deformațiilor; atunci funcțiile reologice (15) și (18) vor lua forma

$$\frac{p_v}{A} + \frac{\dot{p}_v}{\alpha_1} = \frac{\alpha}{A} e_v^0, \tag{19}$$

iar pentru componentele deviatorice forma

$$\frac{p_0}{B} + \frac{\dot{p}_0}{\beta_1} = \frac{\beta}{B} e_0^0. \tag{20}$$

În vederea integrării ecuațiilor diferențiale de mai sus vom face o schimbare de variabilă astfel:

$$\dot{p}_v + \frac{\alpha_1}{A} p_v = \frac{\alpha \cdot \alpha_1}{A} \dot{e}_v, \tag{21}$$

$$\dot{p}_v + \frac{\alpha_1}{A} (p_v - \alpha e_v^0) = 0, \tag{22}$$

$$\dot{p}_v + \frac{\alpha_1}{A} (p_v - p_v^0) = 0, \tag{23}$$

$$p_v - p_v^0 = P_v, \tag{24}$$

$$\dot{p}_v = \dot{P}_v. \tag{25}$$

Se obține ecuația diferențială

$$\dot{P}_v + \frac{\alpha_1}{A} \cdot P_v = 0. \tag{26}$$

Integrînd această ecuație, se obține

$$P_v = [P_v^0] \times e^{-\frac{\alpha_1}{A} t}. \tag{27}$$

Revenind la variabila inițială,

$$p_v = [p_v^0] \left(1 + e^{-\frac{\alpha_1}{-A} t}\right), \tag{28}$$

iar pentru componentele deviatorice

$$p_0 = [p_0^0] \times \left(1 + e^{-\frac{\beta_1}{B} t}\right). \tag{29}$$

Deci curbele de relaxare sînt de natură exponențială descrescătoare, ca în figura 4, și se constată că valoarea tensorului tensiunii poate să se reducă pînă la jumătate, datorită fenomenului de relaxare.

Pentru determinarea curbei de fluaj se va menține tensiunea constantă. În această ipoteză, funcțiile reologice vor fi

$$\frac{\alpha}{A} e_v + \frac{\alpha + \alpha_1}{\alpha_1} \dot{e}_v = \frac{p_v^0}{A}, \tag{30}$$

$$\dot{e}_v + \alpha K e_v = K p_v^0, \tag{31}$$

$$K = \frac{\alpha_1}{A(\alpha + \alpha_1)}. \tag{32}$$

Se integrează ecuaţia diferenţială (31), făcînd înlocuirea

$$e_v = \mathrm{u} \cdot z; \quad \dot{e}_v = U \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + Z \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{33}$$

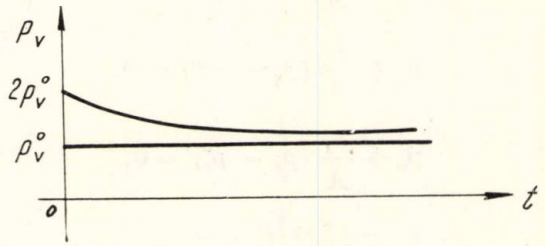


Fig. 4

Se obţine

$$U = e^{-\alpha K t} \text{ şi } Z = \frac{p^0 v}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha K t} + C, \tag{34}$$

$$\frac{p^0 v}{\alpha} = e_v^0. \tag{35}$$

Pentru curba de fluaj (fig. 5), ecuaţia va avea forma

$$e_v = [e_v^0](1 - \mathrm{e}^{-\alpha K t}). \tag{36}$$

Se observă că, datorită legăturilor vîscoase, se întîmplă un fenomen de „elasticitate întîrziată", ceea ce explică obţinerea unor caracteristice

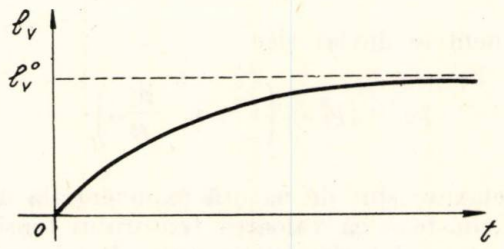


Fig. 5

elastice ale pămînturilor mult prea optimiste, cînd se efectuează încercări rapide care ne conduc la determinarea unor valori reduse ale tasărilor în comparaţie cu valorile reale. Analiza deformării masivului de pămînt s-a făcut în ipoteza unor pămînturi cu compresibilitate mare saturate, dar aceleaşi relaţii sînt valabile pentru orice pămînt saturat.

Studiile experimentale vor trebui să precizeze valoarea coeficienţilor reologici α, β, α_1, β_1, A şi B pentru diferitele pămînturi.

Deci cu ajutorul funcţiilor reologice găsite (15) şi (18) şi al celor şase parametri, comportarea masivului de pămînt sub acţiunea încărcărilor este complet definită.

În viitor rămîne a se vedea modul de determinare a parametrilor reologici sau anumite relații de legătură cu caracteristicile de deformare utilizate în actualele metode de calcul.

Primită la redacție la 19 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bjerrum, *Engineering geology of norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings*, Norwegian geotechnical institute, No. 71, Oslo, 1967.
2. A. Migliacci, *Soluzioni asintotiche di sistemi di equazioni integrali di Volterra relative a strutture iperstatiche con comportamento viscoso*, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano, 1963.
3. W. Nowachi, *Théorie du fluage*, Eyrolles, Paris, 1965.
4. J. Kravtchenko, P. M. Sirіes, *Rheology and Soil Mechanics*, IUTAM Symposium Grenoble, 1964, Springer Verlag, Berlin.
5. A. Vaicum, *Contribuții la stabilirea funcțiilor reologice pentru pămînturi puternic compresibile nesaturate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1968) .

ARIPĂ DELTA DE REZISTENȚĂ MINIMĂ ÎN CURENT HIPERSONIC MODERAT*)

de ADRIANA NĂSTASE
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În prezenta lucrare se determină forma optimă a suprafeței unei aripi delta groase portante plasate într-un curent hipersonic, pentru care sînt date: proecția în plan, portanța, momentul de picaj și volumul; aripa se presupune de asemenea închisă pe bordurile sale de atac și de fugă.
În comparație cu lucrările anterioare de rezistență minimă, elementul nou al acestei lucrări îl constituie introducerea în expresia coeficientului de presiune C_p a unui termen cvadratic de corecție pe lîngă termenul liniar introdus de ipoteza perturbațiilor mici.
Aplicînd metoda variațională, problema de extremum propusă se reduce la rezolvarea unui sistem finit de ecuații algebrice de gradul doi.

1. SCURT ISTORIC

Într-o serie de lucrări se tratează problema de rezistență minimă a aripii delta separat, fie în curent supersonic [1]—[14], fie în curent hipersonic [3], [15]—[21], la numere Mach foarte mari, la care e valabilă teoria de impact a lui Newton. Conform acestei teorii, curentul la impactul cu corpul își pierde componenta normală a impulsului, pe cînd cea tangențială rămîne neschimbată.

Lucrările care se bazează pe această teorie pornesc de la expresia coeficientului de presiune locală,

$$C_p = 2 \sin^2 \delta, \tag{1}$$

unde s-a notat cu δ unghiul dintre planul tangent la suprafața locală a corpului și direcția curentului principal.

*) Principalele rezultate prezentate în acest articol au fost comunicate sub titlul *L'aile delta de résistance minimum en courant supersonique et hypersonique modéré* la Conferința de mecanică din septembrie 1965 (București).

La calculul caracteristicilor aerodinamice, prin această metodă se consideră doar suprafeţele care „văd" curentul, iar zonele de expansiune, în care presiunea este foarte mică, sînt presupuse că nu aduc nici o contribuţie în caracteristicile aerodinamice ale aripii.

Ipoteza de impact a lui Newton este corectă doar pentru $M_\infty \to \infty$, iar cu cît numărul Mach este mai mic, ea devine din ce în ce mai puţin exactă. De aceea ne-am propus în prezenta lucrare să luăm ca punct de plecare expresia unitară a coeficientului de compresiune-expansiune dedus de acad. E. Carafoli în lucrarea [22]. Această formulă acoperă un domeniu de scurgere caracterizat printr-o gamă largă de numere Mach, care înglobează tot domeniul supersonic-hipersonic şi care conţine scurgerea newtoniană ca un caz-limită cînd $M_\infty \to \infty$.

Originalitatea prezentului capitol constă tocmai în acest punct de plecare diferit faţă de lucrările sus-menţionate, care tratează separat cele două domenii supersonic şi hipersonic limită.

Noţiunea de curent hipersonic moderat care intervine în titlul acestui articol se referă la faptul că efectele termice şi electromagnetice sînt neglijate. Această neglijare se poate admite, conform experienţelor, pînă la $M_\infty \cong 10$. Pentru numere Mach mai mari, rezultatele teoretice sînt alterate şi fenomenele sus-menţionate trebuie luate în considerare.

2. INTRODUCERE

În prezenta lucrare se determină forma optimă a suprafeţei unei aripi de grosime nesimetrică pentru care sînt date: proiecţia în plan, coeficientul de portanţă, momentul de picaj şi volumul. Aripa trebuie să satisfacă în plus condiţiile de a fi închisă pe bordurile sale de atac şi de fugă.

Pentru coeficientul de presiune C_p pornim de la formula unitară stabilită de E. Carafoli într-o lucrare anterioară [22]. Dezvoltăm această formulă în serie de puteri ale lui $\frac{u}{U_\infty}$ şi reţinem primii doi termeni. Vom avea astfel

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{u}{U_\infty}\right)^2 - 2\frac{u}{U_\infty}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{4}\left(M_\infty^2\frac{u}{U_\infty}\right)^2} = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2, \qquad (2)$$

unde

$$\alpha_1 = -\frac{2}{U_\infty};\quad \alpha_2 = \frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{''_\infty}{U_\infty}\right)^2 \qquad \left(\frac{u}{U_\infty} < \frac{4}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{M_\infty{}^2}\right). \qquad (3)$$

Această dezvoltare în serie de puteri a lui C_p este valabilă dacă presupunem că $\frac{u}{U_\infty} \leqslant \frac{4}{\gamma+1}\frac{1}{M_\infty^2}$. Pentru un număr Mach corespunzător domeniului hipersonic moderat cuprins între 2 şi 8 şi pentru un zbor de croazieră la care determinăm forma optimă a aripii delta, incidenţa este totuşi suficient de mică, aşa încît ne putem opri la primii doi termeni

ai dezvoltării. Noua expresie a coeficientului de presiune poate fi utilizată pentru o gamă mai largă de valori ale unghiului de incidență și pentru numere Mach din domeniul supersonic și hipersonic moderat, datorită termenului pătratic introdus în plus față de studiile anterioare, care capătă și el o valoare importantă la deviații importante ale curentului și la numere Mach mai mari.

3. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE U

Înainte de a trece la explicitarea expresiei axiale de perturbație u, vom indica notațiile utilizate în cursul expunerii. Vom raporta aripa la un sistem de axe triortogonale $Ox_1x_2x_3$, avînd axa Ox_1 paralelă cu viteza U_∞ a curentului neperturbat de la infinit și planul Ox_1x_2 care conține aripa presupusă aplatisată (fig. 1). Vom considera că pe aripă există o viteză verticală de perturbație w, care este obținută prin superpoziția unor polinoame omogene, adică

$$w = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^k, \tag{4}$$

unde

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \qquad w_{m-k-1,\,k} = w^{(\tau)}_{m-k-1,\,k} + w^{(\varepsilon)}_{m-k-1,\,k}. \tag{5}$$

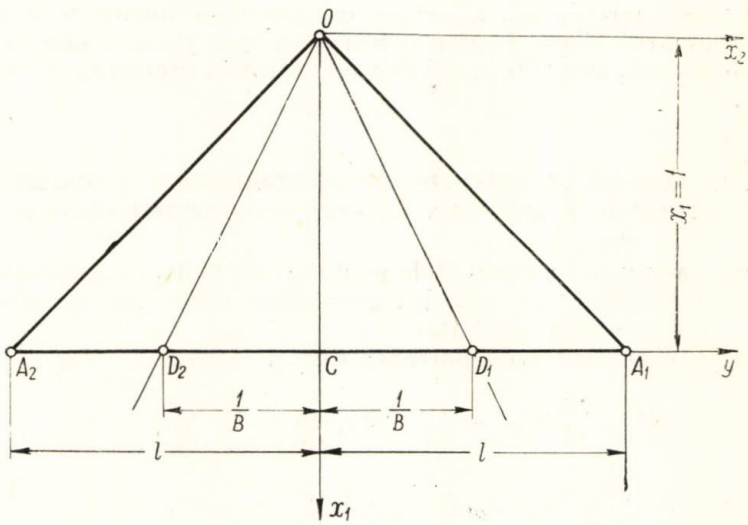


Fig. 1

În această formulă, $w_{m-k-1,\,k}$ sînt constante, iar $N-1$ reprezintă gradul polinomului omogen de cel mai mare ordin luat în considerare în expresia lui w; s-au notat cu indicele ε termenii proveniți din componenta de grosime simetrică și cu τ termenii proveniți din componenta subțire (schelet).

Dacă viteza verticală de perturbație w este dată sub forma (4), viteza axială de perturbație u pentru aripa nesimetrică se obține prin superpoziția vitezelor axiale ale aripilor componente, subțire și de grosime simetrică, sub forma dată anterior [23].

Vom considera aripa cu bordurile de atac supersonice pentru care viteza axială este de forma

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n} \left[K_{nq}\, y^q \left(\arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-By)}{2B\,(l-y)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+By)}{2B\,(l+y)}} \right) + \frac{D_{nq}\, y^q}{\sqrt{1-B^2y^2}} \right] = u^{(\tau)} + u^{(\varepsilon)}. \qquad (6)$$

Coeficienții vitezei axiale de perturbație u sînt legați de coeficienții vitezei verticale de perturbație w prin relații liniare perfect determinate în lucrările anterioare [6], [7], [23], [24]. Vom putea deci scrie

$$K_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (k_{qj}^{(n)}\, w_{n-j-1,j}^{(\tau)} + \varkappa_{qj}^{(n)}\, w_{n-j-1,\,j}^{(\varepsilon)}), \qquad (7\,a)$$

$$D_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (d_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,\,j}^{(\tau)} + \delta_{qj}^{(n)} w_{n-j-1,\,j}^{(\varepsilon)}). \qquad (7\,b)$$

În aceste relații, $k_{qj}^{(n)}$, $\varkappa_{qj}^{(n)}$ etc. sînt funcții de forma în plan a aripii (l) și de numărul Mach. Pentru o formă în plan dată și pentru o viteză de croazieră dată, acești termeni sînt constanți în problema de extremum studiată.

4. CALCULUL CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ȘI CONDIȚIILE GEOMETRICE DE LEGĂTURĂ ALE ARIPII DELTA GROASE PORTANTE

Avem acum toate elementele pentru a explicita caracteristicile aerodinamice și condițiile de legătură geometrice care intervin în problema noastră de extremum studiată.

Astfel, coeficientul de portanță este de forma

$$C_l = \iint (C_{p_2} - C_{p_1})\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\Lambda_{nj} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j'=0}^{n-1} \Lambda_{nj\,n'j'}\, w_{n'-j'-1,j'}^{(\varepsilon)} \right] w_{n-j-1,\,j}^{(\tau)} = C_{l_0} = \text{const.} \qquad (8)$$

În această formulă, Λ_{nj} și $\Lambda_{nj\,n'j'}$ sînt constante în problema de extremum și sînt date în anexă.

În formula (8), primul termen corespunde termenului liniar al lui C_p și cel de-al doilea corespunde termenului cvadratic al lui C_p din formula (2) și apare ca un termen de interferență între aripile componente subțiri și de grosime simetrică.

Aceleași observații sînt valabile și pentru momentul de picaj :

$$C_m = \iint (C_{p_2} - C_{p_1})\, x_1^2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Big[\Gamma_{nj} + \sum_{n'=1}^{N} \sum_{j'=0}^{n-1} \Gamma_{njn'j'}\, w^{(\varepsilon)}_{n'-j'-1,j'} \Big] w^{(\tau)}_{n-j-1,j} = C_{m_0} = \text{const}, \tag{9}$$

constantele Γ_{nj} și $\Gamma_{njn'j'}$ fiind legate de Λ_{nj} și $\Lambda_{njn'j'}$ prin relațiile

$$\Gamma_{nj} = \frac{n+1}{n+2}\, \Lambda_{nj}, \tag{10}$$

$$\Gamma_{njn'j'} = \frac{n+n'}{n+n'+1}\, \Lambda_{njn'j'}. \tag{11}$$

Coeficientul de rezistență de undă

$$C_d = \iint (C_{p_2} w_2 - C_{p_1} w_1)\, x_1\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Big\{ \Omega^{(\tau,\tau)}_{nmkj}\, w^{(\tau)}_{n-j-1,j}\, w^{(\tau)}_{m-k-1,k} + \Omega^{(\varepsilon\varepsilon)}_{nmkj}\, w^{(\varepsilon)}_{n-j-1,j}\, w^{(\varepsilon)}_{m-k-1,k} +$$

$$+ \sum_{n'=1}^{N} \sum_{j'=0}^{n'-1} \Big[\Omega^{(\tau\tau)}_{nmkjn'j'}\, w^{(\tau)}_{n-j-1,j} w^{(\tau)}_{n'-j'-1,j'} + \Omega^{(\tau,\varepsilon)}_{nmkjn'j'}\, w^{(\tau)}_{n-j-1,j}\, w^{(\varepsilon)}_{n'-j'-1,j'} +$$

$$+ \Omega^{(\varepsilon,\varepsilon)}_{nmkjn'j'}\, w^{(\varepsilon)}_{n-j-1,j}\, w^{(\varepsilon)}_{m-k-1,k} \Big] w^{(\varepsilon)}_{m-k-1,k} \Big\} \tag{12}$$

conține, în afara primilor doi termeni cvadratici care provin din termenul liniar $\alpha_1 u$ al lui C_p, o serie de termeni de ordinul trei în raport cu coeficienții lui w și care provin din termenul cvadratic $\alpha_2 u^2$ al lui C_p. Primii doi dintre acești ultimi termeni au un caracter de interferență între aripile componente, iar cel de-al treilea este introdus numai de aripa de grosime simetrică.

Constantele $\Omega^{(\tau\tau)}_{nmkj}$, $\Omega^{(\varepsilon\varepsilon)}_{nmkj}$, $\Omega^{(\tau\tau)}_{nmkjn'j'}$ etc. sînt date în anexă.

Condițiile geometrice de legătură se explicitează ușor, plecînd de la expresia (4) a lui w. Z se obține, cu aproximația unei funcții arbitrare de x_2, prin integrarea lui w în raport cu x_1.

Astfel condiția de închidere pe bordul de fugă A_1A_2 se scrie ($x_1 = 1$, $Z^{(\varepsilon)} = 0$)

$$Z^{(\varepsilon)} = \int w^{(\varepsilon)}\, \mathrm{d}x_1 + f(x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_2^k}{m-k} (x_1^{m-k} - 1)\, w^{(\varepsilon)}_{m-k-1,k}. \tag{13}$$

Din această relație am determinat funcția arbitrară $f(x_2)$ și, în consecință, această relație nu va interveni printre relațiile de legătură ale problemei.

Condiția de închidere a aripii pe bordul de atac OA_1 ($y = l$, $Z^{(\varepsilon)} = 0$) conduce la relații de legătură de forma

$$E_t \equiv \sum_{m=t+1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} d_{mk}^{(t)} w_{m-k-1,k}^{(\varepsilon)} = 0,$$
$$d_{mk}^{(t)} = \frac{l^k}{m-k} (\delta_m^t - \delta_k^t) \qquad [t = 0,1,\ldots,(N-1)]. \tag{14}$$

În sfîrșit, condiția de volum dat devine

$$V \equiv \int Z^{(\varepsilon)} x_1 \, dx_1 \, dy = \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{mk} w_{m-k-1,k}^{\varepsilon} = 0, \tag{15}$$

unde

$$\tau_{mk} = - \frac{2 l^{k+1}}{U_\infty (k+1)(k+2)(m+2)}. \tag{16}$$

5. FORMULAREA PROBLEMEI DE EXTREMUM ȘI REZOLVAREA EI

Putem trece acum la calculul problemei de extremum propuse. Se cere deci

$$C_a = \min, \tag{17}$$

cu condițiile de legătură

$$C_l = \text{const}, \; C_m = \text{const}, \quad E_t = 0, \; V = V_0. \tag{18}$$

Această problemă de extremum cu legături se reduce la studiul unei probleme de extremum fără legături a hamiltonianului:

$$H = C_a + \lambda^{(0)} V_0 + \lambda^{(1)} C_l + \lambda^{(2)} C_m + \sum_{t=0}^{N-1} \lambda_t E_t, \tag{19}$$

în care $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ și λ_t sînt multiplicatorii lui Lagrange.

La rîndul lui extremumul funcției H se obține anulîndu-i prima sa variație ($\delta H = 0$). Efectuînd această operație și ținînd seama și de faptul că coeficienții $w_{n-j-1,j}^{(\tau)}$ și $w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)}$ sînt independenți, vom obține

$$\mathcal{C}_{\theta\sigma}^{(\tau)} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Big\{ (\lambda^{(1)} \Lambda_{\theta+\sigma+1,\sigma,n,j} + \lambda^{(2)} \Gamma_{\theta+\sigma+1,\sigma,n,j}) w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} [(\Omega_{\theta+\sigma+1,m,k,\sigma,n,j}^{(\tau,\tau)} + \Omega_{nmkj,\theta+\sigma+1,\sigma}^{(\tau,\tau)}) w_{n-j-1,j}^{(\tau)} +$$
$$+ \Omega_{\theta+\sigma+1,m,k,\sigma n,j}^{(\tau,\varepsilon)} w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)}] w_{m-k-1,k}^{(\varepsilon)} \Big\} = 0, \tag{20}$$

ecuație care provine din anularea coeficientului variației $\delta w_{\theta\sigma}^{(\tau)}$, și ecuația

$$\mathcal{E}_{\theta\sigma} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Big\{ (\lambda^{(1)} \Lambda_{n,j,\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda^{(2)} \Gamma_{n,j,\theta+\sigma+1,\sigma}) \, w_{n-j-1,j}^{(\tau)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} [(\Omega_{n,\theta+\sigma+1,j,m,k}^{(\tau,\varepsilon)} + \Omega_{n\,m\,kj,\theta+\sigma+1,\sigma}^{(\tau,\varepsilon)}) \, w_{n-j-1,j}^{(\tau)} +$$

$$+ (\Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j,m,k}^{(\varepsilon,\varepsilon)} + \Omega_{n\,m\,kj,\theta+\sigma+1,\sigma}^{(\varepsilon,\varepsilon)} +$$

$$+ \Omega_{\theta+\sigma+1,m\,k,\sigma\,nj}^{(\varepsilon,\varepsilon)}) \, w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)}] \, w_{m-k-1,k}^{(\varepsilon)} \Big\} = 0 \tag{21}$$

$$(\theta, \sigma) = 0,1 \ldots (N-1),$$

$$1 \leqslant \theta + \sigma + 1 \leqslant N,$$

care provine din anularea coeficientului variației $\delta w_{\theta\sigma}^{(\varepsilon)}$.

În aceste ecuații s-au făcut următoarele notații:

$$\mathcal{E}_{\theta\sigma}^{(\tau)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} [\Omega_{\theta+\sigma+1,n,j\sigma}^{(\tau)} + \Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(\tau)}] \, w_{n-j-1,j}^{(\tau)} +$$

$$+ \lambda^{(1)} \Lambda_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda^{(2)} \Gamma_{\theta+\sigma+1,\sigma}, \tag{22 a}$$

$$\mathcal{E}_{\theta\sigma}^{(\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} [\Omega_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}^{(\varepsilon)} + \Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}^{(\varepsilon)}] \, w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)} + \lambda^{(0)} \tau_{\theta+\sigma+1,\sigma}. \tag{22 b}$$

Dacă considerăm termenii pătratici din (20), vom putea constata că toți termenii au caracter de interferență. Dacă anulăm componenta de grosime simetrică ($w_{n-j-1,j}^{(\varepsilon)} = 0$), ecuația (20) are aceeași formă ca și cea dată anterior [6] pentru aripa delta subțire. Ea conține numai termeni liniari și e de forma $\mathcal{E}_{\theta\sigma}^{(\tau)} = 0$.

În schimb, în ecuația (21) în afara termenilor de interferență mai apar și termeni cvadratici „proprii" aripii de grosime simetrică, care nu dispar atunci cînd se anulează efectul curburii scheletului. Dacă pe lîngă termenii de interferență vom anula în ecuație (21) și termenii neliniari „proprii", vom obține și în acest caz ecuația dată anterior [7] pentru aripa delta de grosime simetrică de rezistență minimă în curent supersonic, care conține numai termenii liniari și este de forma $\mathcal{E}_{\theta\sigma}^{(\varepsilon)} = 0$.

Ecuațiile (20), (21) împreună cu condițiile de legătură (18) formează un sistem care determină distribuția optimă a vitezei verticale de perturbație $w_{n-j-1,j}$ și, în consecință, forma optimă a aripii în curent supersonic și moderat hipersonic.

6. ANEXĂ DE CALCUL

Constantele Λ_{nj} ale termenilor din formula (8) a lui C_l, care sînt datorați termenului liniar al coeficientului de presiune C_p, se deduc din valorile date anterior [6] pentru constantele corespunzătoare aripii

delta subţiri cu ambele borduri de atac supersonice în curent supersonic Vom avea astfel

$$\Lambda_{nj}^{**} = \frac{8}{l\,U_\infty\,(n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} d_{2q,\,j}^{(n)}\, \mathcal{J}_{2q}^{**}\left(0\,;\,\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h_{qj}^{(n)}}{q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2} \left(1 + (-1)^q\right) \sum_{t=0}^{q} l^{q-t}\, \mathcal{J}_t^{**}\left(0,\,\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + l^{q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} \right] \right\}. \tag{23}$$

În mod similar, coeficienţii termenilor cvadratici din formula (12) a coeficientului de rezistenţă de undă C_d, care provin din termenul liniar al lui C_p, se deduc din expresiile lui $\Omega_{n\,m\,k\,j}$ date anterior [6], [7] pentru aripa delta subţire sau de grosime simetrică cu ambele borduri de atac supersonic în curent supersonic. Obţinem astfel următoarele valori pentru $\Omega_{n\,m\,k\,j}^{(\tau,\,\tau)}$ şi $\Omega_{n\,m\,k\,j}^{(\varepsilon,\,\varepsilon)}$ care intervin în expresia (12) a lui C_d:

$$\Omega_{n\,m\,k\,j}^{(\tau,\,\tau)} = \frac{8}{U_\infty^2\, l\,(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} d_{2q,\,j}^{(n)}\, \mathcal{J}_{k+2q}\left(0\,;\,\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2} \left(1 + (-1)^q\right) \sum_{t=0}^{k+q} l^{k+q-t}\, \mathcal{J}_t^{**}\left(0,\,\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + l^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} \right] \right\}, \tag{24}$$

iar pentru $\Omega_{n\,m\,k\,j}^{(\varepsilon,\,\varepsilon)}$ o expresie similară, în care înlocuim constantele $d_{qj}^{(n)}$ şi $k_{qj}^{(n)}$ cu corespondentele lor de la aripa componentă de grosime simetrică, şi anume cu $\delta_{qj}^{(n)}$ şi, respectiv $\varkappa_{qj}^{(n)}$.

În expresiile (23) şi (24) s-a notat cu $\Lambda_{nj\,n'j'}$ integrala definită de tip I_t^{**} (considerate integrale nedefinite)

$$\mathcal{J}_k^{**}\left(0,\,\frac{1}{B}\right) = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^k\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}}, \tag{25}$$

care are următoarele valori:

$$\mathcal{J}_{2t}^{**}\left(0,\,\frac{1}{B}\right) = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^{2t}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} = \frac{\pi\,(2t)\,!}{2^{2t+1}\,(t\,!)^2\,B^{2t+1}} \qquad (k = 2t), \tag{26}$$

$$\mathcal{J}_{2t+1}^{**}\left(0,\,\frac{1}{B}\right) = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^{2t+1}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} = \frac{2^{2t}\,(t\,!)^2}{(2t+1)\,!\;B^{2t+2}} \qquad (k = 2t+1). \tag{27}$$

Să trecem acum la explicitarea coeficienţilor $\Lambda_{njn'j'}$ ai termenilor cvadratici din expresia (8) a lui C_l (care sînt datoraţi termenului cvadratic de corecţie din expresia lui C_p).

Vom obține astfel

$$\Lambda_{njn'j'} = \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2U_\infty l(m+n)} \sum_{q=0}^{n}\sum_{q'=0}^{n'} \Big\{ k_{qj}^{(n)} \varkappa_{q'j'}^{(n')} \Big[\mathcal{L}_{200}^{(q+q')} + \Big((-1)^q + (-1)^{q'}\Big)\mathcal{L}_{110}^{(q+q')} + (-1)^{(q+q')}\mathcal{L}_{020}^{(q+q')} + \frac{\pi^2\Big((Bl)^{q+q'+1}-1\Big)}{2B^{q+q'+1}(q+q'+1)}\Big] + (k_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')} + d_{qj}^{(n)}\varkappa_{q'j'}^{(n')})\mathcal{L}_{101}^{(q+q')} + [(-1)^q k_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')} + (-1)^{q'} d_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')}]\mathcal{L}_{011}^{(q+q')} + d_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')}\mathcal{L}_{002}^{(q+q')} \Big\}. \tag{28}$$

În mod analog, coeficienții $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\tau)}$, $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\varepsilon)}$, și $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\varepsilon,\varepsilon)}$ ai termenilor de gradul trei din expresia (12) a lui C_d (care sînt datorați termenului cvadratic de corecție a lui C_p) vor fi, respectiv, de forma

$$\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\tau)} = \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{lU_\infty^3(m+n+n'-1)} \sum_{q=0}^{n}\sum_{q'=0}^{n'} \Big\{ k_{qj}^{(n)} k_{q'j'}^{(n')}, \Big[\mathcal{L}_{200}^{(k+q+q')} + \Big((-1)^q + (-1)^{q'}\Big)\mathcal{L}_{110}^{k+q+q'} + (-1)^{q+q'}\mathcal{L}_{020}^{(k+q+q')} + \frac{\pi\Big((Bl)^{k+q+q'+1}-1\Big)}{2(m+n+n'-1)(Bl)^{k+q+q'+1}}\Big] + (k_{qj}^{(n)} d_{q'j'}^{(n')} + d_{qj}^{(n)} k_{q'j'}^{(n')})\mathcal{L}_{101}^{(k+q+q')} + [(-1)^q k_{qj}^{(n)} d_{q'j'}^{(n)} + (-1)^q d_{qj}^{(n)} k_{q'j'}^{(n')}]\mathcal{L}_{011}^{(k+q+q')} + d_{qj}^{(n)} d_{q'j'}^{(n')}\mathcal{L}_{002}^{(k+q+q')} \Big\}$$

și

$$\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\varepsilon)} = \frac{2(\gamma+1)M_\infty^2}{lU_\infty^3(m+n+n'+1)} \sum_{q=0}^{n}\sum_{q'=0}^{n'} \Big\{ k_{qj}^{(n)} \varkappa_{q'j'}^{(n')} \Big[\mathcal{L}_{200}^{(k+q+q')} + \Big((-1)^q + (-1)^{q'}\Big)\mathcal{L}_{110}^{(k+q+q')} + (-1)^{q+q'}\mathcal{L}_{020}^{(k+q+q')} + \tag{29}$$

$$+ \frac{\pi^2\Big((Bl)^{k+q+q'+1}-1\Big)}{2(m+n+n'-1)(Bl)^{k+q+q'+1}}\Big] + (k_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')} + d_{qj}^{(n)}\varkappa_{q'j'}^{(n')})\mathcal{L}_{101}^{(k+q+q')} + [(-1)^q k_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')} + (-1)^{q'} d_{qj}^{(n)}\varkappa_{q'j'}^{(n')}]\mathcal{L}_{011}^{(k+q+q')} + d_{qj}^{(n)}\delta_{q'j'}^{(n')}\mathcal{L}_{002}^{(k+q+q')} \Big\}, \tag{30}$$

iar constantele $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\varepsilon,\varepsilon)}$ se obțin din expresiile (28) ale lui $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\tau)}$ prin înlocuirea coeficienților $k_{qj}^{(n)}$ și $d_{qj}^{(n)}$, cu corespondenții lor $\varkappa_{qj}^{(n)}$ și $\delta_{qj}^{(n)}$.

În expresiile constantelor $\Lambda_{njn'j'}$, $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\tau)}$, $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\tau,\varepsilon)}$, și $\Omega_{nmkjn'j'}^{(\varepsilon,\varepsilon)}$ s-a notat cu $\mathcal{L}_{p,r,s}^{(q)}$ următoarea integrală definită, de tip $L_{prs}^{(q)}$ (considerate integrale nedefinite)

$$\mathcal{L}_{prs}^{(q)} = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^q (\arccos M_1)^p (\arccos M_2)^r}{(1-B^2y^2)^{\frac{s}{2}}}\,dy, \tag{31}$$

în care M_1 și M_2 sînt, respectiv de forma

$$M_1 = \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-By)}{2B(l-y)}}; \qquad M_2 = \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+By)}{2B(l+y)}}. \tag{32}$$

Din analiza expresiilor sus-amintite $\Lambda_{njn'j'}$, $\Omega^{(\tau,\tau)}_{nmkjn'j'}$ etc. rezultă că în aceste formule intervin doar integralele pentru care $p + r + s = 2$, adică $L^{(q)}_{200}$, $L^{(q)}_{110}$, $L^{(q)}_{020}$, $L^{(q)}_{101}$, $L^{(q)}_{011}$, $L^{(q)}_{002}$, care sînt de forma

$$L^{(q)}_{200} = \int y^q (\arccos M_1)^2 \, dy = \frac{y^{q+1} - l^{q+1}}{q+1} (\arccos M_1)^2 - \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{q+1} \sum_{t=0}^{q} l^{q-t} L^{(t)}_{101}, \tag{33}$$

$$L^{(q)}_{020} = \frac{y^{q+1} - (-l)^{q+1}}{q+1} (\arccos M_2)^2 - \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{q+1} \sum_{t=0}^{q} (-l)^{q-t} L^{(t)}_{011}, \tag{34}$$

$$L^{(q)}_{110} = \int y^q \arccos M_1 \arccos M_2 \, dy = \frac{y^{q+1} - l^{q+1}}{q+1} \arccos M_1 \arccos M_2 + \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2(q+1)} \sum_{t=0}^{q} l^{q-t} I_t^{**} \arccos M_2 + \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2(q+1)} \left[\sum_{t=0}^{q} (-l)^{q-t} L^{(t)}_{101} + l^{q+1} ((1 + (-1)^q) \int \frac{\arccos M_1 \, dy}{(y+l)\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \frac{B^2 l^2 - 1}{4(q+1)} \sum_{t=0}^{q} l^{q-t} \int \frac{I_t^{**} \, dy}{(y+l)\sqrt{1 - B^2 y^2}}, \right. \tag{35}$$

$$L^{(q)}_{101} = \int \frac{y^q \arccos M_1 \, dy}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} = \frac{q-1}{qB^2} L^{(q-2)}_{101} - \frac{y^{q-1}}{qB^2} \sqrt{1 - B^2 y^2} \arccos M_1 - \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2qB^2} \left[\sum_{\nu=0}^{q-2} \frac{l^\nu y^{q-2}}{q - \nu - 1} + l^{q-1} \ln (y - l) \right], \tag{36}$$

$$L^{(q)}_{011} = \int \frac{y^q \arccos M_2 \, dy}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} = \frac{q-1}{qB^2} L^{(q-2)}_{011} - \frac{y^{q-1}}{qB^2} \sqrt{1 - B^2 y^2} \arccos M_2 - \frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2qB^2} \left[\sum_{\nu=0}^{q-2} \frac{(-l)^\nu y^{q-2}}{q - \nu - 1} + (-l)^{q-1} \ln (y - l) \right], \tag{37}$$

$$L^{(q)}_{002} = \int \frac{y^q}{1 - B^2 y^2} \, dy, \tag{38}$$

care are valorile

$$L^{(2t)}_{002} = \frac{1}{2B^{2t+1}} \ln \frac{1 + By}{1 - By} - \sum_{\nu=0}^{t-1} \frac{y^{2t-2\nu-1}}{(2t - 2\nu - 1) B^{2(\nu+1)}} \qquad (q = 2t), \tag{39 a}$$

$$L^{(2t+1)}_{002} = -\frac{1}{2B^{2t+2}} \ln (1 - B^2 y^2) - \sum_{\nu=0}^{t-1} \frac{y^{2t-2\nu}}{(2t - 2\nu) B^{2(\nu+1)}} \qquad (q = 2t+1). \tag{39 b}$$

Primită la redacție la 5 octombrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. R. T. Jones, *The Minimum Drag of Thin Wings in Frictionless Flow*, JAS, **18**, 2 (1951).
2. M. E. Graham, P. A. Lagerstrom, *Reduction of Minimum Drag Problem in Supersonic Flow to Two-Dimensional Potential Problem by Means of the Combined Flow Field*, Douglas Air Co-rep SM-23901, March (1960).
3. A. Miele, ed., *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*, Academic Press, New York—Londra, 1965.
4. M. N. Kogan, *O telah minomalnovo soporrbleniia v sverhzvukovom potoke gaza*, P.M.M., **21**, 2 (1957).
5. Maurice Fenain, Denise Vallée *Application de la théorie des écoulements homogènes à la recherche de l'adaptation de certaines ailes en régime supersonique*, ONERA Memo Technique, 14 (1949).
6. Elie Carafoli, Adriana Năstase, *Minimum Drag Thin Triangular Wing in Supersonic Flow*, R.M.A., **V**, 5 (1960).
7. — *On the Minimum Drag Problem of the Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, R.M.A., **VII**, 2 (1962).
8. — *L'utilisation de la méthode des residuus dans le problème de résistance minimum de l'aile trapézoïdale en courant supersonique*, Arhiwum Mehaniki Stosowanej, (Polonia), **3**, 16, (1964); Fluid Dynamic Transaction (Anglia), 2 (1965).
9. — *Trapetsievidnye krylia s minimalnym lobovym soprotivleniem v sverhzvukovom potoke*, Mehanika (Moscova), 1 (1961).
10. — *The Optimum Shape of the Cruciform Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl. **XI**, 2 (1967).
11. — *Minimum Drag Thin Delta Wing with Finite Velocity at the Leading Edges in Supersonic Flow*. Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **XII**, 5 (1967).
12. Adriana Năstase, *About the Minimum Drag Problem of the Trapezoidal Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*. Rev.Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **XIV**, 1 (1969).
13. H. Yoshihara, I. Kainer, T. Strand, *On Optimum Thin Lifting Surfaces at Supersonic Speeds*, JAS, **25**, 9 (1958).
14. Iy I. Jilin, *Wings of Minimum Drag*, P.M.M., **21**, 2 (1957).
15. R. W. Truitt, *Hypersonic Aerodynamics*, Ronald Press Company, 1959.
16. A. Miele, R. F. Pritchard, D. G. Hull, *General Theory of Optimum Hypersonic Slender Bodies Including Frictional Effects*, JAS **10**, 2 (1963).
17. A. Miele, D. G. Hull, *Three — Dimensional Wings of Minimum Total Drag in Newtonian Flow*, JAS, **XII**, 2 (1965).
18. W. D. Hayes, R. S. Probstein, *Hypersonic Flow Theory*. Academic Press, New York — Londra, 1959.
19. G. D. Donaldson, K. F. Gray, *Optimisation of Airfoiles for Hypersonic Flight*, Aero-Space Engine, **20**, 1 (1961).
20. J. D. Cole, *Newtonian Flow Theory for Slender Bodies*, JAS **24**, 6 (1957).
21. G. G. Cernîi, *Tecenia gaza s bolşoi sverhzvukovoi skowstin*, Gas. Izd. Fizdrat. Lit., Moscova, 1959.
22. E. Carafoli, *On a Unitary Formula for Compression-Expansion in Supersonic-Hypersonic Flow*, R.M.A., **VII**, 5, (1962).
23. E. Carafoli, M. Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires ou à épaisseur symmétrique*, R.M.A., **II**, 1 (1957).
24. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique*, Rech. Aero, 7, (1949).

ASUPRA MIȘCĂRII APELOR ARTEZIENE ÎNTR-UN DOMENIU LIMITAT CU CONDIȚII MIXTE PE CONTUR*)

de IOAN DAVID
Institutul politehnic, Timișoara

În lucrare se dezvoltă o metodă analitică pentru calculul hidraulic al unui sistem de captare compusă din puțuri cînd acesta este dispus într-un strat acvifer limitat. Pe conturul care limitează acviferul se consideră condiții de margine mixte, adică existența unor porțiuni de alimentare cu diferite adîncimi ale apei și a unei porțiuni impermeabile.
Metoda expusă se aplică apoi în cîteva cazuri practice cînd sistemul de captare este dispus în domenii interfluviale unghiulare sau lunci.

1. Plecînd de la cîteva situații ale dispunerii sistemelor de captare prin puțuri în acvifere interfluviale sau lunci alimentate prin infiltrații de mal, situații frecvente în practică, se consideră cazul unui domeniu limitat cu condiții de margine mixte pe conturul care limitează acviferul. Prin condiții de margine mixte se înțelege existența unor porțiuni de alimentare cu diverse valori ale potențialului φ și a unei porțiuni impermeabile. Valorile diferite ale potențialului φ ar putea fi cauzate de existența unei amenajări în trepte pe rîul care alimentează acviferul sau unei diferențe de nivel între cele două rîuri în cazul acviferelor interfluviale, precum și de alte cauze care determină variația adîncimii apei de-a lungul conturului de alimentare.

În [1] și [2] se studiază cazul unor contururi complet permeabile, iar în [3] și [4] se consideră unele contururi particulare care conțin o porțiune impermeabilă. În toate cazurile menționate însă, pe conturul de alimentare se consideră $\varphi = 0$.

2. Fie un domeniu oarecare ocupat de mediul poros, limiat de un contur C cu condiții la limită menționate în figura 1. În interiorul domeniului considerăm un sistem de captare format din P_j ($j = 1,2,\ldots,n$) puțuri, amplasate în punctele de afixă z_j.

*) Lucrarea a fost prezentată la cea de-a III-a sesiune științifică a tineretului din 24–26 mai 1968, București, organizată de Academia Republicii Socialiste România.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 361–367

Rezolvarea problemei necesită determinarea unei funcţii olomorfe în D, cu excepţia punctelor z_j, unde admite singularităţi logaritmice care să satisfacă condiţiile la limită

$$\begin{aligned} &\text{a) } \operatorname{Re}\{F(z)\} = \varphi_p, && z \in A_{p-1}, A_p, && p = 1,2,\ldots,m, \\ &\text{b) } \operatorname{Im}\{F(z)\} = 0, && z \in A_m A_0, && \\ &\text{c) } \operatorname{Re}\{F(z)\} = k H_j, && |z - z_j| = \delta_j, && \end{aligned} \tag{1}$$

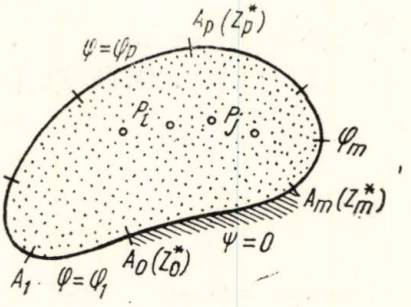


Fig. 1

unde

δ_j reprezintă razele puţurilor;
H_j este denivelarea în puţuri faţă de un nivel de referinţă ce se va preciza ulterior;
k — coeficientul de permeabilitate.

Vom descompune funcţia $F(z)$ în două părţi:

$$F(z) = Q(z) + R(z). \tag{2}$$

Funcţia $Q(z)$ se va determina astfel ca

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{Q(z)\} = 0; && z \in A_{p-1} A_p, && p = 1,2,\ldots,m, \\ &\operatorname{Im}\{Q(z)\} = 0, && z \in A_m A_0 && \end{aligned} \tag{3}$$

şi să aibă singularităţi logaritmice în z_j. Funcţia $R(z)$ prin transformări conforme şi introducerea unei funcţii auxiliare se va reduce la o problemă Dirichlet.

Soluţia problemei se va determina sub rezerva cunoaşterii funcţiei olomorfe şi univalente

$$Z = f(z), \tag{4}$$

prin care domeniul considerat este reprezentat conform pe primul cadran din (Z), astfel ca porţiunea impermeabilă $A_m A_0$ să corespundă semiaxei imaginare pozitive (fig. 2).

3. $Q(z)$ se determină aplicînd configuraţiei din planul (Z) metoda imaginilor, adică considerînd

— în "Z_j" şi "$-\overline{Z}_j$" surse negative,
— în "$\overline{Z}$"$_j$ şi "$-Z_j$" surse pozitive.

Prin intermediul lui (4), revenind la planul fizic, găsim

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} q_j \ln \frac{[f(z)+f(z_j)]\,[f(z)-\overline{f(z_j)}]}{[f(z)-f(z_j)]\,[f(z)+\overline{f(z_j)}]}, \tag{5}$$

unde q_j reprezintă debitul sursei din P_j.

Pentru determinarea lui $R(z)$ vom presupune mai întîi că domeniul considerat este reprezentat pe semiplanul superior din planul (ζ), por-

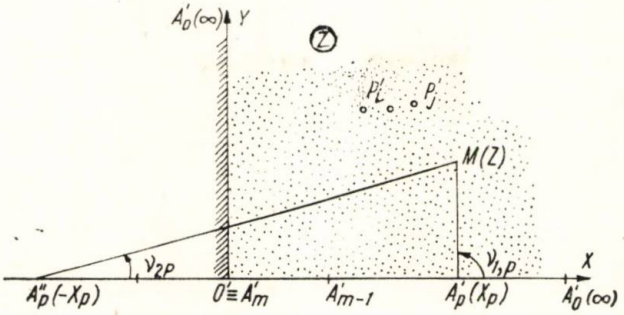


Fig. 2

țiunea impermeabilă ocupînd semiaxa reală negativă. Punctele A_p din (z) de afixă z_p^* vor corespunde punctelor de pe semiaxa reală pozitivă din (ζ) de afixe a_p $(p = 1,2,\ldots, m)$ (A_0 este aruncat la ∞, iar A_m corespunde originii).

În această situație, funcția R (ζ) va trebui să satisfacă condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\{R(\zeta)\} = \varphi_p; \qquad \zeta \in \overline{a_p\, a_{p-1}}, \qquad p = 1,2,\ldots, m, \\ &\mathrm{Im}\,\{R(\zeta)\} = 0, \qquad \zeta \in (-\infty, 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Să considerăm funcția

$$g(\zeta) = \frac{R(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}, \tag{7}$$

unde $\sqrt{\zeta}$ este olomorfă în planul complex prevăzut cu tăietura $(0, \infty)$, avînd

$$\begin{aligned} &\sqrt{\zeta} = i\sqrt{|\xi|}; \qquad \zeta \in (-\infty, 0), \\ &\sqrt{\zeta} = \sqrt{\xi} \qquad \zeta \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{8}$$

Cu aceste observații,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\{g(\zeta)\} = 0; \qquad \zeta \in (-\infty, 0), \\ &\mathrm{Re}\,\{g(\zeta)\} = \frac{\varphi_p}{\sqrt{\xi}}; \qquad \zeta \in \overline{a_p\, a_{p-1}}; \qquad p = 1,2,\ldots, m, \end{aligned} \tag{9}$$

adică găsirea lui $R(\zeta)$ s-a redus la o problemă Dirichlet pentru funcția $g(\zeta)$

De asemenea, avînd îndeplinită condiţia de convergenţă a părţii reale a funcţiei $g(\zeta)$ pentru $\xi \to \infty$, se poate aplica formula din [5, p. 60].

$$g(\zeta) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{g(\xi)\}\frac{d\xi}{\zeta - \xi}, \tag{10}$$

care rezolva problema lui Dirichlet pentru semiplan.

Soluţia problemei va fi dată deci de

$$R(\zeta) = \frac{i}{\pi}\sqrt{\zeta}\int_0^{\infty}\frac{\varphi_p}{\sqrt{\xi}}\frac{d\xi}{\zeta - \xi}, \tag{11}$$

Prin integrare se obţine

$$R(\zeta) = \frac{i}{\pi}\sum_{p=2}^{m}(\varphi_{p-1} - \varphi_p)\ln\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{a_{p-1}}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{a_{p-1}}} + \varphi_1. \tag{12}$$

Se constată uşor că soluţia astfel obţinută verifică condiţiile (6). Unicitatea soluţiei [5, p. 114] este asigurată avînd în vedere că funcţia $R(\zeta)$ este continuă pe axa reală, cu excepţia punctelor $\zeta = a_{p-1}$, unde

$$\lim_{\zeta \to a_{p-1}}(\zeta - a_{p-1})^{\alpha}\cdot R(\zeta) = 0, \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

În planul (Z), ţinînd seama de faptul că dorim ca semiplanul superior din (ζ) să fie reprezentat pe primul cadran astfel ca semiaxa reală negativă (impermeabilă) să corespundă semiaxei imaginare pozitive, avem

$$R(Z) = \frac{i}{\pi}\sum_{p=2}^{m}(\varphi_{p-1} - \varphi_p)\ln\frac{Z - X_{p-1}}{Z + X_{p-1}} + \varphi_1. \tag{14}$$

Revenind la planul fizic prin introducerea aceleeaşi funcţii de reprezentare $f(z)$ care apare în expresia funcţiei $Q(z)$ şi însumînd cele două funcţii, se găseşte potenţialul complex al mişcării sub forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} q_j \ln\frac{[f(z) + f(z_j)]\,[f(z) - \overline{f(z_j)}]}{[f(z) - f(z_j)]\,[f(z) + \overline{f(z_j)}]} + \tag{15}$$

$$+\frac{i}{\pi}\sum_{p=2}^{m}(\varphi_{p-1} - \varphi_p)\ln\frac{f(z) - f(z^*_{p-1})}{f(z) + f(z^*_{p-1})} + \varphi_1.$$

Pentru calculul debitelor puţurilor se determină partea reală a funcţiei (15):

$$\mathrm{Re}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot \ln\frac{[(A + A_j)^2 + (B + B_j)^2][(A - A_j)^2 + (B + B_j)^2]}{[(A - A_j)^2 (B - B_j)^2][(A + A_j)^2 + (B - B_j)^2]} + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{p=2}^{m}(\varphi_p - \varphi_{p-1})(\nu_{1,p-1} - \nu_{2,p-1}) + \varphi_1,$$

unde

$$A + iB = f(z), \tag{17}$$

iar $\nu_{1,p}$ și $\nu_{2,p}$ sînt argumentele în coordonatele bipolare cu originile în punctele A'_p, respectiv A''_p din (Z) (fig. 2).

Considerînd ca nivel de referință stratul impermeabil, constantele φ_p, care de fapt reprezintă valorile funcției de potențial φ pe conturul de alimentare, se scriu sub forma

$$\varphi_p = -kh_p, \tag{18}$$

unde h_p reprezintă adîncimea apei pe porțiunea $A_{p-1}\,A_p$ a conturului.

Dacă denivelarea în puțuri se consideră de la nivelul porțiuni A_0A_m, debitele puțurilor se obțin din sistemul liniar

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \ln \sigma_j^s = 4\pi k\left[H_s + \sum_{p=2}^{m}(h_p - h_{p-1})\frac{\nu_{1,p-1}^{(s)} - \nu_{2,p-1}^{(s)}}{\pi}\right], \tag{19}$$

$$s = 1, 2, \ldots, n$$

(s are rol de indice), unde

$$\sigma_j^s = \frac{[(A_{js} + A_j)^2 + (B_{js} + B_j)^2][(A_{js} - A_j)^2 + (B_{js} + B_j)^2]}{[(A_{js} - A_j)^2 + (B_{js} - B_j)^2][(A_{js} + A_j)^2 + (B_{js} - B_j)^2]}, \tag{20}$$

A_j, B_j și A_{js}, B_{js} se obțin din (17) pentru $z = z_j$, respectiv $z = z_s + \delta_s$,

H_s reprezintă denivelarea în puțuri față de nivelul apei pe porțiunea $A_0\,A$, $\nu_{1,p}^{(s)}$ și $\nu_{2,p}^{(s)}$ — argumentele corespunzătoare puțurilor s măsurate din punctele A'_p, respectiv A''_p (fig. 2), considerate ca origini ale coordonatelor bipolare din planul (Z)

4. În cele ce urmează se aplică metoda expusă pentru cîteva cazuri particulare.

Fie domeniul ocupat de mediul poros un sector de cerc de deschidere unghiulară $\alpha = \pi/\lambda$ (fig. 3), cînd porțiunea impermeabilă ocupă

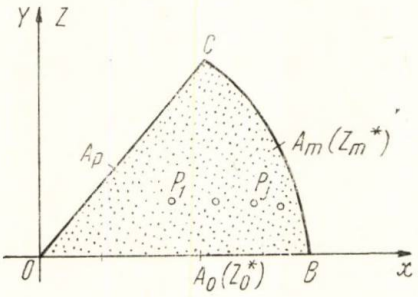


Fig. 3

o poziție oarecare $(A_0\,A_m)$. În primul rînd se determină funcția de reprezentare $f(z)$. Efectuînd o serie de transformări succesive, se găsește

$$f(z) = 2a^\lambda\,[U(z) - U(z_m^*)]^{1/2}, \tag{21}$$

unde

$$U(z) = \frac{[(a^\lambda + z^\lambda)(a^\lambda + z_0^{*\lambda})]^2}{[(a^\lambda - z^\lambda)(a^\lambda + z_0^{*\lambda})]^2 - [(a^\gamma + z^\lambda)(a^\lambda - z_0^{*\lambda})]^2}. \tag{22}$$

Dispunînd de funcţia de reprezentare, potenţialul complex al mişcării este dat de (15), iar debitele se determină din sistemul de ecuaţii (19).

Funcţiile (21) şi (22) se simplifică foarte mult dacă porţiunea impermeabilă ocupă o poziţie particulară. Astfel se consideră două cazuri care prezintă interes deosebit şi din punctul de vedere al aplicaţiilor tehnice. Un prim caz ar fi cînd porţiunea impermeabilă A_0A_m coincide cu arcul BC. Această situaţie ar corespunde unui domeniu acvifer interfluvial, punctul O marcînd confluenţa celor două rîuri (fig.4), iar porţiunea impermeabilă

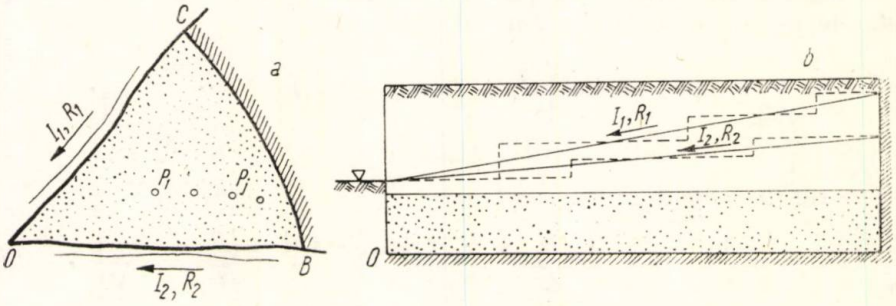


Fig. 4

BC marcînd limita stratului acvifer. Panta hidraulică a celor două rîuri care alimentează stratul acvifer se consideră diferită, variaţia adîncimii apei, după cum se vede şi din fig 4*b*, aproximîndu-se printr-o variaţie în trepte.

Ţinînd seama de poziţia particulară a porţiunii impermeabile considerate, (21) devine

$$f(z) = 2a^{\lambda}\frac{a^{\lambda} + z^{\lambda}}{a^{\lambda} - z^{\lambda}}. \tag{23}$$

Cu aceasta potenţialul complex al mişcării (15) se scrie

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} q_j \ln\frac{(z^{\lambda} - \bar{z}_i^{\lambda})\,[a^{2\lambda} - (zz_j)^{\lambda}]}{(z^{\lambda} - z_j^{\lambda})\,[a^{2\lambda} - (z\bar{z}_j)^{\lambda}]} + \tag{24}$$

$$+ \frac{i}{\pi}\sum_{p=2}^{m}(\varphi_{p-1} - \varphi_p)\ln\frac{(az)^{\lambda} - (az_{p-1}^{*})^{\lambda}}{a^{2\lambda} - (zz_{p-1}^{*})^{\lambda}} + \varphi_1,$$

iar debitele se vor calcula din sistemul (19), unde h_p $(p = 2, 3, ..., n)$ reprezintă cotele treptelor de aproximaţie faţă de patul impermeabil al stratului acvifer. De asemenea, în aceste expresii se va ţine seama ca

$$A = \frac{a^{2\lambda} - \rho^{2\lambda}}{2\,(a\rho)^{\lambda}\cos\lambda\theta - (a^{2\lambda} + \rho^{2\lambda})}, \tag{25}$$

$$B = \frac{2\,(a\,\rho)\sin\lambda\,\theta}{2\,(a\,\rho)^{\lambda}\cos\lambda\theta - (a^{2\lambda} + \rho^{2\lambda})}.$$

Aceste expresii s-au dedus ținînd sema de (17), (23) și că

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Un alt caz particular ar fi cînd porțiunea impermeabilă coincide cu *COB*, iar alimentarea stratului se face de-a lungul arcului *BC*. O asemenea situație ar fi cînd sistemul de captare este amplasat în lunca limitată a unui rîu. Funcția de reprezentare (21) particularizată pentru acest caz devine

$$f(z) = \frac{i}{2a^\lambda} \frac{a^\lambda - z^\lambda}{a^\lambda + z^\lambda}. \tag{26}$$

Desigur că se pot studia o serie de alte cazuri particulare, determinîndu-se funcția de reprezentare $f(z)$ pentru fiecare caz în parte, urmînd apoi calea de rezolvare generală.

Menționam că în practica exploatării acestor sisteme de captare în scopul îmbogățirii stratului acvifer, se folosesc de multe ori așa numitele „puțuri de infiltrație", alimentate prin pompare. Efectul acestora se poate ușor introduce în calcule, considerînd că o parte din cele n puțuri ale sistemului funcționează ca surse pozitive.

Primită la redacție la 13 iulie 1968.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Petrescu, *Asupra mișcării apelor arteziene într-un domeniu concav*, St. cerc. matem., **17** 7, 1153–1159 (1965).
2. S. Gogoma, *Cîteva mișcări în medii poroase în prezența unor contururi de alimentare finită*, St. cerc. mat., **16**, 7, 825–835 (1964).
3. A. Houpeurt, *Elements de mecanique des fluides dans les milieux poreux*, Paris, 1957.
4. H. Ene, *Generalizarea unei probleme din mișcarea apelor arteziene*. St. cerc. matem., **19**, *1* (1967).
5. C. Iacob, *Introduction mathématique a la mécanique des fluides*, București–Paris, 1959

MIŞCAREA PLANĂ A FLUIDULUI VÎSCOS ÎNTR-UN DOMENIU SIMPLU CONEX NEMĂRGINIT [1)]

de I. SETEANU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se studiază mişcarea plană laminară a fluidului vîscos incompresibil într-un domeniu de tip bandă cu frontierele asimptotic paralele la infinit, amonte şi aval. Se deduce ecuaţia integrală a fluidului vîscos şi se obţine soluţia aplicînd teoria perturbaţiilor pornind de la aproximaţia zero, aleasă în mod convenabil. Se indică un procedeu de obţinere a părţii singulare a funcţiei lui Green prin folosirea unei metode operaţionale bazate pe reprezentarea Fourier a funcţiei generalizate a lui Dirac. Partea regulată se obţine prin metoda seriilor cu coeficienţi nedeterminaţi a lui Mushelişvili.

1. INTRODUCERE

Caraterul neliniar al ecuaţiilor de mişcare a fluidelor determină locul aparte ocupat de acest capitol în domeniul fizicii matematice. Această particularitate, care este parţial mascată în mecanica fluidelor perfecte prin existenţa clasei de mişcări potenţiale, se manifestă pregnant în mecanica fluidelor vîscoase, datorită inaplicabilităţii funcţiilor armoice, legată de condiţia la limită de aderenţă pe suprafaţa solidă. Din această cauză, tendinţa iniţială în mecanica fluidului vîscos a constituit-o simplificarea axtremă a problemelor, fapt care a permis obţinerea unor soluţii care să rezolve fie problema directă (se dă domeniul şi caracterul curgerii la infinit), fie problema indirectă (se obţin soluţii formale şi se caută domeniul pe frontiera căruia sînt îndeplinite condiţiile la limită [1]. În special soluţiile din prima categorie nu sînt numeroase, iar majoritatea aparţin cazurilor în care simplficarea determină dispariţia caracterului neliniar al problemei. A doua tendinţă a constituit-o încercarea de a lua în considerare un număr cît mai mare posibil de influenţe, considerîndu-se că acestea nu au un efect esenţial asupra soluţiei problemei şi aplicîndu-se

[1)] Autorul mulţumeşte acad. prof. D. Dumitrescu, învăţătorul său stimat, pentru sprijinul neprecupeţit acordat la această lucrare.

metoda perturbațiilor (metoda parametrul mic). Se preferă în general „perturbațiile raționale" [2], care admit un algoritm de obținere a unei soluții aproximative oricît de apropiată de soluția exactă, deși există exemple în care nu se cunoaște decît prima aproximație („perturbațiile iraționale"), cum ar fi metoda lui von Karmán și Chang pentru profilul în curent subsonic.

Metodele teoriei perturbațiilor se aplică cu succes, de exemplu, atunci cînd se introduce efectul compresibilității asupra soluției mișcării potențiale a fluidului perfect incompresibil la numere Mach mici (metoda lui Rayleigh-Janzen). În acest caz se spune că apar „perturbații regulate" în terminologia lui Van Dyke [2] (la valori mici ale parametrului perturbator se obțin valori mici ale perturbației, uniform în tot domeniul de mișcare a fluidului). Încercările de folosire a metodei iterațiilor la numere Reynolds mici pornind de la soluțiile ecuațiilor aproximative ale lui Oseen și Stokes, sau la numere Reynolds mari, pornind de la mișcarea potențială, s-au dovedit ineficace (paradoxurile lui Whitehead și Filon) [3]. Nenumăratele eșecuri au condus la concluzia că, în general, efectul perturbator al parametrului $\mathcal{R}e$ are un caracter singular (la variații destul de mici ale parametrului corespund variații finite și neuniforme în domeniu ale soluției perturbate). De exemplu soluția obținută prin iterație în cazul unor valori mari ale numărului Reynolds pornind de la mișcarea potențială este inacceptabilă în apropierea suprafeței corpului.

O metodă eficientă de eliminare a paradoxurilor care apar din cauza caracterului singular al perturbațiilor la numere Reynolds mari o constituie teoria stratului-limită a lui Prandtl. Ideea lui Prandtl de a analiza detaliat domeniul de neuniformitate a perturbațiilor a permis obținerea unei soluții corespunzătoare în apropierea suprafeței corpurilor și care „se racordează" asimptotic cu soluția potențială care are valabilitate la mari distanțe de corp. Sistematizarea ideii lui Prandtl și generalizarea ei au fost realizate destul de recent, elaborîndu-se „metoda dezvoltărilor asimptotice racordate" [4], [5]. S-au introdus trecerile la limită interioară și exterioară, precum și dezvoltările corespunzătoare. Kaplun a folosit aceste idei pentru a studia eliminarea paradoxului lui Stokes la curgerea plană cu numere Reynolds mici în jurul cilindrului circular [6]. Se pornește de la constatarea că existența paradoxului este datorată imposibilității de a folosi una dintre soluțiile aproximative cunoscute ca soluție fundamentală, care să satisfacă condițiile la limită și la infinit și să difere uniform de soluția exactă. În cadrul metodei dezvoltărilor asimptotice racordate se renunță sistematic la o condiție fie în domeniul din vecinătatea corpului, fie în cel din vecinătatea punctului de la infinit. Se obțin două dezvoltări (interioară și exterioară), iar nesatisfacerea integrală a condițiilor la limită este compensată prin compararea celor două soluții în domeniul unde se intersectează zonele lor de valabilitate și unde, cu gradul de precizie impus de iterația corespunzătoare, dezvoltarea interioară a dezvoltării exterioare trebuie să coincidă cu dezvoltarea exterioară a dezvoltării interioare.

Pot apărea situații în care să fie posibil a alege o funcție fundamentală care să satisfacă simultan condițiile la limită și la infinit impuse soluției exacte și care să admită în consecință aplicarea teoriei perturbațiilor în ipoteza existenței unor perturbații regulate. Unul dintre aceste cazuri este studiat în lucrarea de față.

2. ENUNŢUL PROBLEMEI

Se studiază fenomenul de curgere a fluidului vîscos într-un domeniu plan simplu conex de tip bandă. Vom presupune că în vecinătatea punctului de la infinit, amonte şi aval, frontierele devin asimptotic paralele. Curgerea se efectuează de la stînga la dreapta (fig. 1). Frontierele se presupun curbe netede pe porţiuni.

Mişcarea este presupusă staţionară şi laminară, iar fluidul incompresibil. În aceste condiţii, ecuaţiile Navier-Stokes împreună cu ecuaţia de continuitate se reduc prin introducerea funcţiei de curent la ecuaţia [7]

$$\Delta\Delta\,\psi = -\mathcal{R}e\,\frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(x, y)}. \tag{1}$$

Condiţiile la limită de adrenţă pe pereţii canalului sînt

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ pe } \widehat{ABC} \text{ şi } \widehat{ADC}, \tag{2}$$

precum şi condiţia de curgere Poiseuille plană la infinit se impun din considerente fizice pentru soluţia problemei studiate.

3. APROXIMAŢIA FUNDAMENTALĂ

Fie funcţia de variabilă complexă z,

$$Z = f(z), \tag{3}$$

care realizează transformarea conformă a domeniului fizic reprezentat în figura 1 pe domeniul bandă mărginit de două drepte paralele la o distanţă egală cu unitatea (fig. 2).

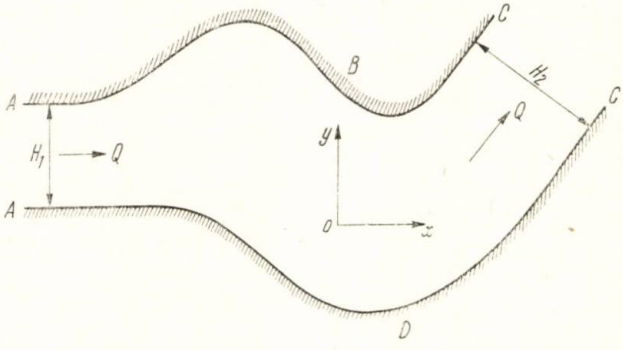


Fig. 1

Funcţia de transformare are în genere punctele de singularitate situate pe frontiera domeniului fizic în care tangenta la curbă suferă un salt. Dacă eliminăm din domeniu aceste puncte cu ajutorul unor cercuri de rază suficient de mică, se poate afirma că funcţia de transformare (3) este analitică în domeniu şi admite o limită finită pe frontiera acestuia

În vecinătatea punctului de la infinit, funcţia de transformare admite o dezvoltare asimptotică simplă. În amonte,

$$Z = az + b + \frac{c}{z} + \ldots,$$

$$|a| = H_1^{-1}, \tag{4}$$

iar argumentul lui a este determinat prin argumentul direcţiei de curgere în amonte în planul fizic. O situaţie analogă se realizează şi în aval.

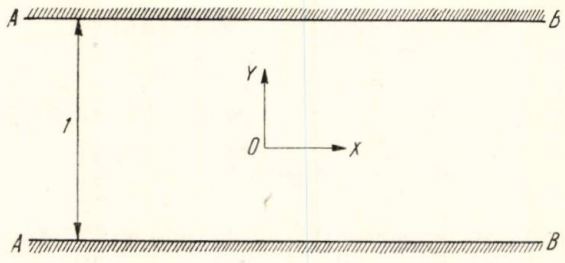


Fig. 2

Soluţia curgerii Poiseuille plană între două plăci paralele fixe la distanţă egală cu unitatea în ipoteza cunoaşterii debitului de curgere Q este dată de [8]

$$\psi_0 = Q\ Y^2 (3 - 2\ Y). \tag{5}$$

În continuare se va presupune $Q = 1$.

Vom considera ca aproximaţie fundamentală funcţia obţinută prin transformarea funcţiei (5) cu ajutorul formulelor de transformare (3). Întrucît soluţia lui Poiseuille plană verifică ecuaţia biarmonică, iar aceasta nu este covariantă faţă de transformarea conformă, aproximaţia fundamentală va verifica în planul fizic ecuaţia [9]

$$\Delta\,(M\,\Delta\psi_0) = 0, \tag{6}$$

unde prin M s-a notat modulul transformării

$$M = \left|\frac{dz}{dZ}\right|^2. \tag{7}$$

Folosind identităţile

$$\Delta\,(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi,$$

$$\Delta \ln \varphi = \frac{1}{\varphi}\Delta\varphi - \frac{1}{\varphi^2}(\nabla\varphi)^2 \tag{8}$$

şi observînd că $\ln M$ este o funcţie armonică, ecuaţia (6) se mai scrie

$$\Delta\Delta\psi_0 = -\Lambda_0, \tag{9}$$

unde

$$\Lambda_0 = \Delta\psi_0 \nabla \ln M \cdot \nabla \ln [M(\Delta\psi_0)^2].$$

Deoarece ecuația biarmonică este covariantă față de transformarea conformă liniară

$$Z = az + b, \tag{10}$$

aproximația fundamentală va avea aspectul Poiseuille în vecinătatea punctului de la infinit. De asemenea, întrucît o transformare de variabile generală realizează o transformare liniară omogenă a derivatelor unei funcții oarecare, condiția de anulare a derivatelor funcției ψ pe pereți este conservată.

În concluzie putem afirma că aproximația fundamentală se racordează cu soluția exactă atît pe frontiera domeniului, cît și în vecinătatea punctului de la infinit. Deosebirea dintre ele constă în aceea că aproximația fundamentală verifică ecuația (9) , pe cînd soluția exactă verifică ecuația (1).

4. OBȚINEREA ECUAȚIEI INTEGRALE

Vom numi perturbație funcția

$$\varphi = \psi - \psi_0. \tag{11}$$

Combinînd formulele (1) și (9), putem afirma că ecuația care determină perturbația (11) este

$$\Delta\Delta\varphi = \Lambda_0 - \mathcal{R}e \frac{D(\psi,\Delta\psi)}{D(x, y)}. \tag{12}$$

Conform celor spuse la punctul 3, condițiile la limită și la infinit ale perturbației sînt nule. Presupunînd pentru moment membrul drept al ecuației (12) cunoscut, vom putea scrie soluția ecuației (12) sub forma

$$\varphi(x, y) = M_0(x, y) + \mathcal{R}e \iint_{(D)} G(x, y; \xi, \eta) \frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(\xi, \eta)} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \tag{13}$$

unde s-a notat pentru prescurtare

$$M_0(x, y) = -\iint_{(D)} \Delta\psi_0 \nabla \ln M \cdot \nabla \ln [M(\Delta\psi_0)^2] G(x, y; \xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{14}$$

întrucît, conform teoremei de unicitate pentru funcțiie biarmonice, soluția ecuației biarmonice care verifică condițiile la limită și la infinit nule este identic nulă [10].

Deoarece membrul drept al ecuației (12) nu este apriori cunoscut, formula (13) reprezintă de fapt ecuația integrală a mișcării fluidului vîscos.

Se observă că

$$\frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(\xi, \eta)} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\Delta\psi. \tag{15}$$

Vom folosi notația uzuală

$$\Delta\psi = \zeta. \tag{16}$$

În formula (13), $G(x, y; \xi, \eta)$ este funcţia lui Green a ecuaţiei biarmonice pentru problema dată, care verifică condiţiile la limită

$$G = \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \text{ pe } \widehat{ABC} \text{ şi } \widehat{ADC}.$$

Efectuînd în cadrul operaţiei de integrare schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\zeta, \eta), \\ \zeta &= \zeta(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{17}$$

soluţia integrală a mişcării fluidului vîscos devine

$$\varphi(x, y) = M_0(x, y) + \mathcal{R}e \iint_{(D)} G(x, y; \psi, \zeta)\, \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\zeta. \tag{18}$$

5. METODA PERTURBAŢIILOR. PRIMA APROXIMAŢIE

Prima aproximaţie pentru funcţia φ se obţine înlocuind în membrul drept al ecuaţiei (18) funcţia ψ prin aproximaţia fundamentală. În principiu se poate dezvolta un proces iterativ, dar trebuie să se observe că, în general, în problemele cu perturbaţii se calculează doar prima aproximaţie, iar cea de-a doua are, în general, rolul să lămurească domeniul de aplicabilitate al acesteia. De obicei în problemele de perturbaţii cercetarea convergenţei seriilor obţinute prin procesul iterativ este deosebit de anevoioasă. Convergenţa matematică depinde de ordinul de mărime al termenilor în număr infinit care succedă termenilor cu care începe dezvoltarea, iar de obicei doar aceştia din urmă pot fi determinaţi efectiv [11]. Absenţa unei teoreme generale de existenţă şi de unicitate în mecanica fluidului vîscos permite în general doar să se spere că soluţia aproximativă se apropie rapid de cea adevărată. Verificarea matematică a soluţiei obţinute este înlocuită cu proba experimentală a consecinţelor rezultatului obţinut.

În aceste condiţii, prima aproximaţie pentru soluţia mişcării fluidului vîscos în domeniul indicat la punctul 2 este

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + M_0(x, y) + \mathcal{R}e \iint_{(D)} G(x, y; \psi_0, \zeta_0)\, \mathrm{d}\psi_0\, \mathrm{d}\zeta_0, \tag{19}$$

unde

$$\zeta_0 = \Delta\psi_0. \tag{20}$$

Procedeul de calcul se simplifică în mod esenţial dacă vom efectua, atît sub semnul integrală, cît şi în afara integrării, transformarea pe domeniul mărginit de două drepte paralele, redat în figura 2.

Deoarece

$$\zeta_0 = \Delta\psi_0(\xi, \eta) = \frac{1}{M} \frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}Y_1^2} = \frac{6}{M}(1 - 2\,Y_1), \tag{21}$$

formulele de transformare se pot scrie

$$\psi_0 = Y_1^2 (3 - 2Y_1), \tag{22}$$

$$\zeta_0 = \frac{6 (1 - 2 Y_1)}{M (X_1, Y_1)}.$$

De asemenea, întrucît

$$\mathrm{d}\psi_0 = \frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}Y_1} \mathrm{d}Y_1 = 6Y_1 (1 - Y_1) \mathrm{d}Y_1, \tag{23}$$

se obține

$$\psi (X, Y) = Y^2 (3 - 2Y) + M_0 (X, Y) + \mathcal{R}e \iint_{(D_1)} G (X, Y; X_1, Y_1) \times$$

$$\times 6 Y_1 (1 - Y_1) \mathrm{d}Y_1 \mathrm{d}\left[\frac{6}{M} (1 - 2 Y_1)\right]. \tag{24}$$

Folosind formula de transformare

$$\nabla_{\xi\eta} \varphi \nabla_{\xi\eta} \psi = \frac{1}{M} \nabla_{X_1 Y_1} \varphi \nabla_{X_1 Y_1} \psi, \tag{25}$$

valabilă pentru cazul transformării conforme, se poate scrie relația pentru funcția M_0 definită de (14):

$$M_0 = -6 \iint_{(D_1)} \frac{G (X, Y; X_1 Y_1)}{M (1 - 2Y_1)} \nabla M \cdot \nabla \frac{(1 - 2 Y_1)^2}{M} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}Y_1. \tag{26}$$

Formulele (24) și (26) determină prima aproximație a soluției curgerii fluidului vîscos incompresibil în domeniul reprezentat în figura 1. Calculul primei aproximații se poate efectua cu ușurință dacă se cunoaște expresia funcției lui Green.

6. FUNCȚIA LUI GREEN SINGULARĂ

Funcția lui Green a unui operator diferențial liniar este o soluție a ecuației cu derivate parțiale definită de acest operator, ecuația fiind omogenă peste tot, cu excepția unui punct care poate fi situat în interiorul domeniului sau pe frontiera acestuia și în care singularitatea funcției lui Green este descrisă cu ajutorul funcției generalizate a lui Dirac. Funcția lui Green satisface de asemenea condițiile la limită omogene. Dacă punctul de neomogeneitate al ecuației cu derivate parțiale este situat în interiorul domeniului de valabilitate al soluției, funcția lui Green servește la construirea unei soluții a ecuației cu derivate parțiale cu membru drept nenul, care satisface condiția la limită omogenă. Situînd punctul pe frontieră, funcția lui Green astfel obținută este utilă pentru determinarea unei soluții a ecuației cu membru drept nul care satisface condițiile la limită neomogene [12].

Fiind dată ecuaţia cu derivate parţiale

$$L\varphi = -\rho, \tag{27}$$

unde L este un operator de forma

$$L \equiv a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots, \tag{28}$$

funcţia lui Green satisface ecuaţia

$$LG = -\delta(x_1 - x_1', \; x_2 - x_2', \ldots), \tag{29}$$

în care δ este funcţia generalizată a lui Dirac în spaţiul multi-dimensional

$$\delta(x_1, x_2, \ldots) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\ldots \tag{30}$$

Cea mai importantă proprietate a funcţiei generalizate a lui Dirac o constituie formula de filtrare care indică analogia cu simbolul lui Kroenecker din teoria sumării:

$$\int_{(\infty)} f(x)\,\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0). \tag{31}$$

Folosind proprietatea (30) şi teoria reprezentării Fourier, se poate indica unul dintre aspectele posibile ale funcţiei lui Dirac:

$$\delta(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\infty)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_\alpha k_\alpha x_\alpha} (\mathrm{d}\vec{k}), \tag{32}$$

unde

$$(\mathrm{d}\vec{k}) = \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \ldots$$

Deoarece are loc identitatea

$$L^{-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_\alpha k_\alpha x_\alpha} \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_\alpha k_\alpha x_\alpha}}{a_0 + a_1(\mathrm{i}k_1) + a_2(\mathrm{i}k_2) + \ldots + a_{11}(\mathrm{i}k_1)^2 + \ldots}, \tag{33}$$

se poate scrie imediat o soluţie a ecuaţiei (29):

$$G_1 = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\infty)} \frac{\exp\left\{\mathrm{i}\sum_\alpha k_\alpha x_\alpha\right\} (\mathrm{d}\vec{k})}{a_0 + a_1(\mathrm{i}k_1) + a_2(\mathrm{i}k_2) + \ldots + a_{11}(\mathrm{i}k_1)^2 + \ldots}, \tag{34}$$

care constituie partea singulară a funcţiei lui Green. În general, funcţia (34) nu satisface condiţiile la limită impuse funcţiei lui Green şi de aceea funcţia lui Green mai conţine încă un termen, numit parte regulată, care verifică ecuaţia omogenă cu condiţii la limită determinate prin partea singulară:

$$G = G_1 + G_0. \tag{35}$$

Dacă L este operatorul biarmonic

$$L \equiv \Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2, \tag{36}$$

se obţine

$$G_1 = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{(\infty)} \frac{e^{i[k_1(\xi-x)+k_2(\eta-y)]}}{(k_1^2+k_2^2)^2}\,dk_1dk_2. \tag{37}$$

Trecînd la coordonate polare, se obţine

$$G_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}\int_0^{2\pi} e^{ik\rho\cos\varphi}\,d\varphi. \tag{38}$$

Folosind o formulă integrală pentru funcţia lui Bessel [13],

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\,d\varphi,$$

şi adăugînd un termen constant infinit care să asigure caracterul nesingular al integralei, urmează

$$G_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(k\rho)-J_0(k)}{k^3}\,dk.$$

Derivînd de trei ori integrala în raport cu parametrul şi efectuînd calculele, rezultă în final forma concretă a părţii singulare a funcţiei lui Green:

$$G_1 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3}{2}(\rho^2-1) - \rho^2\ln\rho\right], \tag{39}$$

unde

$$\rho^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2. \tag{40}$$

Ca verificare se constată cu uşurinţă că G_1 are expresia binecunoscută a funcţiei lui Green singulară pentru operatorul lui Laplace în plan:

$$\Delta G_1 = -\frac{1}{2\pi}\ln\rho. \tag{41}$$

Partea nesingulară a funcţiei lui Green verifică ecuaţia

$$\Delta\Delta G_0 = 0 \tag{42}$$

şi condiţiile la limită

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= -G_1 \\ \frac{\partial G_0}{\partial n} &= -\frac{\partial G_1}{\partial n} \end{aligned}\right\} \text{pe } \widehat{ABC} \text{ şi } \widehat{ADC}, \tag{43}$$

deci determinarea ei corespunde rezolvării primei probleme la limită pentru funcţiile biarmonice.

7. PARTEA REGULATĂ A FUNCŢIEI LUI GREEN

Pentru determinarea funcţiei biarmonice G_0 care verifică condiţiile primei probleme la limită (43) se va folosi metoda reprezentării conforme şi a dezvoltării în serii cu coeficienţi nedeterminaţi, propusă de N. I. Mushelişvili [14].

Soluţia ecuaţiei (42) poate fi scrisă în formă generală cu ajutorul formulei lui Goursat:

$$G_0 = R\,[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \tag{44}$$

unde φ şi χ sînt funcţii analitice. Coordonatele punctului de observaţie în cadrul funcţiei lui Green se consideră temporar drept nişte parametri constanţi. În general, funcţia φ este determinată pînă la o expresie de forma $C + aiz$, iar χ pînă la o constantă arbitrară. Pentru a realiza determinarea, se pot impune, de exemplu, condiţiile următoare într-un punct z_0:

$$\varphi(z_0) = \mathcal{I}[\varphi'(z_0)] = \mathcal{I}[\chi(z_0)] = 0. \tag{45}$$

Condiţiile la limită se pot scrie sub forma concentrată

$$\frac{\partial G_0}{\partial x} + i\frac{\partial G_0}{\partial y} = \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \psi_1(z) = -\frac{\partial G_1}{\partial x} - i\frac{\partial G_1}{\partial y} \tag{46}$$

$$\text{pe } \widehat{ABC} \text{ şi } \widehat{ADC},$$

unde s-a introdus notaţia

$$\psi_1(z) = \chi'(z). \tag{47}$$

Metoda folosirii seriilor cu coeficienţi nedeterminaţi se poate aplica după transformarea domeniului fizic pe interiorul cercului-unitate cu ajutorul formulei de transformare

$$z = \omega(\zeta_1). \tag{48}$$

Ca rezultat se obţine

$$\begin{aligned} \varphi[\omega(\zeta_1)] &= \Phi(\zeta_1), \\ \chi[\omega(\zeta_1)] &= X(\zeta_1), \\ \psi_1[\omega(\zeta_1)] &= \Psi_1(\zeta_1). \end{aligned} \tag{49}$$

Condiţia la limită (46) se transformă în

$$\Phi(\zeta_1) + \frac{\omega(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)}\,\overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi_1(\zeta_1)} = F_1(\theta), \text{ pe } \Sigma, \tag{50}$$

unde membrul drept reprezintă rezultatul transformării membrului drept din formula (46). Prin Σ s-a notat frontierea cercului-unitate, caracterizată prin

$$\zeta_1 = \tau = e^{i\theta}, \text{ pe } \Sigma. \tag{51}$$

În domeniul din planul ζ_1 se caută funcţiile Φ şi ψ_1 sub forma unor serii cu coeficienţi nedeterminaţi, în general complecşi:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta_1) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta_1^\nu, \\ \psi_1(\zeta_1) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \zeta_1^\nu. \end{aligned} \tag{52}$$

Funcţia de transformare conformă (48) se poate dezvolta în serie Laurent în jurul originii, iar $F_1(\theta)$ din formula (50) în serie Fourier complexă. Se obţine

$$\frac{\omega(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta_\nu \zeta_1^\nu, \qquad F_1(\theta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \tau^\nu. \tag{53}$$

Introducînd formulele (52) şi (53) în condiţia la limită (50) şi identificînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui ζ_1, se obţine sistemul liniar de ecuaţii

$$\alpha_\nu + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\alpha_k\,\delta_{\nu+k-1} = A_\nu \ (\nu = 1,2, \ldots),$$
$$\overline{\beta}_\nu + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\overline{\alpha}_k\,\delta_{-\nu+k-1} = A_{-\nu} \ (\nu = 0,1,2, \ldots). \tag{54}$$

Din primul ansamblu de relaţii ale sistemului (54) se deduc coeficienţii α_ν ($\nu = 2,3,\ldots$), iar din al doilea ansamblu de relaţii rezultă imediat coeficienţii β_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$).

Metoda capătă un aspect foarte simplu atunci cînd dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei (48) poate fi înlocuită aproximativ prin un polinom de gradul n.

Primită la redacţie la 25 octombrie 1968.

BIBLIOGRAFIE

1. Ratip Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, în *Handbuch der Physik*, vol. VII/2, *Strömungsmechanik*, II, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1963.
2. Milton Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press,, New York-Londra, 1964.
3. G. Birkhoff, *Hydrodynamics*, Princeton-New Jersey, Princeton University Press, 1960.
4. S. Kaplun, P. A. Lagerstrom, *Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions forsmall Reynolds numbers*, J. Math. Mech., 6, 585—593 (1957).
5. P. A. Lagerstrom, *Note on the preceding two papers*, J. Math. Mech., 6, 605—606 (1957).
6. S. Kaplun, *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*, J. Math. Mech., 6, 595—603, (1957).
7. Pai Shih-I., *Viscous flow theory*, vol. I, Princeton-New Jersey, D. Van Nostrand Co., Inc. 1956,
8. Teodor Oroveanu, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
9. L. V. Kantorovici, şi V. I. Krîlov *Priblijennie metodi vissego analiza*, Moscova-Leningrad, G.I.T.T.L., 1950.
10. M. Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris, Herman, 1936.
11. H. Jeffreys, *On the relation to physics of the notion of convergence of series*, Philos, Mag., 2, 241—244 (1926).
12. P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953.
13. H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, vol. 2, New-York, Toronto-Londra, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953.
14. N. I. Mushelişvili, *Nekotorîe osnovnîe zadaci matematiceskoi teorii uprugosti*, Moscova, Izd. „Nauka", G.R.F.M.L., 1966.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIALE

de PĂUN ANTONESCU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

În lucrare sînt rezolvate două probleme de sinteză cinematică grafică în funcție de coeficientul de productivitate impus, de excentricitatea mecanismului spațial și, respectiv, de lungimea bielei. Se folosesc în acest scop metodele grafice din geometria descriptivă. Sînt considerate și cîteva cazuri particulare care pot apărea în practică.

1. INTRODUCERE

Un rol important în proiectarea mecanismelor îl are coeficientul de productivitate (k), care reprezintă raportul dintre timpul cursei active (t_a) și cel al cursei pasive (t_p) a elementului condus :

$$k = \frac{t_a}{t_p}. \tag{1}$$

În cazul mecanismelor plane [1], considerînd uniformă mișcarea elementului conducător (manivela), acest coeficient k se reduce la raportul dintre deplasarea unghiulară (φ_a) a manivelei corespunzătoare cursei active a elementului condus și deplasarea unghiulară (φ_p) a manivelei pentru cursa pasivă :

$$k = \frac{\varphi_a}{\varphi_p}. \tag{2}$$

Perioada de mișcare a manivelei corespunde unei rotații complete :

$$\varphi_a + \varphi_p = 360°. \tag{3}$$

În pozițiile extreme ale elementului condus (B_{I}, B_{II}) manivela și biela fiind coliniare (fig. 1), coeficientul k se poate exprima în funcție de unghiul φ_0 :

$$k = \frac{\varphi_a}{\varphi_p} = \frac{\pi + \varphi_0}{\pi - \varphi_0}. \tag{4}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 381–392.

Dacă se impune un anumit coeficient de productivitate k, rezultă valoarea unghiului φ_0:

$$\varphi_0 = \pi \frac{k-1}{k+1}. \tag{4'}$$

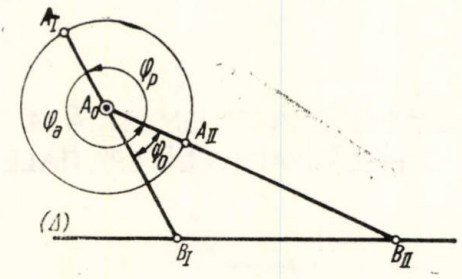


Fig. 1

În cazul mecanismelor bielă-manivelă spațiale [2], [4], pentru pozițiile extreme ale elementului condus, biela, manivela și axul de rotație al acesteia sînt conținute în același plan.

Coeficientul de productivitate în cazul mișcării uniforme a mani-

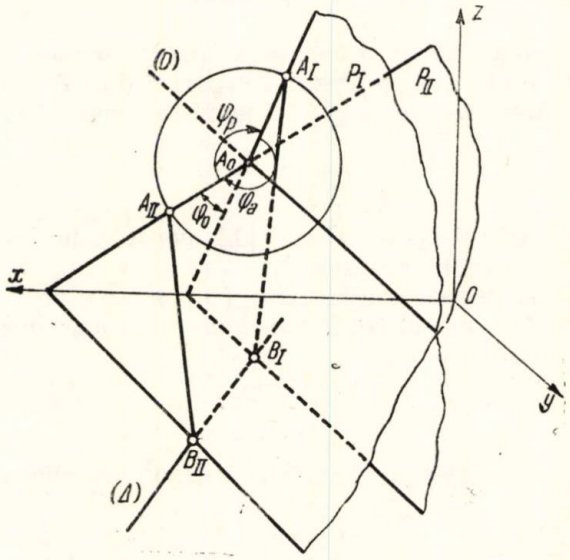


Fig. 2

velei poate fi exprimat prin aceeași relație (4) în care unghiul φ_0 reprezintă (fig. 2) unghiul dintre planele P_1, P_{II} corespunzătoare pozițiilor extreme B_1, B_{II} ale elementului condus. Planele P_I, P_{II}, conținînd axa D perpendiculară pe planul vertical de proiecție, vor fi și ele perpen-

diculare pe acesta, adică sînt plane de capăt (orice figură conținută într-un plan de capăt se proiectează pe planul vertical deformat pe urma verticală a acestuia). Unghiul φ_0 dintre cele două plane proiectante apare deci în adevărată mărime pe planul vertical cuprins între urmele de același nume ale acestora (fig. 3).

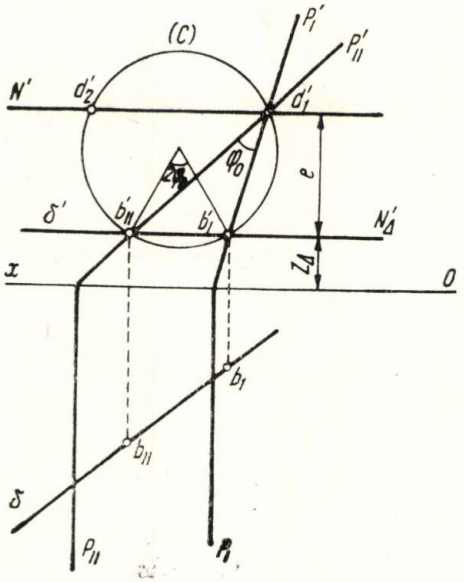


Fig. 3

2. SINTEZA MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIAL CÎND SE CUNOSC k, B_I B_{II} PE Δ, DIRECȚIA AXEI D ȘI DISTANȚA e ÎNTRE D ȘI Δ

Dacă se consideră dreapta D perpendiculară pe planul vertical [2], se poate alege planul orizontal de proiecție astfel ca dreapta Δ să fie orizontală. Altfel spus, dacă se consideră dreapta Δ într-un plan de nivel, planul vertical de proiecție se alege perpendicular pe direcția axei D. În condițiile date, axa D va trebui să fie conținută într-un plan (N) paralel cu dreapta Δ la distanța e și perpendicular pe planul vertical de proiecție. Cum dreapta Δ este orizontală, rezultă că și planul (N) trebuie să fie un plan orizontal de cotă $z_N = z_\Delta \pm e$ și care reprezintă un prim loc geometric pentru axa D. Pe de altă parte, dîndu-se coeficientul de productivitate k, se poate calcula unghiul φ_0 cu relația (4').

Planele de capăt trecînd prin B_I, respectiv B_{II}, care formează același unghi φ_0, se intersectează după o dreaptă de capăt care generează o suprafață cilindrică proiectantă pe vertical după cercul (C), suprafață care reprezintă un al doilea loc geometric pentru axa D. Intersecția dintre cele

două suprafeţe (planul de nivel N şi suprafaţa cilindrică) determină poziţia axei D ca dreaptă de capăt.

Se găsesc astfel pentru axa D patru soluţii date de planele N, $\overline{N}$, poziţii simetrice două cîte două faţă de planul de nivel N_Δ care conţine dreapta Δ (fig. 4). Alegerea uneia dintre soluţiile simetrice $(d_1, \overline{d}_1)$ sau $(d_2, \overline{d}_2)$ este neesenţială, importantă fiind alegerea între cele două soluţii deter-

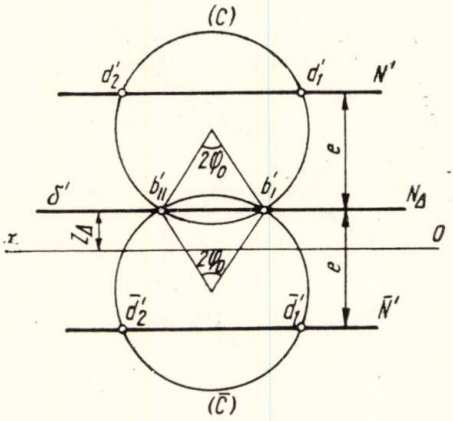


Fig. 4

minate de acelaşi plan d_1, d_2 sau $\overline{d}_1\overline{d}_2$. Această alegere se face în mod curent funcţie de unghiul de presiune admis.

Determinarea lungimii bielei şi a manivelei se face prin metoda rabaterii pe planul de nivel [4], alegînd convenabil planul frontal F de rotaţie al manivelei (fig. 5), astfel ca lungimea manivelei să fie mai mică decît lungimea bielei. Există deci o infinitate de soluţii pentru lungimea bielei şi manivelei în cazul că nu se precizează planul de rotaţie al manivelei. În cazul particular cînd excentricitatea este nulă ($e = 0$), planul de nivel N conţine dreapta Δ, astfel că intersecţia suprafeţei cilindrice (C), construită pentru un anumit unghi φ_0, cu planul N va da pentru axa D numai două soluţii, ambele trecînd printr-unul din punctele B_I, B_{II}.

În figura 6 s-a considerat soluţia din dreapta, axa D trecînd prin punctul B_I, astfel că în proiecţie verticală $d' \equiv a'_0 \equiv b'_I$. Dacă se impune planul frontal F prin depărtarea y_F, atunci se poate determina grafic lungimile bielei şi manivelei chiar în planul de nivel N printr-o rotire în jurul centrului de rotaţie i.

Poziţia a'_I, a articulaţiei A_I pe planul vertical se obţine ducînd în punctul $d'_I \equiv b'_I$ tangenta la cercul (C), aceasta reprezentînd urma verticală P'_I a planului P_I. Mecanismul bielă-manivelă spaţial astfel proiectat realizează coeficientul de productivitate k impus prin unghiul φ_0, care se măsoară (fig. 6) între planul P_I tangent la suprafaţa cilindrică (C) şi planul P_{II} care coincide cu planul de nivel N.

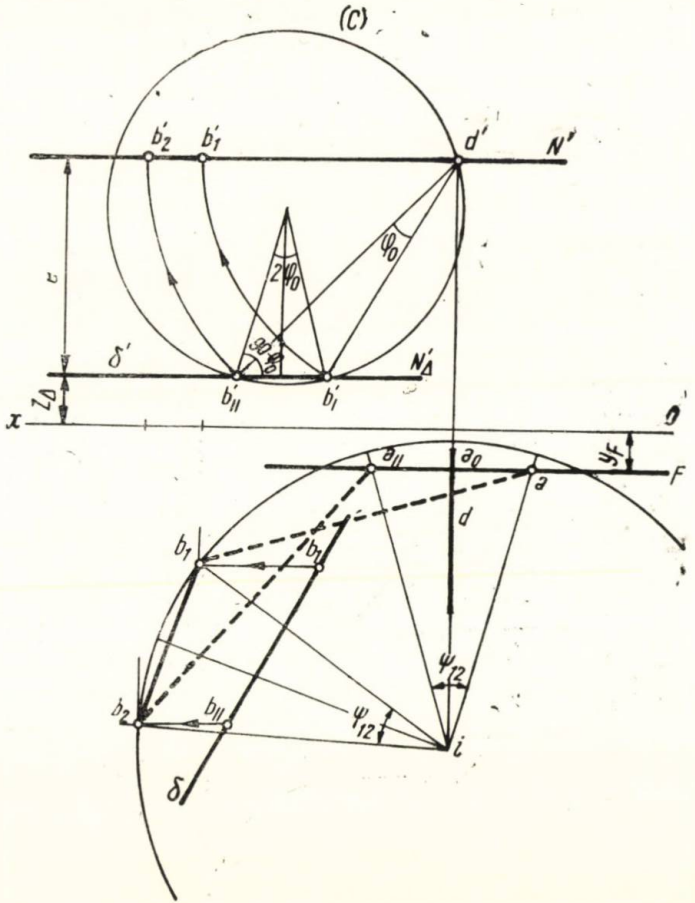

(C)
b'_2
b'_1
d'
N'
φ_0
$2\varphi_0$
δ'
N'_Δ
b'_{II}
b'_I
z_Δ
x
0
a_{II}
a_0
a
y_F
F
d
b_1
b_I
b_2
b_{II}
ψ_{12}
i
δ

Fig. 5

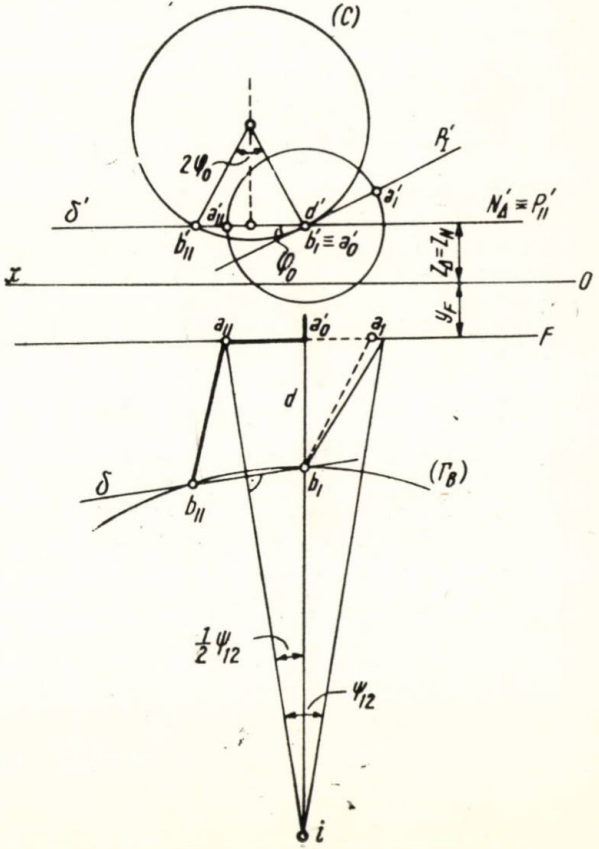

(C)
$2\varphi_0$
R'
δ'
a'_{II}
d'
a'_I
$N'_\Delta \equiv P'_{II}$
b'_{II}
$b'_I \equiv a'_0$
φ_0
$z_\Delta = z_W$
x
0
y_F
a_{II}
a'_0
a_I
F
d
δ
b_{II}
b_I
(Γ_B)
$\frac{1}{2}\psi_{12}$
ψ_{12}
i

Fig 6

3. SINTEZA MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIAL CÎND SE CUNOSC k, B_I B_{II} PE $\triangle$, DIRECȚIA AXEI D, LUNGIMEA BIELEI l ȘI PLANUL FRONTAL F DE ROTAȚIE AL MANIVELEI

Cunoscînd coeficientul de productivitate k, se calculează imediat unghiul φ_0, astfel că un loc geometric al axei D este suprafața cilindrică trecînd prin punctele B_I, B_{II}, proiectantă pe vertical (fig. 7) după un cerc (C).

Al doilea loc geometric reiese din condițiile care rezultă prin precizarea lungimii bielei. Se intersectează planul frontal F cu suprafețele sferice cu razele egale cu lungimea bielei l și centrele în punctele B_I, B_{II}, obținîndu-se două cercuri frontale (C_I), (C_{II}). Pe cele două cercuri, proiectate în adevărată mărime pe planul vertical, se va găsi articulația bielei cu manivela în pozițiile extreme a'_I și a'_{II}.

Rezultă că poziția axei D va fi astfel, încît, unind punctul d' (proiecția axei pe planul vertical) cu cele două puncte $a'_I a'_{II}$, să se obțină segmentele egale $a'_I d' = d'_I a'_{II}$, măsurate din d' pînă la intersecția cu cîte unul dintre cele două cercuri (C_I), (C_{II}).

Al doilea loc geometric pentru axa D este deci locul geometric al punctelor echidistante față de cele două cercuri. Acest loc geometric se deter-

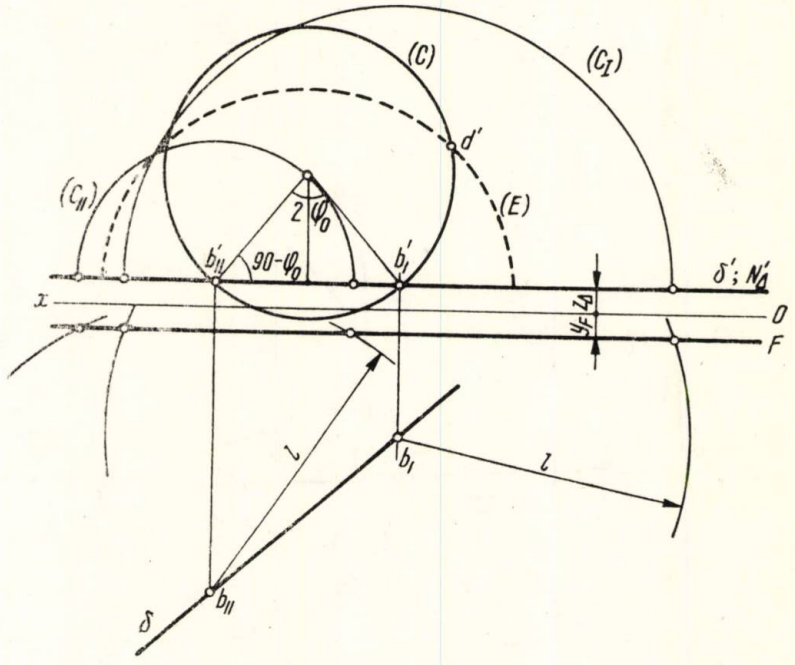


Fig. 7

mină imediat (fig. 8), punînd condiția ca două drepte duse prin centrele cercurilor B_I, B_{II} să se intersecteze în punctul D astfel ca $\overline{A_2D} = \overline{DA_1}$.

Într-adevăr,

$$\overline{A_2D} = \overline{B_2D} - \overline{B_2A_2} = \overline{B_2D} - R_2,$$

$$\overline{DA_1} = \overline{B_1A_1} - \overline{B_1D} = R_1 - \overline{B_1D}.$$

Cum $\overline{A_2D} = \overline{DA_1}$, rezultă $\overline{B_2D} + \overline{B_1D} = R_1 + R_2 = \text{const}$ și deci punctul D descrie o elipsă cu focarele în centrele celor două cercuri (C_I), (C_{II}) și avînd semiaxele :

$$a = R_1 + R_2$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (\overline{B_I B_{II}})^2}\,.$$

Așadar, proiecția d' a axei D pe planul vertical se determină la intersecția celor două locuri geometrice : cercul (C) trecînd prin B_I, B_{II} capabil de unghiul φ_0 și elipsa (E) cu focarele B_I, B_{II}.

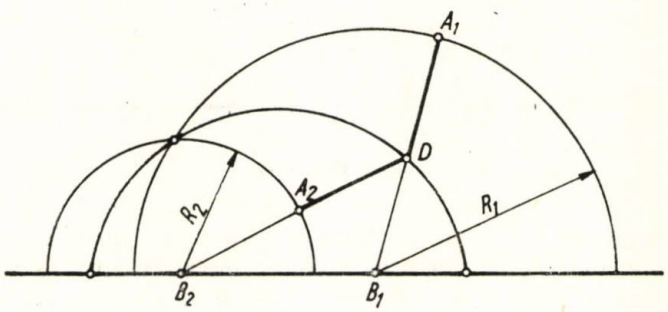


Fig. 8

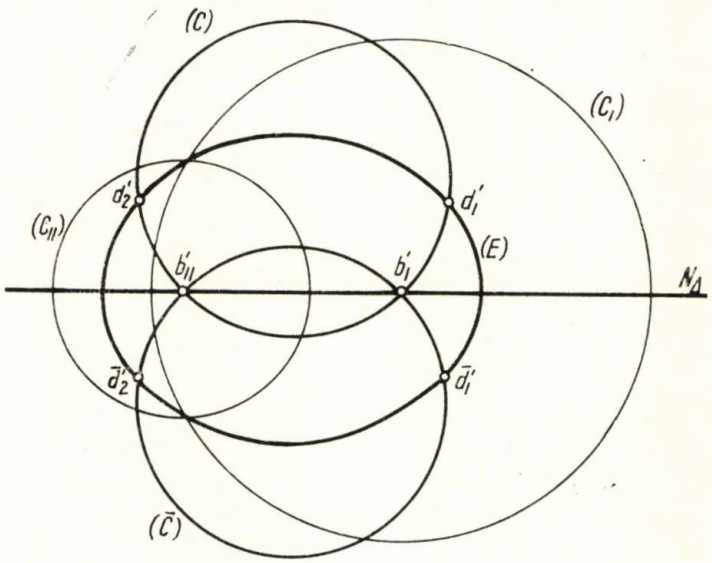


Fig. 9

Există în general patru soluții (fig. 9), simetrice două cîte două, față de planul de nivel N_Δ, corespunzătoare celor două cercuri simetrice (C) și $(\bar{C})$. Elipsa (E) intersectează cercul (C) în două puncte (d'_1, d'_2) sau, în caz particular (fig. 10), într-un singur punct; punctul de tangență.

Dacă cele două curbe (C) şi (E) nu se intersectează în nici un punct problema nu are soluţie. În cazul cînd unul dintre cercuri (C_{II}) degenerează într-un punct (fig. 11) celălalt cerc (C_I) devine cercul director al elipsei (E), regăsindu-se proprietatea cunoscută a elipsei. Cînd cele două cercuri

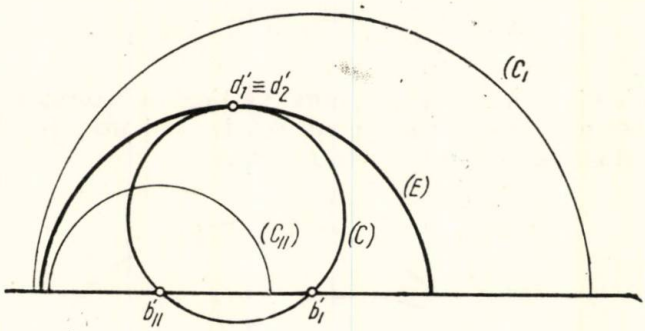


Fig. 10

(C_I), (C_{II}) sînt concurente sau interioare, locul geometric al punctelor echidistante este o elipsă (fig. 9, 10). Dacă cercurile (C_I), (C_{II}) sînt exterioare, locul geometric este o hiperbolă (fig. 12) cu focarele în b'_I, b'_{II}, ale cărei asimtote sînt perpendiculare pe tangentele exterioare ale cercurilor date. Există întotdeauna patru soluţii simetrice două cîte două faţă de planul de nivel N_Δ.

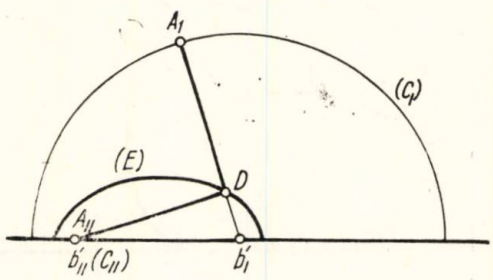


Fig. 11

Alegerea uneia dintre cele patru soluţii (fig. 12) este condiţionată de unghiul de transmitere cel mai mic şi de amplasarea axei D deasupra sau dedesubtul planului N_Δ care conţine dreapta Δ. După precizarea poziţiei axei D se determină imediat (fig. 13) lungimea manivelei $a_0a'_{II} = a_0a'_{II}$, cercul de manivelă fiind tangent la ambele cercuri (C_I), (C_{II}).

Cu aceasta se cunosc toate mărimile geometrice care permit trasarea la scară în dublă proiecţie ortogonală sau în proiecţie axonometrică a mecanismului bielă-manivelă spaţial proiectat în condiţiile date. Dacă se impune coeficientul de productivitate $k = 1$, rezultă, conform formulei (4'), $\varphi_0 = 0$, adică cercul capabil de unghiul φ_0 devine o dreaptă orizontală trecînd prin b'_I, b'_{II}, adică identică cu δ'. Intersecţia acestei drepte cu celă-

lalt loc geometric, de exemplu cu elipsa (E), determină două puncte (extremitățile axei mari), și tot atîtea soluții care precizează poziția axei D (fig. 14).

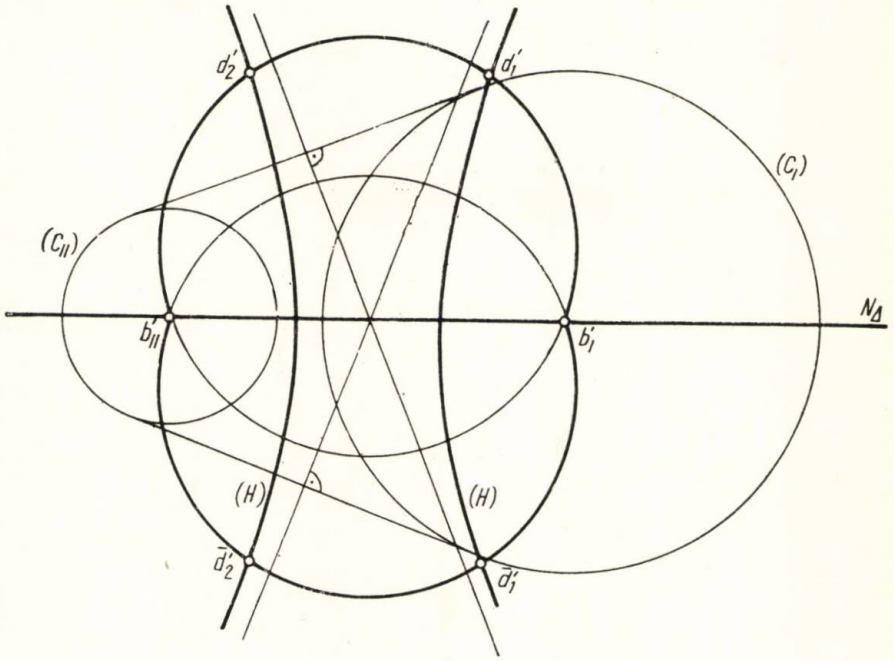


Fig. 12

Prin analogie cu mecanismul bielă-manivelă plan-simetric care realizează $k = 1$ ($\varphi_0 = 0$), se va numi și acest mecanism spațial, proiectat pentru $\varphi_0 = 0$, mecanism bielă-manivelă spațial simetric.

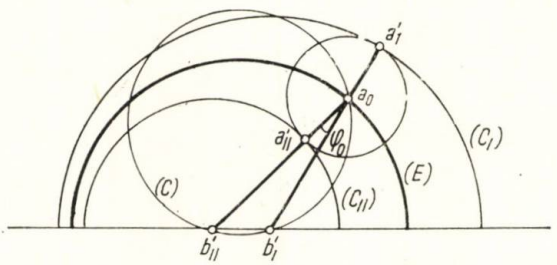


Fig. 13

În cazul particular cînd dreapta Δ este paralelă cu axa D, ambele fiind drepte de capăt, cele două cercuri (C_I), (C_{II}) vor fi concentrice (fig. 15), astfel că locul geometric al punctelor echidistante față de cele două cercuri este tot un cerc (C) concentric cu primele.

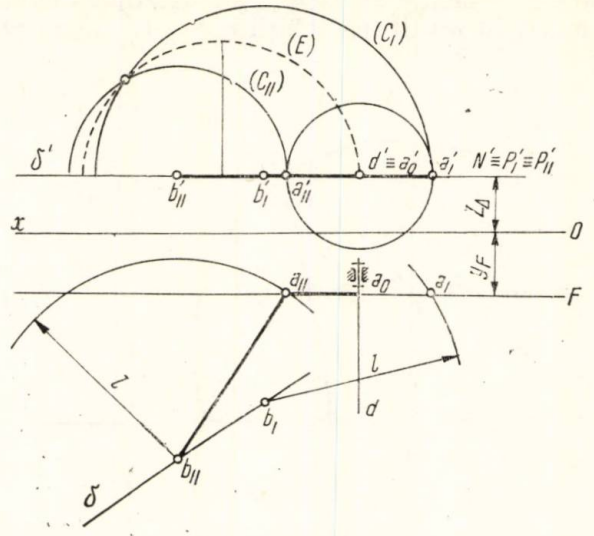


Fig. 14

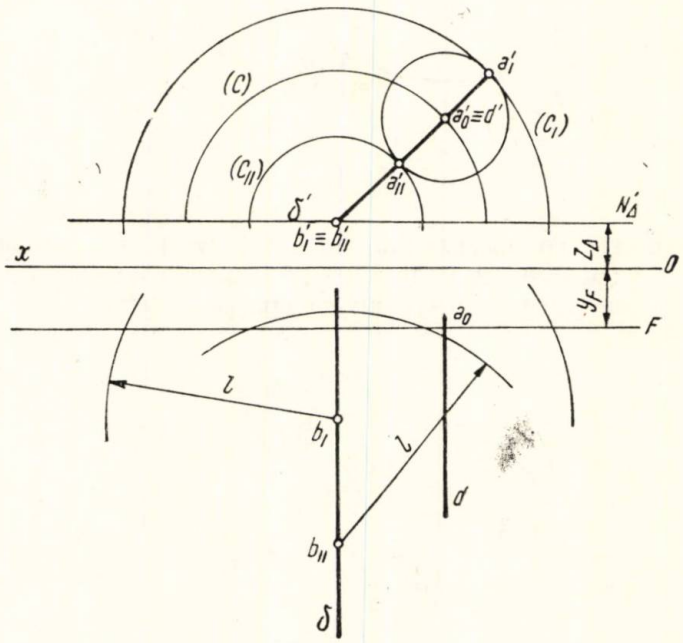


Fig. 15

Deoarece Δ și D sînt paralele, planele proiectante pe vertical P_{I} și P_{II} se suprapun, astfel că unghiul $\varphi_0 = 0$ și deci mecanismul este simetric. Proiecția verticală $d' \equiv a'_0$ a axei D se poate lua arbitrar pe cercul (C), mecanismul rezultat fiind același (fig. 16), datorită simetriei față de axa Δ.

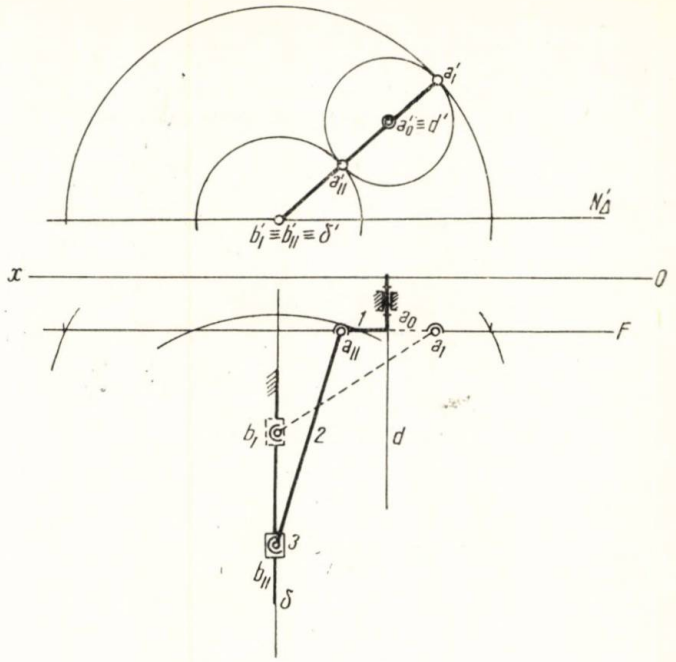


Fig. 16

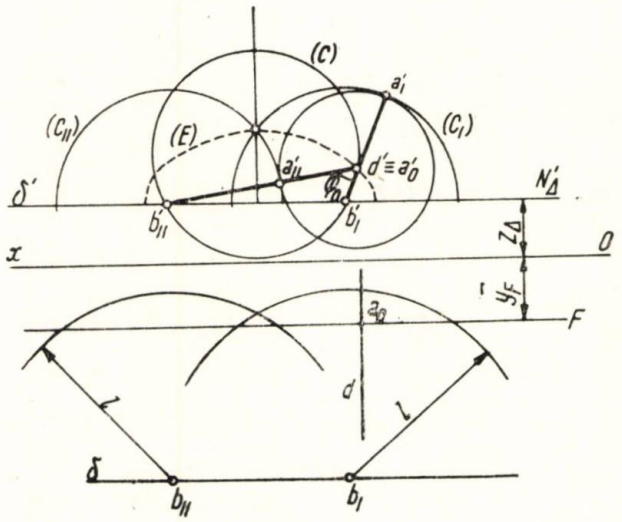


Fig. 17

Considerînd încă un caz particular cînd Δ este perpendiculară pe axa D, rezultă că, pentru ca D să fie dreaptă de capăt, Δ trebuie să fie o dreaptă frontoorizontală (paralelă cu axa OX). În aceest caz, cele două

cercuri (C_I), (C_{II}), obținute pentru o anumită lungime a bielei vor fi egale : concurente (fig. 17) sau exterioare (fig. 18).

Pentru cazul cînd cercurile sînt exterioare și egale, locul geometric al punctelor echidistante față de acestea va fi o dreaptă z' (mediatoarea segmentului $b'_I b'_{II}$), care determină la intersecția cu cercul (C) o singură

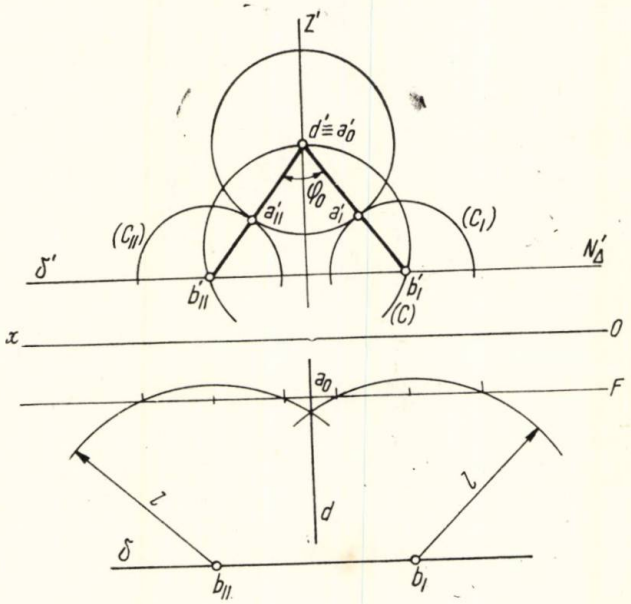


Fig. 18

soluție pentru axa D. Datorită simetriei axei D față de cele două puncte B_I, B_{II}, mecanismul proiectat devine bielă-balansier, unghiul de rotație al balansierului fiind funcție de φ_0.

Primită la redacție la 3 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Structura și cinematica*, București, Edit. Tehnică, 1959.
2. P. ANTONESCU, *Contribuții la sinteza geometrică a mecanismului bielă-manivelă spațial*, Sesiunea științifică a I.P.B., 1966.
3. N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, M. PIELMUȘ, P. ANTONESCU, *Culegere de probleme de teoria mecanismelor și a mașinilor*, București, E.D.P. 1963.
4. P. ANTONESCU, *Contribution to the Graphical Synthesis of a Spatial Slider-Crank Mechanism*, Inl. Mechanisms 3 (1968).

MECANISME PENTRU CONDUCEREA RECTILINIARĂ A MIŞCĂRII

de D. TUTUNARU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti

Autorul realizează o serie de mecanisme noi pentru conducerea rectiliniară exactă şi periodică a mişcării. Aceste mecanisme se pot folosi pe scară largă în industrie şi în sinteza mecanismelor plane.
La începutul lucrării se descriu mecanismele de bază şi metoda generală folosită pentru formarea mecanismelor rectiliniare cu mişcare periodică.

Mecanismele plane cu cuple inferioare folosite ca mecanisme de ghidare rectilinie exactă (precisă) ocupă un loc important în practica industrială. În cele ce urmează se dau cîteva mecanisme noi pentru conducerea rectiliniară exactă a mişcării, denumite şi mecanisme directoare, care se pot aplica pe scară largă şi în teoria şi sinteza mecanismelor plane.

1. MECANISME DE BAZĂ

Pentru formarea de mecanisme directoare se iau ca mecanisme de bază paralelogramul articulat şi rombul articulat. Aceste mecanisme îndeplinesc condiţia F. Grashof la limită, adică suma formată de elementul cel mai mic şi cu cel mai mare este egală cu suma celorlalte două elemente, deci $(a + d) = (b + c)$ şi sînt de tipul mecanismelor articulate cu dublă manivelă (fig. 1).

Biela acestor mecanisme execută o mişcare de translaţie circulară, rămînînd mereu paralelă cu ea însăşi şi cu baza, iar fiecare punct al ei descrie un cerc cu centrul pe baza mecanismului. Dacă elementul *2*, care se articulează în *C* cu elementul *3*, are forma a două bare rigide, rectangulare, acestea pot fi axe de coordonate mobile YCX. În felul acesta se obţine o transformare a axelor de coordonate printr-o deplasare a originii sistemului mobil YCX faţă de originea *D* a sistemului fix yDx sau în acelaşi mod se poate folosi şi articulaţia din *B* faţă de *A*. Noile axe de coordonate YCX rămîn mereu paralele cu axele de coordonate fixe yDx sau lise pot da un unghi oarecare constant cu acestea. Trebuie remarcat că elementul

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969 P. 393–402

3 este o manivelă care execută o mişcare de rotaţie în articulaţia C şi totodată este manivelă şi faţă de noile axe YCX.

Pe baza mişcării fundamentale de translaţie paralelă a bielei de la mecanismele paralelograme articulate şi de la romburile articulate, se pot obţine o serie de mecanisme pentru conducerea rectiliniară a mişcării.

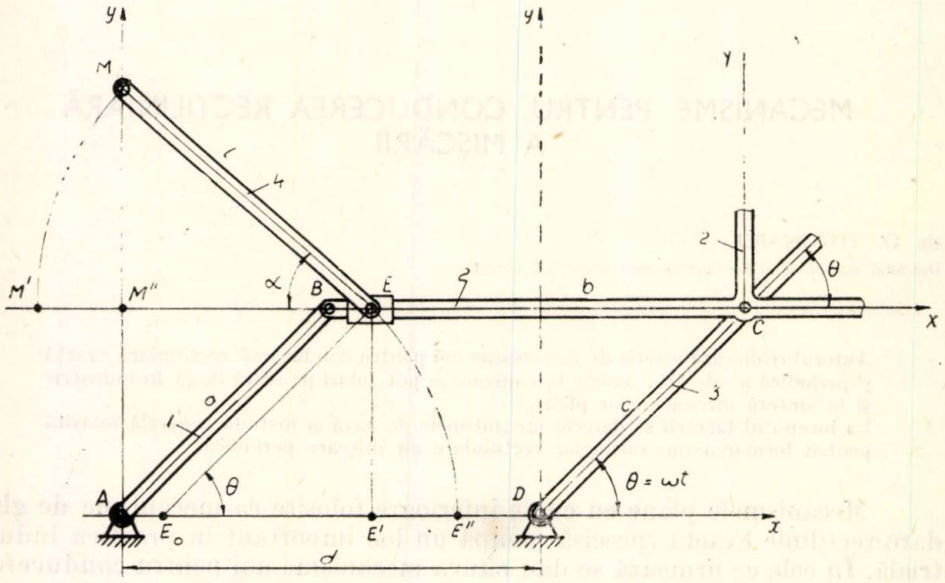


Fig. 1

Metoda generală pentru formarea acestor mecanisme constă în a lega o bielă $EM = l$ într-un punct oarecare E al elementului translatoriu BC şi, cum mişcarea acestei biele se impune a fi bine determinată, se va roti în jurul punctului E cu unghiul α pentru un unghi θ al manivelei AB.

Biela EM execută o mişcare plană formată din două mişcări simultane, şi anume o rotaţie în jurul lui E şi o translaţie paralelă o dată cu elementul BC. În mişcarea de rotaţie de un unghi α, punctul M ajunge în M' la o distanţă $M'M''$ faţă de dreapta Ay, iar în a doua mişcare de translaţie paralelă, obţinută prin rotirea lui EE_0 de un unghi θ, elementul EM este deplasat faţă de verticală cu segmentul $E'E''$, de sens contrar lui $M'M''$.

Pentru ca punctul M să execute dreapta Ay, trebuie să existe egalitatea $M'M'' = E'E''$, astfel că se poate scrie

$$a(1 - \cos\theta) = l\,(1 - \cos\alpha)$$

sau

$$2a \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\, l \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Deci.

$$l = a \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

În aceste condiții, punctul M al elementului EM va executa o mișcare după dreapta Ay, mecanismul devenind un mecanism rectiliniar exact.

2. MECANISME PENTRU CONDUCEREA RECTILINIARĂ A MIȘCĂRII

Folosind mecanismele de bază și aplicînd metoda arătată, se pot forma o serie de mecanisme directoare, ale căror elemente pot fi legate cu articulații și cuple de translație. Dacă se leagă la paralelogramul articulat $ABCD$ (fig. 2) diada CME prin articulația din C și prin cupla de

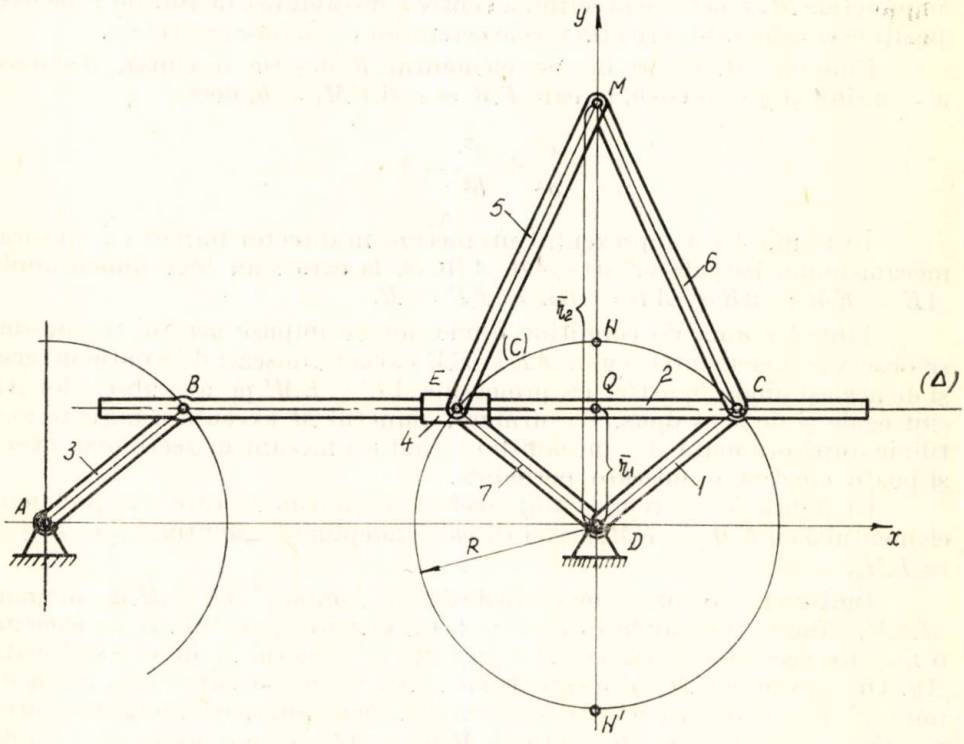


Fig. 2

translație din E și dacă se ia $CM = ME$, se obține un mecanism pentru conducerea rectiliniară a mișcării. În timp ce articulația C descrie cercul (C) cu centrul în D, biela BC, care materializează dreapta (Δ), efectuează o translație paralelă cu baza, iar locul geometric al punctului M este o dreaptă perpendiculară pe (Δ) și care trece prin punctul D.

Ţinînd seama de egalitatea triunghiurilor DCM şi DEM, direcţia DM este bisectoarea unghiurilor CME şi CDE.

Este de remarcat faptul că punctele C şi E, găsindu-se pe dreapta (Δ), intersectează cercul (C) de rază R în diferite puncte simetrice faţă de diametrul NN'.

Pentru o poziţie oarecare a mecanismului, dreapta (Δ) este polara punctului M faţă de cercul (C), astfel că se poate scrie

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = R^2. \tag{2}$$

Mecanismul a devenit astfel un polarograf, la care $r_1 = DQ$ şi $r_2 = DM$.

Cu ajutorul acestui mecanism se poate realiza uşor mişcarea cardanică (fig. 3).

S-au luat următoarele dimensiuni: $CD = CF = CM = EM = EG = DE = AB$. În aceste condiţii, punctele MDF şi MDG se vor găsi pe cercuri egale cu centrele în C şi E, simetrice faţă de Dy, iar punctele G şi F se vor mişca după axa Dx. Ducîndu-se perpendiculare la axele Dx şi Dy în punctele M, F şi G, se determină centrele instantanee de rotaţie P pentru poziţiile considerate şi se află razele cercurilor cardanice (π_1) şi (π_2).

Punctul M_1 (x, y) de pe elementul *6* descrie o elipsă, deoarece $x = a \sin\theta$ şi $y = b \cos\theta$, în care $FM = a$ şi $FM_1 = b$, deci.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdot \tag{3}$$

În figura 4 s-a reprezentat un mecanism director format cu ajutorul mecanismului patrulater articulat $ABCD$, la care s-au luat dimensiunile $AE = EM = 2R$ şi $AB = BE = EF = R$.

Ţinînd seama de condiţiile dimensionale impuse acestui mecanism, se observă că elementele egale AE şi EM execută mişcări de rotaţie inverse şi de acelaşi unghi θ, astfel că proiecţiile AE' şi EM' pe axa absciselor Ax sînt egale şi de sens opus. Ca urmare, punctul M execută o mişcare rectilinie după ordonata Ay, mecanismul fiind un mecanism rectiliniar exact şi poate efectua o mişcare periodică.

În figura 5 s-a reprezentat acelaşi mecanism la care s-a prelungit elementul *5* cu $EM_1 = EM$, astfel că este îndeplinită condiţia $AE = EM = EM_1$.

Indiferent de poziţia ocupată de diada „lambda" AE şi MM_1, unghiul MAM_1 rămîne totdeauna egal cu $\pi/2$. Ca urmare, punctul M_1 va executa o mişcare rectilinie după axa Ax, în timp ce punctul M descrie ordonata Ay. Oricare punct M' al elementului MM_1 descrie o elipsă (E), afară de punctul E, care descrie un cerc de rază $2R$. Pe de altă parte, înfăşurătoarea poziţiilor succesive ale elementului $MM_1 = 4R$, este o astroidă (A), de ecuaţie

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4R)^{2/3}. \tag{4}$$

În figura 6 s-a reprezentat mecanismul de ghidare rectiliniară din figura 4, la care s-a mai adăugat diada 6 şi 7, luîndu-se

$$AD = MM_1 \text{ şi } DG = GM_1.$$

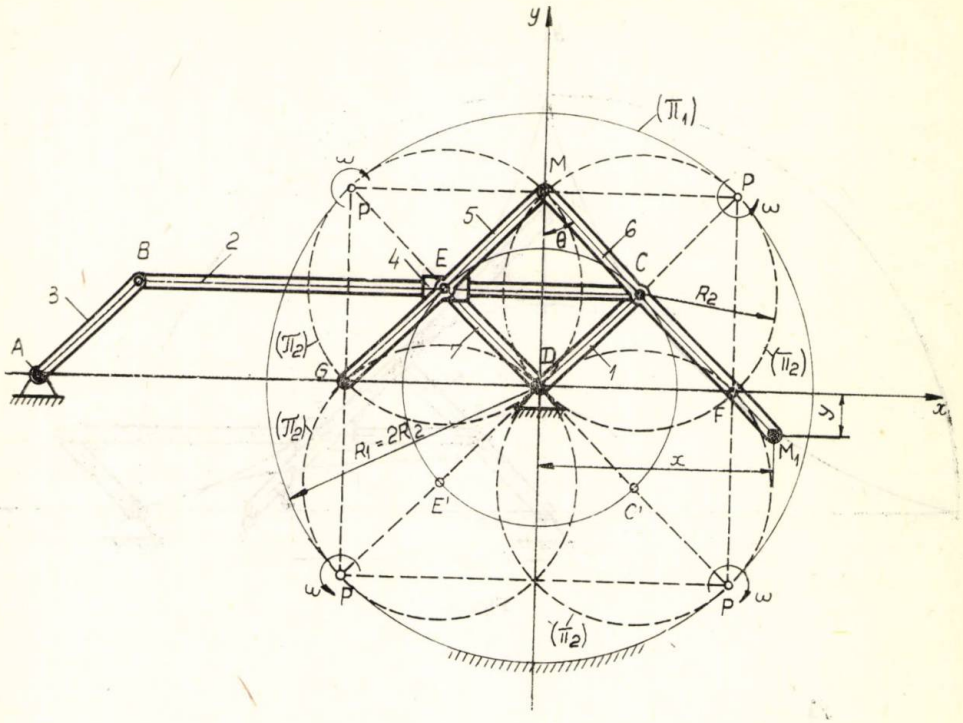

y
(Π1)
ω
P
M
P
ω
5
θ
6
B
2
4
E
C
3
R2
A
(Π2)
G
D
1
(Π2)
F
y
x
(Π2)
R1 = 2R2
M1
x
E'
C'
ω
P
P
ω
(Π2)

Fig. 3

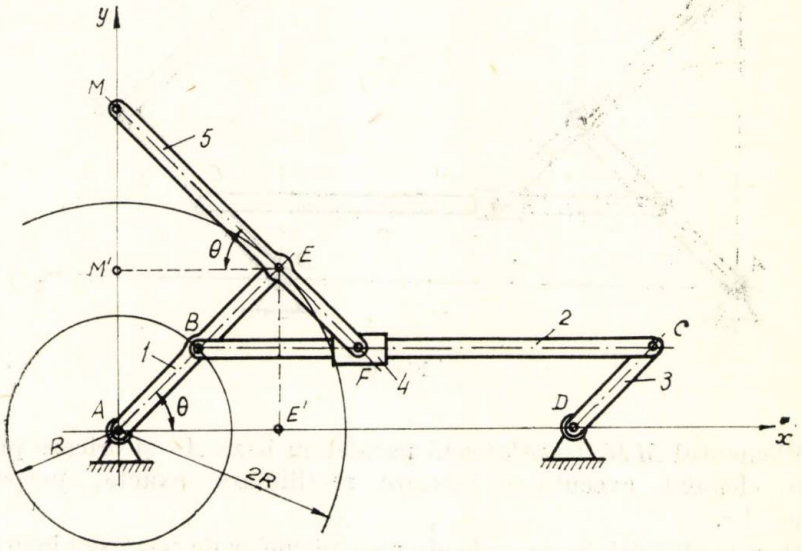

y
M
5
θ
E
M'
B
2
C
1
F
4
3
A
θ
E'
D
x
R
2R

Fig. 4

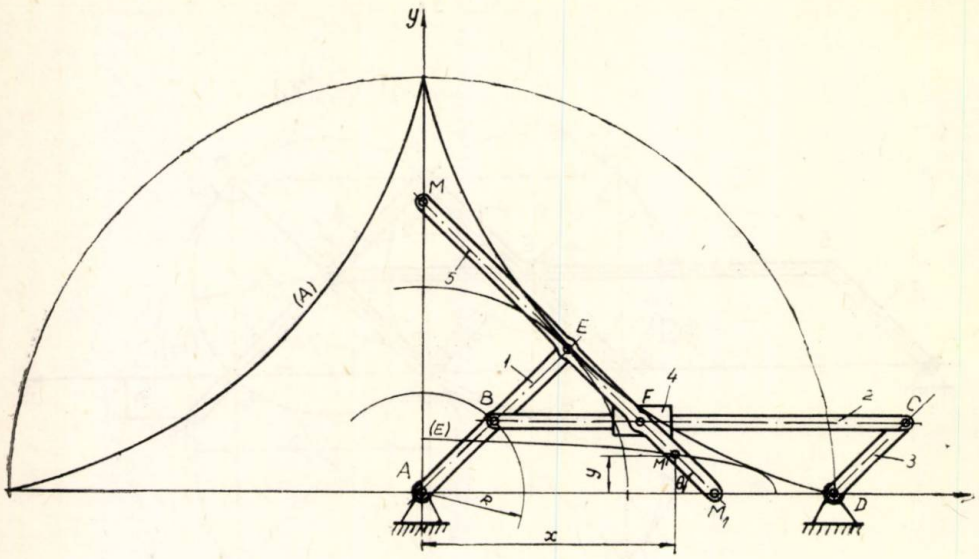


Fig. 5

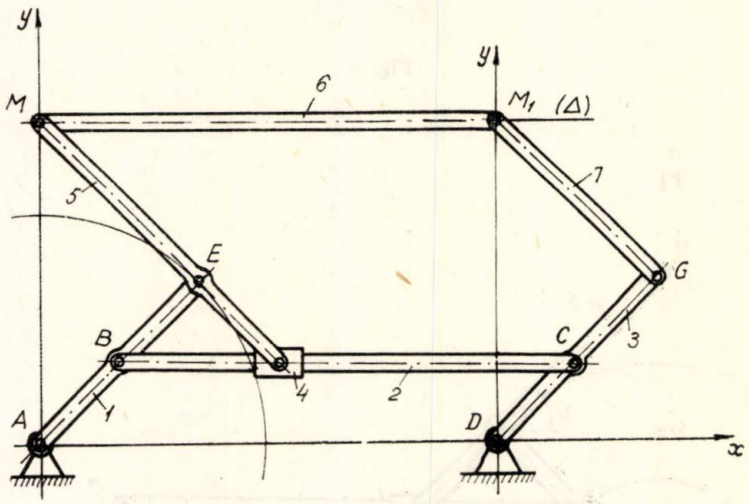


Fig. 6

Elementul MM_1 translatează paralel cu baza Ax şi oricare punct al acestui element execută o mişcare rectiliniară exactă, perpendiculară pe Ax.

Prin modificări structurale ale mecanismelor de bază se obţin o serie de mecanisme pentru conducerea rectiliniară a mişcării (fig. 7).

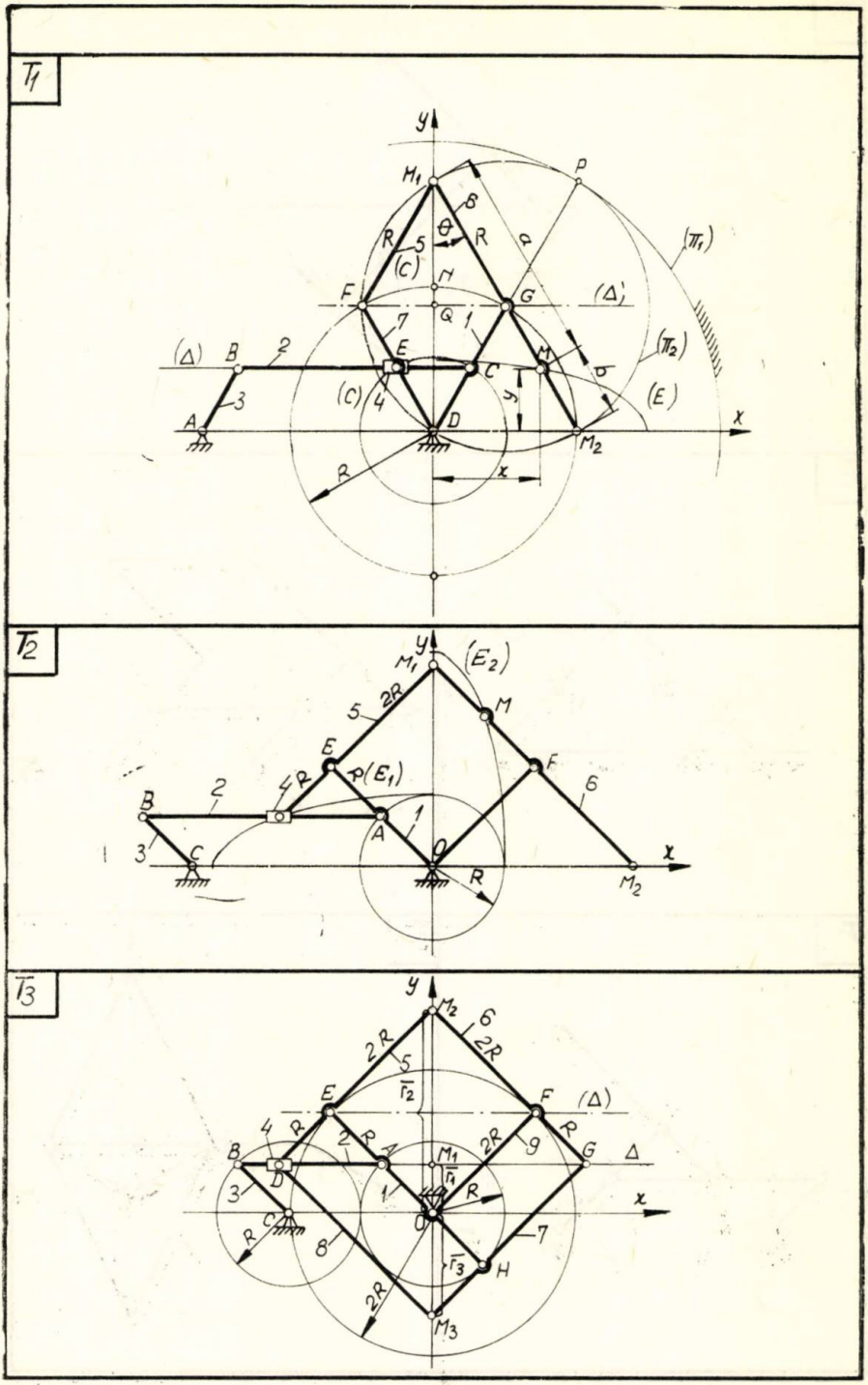


Fig. 7. — Exemple de mecanisme pentru conducerea rectiliniară a mişcării.

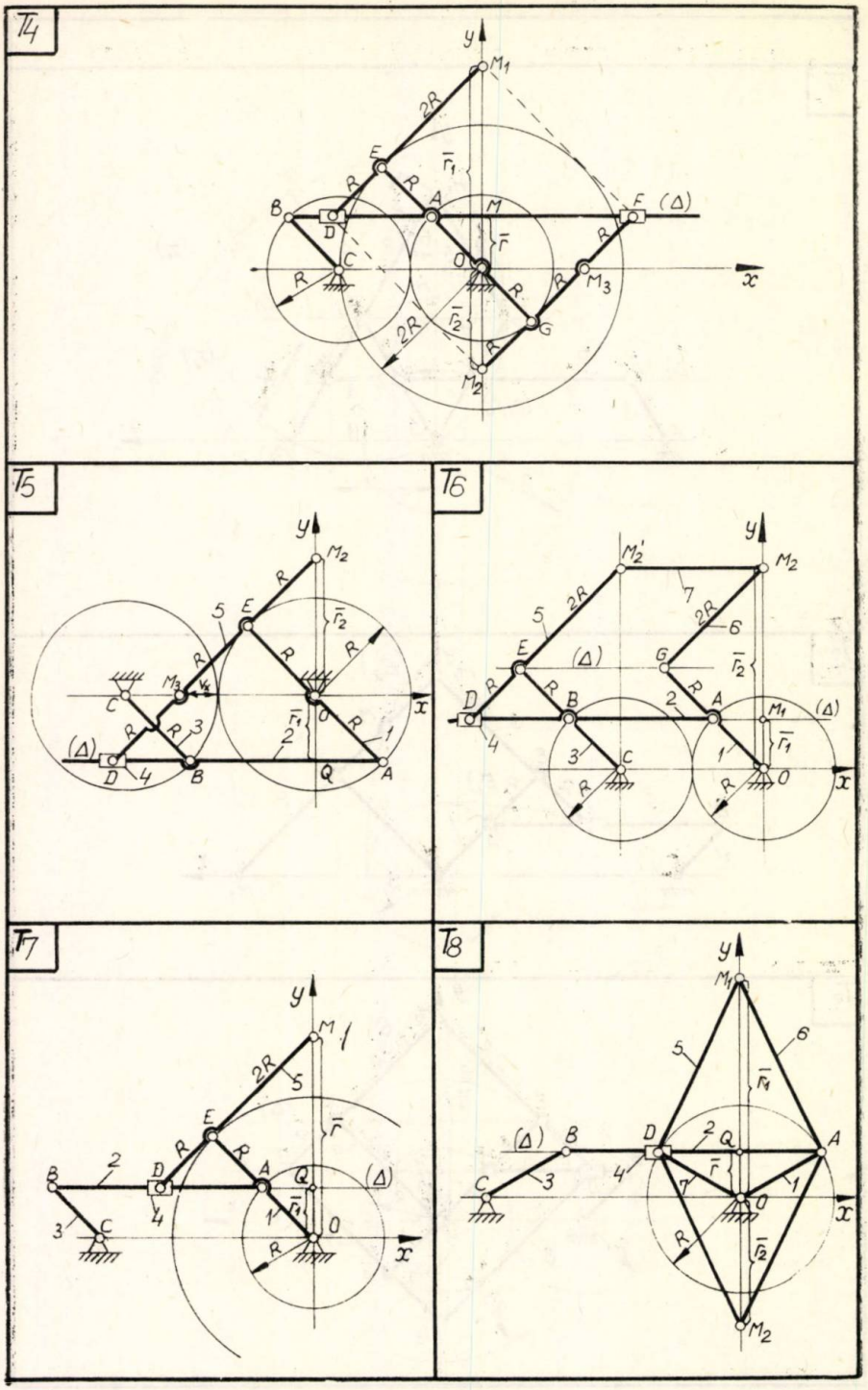


Fig. 7 (continuare)

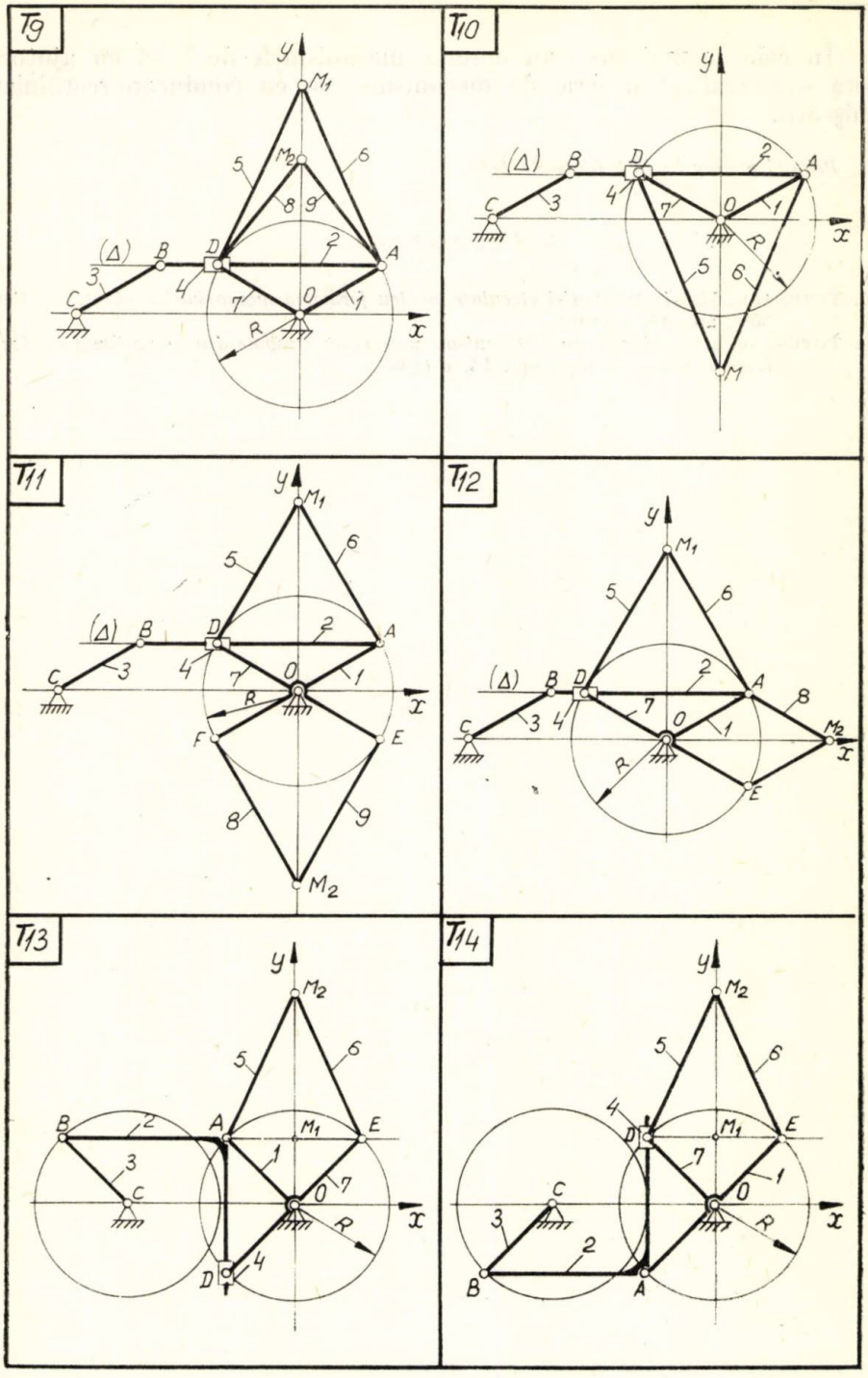


Fig. 7 (continuare)

În cele de mai sus s-au descris mecanismele de bază cu ajutorul cărora s-au realizat o serie de mecanisme noi cu conducere rectiliniară a mișcării.

Primită la redacție la 9 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. TUTUNARU, *Metoda translației circulare pentru formarea mecanismelor plane*, St. Cerc. Mec. apl. **15**, *1* (1964).
2. D. TUTUNARU, Elena Murgulescu, *Mecanisme matematice rezultate din mecanismul lui Isaac Newton* St. cerc. mec. apl. **14**, *6* (1963).

PENTRU ADOPTAREA UNUI PUNCT DE VEDERE UNITAR ÎN STUDIUL ANALIZEI STRUCTURALE A LANȚURILOR CINEMATICE ȘI A MECANISMELOR *).

de N. I. MANOLESCU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

În lucrare se prezintă legătura dintre diferitele „criterii" care determină gradul de mobilitate M al unui mecanism și modul de identificare a „familiei" mecanismului sau a diferitelor porțiuni ale acestuia.
Se stabilește apoi formula generală a numărului de cicluri independente (Z) ale unui mecanism în funcție de „structura assurică" a acestuia pe baza a două teoreme, după care se determină numărul (Z_0) de contururi închise deformabile ale unei grupe Assur de familia f.
În încheiere se prezintă modul de conducere a calculului cinematic al unui mecanism pe baza ciclurilor independente aflate în structura lui.

1. INTRODUCERE

În studiul teoriei mecanismelor, una dintre problemele fundamentale care se folosește atît în analiză, cît și în sinteză este determinarea, respectiv alegerea gradului de mobilitate (M).

De la impulsul căpătat de această știință, urmare firească a procesului de automatizare a producției materiale, stabilirea bazelor teoretice ale conceperii sistemelor tehnice și a principiilor de proiectare și de construcție a angrenat numeroase colective de cercetători. Acțiunea de perfecționare a metodelor de cercetare în domeniul teoriei mecanismelor ne-a adus în fericita situație ca astăzi colectivele de lucru să cuprindă întreaga suprafață a globului. Fără a cita un centru de cercetare oarecare, sîntem convinși că astăzi cînd cineva citește o lucrare de teorie a mecanismelor realizată de specialiștii din acest domeniu, constată cu satisfacție că s-a făcut un pas înainte.

Chiar și din contradicțiile aparente, ce se degajează din unele lucrări publicate, în care colegii noștri își spun punctele de vedere, se desprind

*) Publicată în „Journal of Mechanisms", Londra, *3* (1968).

concluzii care, puse în discuție prin reviste de circulație internațională, conduc la rezultate pozitive.

Un exemplu în această direcție îl constituie :

2. FORMULA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE ȘI A MECANISMELOR

Într-o lucrare anterioară [1] s-a făcut un scurt și incomplet istoric al evoluției acestei formule, începînd de la Cebîșiov pînă la Kutzbach și Dobrovolski, Artobolevski.

Problema a căpătat în ultimul timp o mare dezvoltare, așa cum se desprinde din lucrările lui Hunt [2], Waldron [3], Freudenstein [4], Crossley [5], Bogdan, Pelecudi și Bugaevski [17], Voinea și Atanasiu [22], Pelecudi [23], Ozol [24] și a autorilor citați în bibliografiile respective.

Care este expresia analitică a gradului de libertate L a unui lanț cinematic sau a gradului de mobilitate M a unui mecanism ? Care sînt parametrii geometrici și numerici care intră în această formulă, astfel încît prin precizarea lor să se obțină valoarea corectă a gradului de libertate L sau de mobilitate M ?

Trebuie să precizăm că între gradul de libertate L al lanțului cinematic spațial și gradul de mobilitate M al mecanismului care rezultă din acesta (prin fixarea unuia dintre elementele lui) există relația

$$M = L - 6. \tag{1}$$

Formula (1) definește în spațiu că gradul de mobilitate M al unui mecanism spațial este egal cu numărul gradelor de mobilitate al elementelor mobile față de elementul fix.

Hunt [2], Waldron [3], Urquart [6] pornesc în studiile menționate de la formula atribuită lui Kutzbach [8] :

$$F = b(n - j - 1) + \sum_{i=1}^{j} f_i, \tag{2}$$

în care F este „mobilitatea" mecanismului (Hunt [2] o notează cu M);
b are valoarea 6 în cazul general al mecanismelor spațiale și 3 în cazul mecanismelor plane ;
n este numărul total al elementelor mecanismului :
j — numărul cuplelor cinematice :
f_i — „conectivitatea" cuplei cinematice i, adică numărul de grade de libertate relative între două elemente legate între ele printr-o cuplă cinematică.

Autorii lucrărilor citate nu arată însă raționamentul care a stat la baza stabilirii formulei (2).

Waldron [3] arată clar că cercetări anterioare [9] — [11] au demonstrat că formula (2) nu poate fi generală din cauză că „b variază în diferitele părți ale aceluiași mecanism" și că aceste dificultăți au fost învinse în lucrările [12], [13] și [1].

În cele ce urmează ne propunem (tocmai în scopul încercării realizării unei unități de puncte de vedere) să prezentăm principiile care au stat la baza stabilirii formulei Kutzbach și a formulei Dobrovolski (exprimată din

punctul nostru de vedere) și ținînd seama de propunerile de notare ale lui I. I. Artobolevski [1]. Această formulă structurală este

$$M_f = (6 - f)(e - 1) - \sum_{f=m+1}^{5} (m - f)\, c_m. \tag{3}$$

3. GRAD DE MOBILITATE (M), FAMILIE DE MECANISM (f), CLASA CUPLEI CINEMATICE (m)

Noțiunile din acest paragraf le vom defini în legătură cu simbolurile folosite în formula (3) în comparație cu cele din formula (2).

Astfel:

$f = 6 - b$ este „familia" spațiului în care un element liber are f grade de libertate (matematic exprimat: între cele șase grade de libertate ale elementului există f condiții de legătură); în această situație se poate defini că b reprezintă numărul gradelor de libertate pe care un corp (element cinematic) le are într-un spațiu de „familie f";

$M_f = M_{(b)}$ — gradul de mobilitate al mecanismului de „familie f", adică al mecanismului cu elemente cărora, înainte de a fi legate în lanț cinematic, le sînt impuse f condiții comune de legătură;

$e = n$ — numărul total de elemente ale mecanismului; în literatura tehnică romînă, n reprezintă *numărul elementelor mobile ale mecanismului* ($n = e - 1$);

$m = 6 - f_i$ — clasa cuplei cinematice care în structura mecanismului se află în numărul de c_m (numărul cuplelor cinematice de clasa m); precizăm că prin clasa m a unei cuple cinematice se înțelege numărul de mobilități (grade de libertate relative) răpite de cupla cinematică a elementelor care o compun; astfel, în cazul unei cuple cinematice de clasa m, există relația

$$f_i = l_m = 6 - m, \tag{4}$$

unde

f_i este „conectivitatea" [3], adică numărul gradelor de libertate pe care le permite cupla de clasă m elementelor componente;

$\Sigma c_m = j$ — numărul total de cuple cinematice de diferite clase m, aflate în structura mecanismului de familia f.

(Este evident că un mecanism de familia f nu poate avea în structura lui decît cuple cinematice de o clasă:

$$m \geqslant f + 1). \tag{5}$$

Dacă în formula (2) se introduc simbolurile care stau la baza formulei (3), se obţine

$$M_f = (6 - f)\,(e - \sum_{m=f+1}^{5} c_m - 1) + \sum_{m=f+1}^{5} (6 - m)\, c_m, \qquad (6)$$

unde, după efectuarea calculelor, rezultă formula (3).

Raţionamentul care stă la baza stabilirii formulei (3) este, după părerea noastră, foarte simplu. Într-adevăr, în formula (3), primul termen din membrul al doilea reprezintă numărul gradelor de libertate ale celor $e - 1 = n$ elemente mobile în spaţiul de familia f, iar termenul al doilea reprezintă numărul gradelor de libertate răpite celor n elemente de cele Σc_m cuple cinematice.

Este evident însă că la aplicarea uneia sau alteia dintre formulele (2) sau (3) dificultatea apare din determinarea familiei mecanismului:

$$f = 6 - b. \qquad (7)$$

Metodele pentru stabilirea „familiei" mecanismului au fost prezentate în lucrările [1], [13].

În acele lucrări s-a arătat că există mecanisme compuse din *grupe assurice de familii diferite* sau, ceea ce era acelaşi lucru, formate din *mecanisme de familii diferite*, legate între ele prin „mecanismele de legătură" (V. Manafu [1]).

Waldron exprimă acest lucru, după cum s-a menţionat mai sus, prin variaţia factorului $b = 6 - f$ din formula (2) în diferitele porţiuni ale aceluiaşi mecanism.

4. IDENTIFICAREA FAMILIEI SAU A FAMILIILOR DIFERITELOR PORŢIUNI ALE UNUI MECANISM

Determinarea familiei f a mecanismului se poate face fie prin metoda tabelară [13], care permite găsirea numărului condiţiilor de legătură impuse elementelor cinematice înainte de a fi legate în lanţ cinematic ($f = 6 - b$), fie prin identificarea grupelor assurice care compun mecanismul de analizat [1].

În cazul cînd în structura acestuia se află grupe assurice de diferite familii care satisfac relaţia lui V. V. Dobrovolski [14]

$$(6 - f)\, n' - \sum_{m=f+1}^{5} (m - f)\, c'_m = 0 \qquad (8)$$

$$(f = 0 - 5),$$

determinarea gradului de mobilitate se va face cu ajutorul formulei [1]

$$M = M_f + \sum M_{gf'}, \qquad f' \leqslant f, \qquad (9)$$

în care M_f reprezintă gradul de mobilitate al mecanismului de familia f, căruia i s-au adăugat grupele assurice de familii diferite $f' \leqslant f$, care satisfac formula (8), sau neassurice, în care caz

$$M_{gf'} \neq 0.$$

În general însă la mecanismele existente în tehnică

$$M_{gf'} = 0.$$

Prin particularizarea lui f și rezolvarea ecuației (8) în numere întregi și pozitive (c'_m și n'), se obțin toate grupele assurice utilizabile în tehnică, corespunzătoare fiecărei „familii". Cîteva exemple de astfel de grupe au fost date în [1].

Metoda mecanismelor de legătură (Manafu [1]) folosește una dintre formulele

$$M = \sum M_f^j - M_l, \tag{10}$$

$$M = M_0 + \sum_1^j f_j, \tag{11}$$

în care

M_f^j reprezintă gradul de mobilitate al mecanismului component j de familie f;

M_l — numărul total al gradelor de mobilitate ale mecanismelor de legătură;

M_0 — valoarea obținută din aplicarea formulei (3) pentru cazul $f = 0$;

$\sum_1^j f_j$ — suma numerelor care reprezintă valoarea „familiilor" celor j mecanisme componente.

Aplicarea formulelor (9), (10) și (11) este arătată în figura 1, care reprezintă mecanismul din lucrarea [9].

Legătura dintre noțiunea de „familie" și „complexele de fascicule de drepte" din lucrările [12] și [15] a fost de fapt scoasă în evidență și în lucrările citate anterior [2], [3].

Voinea și Atanasiu [15] și Moroskine [16] folosesc pentru determinarea gradului de mobilitate M al mecanismului formula

$$M = N - r, \tag{12}$$

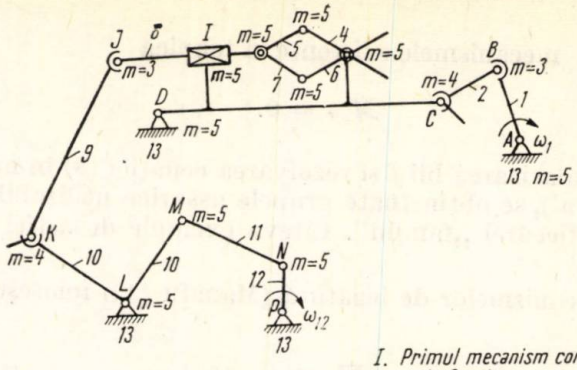
în care

N este numărul tuturor parametrilor scalari cinematici ai lanțului;

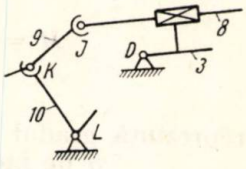
r — rangul matricei sistemului liniar și omogen al parametrilor cinematici $\overline{\omega}_j$ și $\overline{V}_j$, care determină starea de mișcare a lanțului (formula (119), p. 46).

Aplicarea formulei (12) comportă în prealabil echivalarea tuturor cuplelor cinematice de diferite clase m cu cuple-șurub, care, din punct de vedere structural, sînt de clasa a V-a [13].

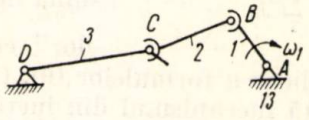
Determinarea familiilor grupelor assurice, ca și a mecanismelor componente, comportă, evident, o operație deosebit de atentă, la fel de altfel ca și a „mecanismului echivalent", format numai din cuple-șurub. În legătură cu această problemă merită a fi menționată lucrarea [17].



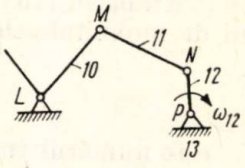
I. Primul mecanism component de familia: $f=0; M_0'=2$



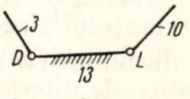
II. Al doilea mecanism component de familia: $f=0, M_0''=1$



III. Al treilea mecanism component de familia: $f=3, M_3'''=1$

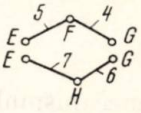


IV Mecanismele de legătură

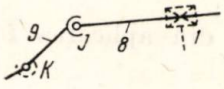


Din formula (10) se obține:
$M = \Sigma M_f - M_l = (2+1+1)-2=2$

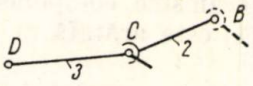
A Prima și a doua grupă Assur de familia $f'=3$, $M_g'=0$ (diade)



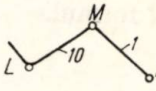
B A treia grupă Assur de familia: $f'=0$; $M_g'=0$



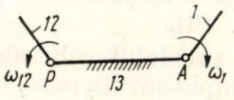
C A patra grupă Assur de familia: $f'=0$; $M_g'=0$



D A cincia grupă Assur de familia: $f'=3$, $M_g=0$ (diadă)



E Mecanismele fundamentale:



Din formula (9) rezultă:
$M = M_3 = 2$
$\Sigma M_g f' = 0$

Fig. 1. — Exemple de determinare a gradului de mobilitate a mecanismului cu *f*, variabil (compus din grupe Assur de diferite familii).

5. FORMULA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR ÎN FUNCȚIE ȘI DE NUMĂRUL CIRCUITELOR (CICLURILOR) INDEPENDENTE (Z) (100 ps)

5.1. ISTORIC

Formulele structurale menționate mai sus nu pot scoate însă în evidență criteriile de cercetare cinematică și dinamică a mecanismului provenit dintr-un lanț cinematic prin fixarea unuia dintre elementele sale.

Pentru un mecanism plan articulat dat, problema cercetării cinematice și dinamice a fost prezentată în lucrările [18], [19], bazate pe structura assurică a mecanismului.

În aceste lucrări, autorul a prezentat formula structurală a grupelor assurice plane articulate în funcție de numărul circuitelor independente (Z_g) sau „contururi închise deformabile'' :

$$Z_{g\,\max} = \frac{n'}{2} - 1 = \frac{c'_5}{3} - 1 \qquad (c'_{5e\,\min} = 2), \tag{13}$$

în care

$Z_{g\,\max}$ este numărul maxim de contururi închise deformabile (care sînt, evident, și cicluri independente) ale unei grupe assurice, care are în structura ei n' elemente și c'_5 cuple cinematice de clasa a V-a. Pentru diferențiere s-a convenit ca numărul elementelor unei grupe assurice și a cuplelor cinematice să se noteze cu n', respectiv c'_5, pentru a le deosebi de ale mecanismului; aceasta este și justificarea notațiilor din formula (8);

$c'_{5e\,\min}$ — ordinul minim al grupei Assur plane, care este egal cu numărul cuplelor cinematice exterioare (potențiale).

În figura 2 sînt date cîteva exemple din care se vede legătura între parametrii formulei (13).

În lucrarea [20], Plander și Thomas folosesc formula stabilită în [21] pentru determinarea numărului de „simple broken lines of the systems group'' :

$$s = \frac{1}{2} c'_5 (c'_5 - 1)(Z_g + 1), \tag{14}$$

în care c'_5 și Z_g au semnificațiile de mai sus și sînt indicate în figura 2. Această formulă a fost folosită pentru determinarea numărului de circuite independente necesare la studiul cinematic al mecanismelor plane articulate cu ajutorul calculatorului electronic analogic („electronic analog computer'').

Problema numărului de circuite independente (Z) ale unui mecanism a fost tratată și în lucrarea [22], însă numai în cazul mecanismelor plane articulate.

De asemenea, Pelecudi [23] a studiat sinteza lanțurilor cinematice plane articulate, folosind metoda contururilor (ciclurilor independente).

O formulă structurală a mecanismelor spațiale (de familia $f = 0$), în care se determină gradul de mobilitate în funcție și de numărul circuitelor independente Z, a fost stabilită de Ozol [24].

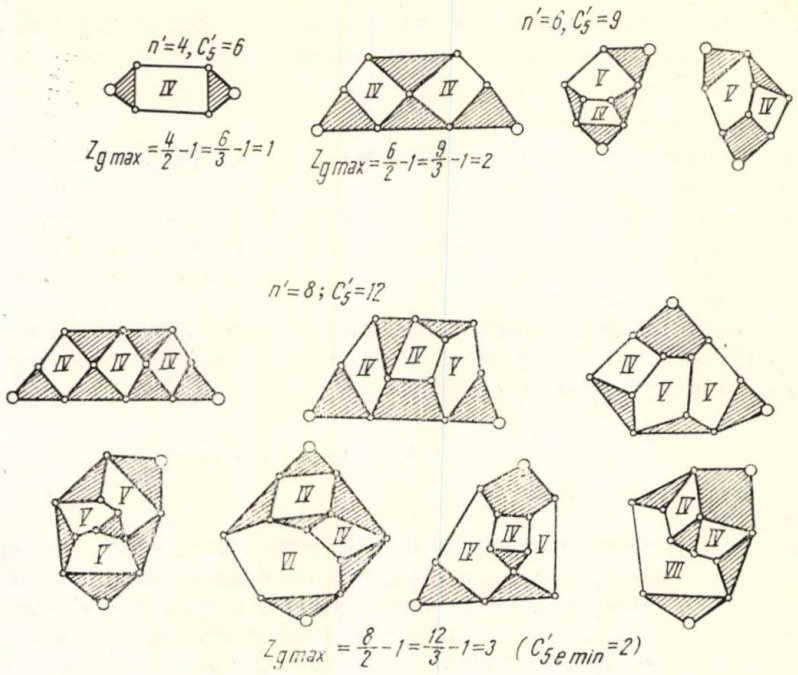


Fig. 2. — Exemple de grupe Assur plane articulate cu $Z_{g\,\max}$, conform formulei (13).

Expresia ei este

$$M_0 = \sum_{m=1}^{5} (6 - m)\, c_m - 6Z, \tag{15}$$

în care

M_0 reprezintă gradul de mobilitate al mecanismului de familia $f = 0$ $(b = 6)$;

Z — numărul circuitelor (ciclurilor) independente ale mecanismului;

m, c_m — aceleaşi semnificaţii ca în formula (3).

În ceea ce priveşte grupele assurice plane articulate, autorul a stabilit în lucrarea [25] relaţia fundamentală pentru alcătuirea acestora în funcţie de numărul contururilor închise deformabile (Z_g) şi a ordinului (c'_5):

$$Z_g + c'_5 = \frac{n'}{2} + 1 = C'_{5g\,\max} = k, \tag{16}$$

$$(k \geqslant 2)\ (k = j_{\max}),$$

în care

$c'_{5e\,\max}$ este numărul maxim de articulații exterioare ale grupei, corespunzător căruia numărul de contururi închise deformabile $Z_g = 0$;

k — număr întreg și pozitiv, care reprezintă în același timp și rangul $j_{\max}$ al elementelor aflate în structura grupei.

Expresia rangului j este dată de [26]

$$j = \frac{1}{2}(e_{\min} - M_3 + 1), \tag{17}$$

în care

$e_{\min}$ este numărul minim total al elementelor mecanismului plan articulat, care poate avea în structura lui un element de rangul j dat de formula (17);

M_3 = gradul de mobilitate al mecanismului plan articulat (de familia $f = 3$, $b = 6-f=3$).

În cazul grupei Assur plane articulate ($M_3 = 0$) se obține

$$j_{\max} = \frac{1}{2}(e_{\min} + 1), \tag{18}$$

care este formula „fermelor Baranov" [26].

Deoarece în (18), $e_{\min} = n' + 1$, în cazul grupelor Assur (18) devine

$$k = j_{\max} = \frac{n'}{2} + 1. \tag{19}$$

5.2 .FORMULA GENERALĂ A NUMĂRULUI DE CICLURI INDEPENDENTE Z ALE UNUI MECANISM ÎN FUNCȚIE DE STRUCTURA ASSURICĂ A ACESTUIA

Fie Z_g și $\sum_{m=f+1}^{5} c'_{me}$ numărul de contururi deformabile, respectiv numărul de cuple cinematice exterioare ale unei grupe Assur date.

TEOREMA 1. *Dacă la un mecanism fundamental (format dintr-un număr M_f de elemente conducătoare plus elementul fix) se leagă o grupă assurică de familia f cu Z_g contururi deformabile și $\Sigma c'_{me}$ cuple cinematice exterioare, atunci numărul circuitelor (ciclurilor) independente Z ale mecanismului rezultat este determinat de formula*

$$Z = Z_g + \sum_{m=f+1}^{5} c'_{me} - 1. \tag{20}$$

Demonstrarea formulei (20) este simplă. Într-adevăr, prin legarea la mecanismul fundamental a primei cuple exterioare nu apare în plus nici un contur deformabil; primul apare după legarea celei de-a doua cuple exterioare la mecanismul fundamental (inițial).

În final apar deci în plus față de Z_g încă $\sum c'_{me} - 1$ contururi deformabile. În total, mecanismul rezultat va avea Z cicluri independente determinat de formula (20).

Cîteva exemple pentru ilustrarea teoremei de mai sus sînt date în figura 3.

TEOREMA 2. *Dacă mecanismul rezultat, conform teoremei 1, se lungeşte sau se amplifică în continuare cu i grupe assurice, atunci numărul circuitelor (ciclurilor) independente Z ale mecanismului final este dat de formula*

$$Z = \sum_{k=1}^{i} Z_{gk} + \sum_{k=1,}^{i,5} \sum_{m=f+1} (c'_{mek} - 1) \tag{21}$$

sau

$$Z = \sum_{k=1,}^{i,5} \sum_{m=f+1} (Z_{gk} + c'_{mek} - 1). \tag{21'}$$

În figura 4 sînt date cîteva aplicaţii ale formulei (21).

Formula (21) este valabilă chiar dacă în structura mecanismului se află grupe assurice de diferite familii.

Formulele (21) şi (21') permit determinarea numărului de ecuaţii vectoriale între mărimile geometrice şi cinematice ale unui mecanism, necesare şi suficiente pentru a se calcula starea cinematică şi cineto-statică a acestuia.

Este evident că acest număr este egal cu Z.

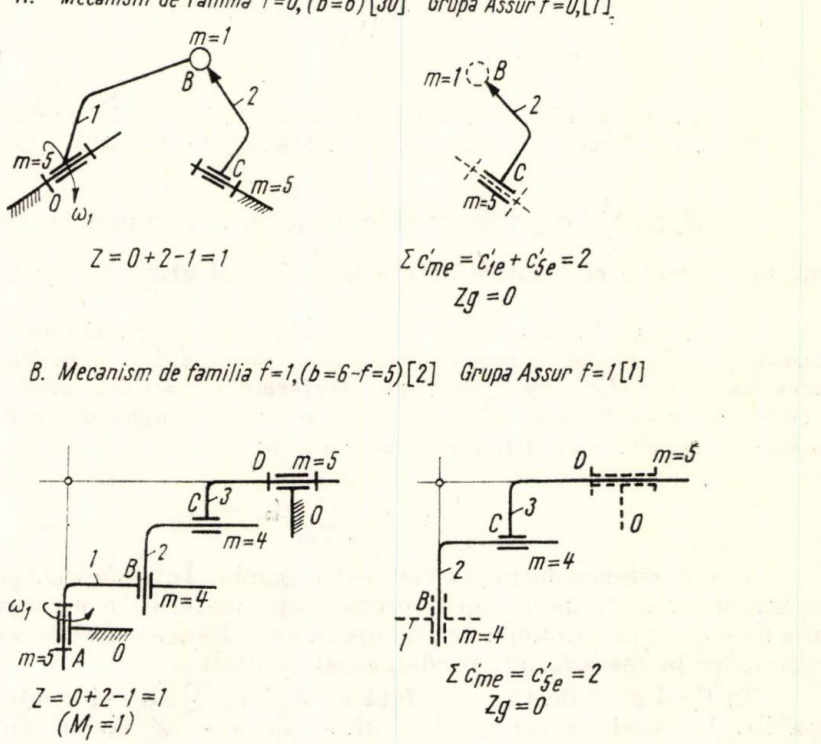
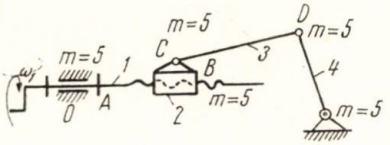


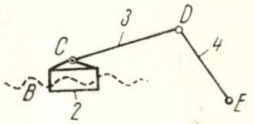
Fig. 3

C. Mecanism de familia $f=2, (b=6-f=4)$



$$Z = 0+2-1 = 1$$
$$(M_2 = 1)$$

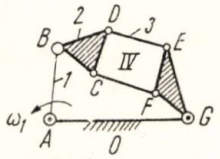
Grupa Assur $f=2, [1]$



$$\Sigma c'_{me} = c'_{5e} = ?$$
$$Zg = 0$$

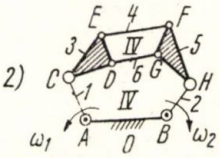
D. Mecanisme de familia $f=3, (b=3)$

1)



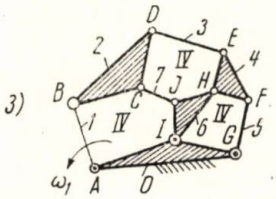
$$Z = 1+2-1 = 2$$
$$(M_3 = 1)$$

2)



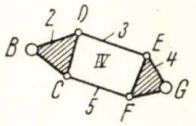
$$Z = 1+2-1 = ?$$
$$(M_3 = 2)$$

3)

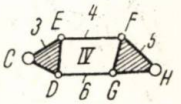


$$Z = 1+3-1 = 3$$
$$(M_3 = 1)$$

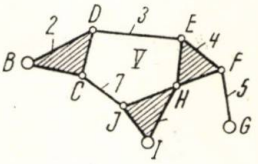
Grupe Assur $f=3 [1]$



$$\Sigma c'_{me} = c'_{5e} = 2 \ (B \text{ și } G)$$
$$Zg = 1 \qquad (cl.\ IV/2)$$



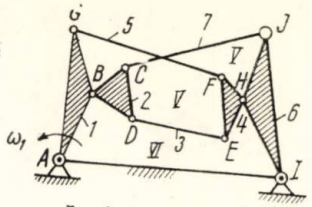
$$c'_{5e} = 2, (C, H); \ Zg = 1$$
$$(cl.\ IV/2)$$



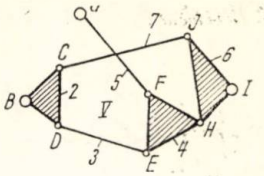
$$c_{me} = 3, (B, G, I) \ Zg = 1$$
$$(cl.\ V/3)$$

Fig. 3.—

4)

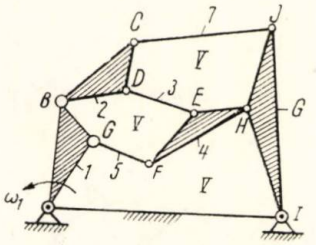


$Z = 1+3-1 = 3$ [39]

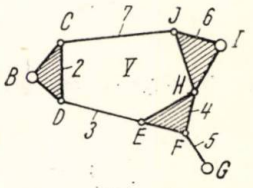


$c'_{me} = 3, (B, G, I)$, $Zg = 1$
(cl. V/3)

5)

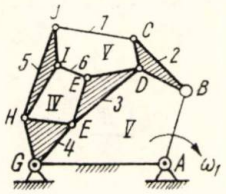


$Z = 1+3-1 = 3$

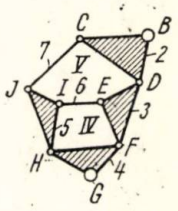


$c'_{me} = 3 (B, G, I)$, $Zg = 1$
(cl. V/3)

6)



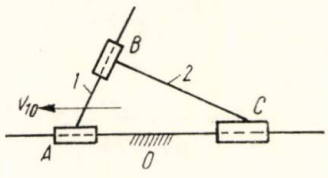
$Z = 2+2-1 = 3$



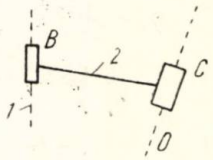
$c'_{me} = 2 (B, G)$, $Zg = 2$
(cl. IV, V/2)

Mecanism de familia $f = 4$

Grupa Assur $f = 4$ [1]



$Z = 0+2-1 = 1$



$c'_{me} = 2 (B, C)$, $Zg = 0$

Fig. 3. — Exemple de determinare a numărului de circuite independente (Z) ale unui mecanism cu ajutorul teoremei 1, formula (20).

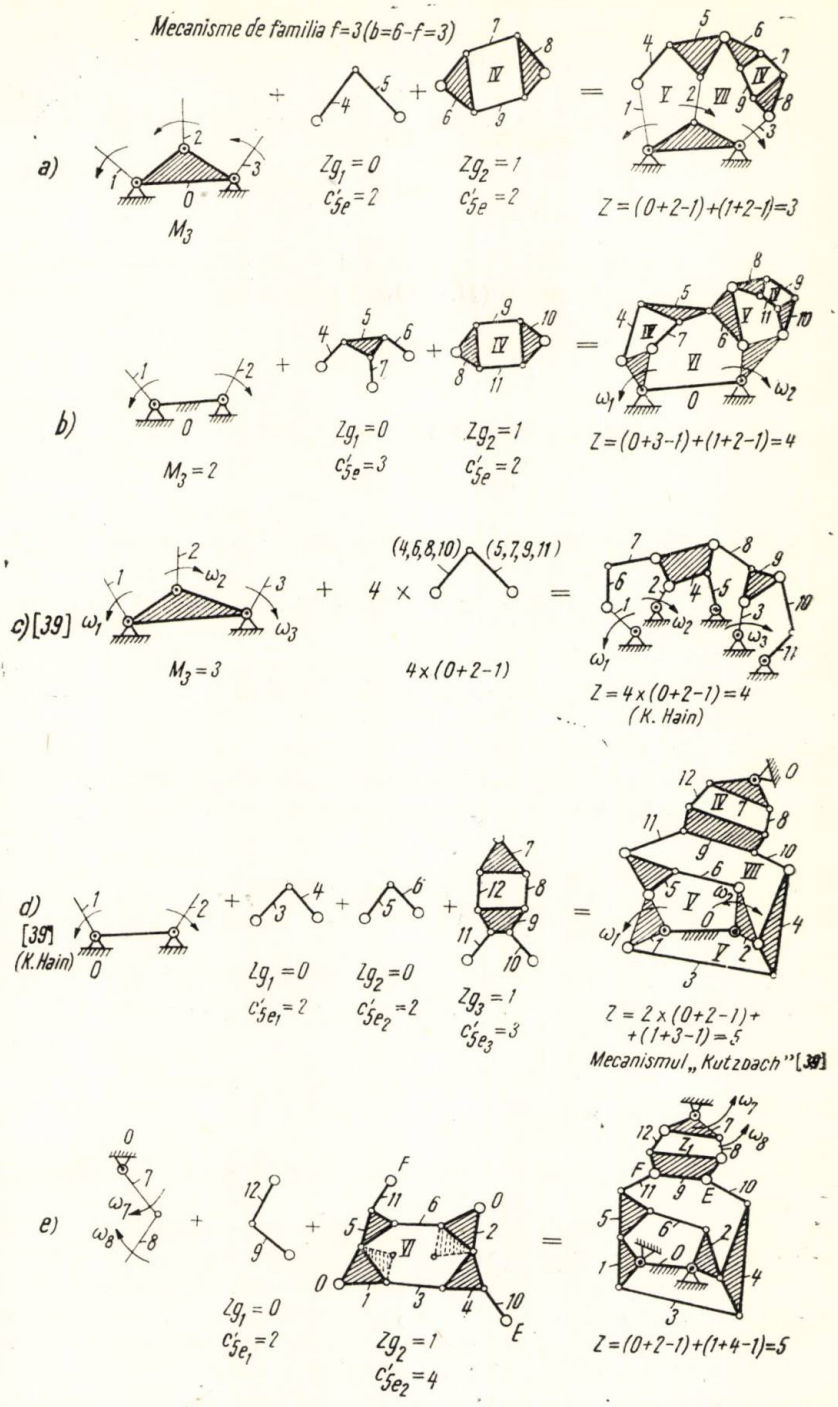


Fig. 4. — Exemple de determinare a numărului de circuite independente (Z) ale unui mecanism cu ajutorul teoremei 2, formula (21).

5.3. DETERMINAREA EXPRESIEI GENERALE A NUMĂRULUI DE CIRCUITE INDEPENDENTE Z ALE UNUI MECANISM DE FAMILIE f

Formula (15) stabilită în [24] se poate generaliza, punînd-o sub forma

$$M_f = \sum_{m=f+1}^{5} (6 - m)\, c_m - (6 - f)\, Z. \tag{22}$$

Ea permite, prin particularizarea lui f, să se obţină pentru $f = 0$ (mecanismele spaţiale) formula (15) (Ozol) şi pentru $f = 3$ (mecanismele plane şi sferice)

$$M_3 = c_5 + 2c_4 - 3Z, \tag{23}$$

iar în cazul mecanismelor plane articulate ($c_4 = 0$)

$$M_3 = c_5 - 3Z. \tag{24}$$

Dacă în (24) se înlocuieşte valoarea lui c_5 dedusă din

$$M_3 = 3\,(e-1) - 2c_5, \tag{25}$$

se obţine

$$M_3 = e - 2Z - 1 = n - 2Z, \tag{26}$$

formulă dedusă în [25].

Formula (22) are avantajul că dă posibilitatea determinării unei expresii generale a lui Z în funcţie de gradul de mobilitate M_f, adică

$$Z = \frac{1}{6-f}\left[\sum_{m=f+1}^{5} (6 - m)\, c_m - M_f\right]. \tag{27}$$

Dacă în (27) se înlocuieşte valoarea lui M_f din (3) şi se efectuează calculele, rezultă formula cunoscută din [24]:

$$Z = \sum_{m=f+1}^{5} c_m - e + 1 = \sum_{m=f+1}^{5} c_m - n, \tag{28}$$

în care $n = e - 1$ este numărul elementelor mobile ale mecanismului, conform formulei (3).

Scrisă sub forma (28), ea se poate aplica la orice mecanism, indiferent de familia din care face parte. Din punct de vedere practic are însă dezavantajul că nu permite în acelaşi timp şi indicarea circuitelor (ciclurilor) independente. Avantajul acesta îl are însă formula (21), care ţine seama de structura assurică a mecanismului şi permite în acelaşi timp indicarea celui mai scurt drum de analiză cinematică a lui.

Deoarece formula (21) are avantajul pe care l-am menţionat mai sus ne propunem să ne ocupăm de relaţia generală a lui Z_g.

6. DETERMINAREA RELAȚIEI GENERALE DINTRE NUMĂRUL CONTURELOR DEFORMABILE (Z_g) ALE UNEI GRUPE ASSURICE DE FAMILIA f, n' ȘI c'_m

Dacă în formula (28) se înlocuiesc

$$n = \sum n' + M_f \tag{29}$$

și

$$c_m = \sum c'_m + M_f, \tag{30}$$

se obține

$$Z = \sum_{m=f+1}^{5} (c'_m - n'). \tag{31}$$

Considerăm că această formulă (31) este deosebit de importantă, deoarece determină numărul ciclurilor independente ale unui mecanism oarecare în funcție de numărul total n' al elementelor grupelor Assur componente și al cuplelor cinematice c'_m corespunzătoare.

În cazul unei singure grupe assurice, din (31) și (20) rezultă

$$Z = Z_g + \sum_{m=f+1}^{5} c'_{me} - 1 = \sum_{m=f+1}^{5} c'_m - n',$$

de unde

$$Z_g = \sum_{m=f+1}^{5} (c'_m - c'_{me}) - n' + 1. \tag{32}$$

Se notează

$$c'_{mi} = c'_m - c'_{me}, \tag{33}$$

unde c'_{mi} reprezintă numărul cuplelor cinematice interioare ale grupei Assur.

Înlocuind (33) în (32), rezultă

$$Z_g = \sum_{m=f+1}^{5} c'_{mi} - n' + 1. \tag{34}$$

Cîteva aplicații ale formulelor (31) și (34) sînt arătate în figura 5.

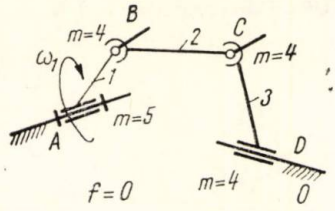
6.1. DETERMINAREA FORMULELOR $Z_g = Z_g\,(c'_m,\ c'_{me})$ $Z_{g\,max} = Z_{g\,max}\,(c'_m)$ ȘI $Z_{g\,max} = Z_{g\,max}\,(c'_m,\ n')$

Dacă în (32) se înlocuiește n' din (8) și se efectuează calculele, se obține

$$Z_g = \frac{1}{6-f} \sum_{m=f+1}^{5} (6-m)c'_m - \sum_{m=f+1}^{5} c'_{me} + 1. \tag{35}$$

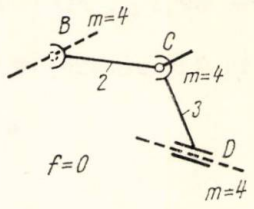
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

a)



$Z = c'_m - n' = 3 - 2 = 1$

$Z = (\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{1}}, 2, 3, \underline{\underline{0}})$



$c'_m = 3\,(B, C, D)$

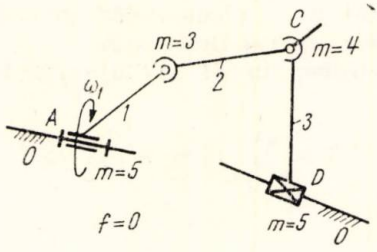
$n' = 2\,(2, 3)$;

$c'_{m_e} = c'_{4e} = 2\;\;(B, D)$

$c'_{m_i} = c'_{4i} = 1\,(C)$

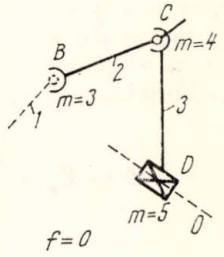
$Zg = c'_{m_i} - n' + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

b)



$Z = c'_m - n' = 3 - 2 = 1$

$Z = (\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{1}}, 2, 3, \underline{\underline{0}})$

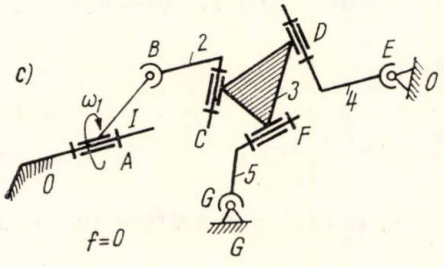


$c'_m = 3\,(B, C, D)$, $n' = 2, (2, 3)$

$c'_{m_i} = 1\,(C)$

$Zg = c'_{m_i} - n' + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

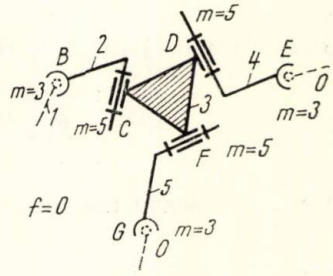
c)



$Z = c'_m - n' = 6 - 4 = 2$

$Z_1 = (\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{1}}, 2, 3, 5, \underline{\underline{0}})$

$Z_2 = (\underline{\underline{0}}, 5, 3, 4, \underline{\underline{0}})$



$c'_m = 6, (B, C, D, E, F, G)$

$c'_{m_e} = c'_{3e} = 3, (B, E, G)$

$c'_{m_i} = c'_{5i} = 3\,(C, D, F)$

$Zg = c'_{m_i} - n' + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$

Fig. 5.—

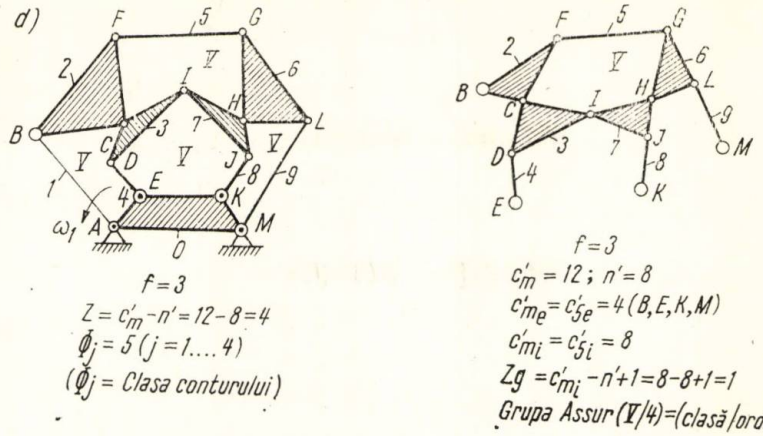


Fig. 5. — Exemple de aplicare a formulelor (31) și (32) pentru determinarea numărului ciclurilor independente Z ale unui mecanism și a numărului de contururi deformabile (Z_g) ale grupei Assur.

Deoarece numărul maxim de contururi ($Z_{g\max}$) ale unei grupe corespunde, după cum se știe [25], numărului minim al ordinului acesteia, adică

$$\min \sum c'_{me} = 2, \tag{36}$$

relația (35) devine

$$Z_{g\max} = \frac{1}{6-f} \sum_{m=f+1}^{5} (6-m)c'_m - 1. \tag{37}$$

Dacă (36) se introduce în (32), atunci se obține

$$Z_{g\max} = \sum c'_m - n' - 1. \tag{38}$$

Prin particularitatea lui f din formulele (35), (37), (32) și (38) se deduc toate formulele structurale care dau pe Z_g și $Z_{g\max}$ ale grupelor assurice de diferite familii.

Astfel, în tabela 6.1 sînt redate toate aceste formule structurale pentru $f = 0, 1, 2, 3, 4$.

Sînt de menționat simplitatea formulelor corespunzătoare grupelor assurice formate numai din articulații (c'_5).

Aceasta rezultă din (37) în funcție numai de c'_5 :

$$Z_{g\max} = \frac{1}{6-f} c'_5 - 1. \tag{39}$$

În funcție de c'_5 și n' , formula rezultă din (38) :

$$Z_{g\max} = c'_5 - n' - 1, \tag{40}$$

care este valabilă pentru orice familie.

6.2. DETERMINAREA FORMULELOR STRUCTURALE ALE GRUPELOR ASSURICE: $Z_{\varphi max} = Z_{\varphi max}(n')$ ŞI $Z_{\varphi max}(c'_m)$

Aceste formule nu se pot stabili decît în cazurile cuplelor unificate. Se va alcătui în acest scop o tabelă (6.2) în care se încadrează toate formulele $Z_{\varphi max}(n')$, ţinînd seama de formula fundamentală (8), particularizată de asemenea pentru fiecare familie [1], [13].

Astfel, formula (8), în cazul grupelor cu cuple cinematice unificate, se poate scrie succesiv:

— pentru $c'_4 = c'_3 = c'_2 = c'_1 = 0$, $(6-f)n' - 5c'_5 = 0$, (8')

— pentru $c'_5 = c'_3 = c'_2 = c'_1 = 0$, $(6-f)n' - 4c'_4 = 0$, (8'')

— pentru $c'_5 = c'_4 = c'_2 = c'_1 = 0$, $(6-f)n' - 3c'_3 = 0$, (8''')

— pentru $c'_5 = c'_4 = c'_3 = c'_1 = 0$, $(6-f)n' - 2c'_2 = 0$. (8'''')

În acest caz, în formula (40), prin înlocuirea lui c'_m ($m = 2, 3, 4, 5$) din (8'—8''''), rezultă:

— pentru cuple unificate de clasa a V-a (articulaţii):

$$c'_5 = \frac{6-f}{5-f} n' \ ; \tag{41}$$

— pentru cuple unificate de clasa a IV-a:

$$c'_4 = \frac{6-f}{4-f} n' \ ; \tag{42}$$

— pentru cuple unificate de clasa a III-a:

$$c'_3 = \frac{6-f}{3-f} n' \ ; \tag{43}$$

— pentru cuple unificate de clasa a II-a:

$$c'_2 = \frac{6-f}{2-f} n' \ . \tag{44}$$

Valorile lui c'_5, c'_4, c'_3, c'_2 din formulele (41), (42), (43), (44), înlocuite succesiv în (40), determină expresiile analitice ale numărului maxim de contururi deformabile ($Z_{\varphi max}$) ale unei grupe Assur cu cuple uniformizate.

Astfel: din (41, 42, 43, 44) şi (40) rezultă în cazul grupelor Assur cu cuple cinematice uniformizate:

— pentru $c'_5 \neq 0$: $Z_{\varphi max} = \frac{1}{5-f} n' - 1$; (45)

— pentru $c'_4 \neq 0$: $Z_{\varphi max} = \frac{2}{4-f} n' - 1$; (46)

— pentru $c'_3 \neq 0$: $Z_{\varphi max} = \frac{3}{3-f} n' - 1$; (47)

— pentru $c'_2 \neq 0$: $Z_{\varphi max} = \frac{4}{2-f} n' - 1$. (48)

Tabela 6.1

Expresiile analitice $Zg(C'_m, C'_{me})$, $Zg(C'_m, C'_{me}\ n')$, $Zg\ \max(C'_m)$ şi $Zg\max(C'_m\ n')$ pentru grupe Assurice de diferite familii *(f)*

	Formula generală pentru familia f		$f=0$ Particularizarea formulei	$f=1$ Particularizarea formulei	$f=2$ Particularizarea formulei	$f=3$ Particularizarea formulei	$f=4$ Particularizarea formulei
35	$Z_g=\frac{1}{6-f}\sum_{f+1}^{5}(6-m)C'_m-\sum_{f+1}^{5}C'_{me}+1$	$m\in(1,5)$	$Z_g=\frac{1}{6}\sum_{1}^{5}(6-m)C'_m-\sum_{1}^{5}C'_{me}+1$	$Z_g=\frac{1}{5}\sum_{2}^{5}(6-m)C'_m-\sum_{2}^{5}C'_{me}+1$	$Z_g=\frac{1}{4}\sum_{3}^{5}(6-m)C'_m-\sum_{3}^{5}C'_{me}+1$	$Z_g=\frac{1}{3}(C'_5+2C'_4)-(C'_{5e}+C_{4e})+1$	$Z_g=\frac{1}{2}C'_5-C'_{5e}+1$
		$m=5$	$Z_g=\frac{1}{6}C'_5-C'_{5e}+1$	$Z_g=\frac{1}{5}C'_5-C'_{5e}+1$	$Z_g=\frac{1}{4}C'_5=C'_{5e}+1$	$Z_g=\frac{1}{3}C'_5-C'_{5e}+1$	$Z_g=\frac{1}{2}C'_5-C'_{5e}+1$
		$m=4$	$Z_g=\frac{2}{3}C'_4-C'_{4e}+1$	$Z_g=\frac{2}{5}C'_4-C'_{4e}+1$	$Z_g=\frac{1}{2}C'_4-C'_{4e}+1$	$Z_g=\frac{2}{3}C'_4-C'_{4e}+1$	—
		$m=3$	$Z_g=\frac{1}{3}C'_3-C'_{3e}+1$	$Z_g=\frac{3}{5}C'_3-C'_{3e}+1$	$Z_g=\frac{3}{2}C'_3-C'_{3e}+1$	—	—
32	$Z_g=\sum_{f+1}^{5}(C'_m-C'_{me})-n'+1$	$m\in(1,5)$	$Z_g=\sum_{1}^{5}(C'_m-C'_{me})-n'+1$	$Z_g=\sum_{2}^{5}(C'_m-C'_{me})-n'+1$	$Z_g=\sum_{3}^{5}(C'_m-C'_{me})-n'+1$	$Z_g=(C'_5-C'_{5e})+(C'_4-C'_{4e})-n'+1$	$Z_g=C'_5-C'_{5e}-n'+1$
		$m=5$	$Z_g=C'_5-C'_{5e}-n'+1$				
		$m=4$	$Z_g=C'_4-C'_{4e}-n'+1$				—
		$m=3$	$Z_g=C'_3-C'_{3e}-n'+1$			—	
37	$Z_{g\max}=\frac{1}{6-f}\sum^{5}(6-m)C'_m-1$	$m\in(1,5)$	$Z_{g\max}=\frac{1}{6}\sum_{1}^{5}(6+m)C'_m-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{5}\sum_{2}^{5}(6-m)C'_m-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{4}\sum_{3}^{5}(6-m)C'_m-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{3}(C'_5+2C'_4)-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{2}C'_5-1$
		$m=5$	$Z_{g\max}=\frac{1}{6}C'_5-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{5}C'_5-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{4}C'_5-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{3}C'_5-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{2}C'_5-1$
		$m=4$	$Z_{g\max}=\frac{1}{3}C'_4-1$	$Z_{g\max}=\frac{2}{5}C'_4-1$	$Z_{g\max}=\frac{1}{2}C'_4-1$	$Z_{g\max}=\frac{2}{3}C'_4-1$	—
		$m=3$	$Z_{g\max}=\frac{1}{2}C'_3-1$	$Z_{g\max}=\frac{3}{5}C'_3-1$	$Z_{g\max}=\frac{3}{2}C'_3-1$	—	—
38	$Z_{g\max}=\sum_{f+1}^{5}C'_m-n'-1$	$m\in(1,5)$	$Z_{g\max}=\sum_{1}^{5}C'_m-n'-1$	$Z_{g\max}=\sum^{5}C'_m-n'-1$	$Z_{g\max}=\sum_{3}^{5}C'_m-n'-1$	$Z_{g\max}=C'_5+C'_4-n'-1$	$Z_{g\max}=C'_5-n'-1$
		$m=5$	$Z_{g\max}=C'_5-n'-1$				
		$m=4$	$Z_{g\max}=C'_4-n'-1$				
		$m=3$	$Z_{g\max}=C'_3-n'-1$				

Tabela 6.2

Expresiile analitice ale numărului maxim de contururi ($Z_{g\ max}$), ale citorva grupe Assurice cu cuple uniformizate

Relația dintre C'_m și n' pentru cuple uniformizate	Expresiile lui $Z_{g\ max}$ (n', f) și $Z_{g\ max}$ (c'_5, f)	Expresiile lui $Z_{g\ max}(n')$ și $Z_{g\ max}$ (c'_m) pentru diferite familii				
		$f=0$	$f=1$	$f=2$	$f=3$	$f=4$
$C'_5=\frac{6-f}{5-f}n'$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{5-f}n'-1$	$Z_{g\ max}=\frac{m'}{5}-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{4}n'-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{3}n'-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{2}n'-1$	$Z_{g\ max}=n'-1$
$(C'_4=C'_3=C'_2=C'_1=0)$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{6-f}C'_5-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{6}C'_5-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{5}C'_5-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{4}C'_5-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{3}C'_5-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{2}C'_5-1$
$C'_4=\frac{6-f}{4-f}n'$	$Z_{g\ max}=\frac{2}{4-f}n'-1$	$Z_{g\ max}=\frac{n'}{2}-1$	$Z_{g\ max}=\frac{2}{3}n'-1$	$Z_{g\ max}=n'-1$	$Z_{g\ max}=2n'-1$	—
$(C'_5=C'_3=C'_2=C'_1=0)$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{6-f}2C'_4-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{3}C'_4-1$	$Z_{g\ max}=\frac{2}{5}C'_4-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{2}C'_4-1$	$Z_{g\ max}=\frac{2}{3}C'_4-1$	—
$C'_3=\frac{6-f}{3-f}n'$	$Z_{g\ max}=\frac{3}{3-f}n'-1$	$Z_{g\ max}=n'-1$	$Z_{g\ max}=\frac{3}{2}n'-1$	$Z_{g\ max}=3n'-1$	—	—
$(C'_5=C'_4=C'_2=C'_1=0)$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{5-f}3C'_3-1$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{2}C'_3-1$	$Z_{g\ max}=\frac{3}{5}C'_3-1$	$Z_{g\ max}=\frac{3}{4}C'_3-1$	—	—
$C'_2=\frac{6-f}{2-f}n'$	$Z_{g\ max}=\frac{4}{2-f}n'-1$	$Z_{g\ max}=2n'-1$	$Z_{g\ max}=4n'-1$	—	—	—
$C'_5=C'_4=C'_3=C'_1=0$	$Z_{g\ max}=\frac{1}{6-f}4C'_2-1$	$Z_{g\ max}=\frac{2}{3}C'_2-1$	$Z_{g\ max}=\frac{4}{5}C'_2-1$	—	—	—

Formulele încadrate în tabelele 6.1 şi 6.2 permit realizarea sintezei oricărei grupe Assur şi a mecanismului caracteristic [26] corespunzător.

Posibilitatea sintezei oricărei grupe Assur bazate pe numărul contururilor deformabile (Z_g) permite realizarea mecanismelor în structura cărora se află grupa sau grupele Assur respective şi prin folosirea formulei (21) să se procedeze în efectuarea calculului cinematic şi dinamic.

7. CONDUCEREA CALCULULUI CINEMATIC ŞI DINAMIC AL UNUI MECANISM PE BAZA CIRCUITELOR (CICLURILOR) INDEPENDENTE (Z) AFLATE ÎN STRUCTURA SA

Problema este fundamentală în teoria mecanismelor. Orice metodă de calcul cinematic are în fond un circuit (ciclu) independent (contur deformabil sau simplu contur).

În cadrul mecanismelor plane, problema a fost — se poate afirma — studiată complet.

Lucrările din acest domeniu sînt extrem de numeroase. Ele au dat posibilitatea ca rezolvarea cinematică şi cinetostatică să folosească maşinile electronice de calcul [27] sau de calcul analogic [20]. Crossley [28] de asemenea face apel la astfel de mijloace pentru cercetarea cinematică a mecanismelor plane. Mangeron şi Drăgan [29] abordează problema spaţială, iar Lebedev în [30] studiază un mecanism simplu spaţial. Ambele au la bază folosirea circuitelor (ciclurilor) independente aflate în structura mecanismului respectiv.

În etapa actuală a sintezei mecanismelor articulate plane sau spaţiale prin folosirea maşinilor electronice de calcul, baza o constituie, după cum s-a arătat [27], conturul de vectori al ciclului independent.

Pentru a se putea însă realiza sinteza este necesar ca în prealabil să se aleagă schema structurală a mecanismului capabil să realizeze procesul tehnologic impus.

Proiectantul este obligat deci să folosească schemele structurale alcătuite de K. Hain [31]—[33] pentru mecanismele plane articulate cu un grad de mobilitate, lanţurile cinematice şi mecanismele plane articulate alcătuite de Crossley [34] şi ale autorului [35]—[38] pentru două grade de mobilitate.

Alegerea schemei structurale impune şi cunoaşterea numărului ciclurilor independente (contururilor deformabile) pe baza cărora să fie posibil calculul cinematic şi cinetostatic.

Alegerea schemelor structurale pentru mecanismele spaţiale de familia f (0, 1, 2, 3) se poate face folosind formulele din tabelele 6.1 şi 6.2. Numărul ciclurilor independente determină de altfel şi complexitatea calculelor cinematice şi cinetostatice.

Corespunzător fiecărei familii de mecanism, metoda de rezolvare a ciclului independent pentru determinarea stării cinematice a mecanismului depinde de la caz la caz.

S-a arătat că, pentru un mecanism spaţial de familia $f = 0$ cu două elemente mobile şi o cuplă cinematică superioară de clasa $m = 1$ între elementele mobile (fig. 3*a*), Lebedev [30] a propus o metodă de rezolvare (aici $Z = 1$).

Pentru mecanismul spațial de familia $f = 0$ în structura căruia se află grupa Assur din figura 5 *b*, metoda de analiză cinematică a ciclului independent a fost propusă și rezolvată de Mangeron [29], folosind metoda matriceal-tensorială.

Considerăm că metoda de rezolvare cinematică și cinetostatică a oricărui mecanism se poate alege *numai* după determinarea numărului de cicluri independente aflate în structura lui.

Odată determinat acest număr (Z), calculul cinematic se pornește de la cel mai simplu circuit. În cazul mecanismelor plane, metoda determinării numărului ciclurilor independente (Z) permite identificarea celui mai simplu ciclu ($\Phi_z = 4$) de la care se poate începe calculul cinematic. Astfel, dacă se analizează mecanismul complex al lui Kutzbach [39], redat în figura 4 *d*, se constată că aici $Z = 5$.

În situația din figură, calculul cinematic cel mai simplu se poate realiza pornind de la ciclul de cea mai mică clasă (în cazul de față ciclurile cu cele mai puține elemente ale căror mișcări sînt necunoscute, dar care în continuare să nu conducă la un ciclu mai complex).

Astfel, dacă în cazul figurii 4 *d* se admit elemente conducătoare 1 și 2, complexitatea calculului cinematic este relativ simplă. Din ciclul (0, 2, 4, 3, 1, 0) se determină mișcările elementelor 3 și 4 (cazul simplu al diadei 3, 4).

Din ciclul (0, 1, 5, 6, 2, 0) se determină mișcările elementelor 5 și 6 (același caz al diadei 5, 6). Mișcările elementelor (7, 8, 9, 10, 11, 12) se determină din rezolvarea cinematică a ciclurilor:

$$Z_3 = (0, 2, 4, 10, 9, 8, 7, 0),\ ^{1}) \text{ de clasa } \Phi_{z3} = 7$$

și

$$Z_4 = (0, 1, 5, 11, 9, 12, 7, 0), \qquad \Phi_{z4} = 7,$$

$$Z_5 = (7, 8, 9, 12, 7) \text{ de clasa} \qquad \Phi_{z5} = 4.$$

Mișcarea punctului lui Assur din planul elementului 9 se determină din ecuația circuitului

$$Z_3, (2, 6, 5, 11, 9, 10, 4, 2).$$

Rezolvarea acestora se face folosind metodele grafice sau grafice-analitice propuse în lucrarea [18] sau [22]. Se va evita în mod clar rezolvarea cinematică a mecanismului de mai sus admițînd ca elemente conducătoare (7, 8) sau (7, 12), deoarece în acest caz grupa Assur finală este de o clasă ($\Phi_z = 6$) superioară precedentei (fig. 4 *e*).

Ciclurile independentei care trebuie luate în considerare în acest caz sînt (7, 8 elemente conducătoare) următoarele:

a) $Z_1 = (7, 8, 9, 12, 7)$ de clasa $\Phi_{z1} = 4$.

1) Mișcările elementelor subliniate cu trei linii sînt complet cunoscute (φ, ω, ε) mișcările elementelor subliniate cu o linie sînt cunoscute în direcție (φ), iar mișcările elementelor subliniate cu două linii au cunoscute viteza și accelerația unui singur punct din plan (punct particular Assur).

Din aceasta se determină mişcările elementelor 9 şi 12 ale diadei (9, 12). În continuare, pentru determinarea mişcărilor elementelor (10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6) avem la dispoziţie patru cicluri:

b) $Z_2 = (2, 6, 5, 11, 9, 10, 4, 2)$, cu $\Phi_{z2} = 7$,

(sau $Z_2 = (0, 2, 4, 10, 9, 8, 7, 0)$, cu $\Phi_{z2} = 7$),

c) $Z_3 = (0, 1, 5, 6, 2, 0)$, cu $\Phi_{z3} = 5$,

d) $Z_4 = (0, 2, 4, 3, 1, 0)$, cu $\Phi_{z4} = 5$

şi

e) $Z_5 = (0, 1, 5, 11, 9, 12, 7, 0)$, cu $\Phi_{z5} = 7$.

Calculul cinematic este în acest caz mult mai complex, fiind necesare patru cicluri independente în loc de trei ca în primul caz. Din comparaţia celor două metode de alcătuire a „mecanismului Kutzbach" [39] reiese în mod evident că complexitatea calculului cinematic o impune clasa (Φ_{zg}) a grupei Assur aflate în structura mecanismului al cărui element sau elemente motoare sînt precizate.

I. I. Artobolevski a arătat clar acest lucru în lucrarea [40].

La alegerea ciclului de unde calculul cinematic este cel mai simplu trebuie să se ţină seama, în consecinţă, şi de structura assurică a mecanismului motor corespunzător.

Este deci evident că în cazul figurilor 4*d* şi 4*e* rezolvarea cinematică cea mai simplă este 4*d*.

Folosind graful asociat „mecanismului Kutzbach", rezultă aceleaşi cicluri, găsite direct pe schema structurală din figurile 4*d*, *e*, după cum se vede din figura 6.

Metoda indicată de Goodman [41] nu apare decît ca un caz particular al metodei ciclurilor independente. Într-adevăr, prin precizarea rezolvării

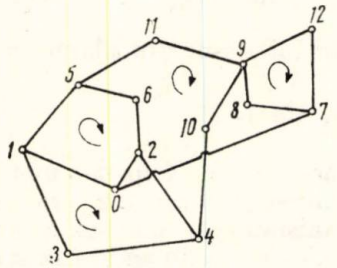


Fig. 6. — Graful asociat al mecanismului Kutzbach din figurile 4*d*,*e*.

cinematice a unui lanţ cinematic alegînd succesiunea cea mai simplă a rezolvării ciclurilor independente, se impune cu necesitate atît elementul fix, cît şi elementul conducător (cu mişcare considerată cunoscută).

Consider că problemele prezentate în rîndurile de mai sus vor putea da posibilitatea unor cercetări în continuare.

Primită la redacţie la 13 august 1968

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. MANOLESCU, V. MANAFU, *Sur la détérmination du dégré de mobilité des mécanismes*, Bul. Inst. politehn. București, **XXV**, *5*, p. 45—66 (1963).
2. K. H. HUNT, *Prismatic pairs in Spatial Linkages*, Jul. Mechanisms, vol. 2, Pergamon Press, 1967, p. 213—230.
3. K. J. WALDRON, *A Family of Overconstrained Linkages*, în Jul. Mechanisms, vol. 2, Pergamon Press, 1967, p. 201—211.
4. F. FREUDENSTEIN, *The Basic Concepts of Polya's Theory of enumeration, with examples from the structural classification of mechanisms*, Jul. Mechanisms, Vol. 2, Nr. 3, 1967.
5. F. R. E. CROSSLEY, *The permutations of Kinematic Chains of eight members or less from the Graph-Theoretic Viewpoint*, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 2, Pergamon Press, Oxford, 1965, p. 467—486.
6. P. URQUART, *Analysis of the Seven-Bar Chain*. Jul. Mechanisms, Vol. 2, pp. 77—83, Pergamon Press (1967).
7. HARRISBERGER, LEE, A. I. SONI, *A Survey of three-dimensional mechanisms with one general constraint A.S.M.E.*, Paper No. 66 Mech. — 44 for Ninth Conference on Mechanisms (1966).
8. K. KUTZBACH, *Mechanische Leistungesverzweigung Masch.*, Bau Betr., **8**, *21*, 710—716 (1929).
9. H. BODEN, *Zum Zwanglauf gemischt räumlich ebener Getriebe*, Maschinenbautechnik (Getriebetechnik) *11*, 612—615 (1962).
10. W. RÖSSNER, *Zur strukturellen Ordnung der Getriebe Wissenschaft*, Techn. Univ. Dresden *10*, 1101—1115 (1961).
11. N. I. KOLCHIN, *Experiment in the construction of an expanded structural classification of mechanisms and a structural table based on it.* Transactions of the Second All-Union Conference on Basic Problems of the Theory of Machines and Mechanisms (în limba rusă) Moscova (1960).
12. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Théorie géometrique des vis et quelques application à la théorie des mécanismes*, Revue de mécanique appliquée **VII**, *4*, 845—860 (1962).
13. N. I. MANOLESCU, *Asupra mecanismelor formate din lanțuri cinematice de diferite familii*. St. cerc. mec. apl., **XII**, *3*, 589—615 (1961).
14. V. V. DOBROVOLSKI, *Teoria mehanizmov. Gosudarstvennoe naucinotechnicescoe izdatelstvo*, Mașinostroitelnoi Literaturî, Moscova (1953), p. 64—65.
15. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Contributions à l'étude de la structure des chaines cinématiques*, Buletinul Institutului politeh., București, **XXII**, *1*, p. 29—77 (1960).
16. IU. F. MOROSKINE, *Osnovî analiticheskoi teorii mechanizmov*, Trudî seminara T.M.M. Analles S.S.S.R.T. XIV, 54, 1954, Moskow.
17. R. C. BOGDAN, E. BUGAEVSKI, CR. PELECUDI, *Contribuții la clasificarea mecanismelor spațiale*, St. cerc. mec. apl., **VII**, *8*, 407 (1957).
18. N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, *Die Kinematischen Untersuchungsmethoden ebener Gelenkgetriebe* (I), Revue de Mécanique Appliquée **VIII**, *5*, 817—858 (1963).
19. — *Die Kinematischen Untersuchungsmethoden ebener Gelenkgetriebe* (II). *Beiträge zur systematischen Untersuchung ebener sechs- und achtgliedrigen Gelenkgetriebe*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mec. Appl., **IX**, *2*, 341—363 (1964).
20. I. PLANDER, I. THOMAS, *Analysis of mechanisms with lower pairs by means of electronic analog computers*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **12**, *3*, 643—661 (1967).
21. V. IA. ANILOVITSCH, IH. V. EPSTEIN, *Metoda numerică și seriile Fourier în problema analizei lanțurilor ASSUR cu cuple de rotație* (în limba rusă), Teor. Mec. și mașinilor 1962, 92 p., 48, 68 .
22. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Edit. techn. p. 11 și 59 (1964), București.
23. CHR. PELECUDI, *Metoda conturelor în sinteza numerică și structurală a lanțurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3*, p. 573—599 (1967).
24. O. T. OZOL, *Asupra unei noi formule structurale a mecanismelor* (în rușește). Izvestia Vuzov, Mașinostroenie, *2* (1963).
25. N. I. MANOLESCU, P. ANTONESCU, I. ERCEANU, *The Methods of Formation of the Assur groups Function of the Number of Loops (Z_0) and of the Rank of Links (j)*, Bul. Inst. politeh. „Gh. Gheorghiu-Dej", București, **XXVIII**, *3*, p. 59—83 (1966).

26. N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, *The formation of the characteristics plane linkages Mechanisms with 10 Links*, Bul. Inst. politeh. „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, **XXVIII**, *4*, p. 63—79 (1966).
27. P. NICOLAS CHINONIS, *Computer makes light work of complex linkage design*, Product Engineering. July, 18.1966 p. 57—59.
28. F. R. E. CROSSLEY, *Simulation of motion of Plane Four-Link Mechanisms on an Electronic Analogue Computer. Contemporany Problems in the Theory of Machines and Mechanisms*, Edited by the Academy of Science of the U.S.S.R Moscow, 1965.
29. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Metoda matricial-tensorială pentru studiul mecanismelor spaţiale cu patru elemente*, St. cerc. mec. apl., **XII**, *6*, 1257—1270 (1961).
30. P. A. LEBEDEV, B. N. PEVZNER, *Mişcarea mecanismelor spaţiale cu trei elemente şi cuple superioare* (în ruseşte), Bul. Inst. politeh. „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti, **XXIX**, *1*, p. 99—108 (1967).
31. HAIN KURT, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Getriebe*, VDI-Berichte 5, 1955 p. 81—93.
32. HAIN KURT, A. W. ZIELSTORFF, *Systematik der zwangläufigen achtgliedrigen kinematischen Kette*, Maschinenmarkt, **87**, *37*, p. 14—20 (1964).
33. — *Die zwangläufigen achtgliedrigen Getriebe mit Einfach- und Mehrfachgelenken*, Maschinenmarkt, Würzburg, **70**, *64*, pp. 12—18 (1964).
34. F. R. E. CROSSLEY, *A Contribution to Grübler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, Journal of Engineering for Industry February 1964, Transactions of th. A.S.M.E. series B. pp. 1—8.
35. N. L. MANOLESCU, *Une méthode unitaire pour la formation des chains cinématiques et des mécanismes plans articulés avec différents degrés de liberté et mobilité*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Mécanique Appliquée, **9**, *6*, 1263—1300 (1964).
36. — *Systematisation et classification des mécanismes-moteurs plans articulés, a deux degrés de mobilité „total", ($M_3 = 2$) et „partial"' ($M_3 = 2$)*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mec. Appl., **10**, *4*, 999—1042 (1965).
37. N. I. MANOLESCU, I. TEMPEA, *Structural Synthesis of plane Kinematic chains with multiple joints and five degrees of freedom $L_3 = 5$ „total", $L_3^D = 5$ „partial" and $L_3 = 5$ „fractional"*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Méc. Appliquée, **12**, *5*, 1967, St. cerc. mec. appl., **25**, *3*, 549—572 (1967).
38. — *Structural and kinematic Synthesis of Plane Driving-mechanisms with multiple joints and two degrees of mobility: „Total" $M_3 = 2$, and „Partial" $M_3 = 2$*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Méc. Appliquée **13**, *1* (1968) şi în St. cerc. mec. appl., **25**, *5* (1967).
39. KURT HAIN, *Angewandte Getriebelehre VDI-Verlag*, Düsseldorf (1961) p. 27.
40. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Asupra problemei cercetării cinematice a lanţurilor complexe*, Bull. of Polytechnical Inst. Iassy **6 (10)** *1—2*, p. 285—297, 1960 (în ruseşte).
41. TH. B. GOODMAN, *An indirect method for determining accelerations in complex mechanisms*, Transactions of the A. S. M. E. *81*, p. 1676—1682 (1959).
42. R. KRAUSS, *Grundlagen der Getriebelehre Hannover-Wolfenbütel* 1949. Getriebelehre, Bd. I. Einführung Berlin 1951. Getriebelehre, Bd II Grundlagen des Systematischen Getriebeaufbaues, Berlin 1952.
43. L. S. WOO, *Type Synthesis of Plane Linkages Transactions of the A.S.M.E.*, Journal of Engineering for Industry Vol. 89 Series B Nr. 1 February (1967) pp. 159—172.
44. L. DOBRJANSKYJ F. PREUDENSTEIN, *Some Applications of Graph Theory to the Structural Analysis of Mechanisms*. Trans. of the A.S.M.E. Jn of Egh. for industry Vol. 89 Series B Nr. 1 febr. (1967) pp. 153—158.

FENOMENE DE REZONANȚĂ LA AXELE PRINCIPALE ALE MAȘINILOR-UNELTE ȘI INFLUENȚA LOR ASUPRA PRECIZIEI DE PRELUCRARE

de P. DODOC
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

În articol se arată că în domeniul subcritic sistemul vibrator „piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină-unealtă" poate fi excitat în rezonanțe de diferite ordine. Datorită acestui fenomen, axa de rotație a piesei descrie o traiectorie, numită de autor „trocoidă de rezonanță", care, transmițîndu-se la suprafața piesei în procesul de așchiere, provoacă apariția unor erori de prelucrare considerabile. Mai departe se arată căile pentru micșorarea acestor erori.

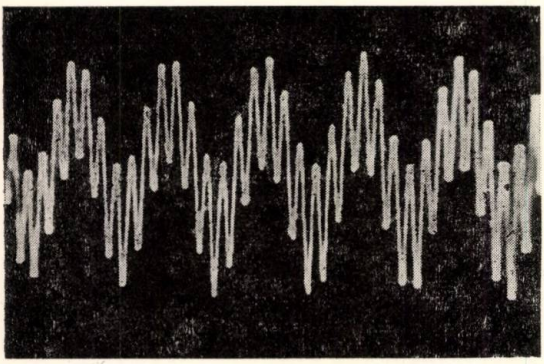
Cercetări teoretice și experimentale au arătat deja [1], [2] că la excitația prin dezechilibru subcritic a unui arbore în rotație ia naștere atît o vibrație circulară sau eliptică forțată de frecvență $f_n = n/60$ Hz și de amplitudine A_n, cît și una sau mai multe vibrații proprii de amplitudine A_{Ei} și de frecvență f_{Ei} care pot fi translatorice, circulare sau eliptice. Dintre vibrațiile proprii, una are de obicei amplitudinea mult mai mare decît a celorlalte. Din compunerea acesteia cu vibrația forțată iau naștere trocoide de vibrații, care, în funcție de raportul amplitudinilor $m_A = A_E/A_n$ și de raportul frecvențelor $m_f = f_E/f_n = m_{fi} + m_{fz}$, unde $m_{fi} = 1, 2, 3, \ldots$ este partea întreagă, iar $m_{fz} = \pm(0{,}0 \ldots 0{,}5)$ partea zecimală a raportului m_f își pot schimba atît forma, cît și natura. Din compunerea mai multor vibrații rezultă tot trocoide, însă de o formă mai complexă.

Cunoașterea acestor trocoide prezintă o importanță considerabilă, deoarece piesa de prelucrat, respectiv axul principal al mașinii, nu se va roti numai în jurul axei sale, ci și axa de rotație va descrie la rîndul său o traiectorie, care este chiar trocoida menționată și care, transmițîndu-se la suprafața piesei în procesul de așchiere, determină precizia piesei prelucrate. Figura 1 arată mișcarea de rotație înregistrată în direcția cuțitului (a) și polar (b) a axei de rotație a unei piese $\varnothing 15 \times 250$ mm fixată într-un universal cu trei bacuri de tip Forkardt F 250 (diametrul exterior d = 250 mm) (fig. 2).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 427—438.

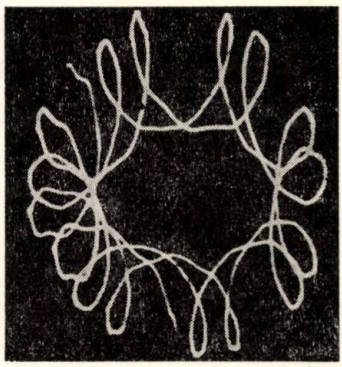
Figura 3 reprezintă curba de rezonanţă a acestei piese, obţinută prin excitaţie cu un excitator electrodinamic la forţă constantă $\breve{P} = 1{,}5$ kgf, conform schemei din figura 4. Se observă că, pentru frecvenţa de excitaţie $f_{e1} = 124$ Hz, sistemul intră în rezonanţă. O altă rezonanţă apare pentru $f_{e2} = 520$ Hz. Amplitudinea acesteia este însă neglijabil de mică.

Dacă se filtrează frecvenţele $f_e > 200$ Hz şi se excită sistemul prin dezechilibru subcritic, se poate obţine curba de rezonanţă reală pentru



a

Fig. 1



b

vibraţia proprie de frecvenţă $f_{e1} = f_{E1} = 124$ Hz (fig. 5). Din aceasta rezultă că pentru toate valorile întregi ale raportului frecvenţelor apar rezonanţe (punctele ... A_4 ... A_8...) la care amplitudinea vibraţiei proprii A_E ia valori maxime. La $m_{fz} = 0{,}5$ amplitudinea A_E este minimă. Atît la $m_{fz} = 0$, cît şi la $m_{fz} = 0{,}5$ are loc o transformare cantitativă şi calitativă a traiectoriei axei de rotaţie a piesei după cum urmează:

— pentru $m_{fz} = +(0{,}0 \ldots 0{,}5)$ apar hipotrocoide (fig. 6 *a*);

— pentru $m_{fz} = 0$ apar trocoide de rezonanţă (fig. 6 *b*);

— pentru $m_{fz} = -(0{,}0 \ldots 0{,}5)$ apar epitrocoide (fig. 6 *c*).

Datorită altor fenomene (de exemplu datorită excitaţiei prin şoc) pot apărea traiectorii „circular translatorice" identice ca formă cu cele de rezonanţă (fig. 6 *b*) şi în domeniile $m_{fz} = \pm(0{,}0 \ldots 0{,}5)$.

Influenţa vibraţiei proprii $f_{E2} \approx 520$ Hz asupra traiectoriei axei de rotaţie a piesei se vede în figura 7 ($m_f \approx 7$).

Mecanismul transmiterii acestor vibraţii la suprafaţa piesei şi apariţia greşelilor de prelucrare provocate de ele sînt explicate în [3] şi [4].

Prin variaţia turaţiei axului sau prin modificarea masei sistemului este posibil ca amplitudinea vibraţiei proprii A_E să se micşoreze considerabil. Prin aceasta se obţine atît o ridicare a preciziei de prelucrare, cît şi o prelungire apreciabilă a duratei de funcţionare normală a sculei şi a maşinii. Totodată se reduce şi zgomotul. Faptul că punctele ... B_4 ... B_7... din figura 5 nu se află pe abscisă, adică $A_{E\,min} \neq 0$, se explică prin aceea că sistemul „piesă-dispozitiv de prindere a piesei-ax principal" este excitat suplimentar în frecvenţa proprie. Acest lucru poate fi uşor verificat experimental dacă se urmăreşte mişcarea axului principal în timp ce în cutia de viteze se roteşte cu turaţie variabilă numai un arbore (axul principal nu se roteşte). Se poate constata astfel că traiectoria axului principal este o elipsă

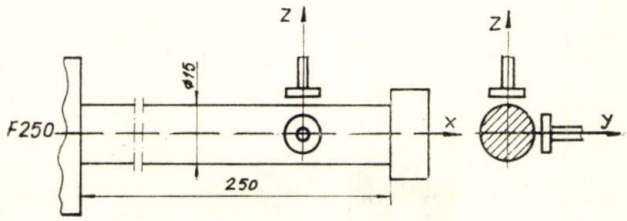


Fig. 2

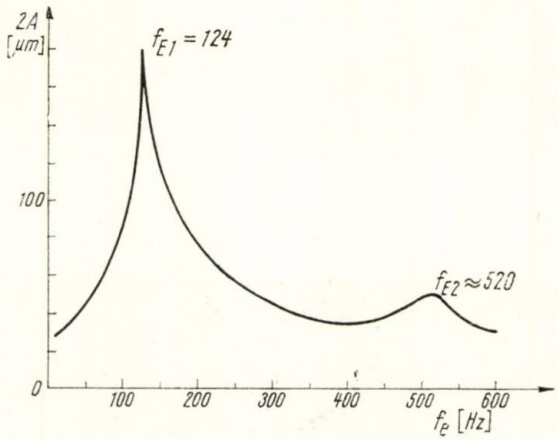
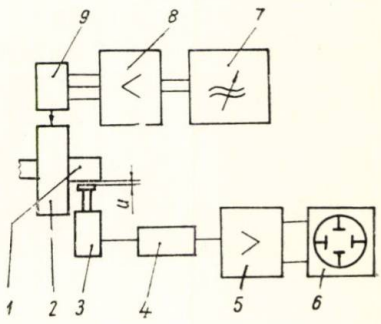


Fig. 3

Fig. 4.—*1* — dorn special (sau piesă); *2*—dispozitiv de prindere a piesei (sau axul principal); *3* — traducător capacitiv (valoarea diviziunii 0,05 μm); *4* — oscilator tip DISA 51 CO1; *5* — amplificator tip DISA 51 BO2; *6* — osciloscop tip DISA 51BOO; *7*— generator de frecvență RC; *8* — amplificator de amplitudine tip PHILIPS GM 5535; *9* — excitator de vibrații tip PHILIPS 9270/01.



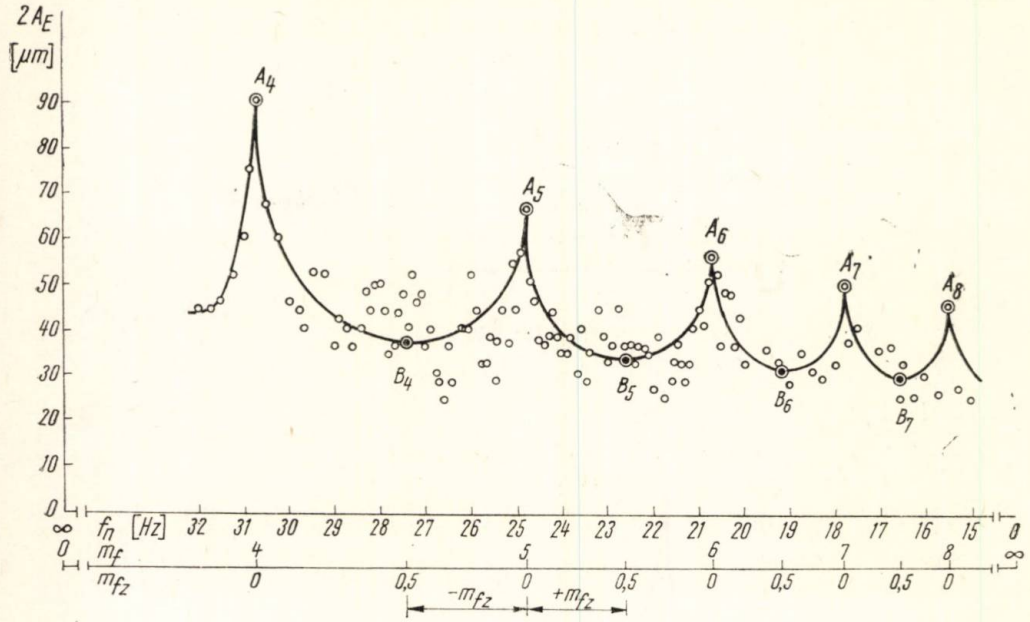

2A_E
[μm]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
A4
A5
A6
A7
A8
B4
B5
B6
B7
∞
0
f_n [Hz] 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 0
m_f 4 5 6 7 8
m_fz 0 0,5 -m_fz 0 +m_fz 0,5 0 0,5 0 0,5 0
∞

Fig. 5

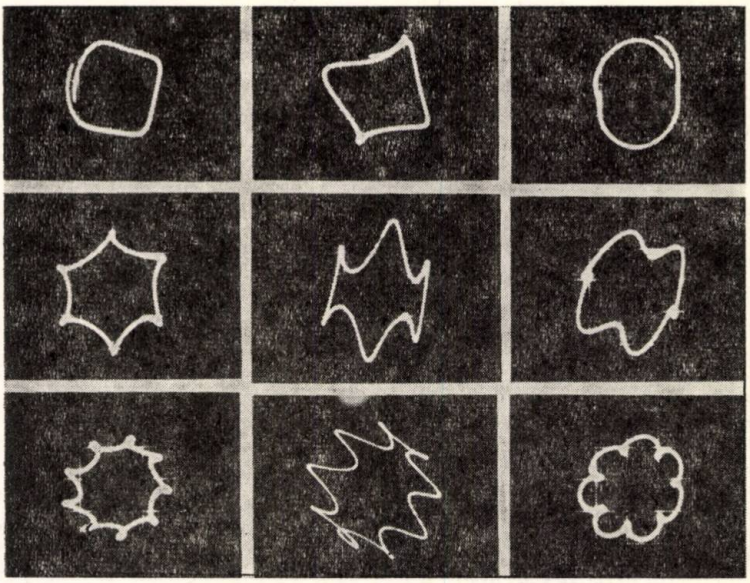

a
b
c

Fig. 6

ale cărei axe cresc cu turația arborelui care se rotește. Cînd frecvența de rotație a arborelui rotitor este un submultiplu întreg al frecvenței proprii a sistemului menționat, elipsa se mărește , adică sistemul este excitat, prin pereții cutiei de viteze, în rezonanță.

Deoarece în cutia de viteze se rotesc mai mulți arbori cu diferite turații, este posibil ca frecvența proprie a sistemului sus-numit să fie un multiplu întreg al mai multor frecvențe de rotație. În acest caz, pozițiile de

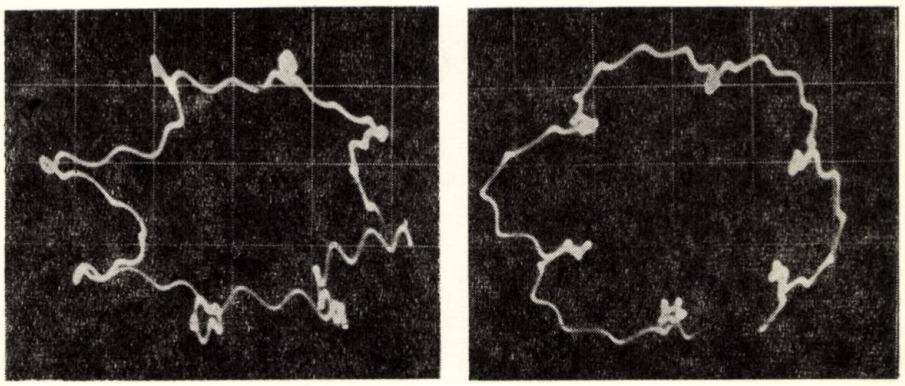


Fig. 7

rezonanță se vor suprapune. Pe de altă parte, la prinderea unei piese rigide în universal, curba de rezonanță obținută prin excitarea sistemului conform schemei din figura 4 poate indica mai multe poziții de rezonanță, adică sistemul posedă mai multe frecvențe proprii (fig. 8).

Vibrația de amplitudine maximă o vom numi vibrație proprie principală de frecvență f_{E1}. Celelalte vibrații proprii sînt secundare și au parametrii A_{E2}, f_{E2} ; A_{E3}, f_{E3} etc. Frecvențele acestor vibrații (f_{E2}, f_{E3}...) pot fi mai mari sau mai mici decît frecvența vibrației proprii principale.

Experimental s-a dovedit că frecvențele obținute din tabloul de rezonanță (fig. 8) apar și la excitația prin dezechilibru subcritic, iar rapoartele dintre amplitudinea vibrației principale și amplitudinile vibrațiilor secundare rămîn aproximativ constante.

Prin filtrare se poate dovedi că pentru fiecare vibrație în frecvența proprie (A_{Ei}, f_{Ei}) sistemului vibrator îi corespunde o curbă reală de rezonanță, adică o curbă caracteristică de amortizare, ca în figura 5.

Deoarece frecvența de rotație f_n a axului principal poate fi un submultiplu întreg pentru una, două sau mai multe frecvențe proprii ale sistemului în rotație, acesta va fi excitat simultan în rezonanță pentru vibrațiile respective, adică pozițiile de rezonanță se suprapun.

Importanța acestui fenomen se va sublinia printr-un exemplu. În tabela 1 se dau frecvențele de rotație în Hz ale axului principal la care sistemul menționat mai sus intră în rezonanță pentru vibrațiile proprii, ale căror frecvențe rezultă din figura 8. Se observă că pentru frecvența de rotație $f_n = 35$ Hz sistemul vibrează în rezonanță principală sau rezonanță de ordinul întîi pentru frecvența proprie f_{E5} și în rezonanță de ordinul

trei pentru frecvența secundară f_{E3}, la care rapoartele frecvențelor sînt $m_{f5}^{(1)} = 1$ și $m_{f3}^{(3)} = 3$ (exponentul lui m_f indică poziția de rezonanță, iar indicele ordinul frecvenței vibrației proprii considerate).

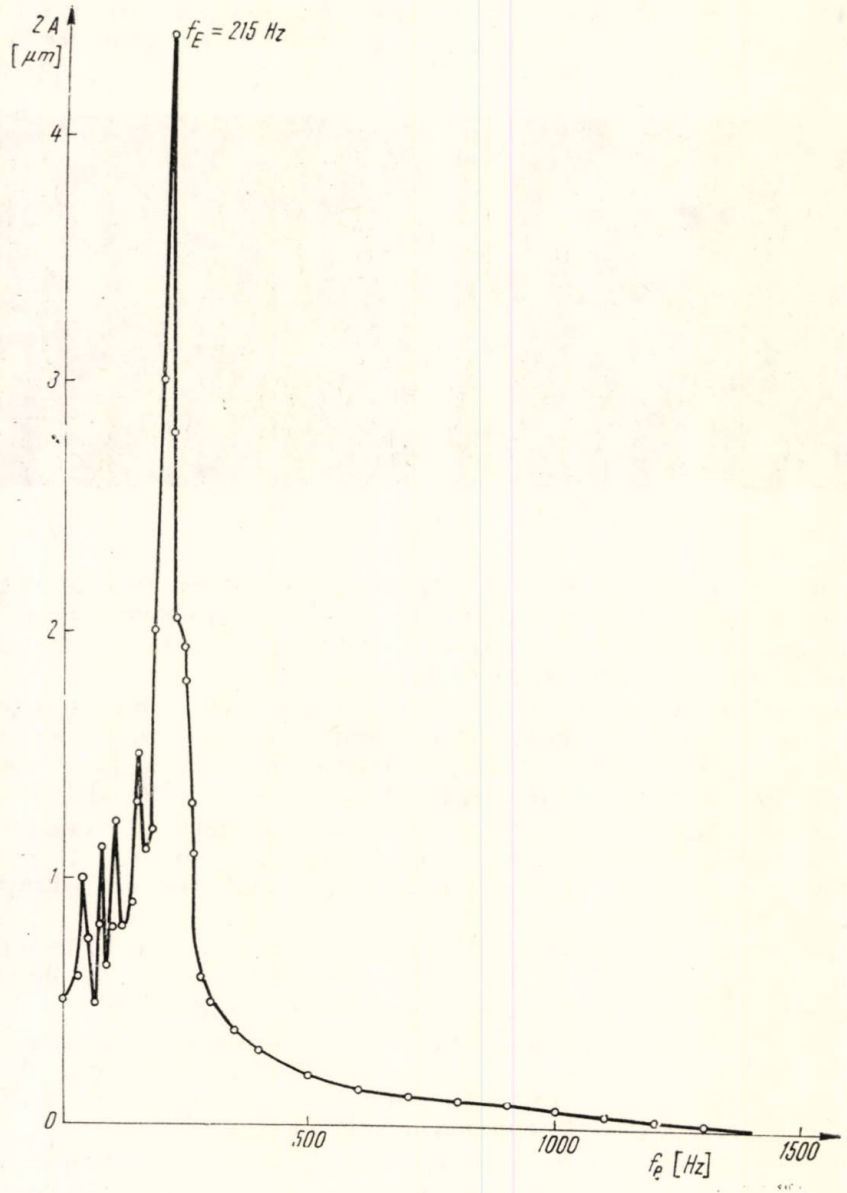


Fig. 8

Alte suprapuneri există pentru $f_n \approx 106$; $f_n \approx 53$. $f_n \approx 26{,}6$; $f_n = 21{,}5$, $f_n = 17{,}5$; $f_n = 15$, $f_n = 13{,}33$ etc.

Tabela 1

M_f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{E1} = 215$	215	107,50	71,60	53,80	43	35,85	30,75	26,90	23,95	21,5
$f_{E2} = 150$	150	75	50	37,50	30	25	21,40	18,75	16,66	15
$f_{E3} = 105$	105	52,50	**35**	26,20	22	17,50	15	13,30	11,67	10,5
$f_{E4} = 80$	80	40	26,60	20	16	13,30	11,40	10	8,90	8,0
$f_{E5} = 35$	**35**	17,50	11,68	8,75	7	5,84	5,00	4,37	3,88	3,50

Curba de rezonanță pentru vibrația $f_{E1} = 215$ Hz și pozițiile de rezonanță principală pentru celelalte vibrații (vezi tabela 1) sînt reprezentate în figura 9.

Pentru determinarea influenței fenomenului de suprapunere a pozițiilor de rezonanță asupra traiectoriei axei de rotație a piesei s-a înregistrat

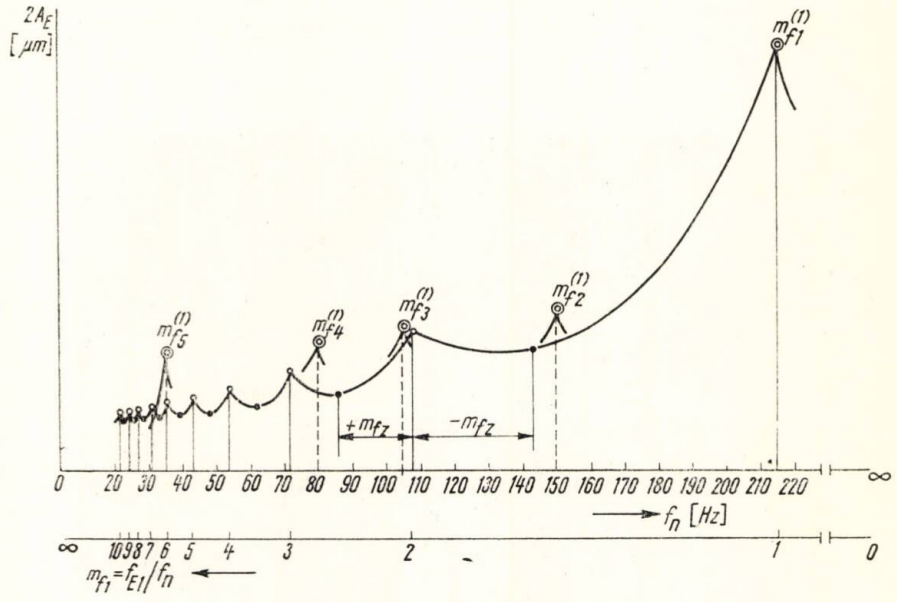


Fig. 9

aceasta în coordonate polare [2], ca în figura 1 *b* pentru domeniul $f_n = 15 \ldots 40$ Hz.

Figura 10 redă, de exemplu, traiectoria axei de rotație a piesei pentru raportul frecvențelor $m_f = f_{E1}/f_n = 215/16 = 13{,}45$, la care frecvențele $f > 250$ Hz au fost filtrate. Pentru această turație, vibrația proprie de frecvență $f_{E1} = 215$ Hz joacă rolul hotărîtor deoarece amplitudinea ei este foarte mare în comparație cu ale celorlalte.

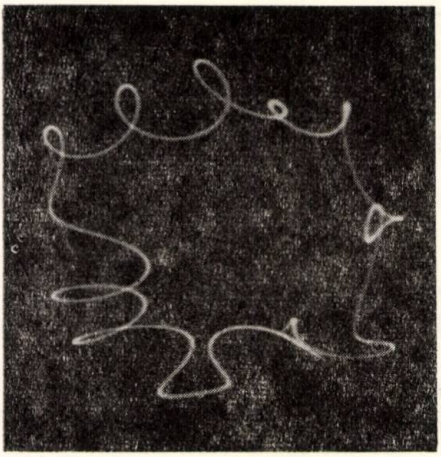


Fig. 10

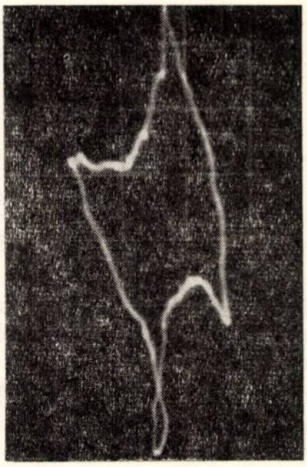


Fig. 12

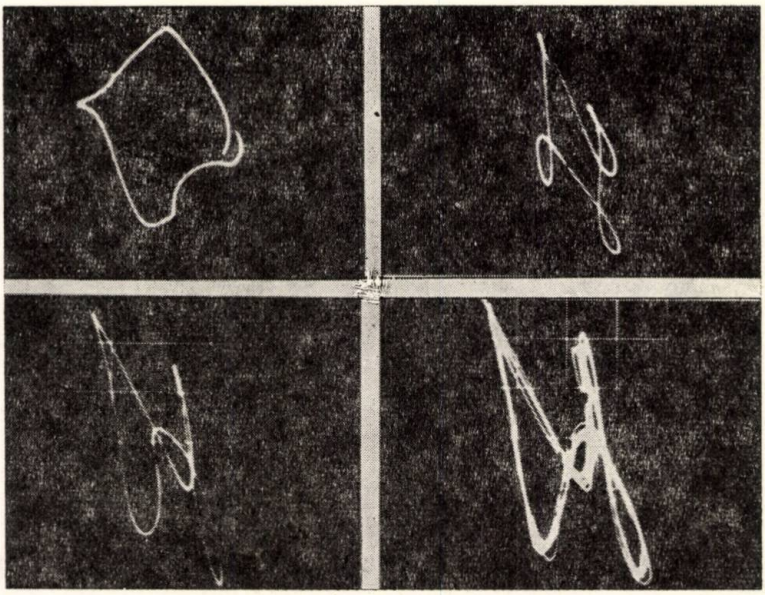


Fig. 11

Cu creşterea frecvenţei de rotaţie f_n se observă că atît forma, cît şi natura trocoidei de vibraţii se modifică. Din hipotrocoidă (fig. 10) ea s-a transformat într-o traiectorie „circular-translatorică" cu patru maxime (fig. 11), ceea ce corespunde unui raport al frecvenţelor $m_f = 3$. Din tabela 1 se vede că frecvenţa proprie f_{E3} este exact de trei ori mai mare decît frec-

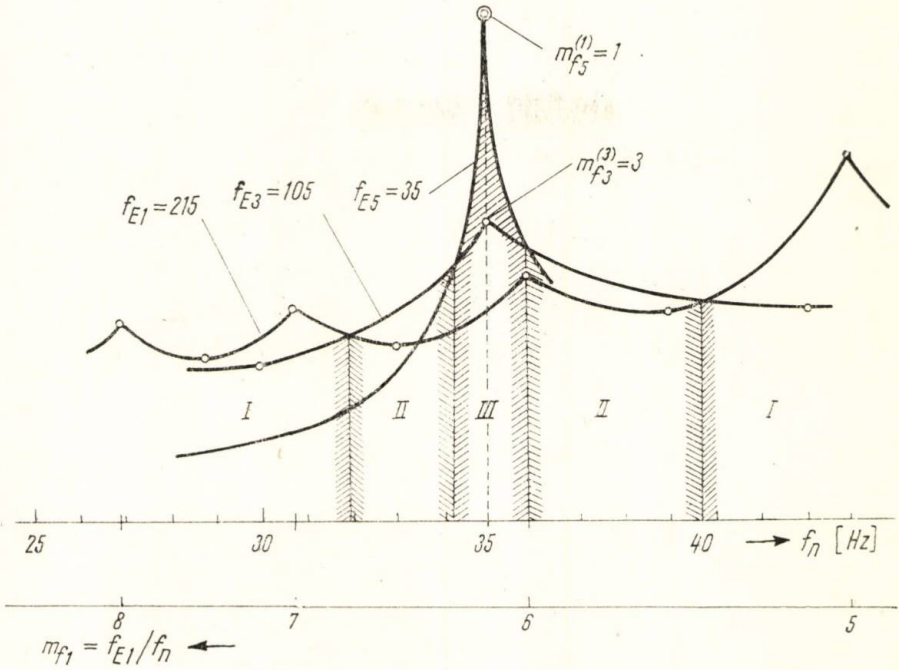


Fig. 13

venţa de rotaţie, adică aici este vorba de o rezonanţă de ordinul trei pentru vibraţia proprie $f_{E3} = 105$ Hz.

Dacă frecvenţa de rotaţie f_n creşte şi mai mult, amplitudinile celor două vibraţii cresc, iar traiectoria axei de rotaţie a piesei devine din ce în ce mai clar o trocoidă de rezonanţă cu două bucle (fig. 12). Această traiectorie corespunde unui raport $m_f = 1[1]$. În tabela 1 se observă că pentru frecvenţa de rotaţie $f_n = 35$ Hz sistemul intră în rezonanţă principală pentru frecvenţa proprie f_{E5}. Orientarea maximelor în direcţia z s-ar putea explica prin rigiditatea mai scăzută în această direcţie (constatată prin măsurători). Figura 13 arată un detaliu din figura 9. În domeniul I rolul hotărîtor îl joacă vibraţia de frecvenţă f_{E1}, iar în domeniile II şi III vibraţiile de frecvenţe $f_{E3} = 105$ Hz şi, respectiv $f_{E5} = 35$ Hz. În domeniul III se suprapun însă două poziţii de rezonanţă.

Figura 14 arată traiectoriile teoretice pentru cele două vibraţii şi traiectoria rezultantă. Aceasta este identică cu traiectoria reală din figura 12.

Comparînd conturul teoretic al piesei (fig. 15) corespunzător traiectoriei din figura 14 *c*, construit după metoda elaborată de autor [3], cu

conturul înregistrat la piesa strunjită (fig. 16) în momentul în care axa sa de rotaţie a descris traiectoria din figura 12, se poate observa o identitate deplină între acestea.

În timp ce rugozitatea de vibraţii este practic nulă, greşeala de rotunjime este considerabilă. Dacă în locul înregistrării şi valorificării traiectoriei

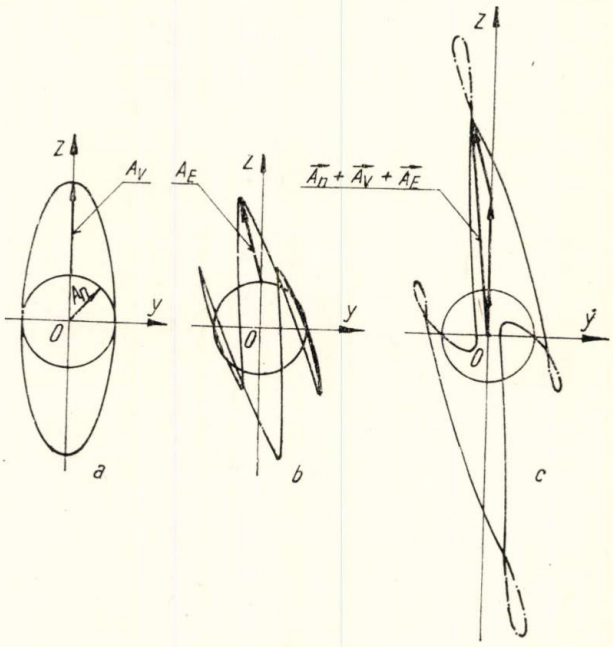


Fig. 14

axei de rotaţie sau a conturului piesei, aşa cum s-a procedat mai sus, se măsoară drumul relativ dintre piesă şi sculă sau amplitudinea vibraţiei în direcţia cuţitului aşa cum indică unii autori [5], [6], [7], se obţine un rezultat fals. Iată de ce numai ridicarea curbei de rezonanţă reală pe baza înregistrării şi valorificării traiectoriei axei de rotaţie a piesei la fiecare turaţie a axului principal [8] poate servi la recepţia dinamică a maşinilor-unelte şi a arborilor în rotaţie, deoarece mărimea amplitudinii A_E şi raportul frecvenţelor

$$m_f = n_H - 1 \text{ pentru hipotrocoide şi trocoide de rezonanţă}$$

şi

$$m_f = n_E + 1 \text{ pentru epitrocoide}$$

indică greşelile de prelucrare provocate de vibraţii la fiecare turaţie a axului principal.

Din cele de mai sus rezultă cît de necesară este efectuarea unei recepţii dinamice a maşinilor în scopul eliminării pe cît posibil a poziţiilor de rezonanţă, micşorării amplitudinii vibraţiilor şi măririi frecvenţelor proprii.

Curba de rezonanţă reală la maşinile cu turaţie variabilă şi valorile amplitudinilor şi frecvenţelor proprii pentru fiecare turaţie a axului prin-

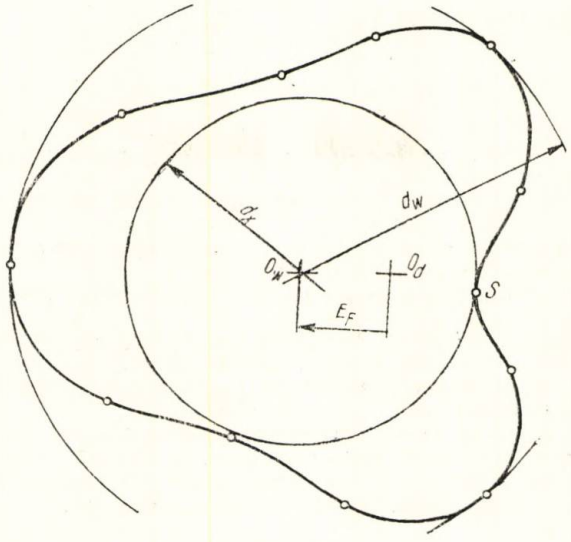


Fig. 15

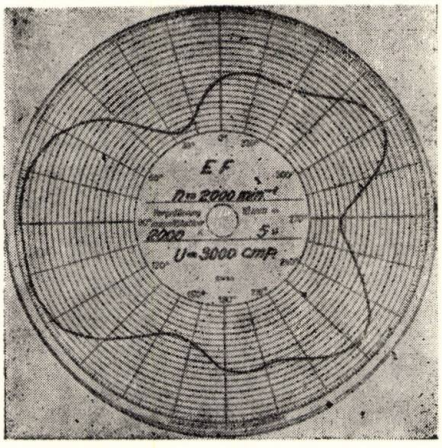


Fig. 16

cipal la mașinile cu turații în trepte ar trebui să existe în cartea fiecărei mașini-unelte.

Pe de altă parte, respectarea normelor actuale pentru determinarea regimului optim de așchiere și de stabilire a turațiilor axului principal la mașinile-unelte constituie o problemă dificilă.

Primită la redacție la 3 iulie 1968.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Dodoc, *Trocoide de vibrații la axele principale ale mașinilor-unelte* (I), Construcția de mașini **20**, *2* (1968).
2. — *Trocoide de vibrații la axele principale ale mașinilor-unelte* (*II*) Construcția de mașini, **20**, *3* (1968).
3. — *Mecanismul transmiterii vibrațiilor la suprafața piesei în procesul de strunjire*, St. cerc. mec. apl., *5* (1968).
4. — *Influența vibrațiilor asupra preciziei de prelucrare la strunjire*, St. cerc. de mec. apl., *6* (1968).
5. Dchang, Schj-Ying, *Beitrag zur Aufstellung von Prüfverfahren für die dynamische Einzelabnahme von Drehmaschinen*, Disertație, TU Dresden, 1961.
6. H. Berthold, W. Bahmann, *Ergebnisse bei der dynamischen Abnahme von Drehmaschinen*, Feingerätetechnik, *3*, 125—131 (1964).
7. W. Bahmann, G. Erler, *Maschinengütemesser-ein neues Gerät zur dynamischen Abnahme von Werkzeugmaschinen*, Feingerätetechnik, *3*, 131—135 (1964).
8. P. Dodoc, *Metodă și instalație pentru recepția dinamică a mașinilor unelte și a arborilor în rotație*, Propunere de invenție O.S.I. nr. 55637/1968.

VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A UNEI METODE ANALITICE DE CALCUL A LAGĂRELOR CIRCULARE ALIMENTATE SUB PRESIUNE

de MARTHA SĂLCUDEAN şi GH. MARIN

Institutul de cercetări metalurgice;
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Se prezintă metoda şi rezultatele experimentale obţinute în vederea verificării metodei analitice elaborate pentru calculul lagărelor circulare alimentate sub presiune.

Se descrie instalaţia realizată şi încercările efectuate cu opt lagăre cu diferiţi parametri geometrici.

Se dau rezultatele valorilor experimentale obţinute pentru capacitatea de încărcare comparativ cu rezultatele teoretice obţinute prin metoda analitică de calcul elaborată.

În două lucrări anterioare [1], [2] s-a prezentat o metodă analitică pentru calculul lagărelor radiale alimentate sub presiune printr-un rînd sau prin două rînduri de orificii. Prezenta lucrare îşi propune să înfăţişeze metoda de verificare experimentală a teoriei elaborate şi rezultatele obţinute. În acest scop s-a conceput şi s-a realizat o instalaţie experimentală cu ajutorul căreia s-au efectuat măsurători în diferite condiţii constructive şi funcţionale.

Dispozitivul pentru încercat lagăre este reprezentat în figura 1. Pe placa de bază (*1*) este fixat corpul (*3*). În corpul (*3*) se introduce piesa (*5*), fixată prin capacul (*2*). Fusul (*6*) se sprijină pe două lagăre radiale simetrice, prelucrate în piesa (*5*). Fiecare lagăr este alimentat prin două şiruri de orificii. Pentru a realiza o alimentare uniformă cu aer, s-au prevăzut două camere distincte, legate de reţeaua de aer comprimat, etanşate între ele şi faţă de exterior. Între cele două lagăre s-a prevăzut o degajare pentru evacuarea aerului din capetele interioare ale lagărelor. Corpurile de lagăr şi fusurile s-au construit în mai multe variante, avînd ca parametri variabili jocul din lagăre, numărul şi diametrul orificiilor de alimentare. Rezolvarea constructivă a unui orificiu de alimentare este prezentată în figura 2.

Aerul trece prin piesa de strîngere (*1*) şi apoi prin orificiul restrictor realizat în pastila (*3*) strînsă între, cele două garnituri din masă

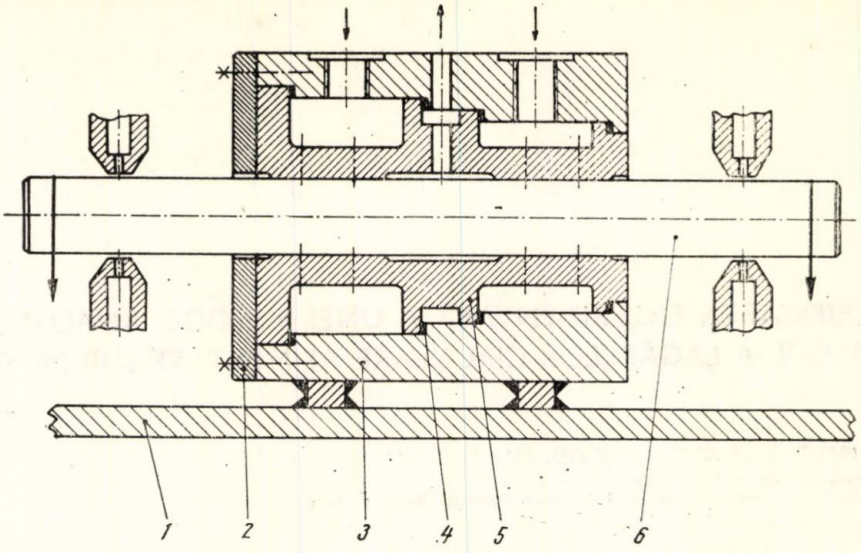


Fig. 1. — Dispozitivul pentru încercat lagăre: *1* — placă suport; *2* — capac; *3* — carcasă; *4* — garnituri; *5* — corp lagăr; *6* — fus.

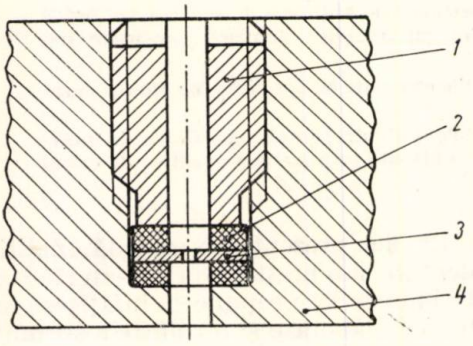


Fig. 2. — Orificiu de alimentare: *1* — șurub de strîngere; *2* — garnituri; *3* — ajutaj; *4* — corpul lagărului.

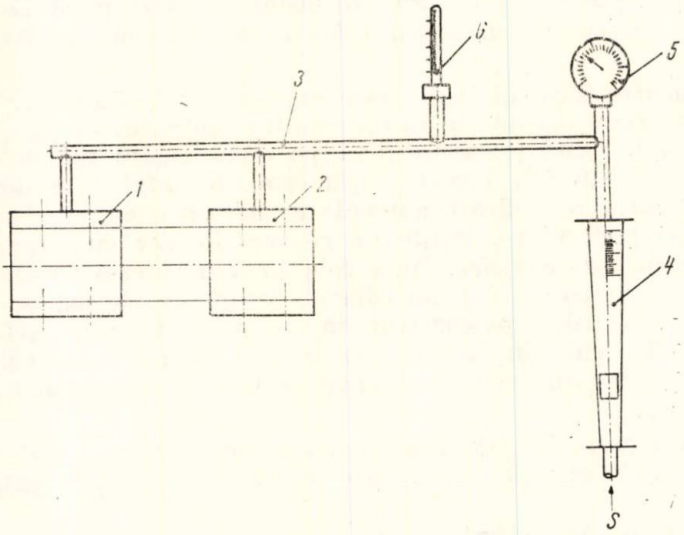


Fig. 3. — Instalația de alimentare: *1,2* — lagăre; *3* — țeavă de alimentare; *4* — debitmetru; *5* — manometru; *6* — termometru.

plastică (2). Strîngerea pastilei între garnituri a fost necesară pentru a realiza o bună etanşare.

În figura 3 este reprezentată schema instalaţiei de alimentare cu aer. Aerul comprimat trece prin debitmetrul 4, prin manometrul (5) şi

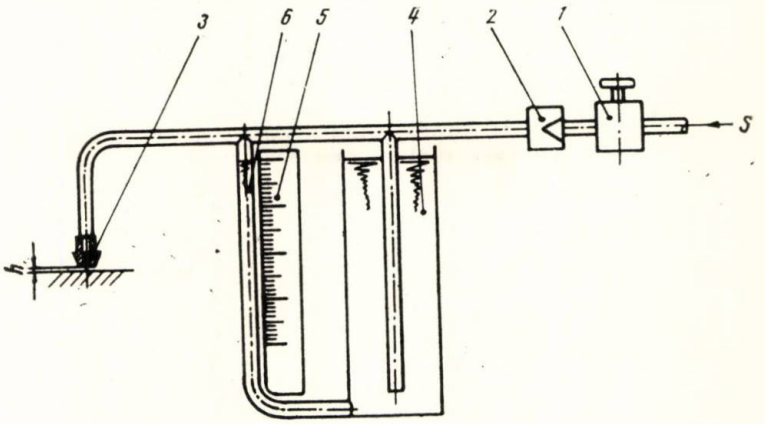


Fig. 4. — Traductor pneumatic pentru măsurarea deplasărilor: 1 — regulator de presiune; 2 — ajutaj; 3 — element de măsură; 4 — recipient de apă; 5 — riglă gradată; 6 — tub de sticlă.

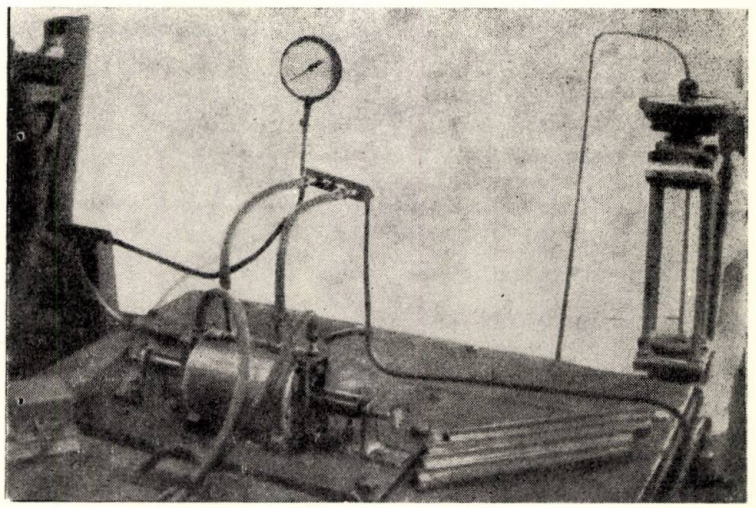


Fig. 5. — Instalaţia experimentală.

prin conducta (3) în corpul lagărului dublu (1) şi (2). În conducta (3) s-a montat termometrul (6).

Pentru determinarea deplasării axului sub sarcină s-a lucrat cu instalaţia reprezentată în figura 4, avînd ca elemente sensibile traductori pneumatici. Instalaţia se compune din regulatorul de presiune (1), reglat pentru o presiune de ieşire de 0,5 m coloană apă, ajutajul etalonat (2) egal în

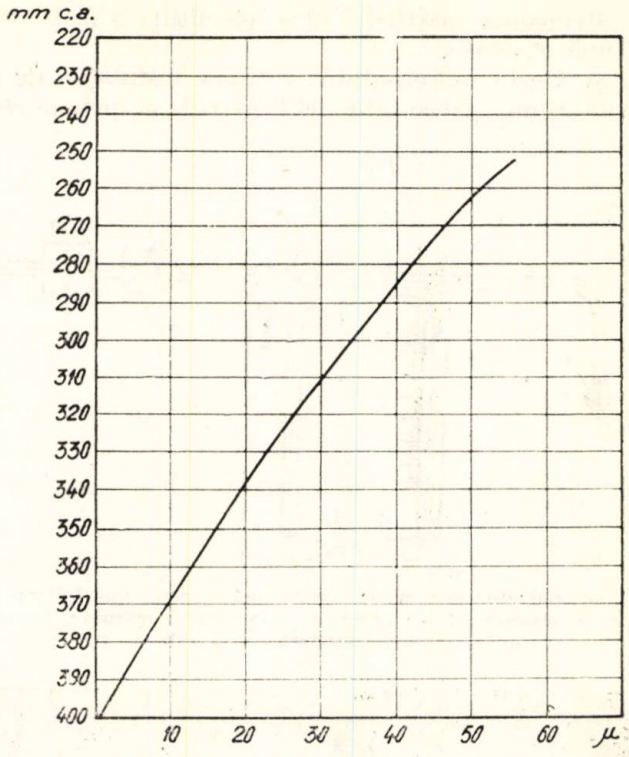


Fig. 6. — Diagrama de etalonare pentru axul nr. 2. Traductorul IV.

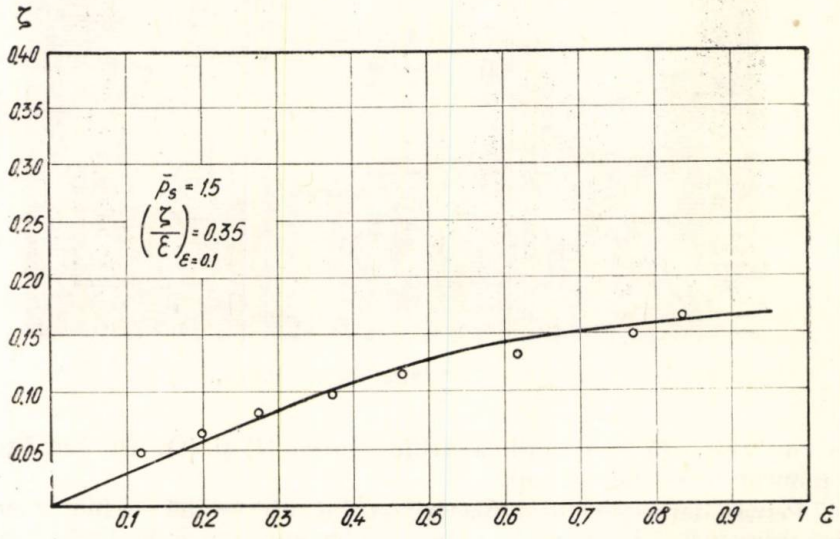


Fig. 7. — Capacitatea de încărcare în funcție de excentricitatea relativă ε $\bar{p}_s = 1{,}5$ (lagăr nr. III).

diametru cu elementul de măsură (*3*), un recipient de apă (*4*) cu derivaţia (*6*), alături de care este montată rigla gradată (*5*).

Aparatul de măsură indică diferenţa de presiune care rezultă în urma variaţiei debitului. Aceasta se datoreşte diferenţei dintre secţiunea orificiului elementului de măsură şi suprafaţa laterală, care variază cu deplasarea fusului.

Domeniul de măsurare al aparatului este limitat de condiţia $h \ll d$, cînd variaţiile grosimilor conduc la variaţii de debit suficient de mari. Pentru a fixa ideile se poate considera ca o limită aproximativă a domeniului posibil de măsurare

$$\frac{\pi d^2}{4} > \pi d h \quad d > 4h \text{ sau } h < \frac{d}{4},$$

unde d reprezintă diametrul orificiului elementului sensibil şi h deplasarea fusului.

În cazul în care $h > \frac{d}{4}$, cantitatea de aer evacuată prin elementul de măsură (*3*) este egală cu cea eliberată de ajutajul etalonat (*2*). Nivelul apei din coloana (*6*) se află în dreptul indicaţiei zero. Dacă distanţa h scade sub $\frac{d}{4}$, în coloana (*6*) se crează o suprapresiune, iar diferenţa de presiune se poate citi pe rigla gradată (*5*). Dacă $h = 0$, aerul este evacuat prin tubul scufundat în recipientul (*4*) şi de acolo în atmosferă. În figura 5 este prezentată instalaţia completă utilizată pentru experimentări.

În vederea pregătirii măsurătorilor s-au executat orificii restrictoare în pastile metalice, acordîndu-se o atenţie deosebită etanşeităţii. Pentru a avea un control exact al dimensiunilor orificiilor de alimentare, s-a realizat alimentarea separată a celor două lagăre, etanşînd cele două camere de alimentare ale lagărelor. După efectuarea etanşării s-au făcut măsurători de debit la ambele lagăre, separat şi împreună, fără ax. La aceste măsurători, debitele în cele două lagăre au rezultat egale.

Determinarea diametrului real al orificiilor de alimentare a lagărelor s-a efectuat prin realizarea unei piese prevăzute cu un singur orificiu-etalon, circular, astfel practicat încît să se obţină un debit egal cu debitul orificiilor de alimentare.

Diametrul orificiului etalon s-a determinat cu ajutorul unui microscop. Din raportarea suprafeţei orificiului-etalon la cea a orificiilor de alimentare a rezultat o valoare de 0,27 mm pentru diametrul orificiilor de alimentare. S-au efectuat determinări precise ale jocurilor, măsurînd axele şi lagărele. Scopul măsurătorilor a fost determinarea experimentală a variaţiei capacităţii portante în funcţie de excentricitatea relativă. Din curba experimentală rezultată se determină valoarea $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ $\left(\text{sau } \frac{\zeta}{\varepsilon}\text{, dat fiind că variaţia lui } \zeta \text{ cu } \varepsilon \text{ este liniară pentru valori } \varepsilon \text{ mici}\right)$. Această valoare se compară cu valorile teoretice obţinute pe baza metodei analitice prezentate în lucrările [1] şi [2].

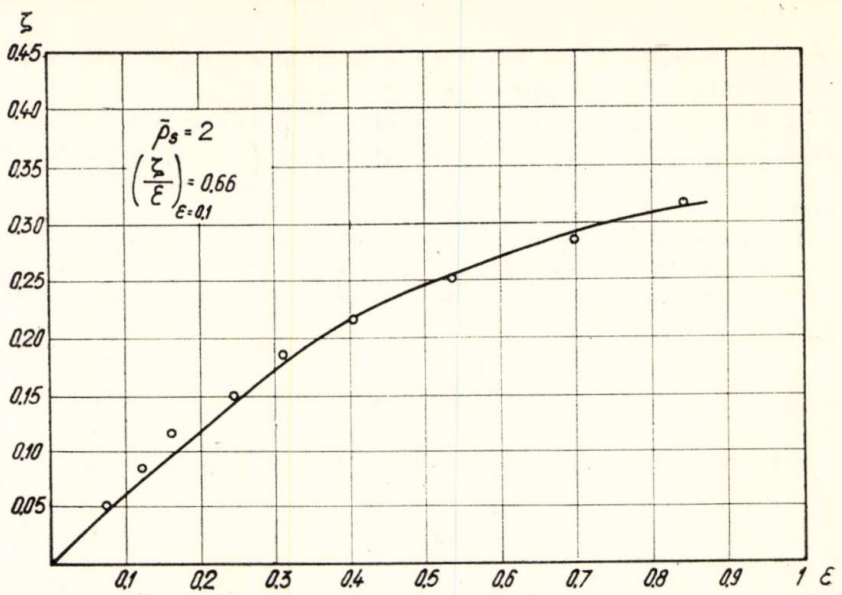


Fig. 8. — Capacitatea de încărcare în funcție de excentricitatea relativă ε $\bar{p}_s = 2$ (lagăr nr. III).

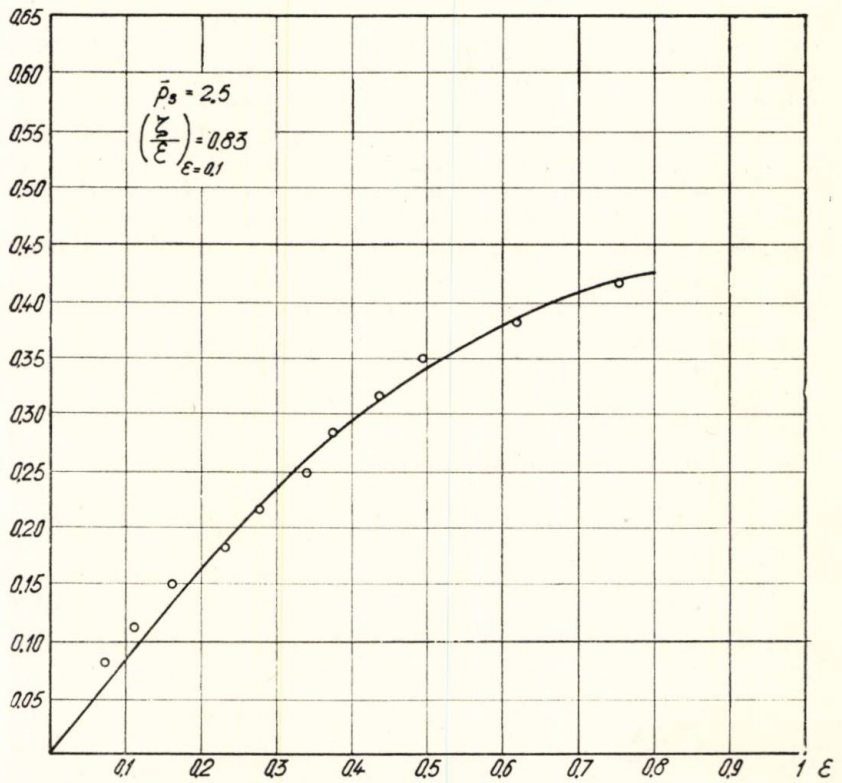


Fig. 9. — Capacitatea de încărcare în funcție de excentricitatea relativă ε $\bar{p}_s = 2,5$ (lagăr nr. III).

Experimentările s-au efectuat pentru presiunile de alimentare $\bar{p}_s = 1{,}5$, $\bar{p}_s = 2$, $\bar{p}_s = 2{,}5$, $\bar{p}_s = 3$ şi $\bar{p}_s = 3{,}5$.

S-au ridicat curbe de etalonare ale traductorilor pentru toate perechile de lagăre şi de axe. Cu ajutorul acestor curbe de etalonare s-a deter-

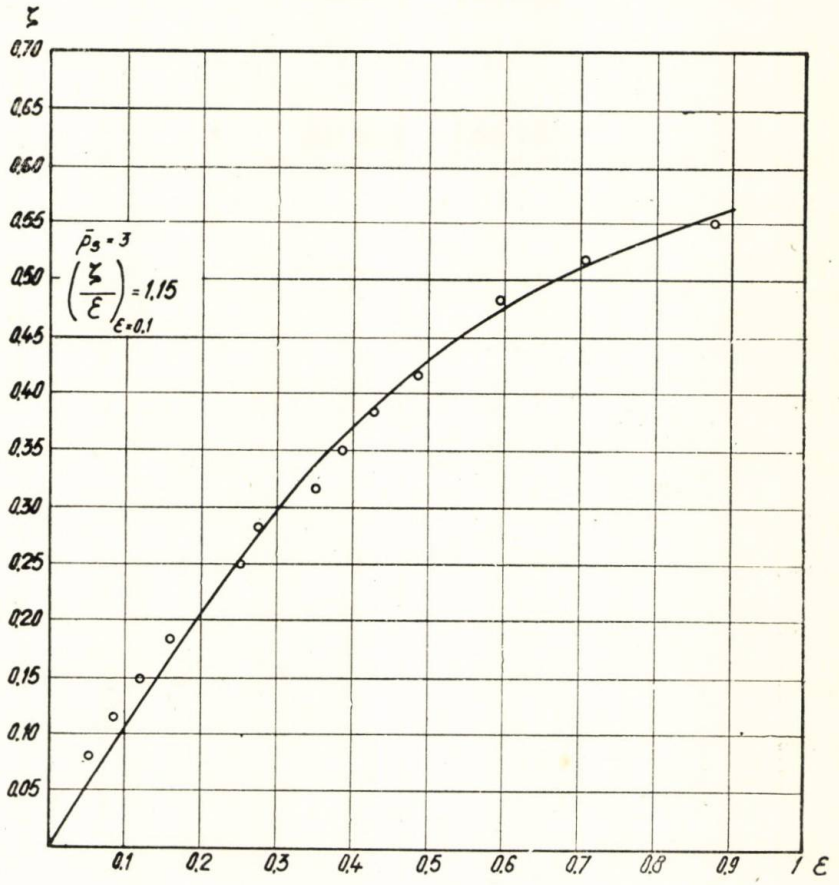


Fig. 10 — Capacitatea de încărcare în funcţie de excentricitatea relativă ε $\bar{p}_s = 3$ (lagăr nr. III).

minat relaţia dintre deplasarea axului măsurată în microni şi variaţia presiunii în mm coloană apă, citită pe rigla gradată a aparaturii. Figura 6 reprezintă o asemenea curbă de etalonare. S-a trecut apoi la încărcarea progresivă a axului, pornind de la greutatea proprie a acestuia şi adăugîndu-se treptat greutăţi. Pentru fiecare treaptă de încărcare s-au citit succesiv deplasările indicate de cei patru traductori pneumatici, iar valoarea deplasării axului s-a considerat ca fiind media citirilor traductoarelor.

În figurile 7 — 11 s-au reprezentat valorile experimentale pentru $\zeta = f(\varepsilon)$:

$$\zeta = \frac{P}{b\Delta p_a} \text{ şi } \varepsilon = \frac{e}{c},$$

unde

ζ reprezintă capacitatea de încărcare adimensionale,
b — lățimea lagărului,
D — diametrul lagărului,
ε — excentricitatea relativă,
e — excentricitatea,
c — jocul din lagăr.

Din aceste diagrame s-a calculat valoarea raportului $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$, valoare care se figurează pe diagramele $\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = f(\Lambda)$ obținute pe baza metodei analitice de calcul elaborate.

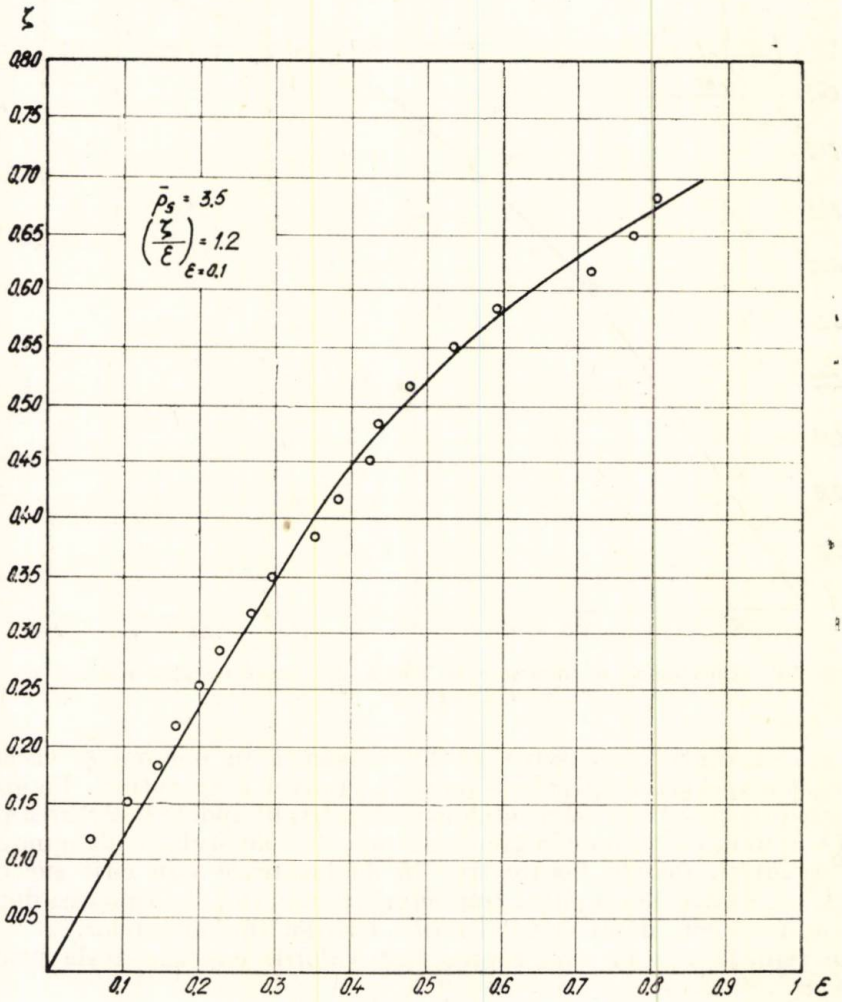
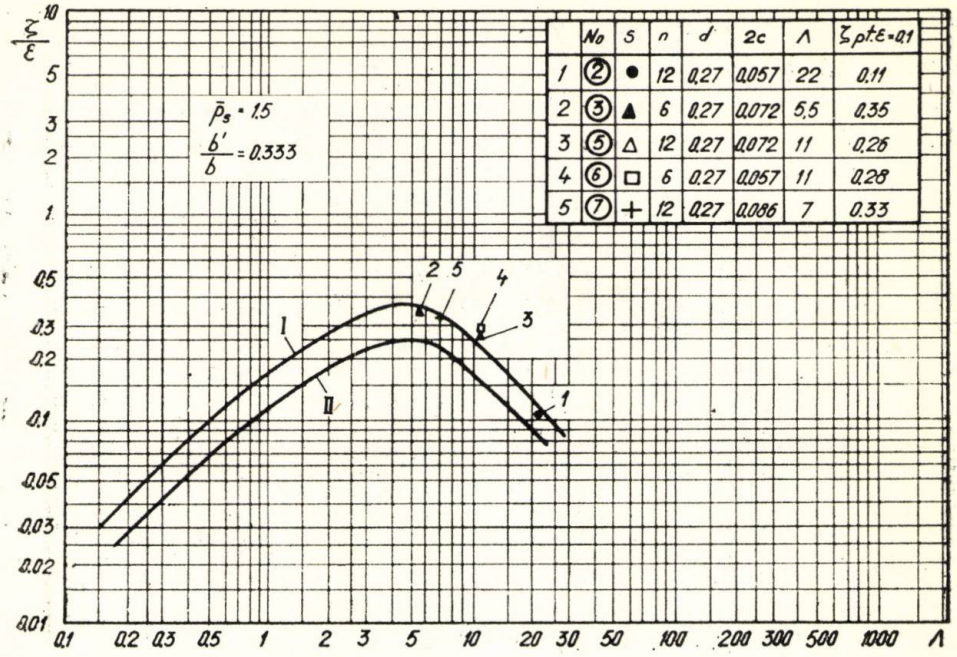
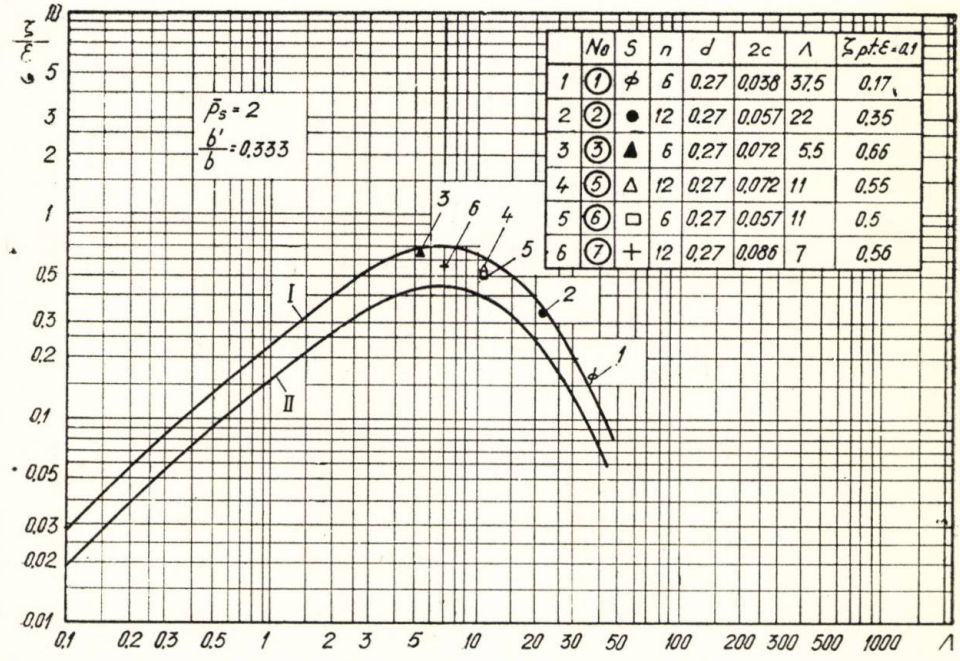


Fig. 11. — Capacitatea de încărcare în funcție de excentricitatea relativă ε $\bar{p}_s = 3,5$ (lagăr nr. III).



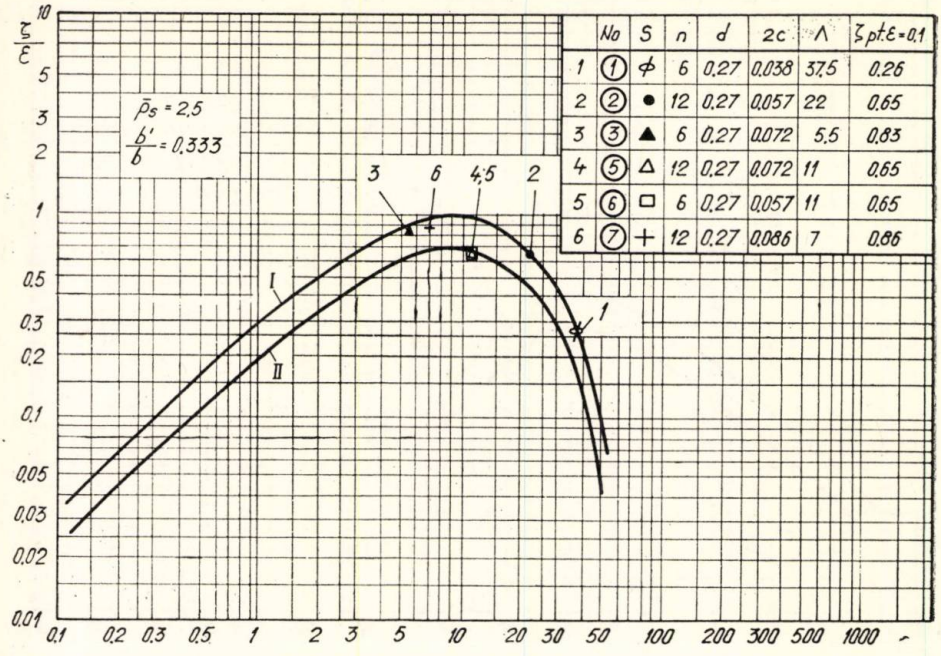
No	S	n	d	2c	Λ	$\zeta_{p.t.\varepsilon=0.1}$
1	②	●	12	0.27	0.057	22	0.11
2	③	▲	6	0.27	0.072	5.5	0.35
3	⑤	△	12	0.27	0.072	11	0.26
4	⑥	□	6	0.27	0.057	11	0.28
5	⑦	+	12	0.27	0.086	7	0.33

Fig. 12. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 1{,}5$: (*I* — compensare prin orificii; *II* — compensare inerentă).



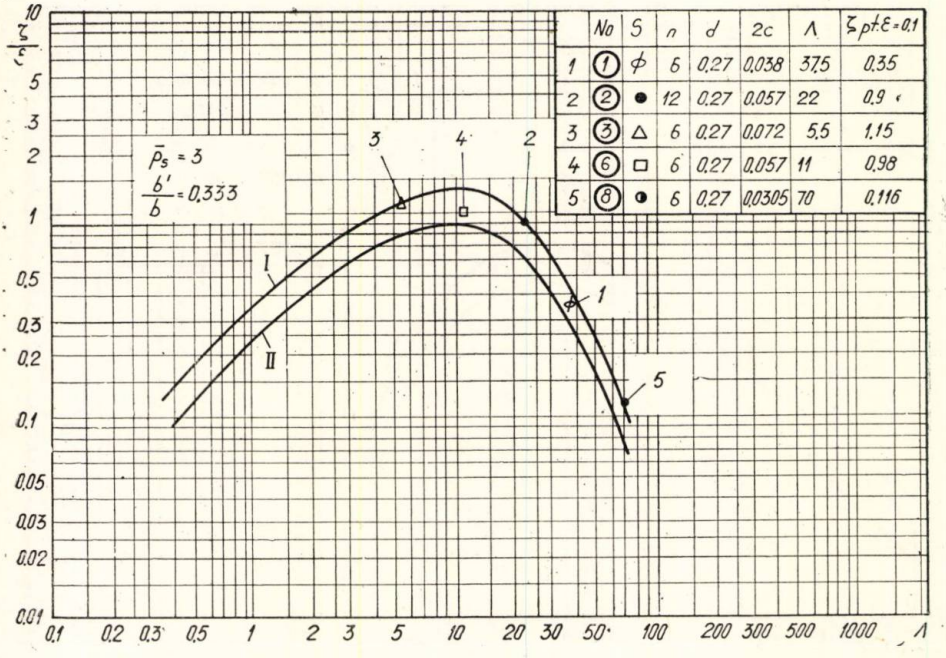
No	S	n	d	2c	Λ	$\zeta_{p.t.\varepsilon=0.1}$
1	①	ϕ	6	0.27	0.038	37.5	0.17
2	②	●	12	0.27	0.057	22	0.35
3	③	▲	6	0.27	0.072	5.5	0.66
4	⑤	△	12	0.27	0.072	11	0.55
5	⑥	□	6	0.27	0.057	11	0.5
6	⑦	+	12	0.27	0.086	7	0.56

Fig. 13. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 2$: (*I* — compensare prin orificii; *II* — compensare inerentă).



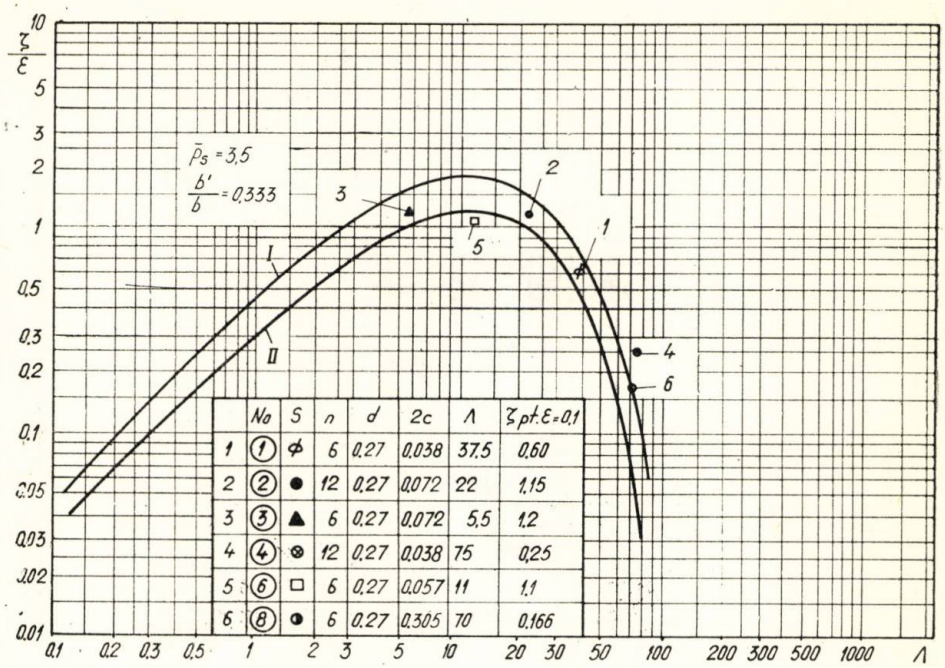
	No	S	n	d	2c	Λ	ζ pt.ε=0,1
1	①	ϕ	6	0,27	0,038	37,5	0,26
2	②	●	12	0,27	0,057	22	0,65
3	③	▲	6	0,27	0,072	5,5	0,83
4	⑤	△	12	0,27	0,072	11	0,65
5	⑥	□	6	0,27	0,057	11	0,65
6	⑦	+	12	0,27	0,086	7	0,86

Fig. 14. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 2,5$: (*I* — compensare prin orificii; *II* — compensare inerentă).



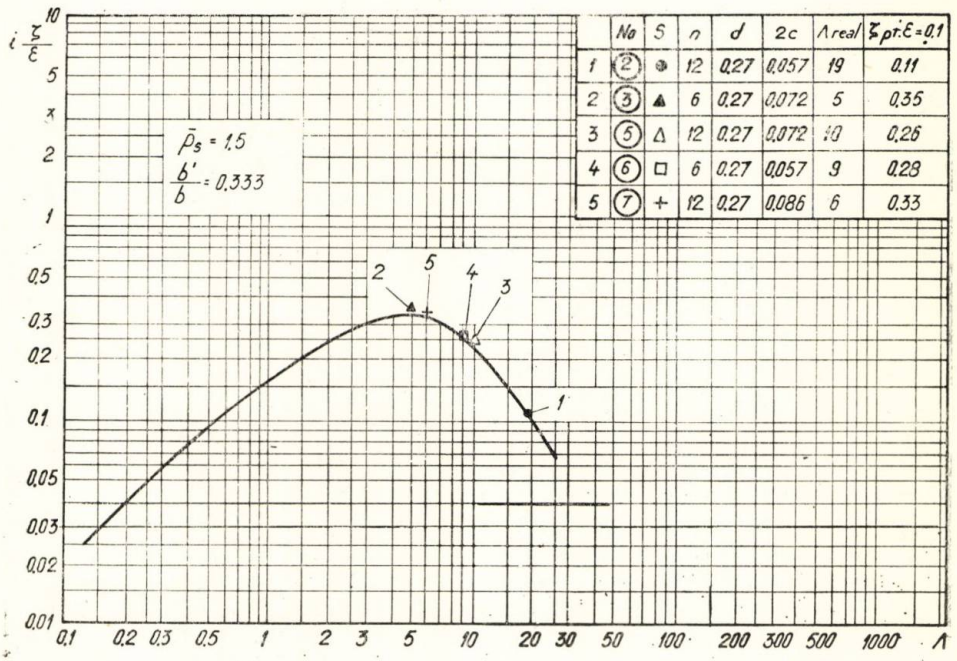
	No	S	n	d	2c	Λ	ζ pt.ε=0,1
1	①	ϕ	6	0,27	0,038	37,5	0,35
2	②	●	12	0,27	0,057	22	0,9
3	③	△	6	0,27	0,072	5,5	1,15
4	⑥	□	6	0,27	0,057	11	0,98
5	⑧	◐	6	0,27	0,0305	70	0,116

Fig. 15. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 3$: (*I* — compensare prin orificii; *II* — compensare inerentă).



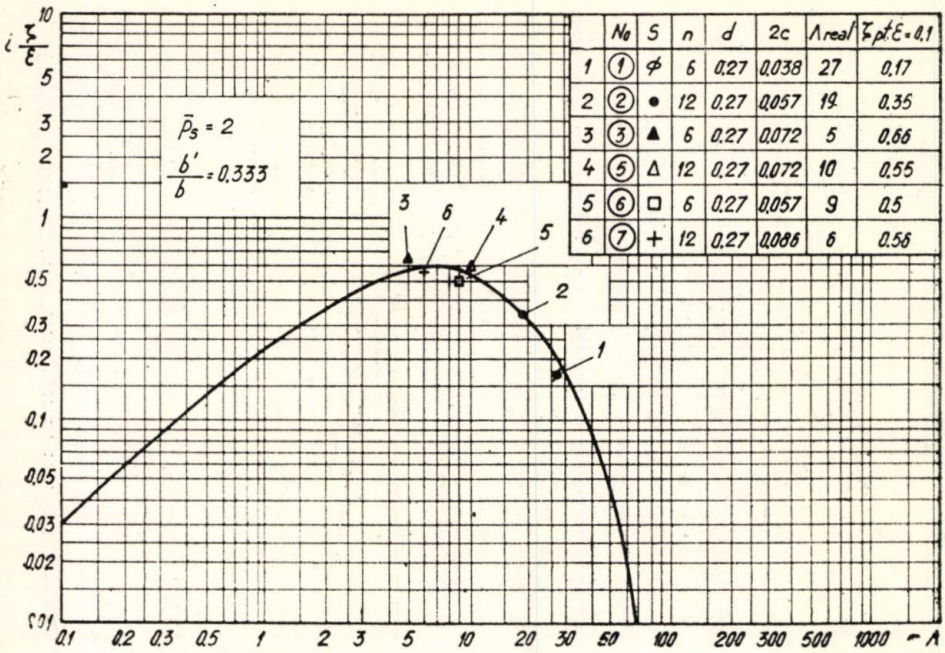
	No	S	n	d	2c	Λ	ζ pt. ε=0,1
1	①	⌀	6	0,27	0,038	37,5	0,60
2	②	●	12	0,27	0,072	22	1,15
3	③	▲	6	0,27	0,072	5,5	1,2
4	④	⊗	12	0,27	0,038	75	0,25
5	⑥	□	6	0,27	0,057	11	1,1
6	⑧	◐	6	0,27	0,305	70	0,166

Fig. 16. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 3{,}5$: (I — compensare prin orificii; II — compensare inerentă).



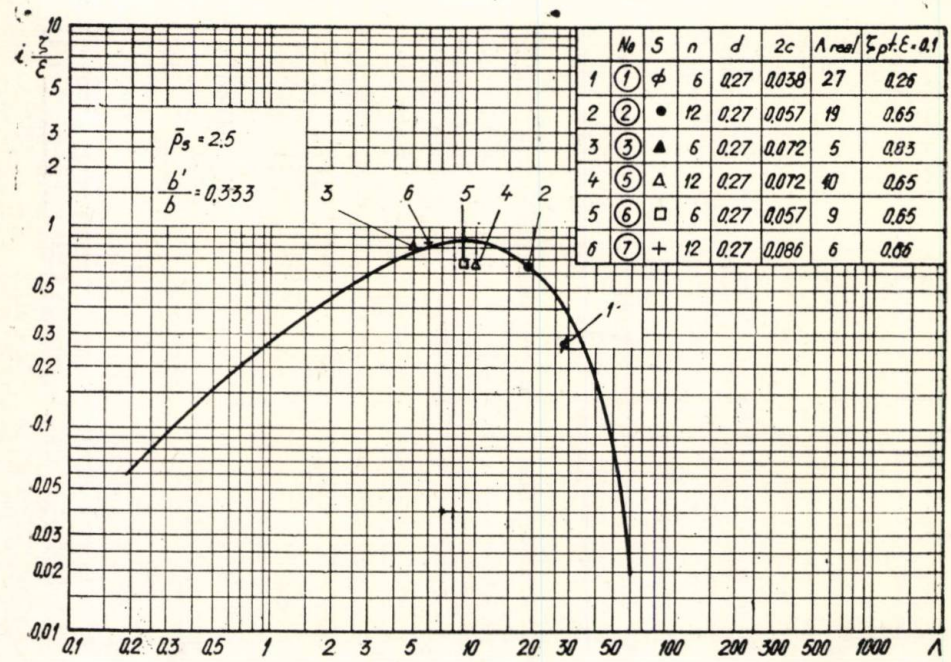
	No	S	n	d	2c	Λ real	ζ pt. ε=0,1
1	②	◍	12	0,27	0,057	19	0,11
2	③	▲	6	0,27	0,072	5	0,35
3	⑤	△	12	0,27	0,072	10	0,26
4	⑥	□	6	0,27	0,057	9	0,28
5	⑦	+	12	0,27	0,086	6	0,33

Fig. 17. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 1{,}5$ (compensare mixtă).



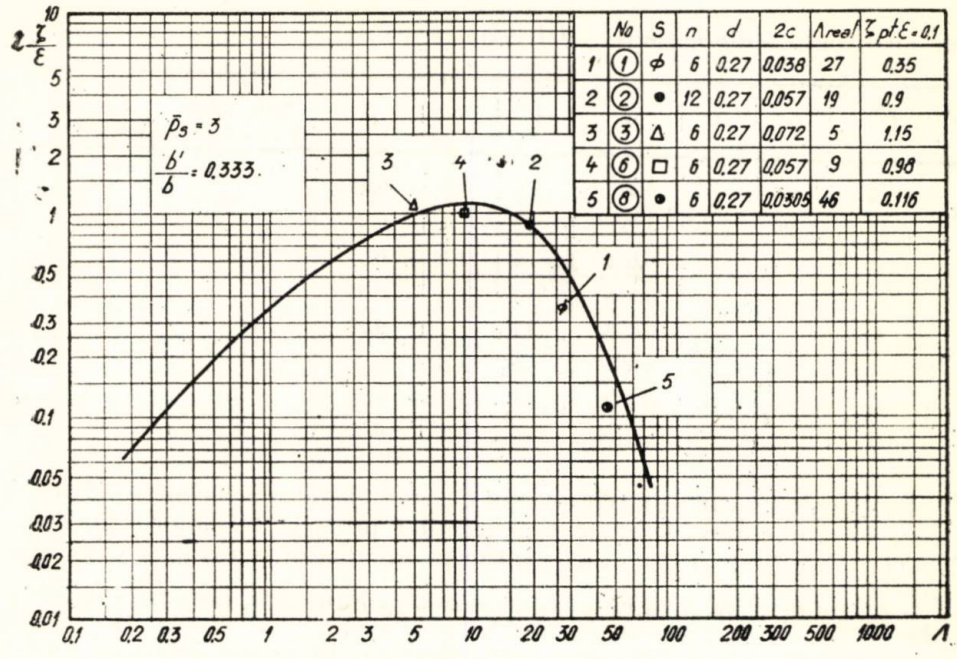
	No	S	n	d	2c	Λ real	ζ pt. ε = 0.1
1	1	⌀	6	0.27	0.038	27	0.17
2	2	●	12	0.27	0.057	19	0.35
3	3	▲	6	0.27	0.072	5	0.66
4	5	Δ	12	0.27	0.072	10	0.55
5	6	□	6	0.27	0.057	9	0.5
6	7	+	12	0.27	0.086	6	0.56

Fig. 18. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 2$ (compensare mixtă).



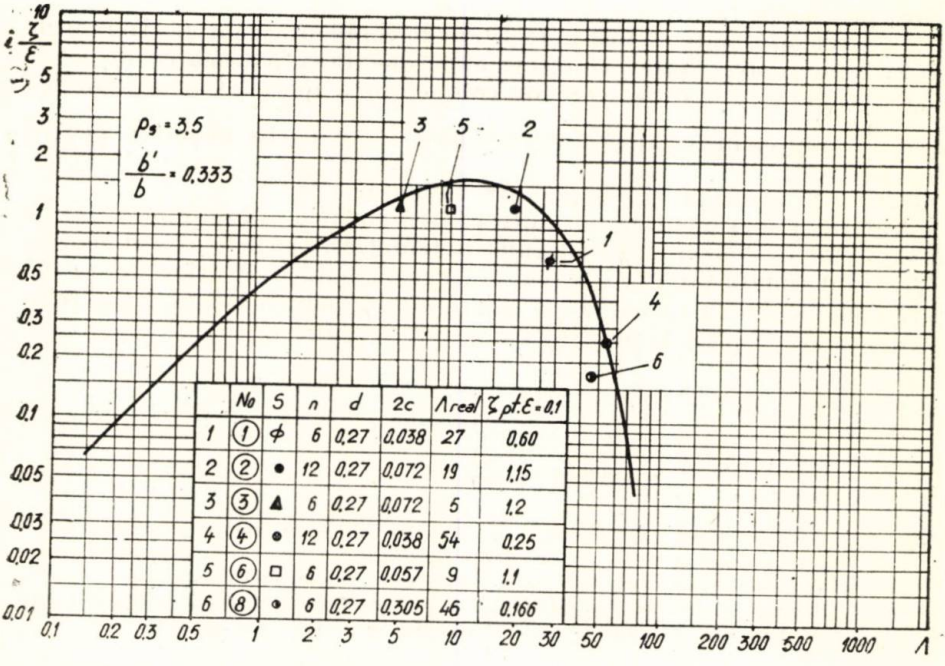
	No	S	n	d	2c	Λ real	ζ pt. ε = 0.1
1	1	⌀	6	0.27	0.038	27	0.26
2	2	●	12	0.27	0.057	19	0.65
3	3	▲	6	0.27	0.072	5	0.83
4	5	Δ	12	0.27	0.072	10	0.65
5	6	□	6	0.27	0.057	9	0.65
6	7	+	12	0.27	0.086	6	0.86

Fig. 19. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 2{,}5$ (compensare mixtă).



No	S	n	d	2c	Λ_{real}	$\zeta_{pt.\varepsilon=0,1}$
1	①	φ	6	0,27	0,038	27	0,35
2	②	•	12	0,27	0,057	19	0,9
3	③	Δ	6	0,27	0,072	5	1,15
4	⑥	□	6	0,27	0,057	9	0,98
5	⑧	•	6	0,27	0,0305	46	0,116

Fig. 20. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 3$ (compensare mixtă).



No	S	n	d	2c	Λ_{real}	$\zeta_{pt.\varepsilon=0,1}$
1	①	φ	6	0,27	0,038	27	0,60
2	②	•	12	0,27	0,072	19	1,15
3	③	▲	6	0,27	0,072	5	1,2
4	④	•	12	0,27	0,038	54	0,25
5	⑥	□	6	0,27	0,057	9	1,1
6	⑧	•	6	0,27	0,305	46	0,166

Fig. 21. — Rezultatele verificărilor experimentale $\bar{p}_s = 3{,}5$ (compensare mixtă).

Verificările experimentale au fost efectuate asupra a opt variante axlagăr cu următoarele caracteristici geometrice :

Nr. lagărului	D	L	c	n	λ	d	Λ compensare prin orificii	real Λ compensare mixtă
I	20	30	0,019	6	1,5	0,27	37,5	27
II	20	30	0,0285	12	1,5	0,27	22	19
III	20	30	0,036	6	1,5	0,27	5,5	5
IV	20	30	0,019	12	1,5	0,27	75	54
V	20	30	0,036	12	1,5	0,27	11	10
VI	20	30	0,0255	6	1,5	0,27	11	9
VII	20	30	0,043	12	1,5	0,27	7	6
VIII	20	30	0,0155	6	1,5	0,27	70	45

În figurile 12—16 s-au reprezentat diagramele teoretice pentru diferite presiuni de alimentare. Curbele s-au calculat pe baza relaţiilor (29) din [1] şi (1), (19), (20) şi (21) din [2]. Curba superioară reprezintă variaţia lui $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ în funcţie de Λ în cazul compensării prin orificii, iar curba inferioară este calculată în cazul compensării inerente. Pe aceste diagrame s-au reprezentat valorile experimentale obţinute. Parametrii de lagăr Λ s-au calculat pe baza relaţiei (3) din [2], considerînd lagărele ca fiind cu compensare prin orificii.

Lagărele încercate au fost în realitate cu compensare mixtă. În figurile 17 — 21 s-au reprezentat rezultatele experimentale, parametrii de lagăr fiind determinaţi ţinîndu-se cont de compensarea mixtă. Curba teoretică pentru $\frac{d\zeta}{d\varepsilon}$ reprezintă valori intermediare între curba obţinută pentru compensare prin orificii şi compensare inerentă.

Valorile experimentale obţinute pentru coeficientul adimensional de încărcare sînt în concordanţă cu valorile teoretice. Curbele experimentale $\zeta = f(\varepsilon)$ sînt liniare pînă la o valoare a excentricităţii relative de $\sim 0{,}5$ deci metoda analitică elaborată se poate aplica pentru calculul lagărelor care funcţionează pînă la această valoare a excentricităţii.

Primită la redacţie la 21 august 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, M. SĂLCUDEAN, *O metodă pentru determinarea aproximativă a distribuţiei presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate sub presiune printr-un şir central de orificii*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3* (1967).
2. — *Distribuţia presiunilor în lagărele circulare lubrificate cu gaze, alimentate prin două şiruri de orificii*, St. cerc. mec. apl., **26** *5* (1967).

ALEGEREA JUDICIOASĂ A PARAMETRILOR DE EXPUNERE ÎN RADIOLOGIA INDUSTRIALĂ

de M. GR. NĂSTASE
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare se prezintă o serie de consideraţii teoretice şi rezultate experimentale privind unele criterii ce trebuie luate în considerare pentru a se putea face o alegere judicioasă a parametrilor de expunere în radiologia industrială. Necesitatea unei astfel de alegeri se impune datorită multitudinii de parametri care intervin şi care se interacţionează reciproc, influenţele lor calitative şi cantitative trebuind să fie cunoscute ca atare.

Modalităţile de utilizare în defectoscopia nedistructivă a roentgen- şi gamagrafiei depind de un mare număr de parametri : sursa folosită, tipul de film, ecranele de întărire, natura şi grosimea obiectului radiografiat, geometria de expunere, felul fasciculului (îngust sau larg), condiţiile de developare, protecţia contra radiaţiilor etc. Există posibilităţi multiple de a alege şi a combina aceşti parametri, care însă nu duc la rezultate echivalente, ci sensibil diferite. În final, influenţa acestor parametri se va manifesta asupra contrastului şi calităţii imaginii obţinute, deci asupra sensibilităţii de detectare a defectelor şi asupra rapidităţii de control realizabile. Evident că această problemă a unei alegeri optime a condiţiilor de expunere pentru fiecare caz în parte este o problemă dificilă, complexă. Apare deci necesar de a se dispune de criterii cît mai judicioase care să conducă la astfel de condiţii optimale, criterii care se pot obţine în urma unor studii sistematice senzitometrice şi radiometrice.

FORMULA DE EXPUNERE

Cunoaşterea formulei de expunere a filmelor poate contribui la stabilirea unor astfel de criterii. Într-un studiu recent asupra legilor de înnegrire a emulsiilor radiografice, C. Brachet [1] a demonstrat că densitatea optică de înnegrire D a unui film expus şi developat în condiţii definite

este legată de timpul de expunere T, de distanța sursă-film F, de intensitatea I a radiațiilor, de grosimea x a materialului traversat, de grosimea de semiatenuare $x_{1/2}$ sau de coeficientul de atenuare μ printr-o expresie de forma

$$D^{\alpha} = \frac{1}{A} \cdot \frac{I \cdot T}{F^2} \cdot 2^{-x/x_{1/2}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{I \cdot T}{F^2} \cdot e^{-\mu x} \tag{1}$$

sau

$$\lg D = \frac{1}{\alpha} \lg \frac{IT}{F^2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x}{x_{1/2}} \lg 2 - \frac{1}{\alpha} \lg A =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lg \frac{IT}{F^2} - 0{,}434 \frac{1}{\alpha} \mu x - \frac{1}{\alpha} \lg A, \tag{2}$$

unde coeficientul A și α sînt caracteristici ale filmelor și radiațiilor utilizate iar $\frac{1}{\alpha} = a$ reprezintă coeficientul de contrast relativ al filmului respectiv.

Formula de expunere (1) este valabilă în cazul examinărilor cu radiații X sau gama, cu filme expuse cu sau fără ecrane metalice. De altfel, acesta este cazul care ne interesează îndeosebi, mai ales că în ultimul timp se manifestă tot mai pregnant tendința de a se renunța în radiografia industrială la utilizarea ecranelor saline (fluorescente), dat fiind că ele, deși scurtează timpul de expunere conduc la o substanțială scădere a calității imaginii, a sensibilității de detectare a defectelor. Sub forma (2), formula de expunere se pretează ușor la determinarea prin încercări sensitometrice a coeficienților A, α, $x_{1/2}$ sau μ pentru diferite tipuri de filme și pentru radiații de diferite energii, precum și stabilirea comodă a timpilor de expunere.

Determinările experimentale se efectuează pe epruvete formate din trepte de diferite grosimi; la o anumită radiație se variază doza de iradiere prin varierea timpului de expunere și, după developarea filmelor, se măsoară densitățile optice de înnegrire pe diferitele trepte. Pentru încercările senzitometrice ale filmelor radiografice cu sau fără ecrane de Pb este de dorit a se respecta recomandările din doc. IIS—V—242—63.

În figura 1 se arată un tip de epruvetă folosit de noi în încercările senzitometrice efectuate la Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România, epruvetă care prezintă următoarele avantaje:

— radiația împrăștiată nu mai deranjează de la un sector la altul;

— permite o bună centrare;

— permite o măsurare a densității optice, pe diferitele sectoare (grosimi) și la aceeași distanță de centru (aceleași condiții geometrice);

— se pot face simultan și determinări privind calitatea imaginilor (sensibilitatea radiografică), deoarece s-au executat indicatori de calitate a imaginii în epruveta însăși pe fiecare sector circular și în aceeași poziție și condiții geometrice de expunere pentru toate grosimile;

— economie de film și de timp.

În figura 2 se arată radiografia unei astfel de epruvete, executată cu radiații X (100 kV).

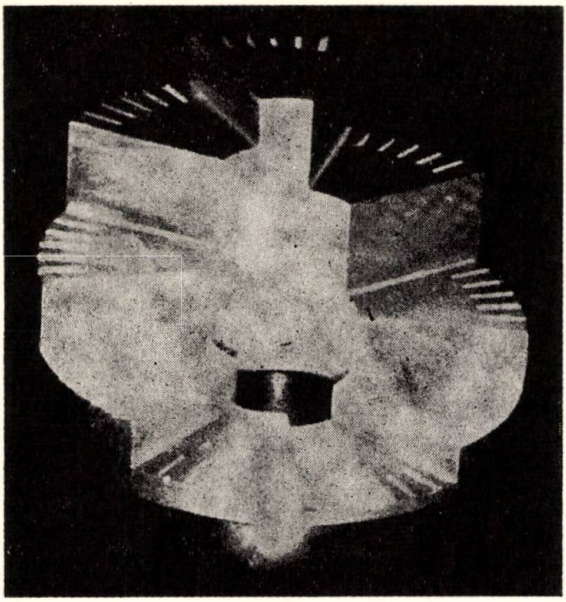


Fig. 1. — Epruvetă pentru încercările senzitometrice ale filmelor radiografice.

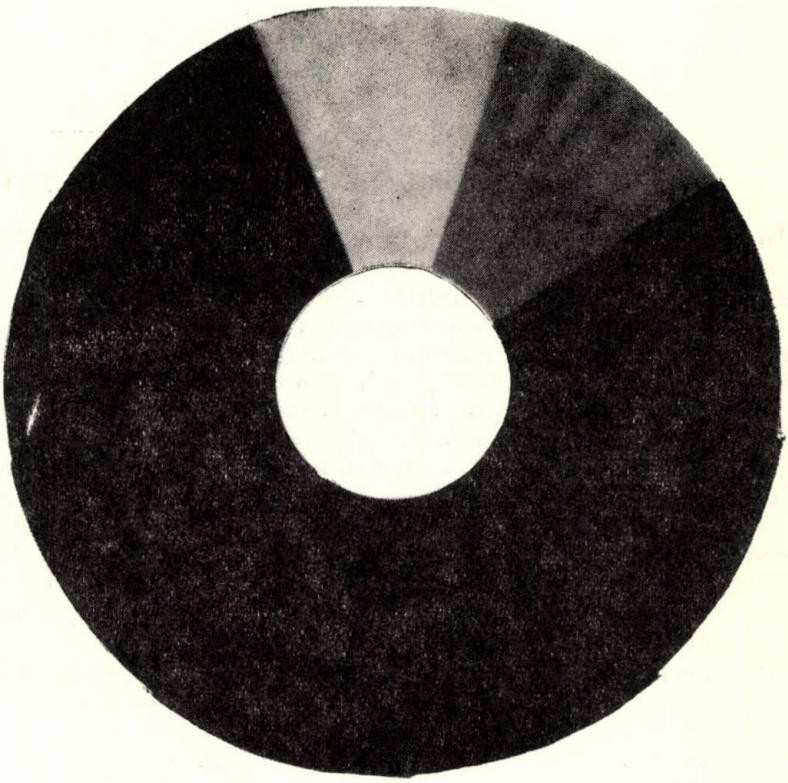


Fig. 2. — Exemplu de radiografie.

Utilizînd metoda grafică, putem trasa uşor şi cu precizie suficientă curbele $\lg D = f\left(\lg \frac{IT}{F^2}\right)$ pentru diferite grosimi ale epruvetei (deci $x =$ const), curbe care, aşa cum se poate observa din relaţia (2), sînt drepte paralele a căror pantă comună reprezintă coeficientul de contrast relativ al filmului respectiv $\left(a = \frac{1}{\alpha}\right)$.

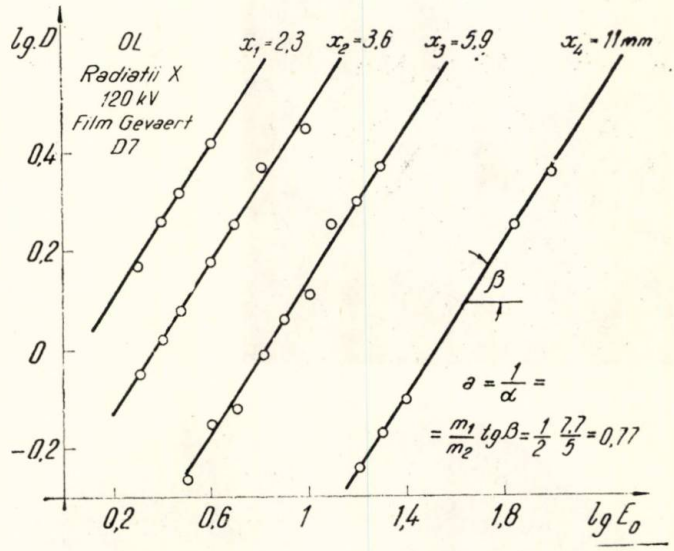


Fig. 3. — Determinări senzitometrice pentru filme Gevaert D 7.

În figura 3 sînt arătate astfel de determinări pentru filmul Gevaert D 7 şi radiaţii X de 120 kV.

Diferitele studii senzitometrice efectuate în străinătate şi din care unele au fost concretizate în documente IIS [1], [2] consideră că, la o anumită radiaţie valoarea grosimii de semiabsorbţie ($x_{1/2}$) şi, implicit, a coeficientului de atenuare efectiv (μ_{ef}) este constantă. Or, trebuie arătat că în cazul fasciculelor largi de radiaţii, şi mai ales la radiaţiile policromatice, coeficienţii de atenuare efectivi şi grosimile de semiatenuare ($x_{1/2} = 0{,}693/\mu_{ef}$) variază cu grosimea materialului absorbant şi, ca atare, rezultatele vor fi mai concludente dacă se va cunoaşte şi se va opera cu aceste valori efective şi nu cu o valoare medie. De altfel, după unele rezultate pe care le-am obţinut recent, se poate spune că aceşti coeficienţi de atenuare variază şi în funcţie de tipul filmelor, deoarece la interacţiunea dintre radiaţii şi emulsia fotografică avem de-a face, în fond, tot cu un proces de atenuare, care va varia funcţie de granulaţia filmului.

Din formula de expunere (1), pentru $D =$ const, prin diferenţiere se poate obţine

$$\mu_{ef} = \frac{1}{0{,}434} \frac{\Delta \lg \frac{IT}{F^2}}{\Delta x} = \frac{1}{0{,}434} \cdot \frac{\Delta \lg E_0}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Deci din determinările senzitometrice, se va putea trasa curba $\lg \frac{IT}{F^2} = \varphi(x)$ pentru o anumită densitate optică, spre exemplu $D = 2$, care nu va fi o dreaptă, ca în studiile menţionate anterior, ci o curbă cu pantă variabilă şi din care se pot afla valorile μ_{ef} în funcţie de grosimea materialului x, conform relaţiei (3).

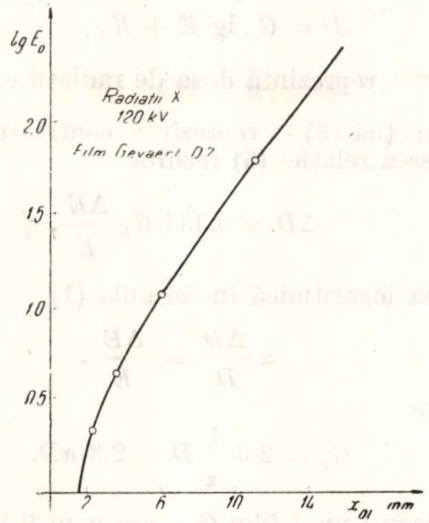


Fig. 4. — Curba $\lg E_0 = \varphi(x)$ pentru filmul Gevaert D7.

În figura 4 se poate observa o astfel de curbă $\lg E_0 = \varphi(x)$ pentru filmul Gevaert $D7$ şi radiaţii X de 120 kV.

CONTRASTUL ŞI RAPIDITATEA FILMULUI

Cu cît este mai ridicat contrastul unui film, cu atît sensibilitatea de detectare a defectelor este mai mare. Contrastul unui film poate fi caracterizat prin coeficientul de contrast relativ $a = \frac{1}{\alpha}$, coeficient definit anterior. Contrastul mai poate fi caracterizat ca diferenţa de grosime Δx pentru care se poate obţine o anumită variaţie a densităţii de înnegrire ΔD. Diferenţiind logaritmic în formula de expunere, pentru cazul dozelor de radiaţii constante $\left(\frac{IT}{F^2} = \text{const}\right)$ găsim

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{\Delta x}{\alpha x_{1/2}} \ln 2, \tag{4}$$

deci, pentru o anumită valoare, $\Delta D/D$, Δx este proporţional cu produsul

$\alpha x_{1/2}$, care este deci echivalent cu o lungime şi care se cheamă grosime de contrast ($E_c = \alpha x_{1/2}$); contrastul propriu-zis variază invers cu E_c.

Dacă E_c depinde de materialul traversat, coeficientul de contrast relativ (a) rămîne o caracteristică a emulsiei; cînd însă materialul este acelaşi, cele două caracteristici conduc la aceeaşi clasificare a filmelor din punctul de vedere al contrastului. După cum se ştie, curba caracteristică a unui film este dată de relaţia

$$D = G_D \lg E + K, \tag{5}$$

în care $E = \frac{IT}{F^2} e^{-\mu x}$ reprezintă doza de radiaţii care ajunge la film, iar G_D — gradientul funcţiei (5) — reprezintă contrastul filmului.

Din diferenţierea relaţiei (5) rezultă

$$\Delta D = 0{,}434\ G_D \frac{\Delta E}{E}, \tag{6}$$

iar din diferenţierea logaritmică în formula (1)

$$\alpha \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta E}{E}. \tag{7}$$

Din 6 şi 7 obţinem

$$G_D = 2{,}3 \frac{1}{\alpha} D = 2{,}3\ aD. \tag{8}$$

Aşadar, contrastul unui film G_D, aşa cum îl întîlnim în prospectele firmelor furnizoare de filme radiografice, este funcţie de coeficientul de contrast relativ şi de densitatea de înnegrire; se observă că creşterea densităţii de înnegrire conduce la o mărire a contrastului.

Rapiditatea unui film se poate evalua, în principiu, prin coeficientul $K = -\frac{\lg A}{\alpha}$, care reprezintă în formula de expunere logaritmul densităţii optice obţinute cu o expunere $\frac{IT}{F^2} = 1$ şi la o grosime a materialului nulă ($x = 0$); coeficientul K depinde de radiaţia utilizată. Se mai poate utiliza şi un parametru caracteristic emulsiei filmului, ρ, numit exponent al rapidităţii:

$$\rho = K - a \log \nu, \tag{9}$$

unde ν reprezintă numărul de roentgeni pe curie sau mA şi pe unitatea de timp, la sursa respectivă de radiaţii gama sau x.

Altfel, rapiditatea se poate caracteriza prin iradierea R_N, evaluată în roentgeni, necesară pentru obţinerea unei doze de înnegrire arbitrar fixată, de exemplu $D = 2$, şi o grosime de material nulă ($x = 0$):

$$R_N = \nu \left(\frac{IT}{F^2}\right)_{\substack{D=2 \\ x=0}}, \tag{10}$$

care, ţinînd seama de formula de expunere (1), devine

$$R_N = A \cdot 2^{\alpha} \cdot \nu.$$

Rapiditatea filmului variază invers cu doza de înnegrire R_N.

Din relaţiile (1) şi (10) rezultă relaţia

$$[I \cdot \nu]\left[\frac{T}{F^2}\right] = \left[R_N\left(\frac{D}{2}\right)^{\alpha}\right][e^{\mu x}], \tag{11}$$

în care se poate vedea influenţa diferitelor elemente : $I \cdot \nu$ — sursa, $\frac{T}{F^2}$ — condiţiile de expunere, $R_N\left(\frac{D}{2}\right)^{\alpha}$ — emulsia radiografică, $e^{\mu x}$ — materialul traversat şi energia radiaţiilor.

Se utilizează de preferinţă filme cu un bun contrast şi o mare rapiditate; aceste două caracteristici variază, în general, invers una faţă de cealaltă.

Un film este adesea caracterizat prin două valori :

— gradientul G_2 al curbei caracteristice la densitatea $D = 2$;

— doza de radiaţii necesară pentru a produce pe film o densitate $D = 2$. Determinările senzitometrice ale filmelor pot conduce la o clasificare a lor în funcţie de contrast sau de rapiditate.

CALITATEA RADIOGRAFICĂ A IMAGINII

Trebuie ţinut seama că în alegerea filmelor radiografice mai intervine şi criteriul calităţii imaginii radiografice, care nu depinde exclusiv de parametrii de contrast definiţi mai sus.

Aprecierea comparativă şi, respectiv, alegerea filmelor radiografice din punctul de vedere al calităţii imaginii pot fi făcute fie prin sensibilitatea radiografică $s = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$, unde Δx este adîncimea cea mai mică a găurilor sau canalurilor vizibile ale indicatorului de calitate, fie prin indicele de vizibilitate N, în care caz rezultatele comparative rămîn valabile oricare ar fi modelul indicatorului de calitate a imaginii utilizat; indicele de vizibilitate este $N = (a) - (b)$, unde (a) este numărul de găuri sau de canale ale I.C.I. vizibile la negatoscop, iar (b) numărul corespunzător pentru a avea o sensibilitate $s = 5\%$.

După cum se ştie, sensibilitatea radiografică, în cazul fasciculului de radiaţii îngust sau cînd se neglijează efectul radiaţiilor împrăştiate, este dată de expresia

$$s = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = \frac{2{,}3\,\Delta D}{\mu G_D \cdot x}\,100\%. \tag{12}$$

În cazul fasciculului larg — cel folosit în practica controlului —, cînd intervine efectul împrăştierii Compton, avem

$$s = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = \frac{2{,}3\,\Delta D}{\mu G_D \cdot x}\left(1 + \frac{I_s}{I_d}\right) \cdot 100\%. \tag{13}$$

Coeficientul $B = \frac{I_s + I_d}{I_d} = e^{\mu x} > 1$ reprezintă propriu-zis un coeficient al împrăştierii adiţionale.

Prin definiţie, intensitatea directă I_d reprezintă radiaţia care ajunge de la sursă la film în linie dreaptă şi formează deci imaginea eventualelor

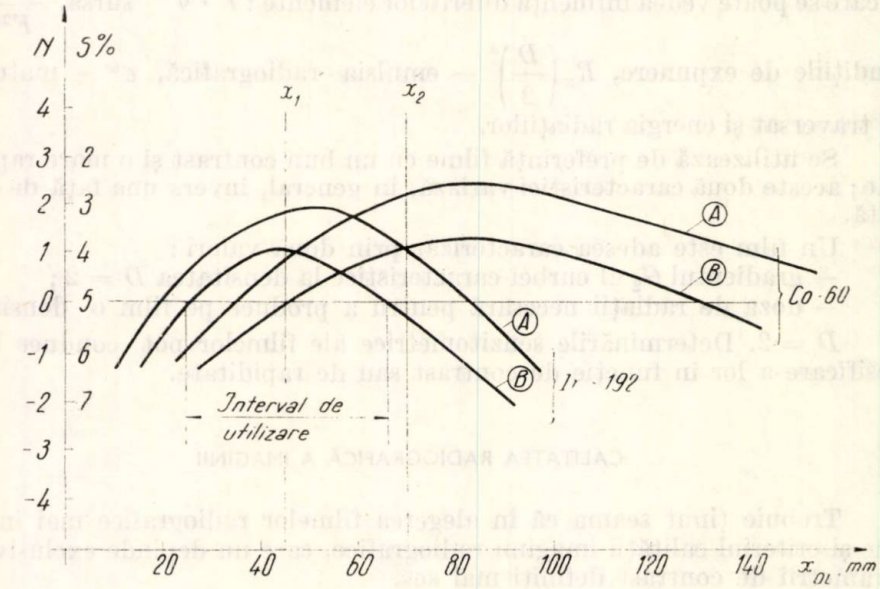


Fig. 5. — Alegerea combinaţiei sursă film în funcţie de calitatea imaginii şi grosimea dată a oţelului.

defecte. Componenta I_s a radiaţiei împrăştiate, care ajunge la film din alte direcţii decît cea directă de la sursă, nu poate forma o imagine a defectului în poziţie corectă, efectul ei fiind, în general, o anumită voalare a filmului; o astfel de radiaţie nu contribuie la formarea imaginii pe film.

Proporţia I_s/I_d reprezintă un criteriu ce trebuie luat în considerare la defectoscopia nedistructivă, deoarece cunoaşterea şi reducerea ei conduc la o imagine cu un contrast mai ridicat.

Prin determinări experimentale se pot cunoaşte valorile coeficientului B care variază funcţie de energiea radiaţiilor, de natura şi grosimea materialului şi de condiţiile geometrice de expunere (vezi [9]).

Felul ecranelor intensificatoare joacă de asemenea un rol important în determinarea valorii lui B şi, implicit, a proporţiei I_s/I_d. Experienţe efectuate de Halmshow [3] cu radiaţii X de 200 kV pe piese din oţel au condus la următoarele rezultate:

detectorul I_s/I_d

— film X fără ecrane intensificatoare 4,5;
— film X cu ecrane din Pb de la 2,0 la 2,9;
— film X cu ecrane saline 7,0.

Se observă clar efectul dăunător al ecranelor saline asupra calității imaginii.

Ținînd seama de cele arătate anterior, pe baza unor studii experimentale complexe și sistematice se poate ajunge la o alegere justă — optimizantă — a combinației sursă-film în funcție de calitatea imaginii, de rapiditate și de natura și grosimea piesei ce se controlează.

În figura 5 se arată un exemplu de alegere a combinației sursă-film în funcție de calitatea imaginii (N sau $s\%$), de rapiditatea filmelor (filmul B e mai rapid decît filmul A) și de grosimea piesei din oțel; pentru grosimea x, se va prefera sursa de Ir — 192, iar pentru x_2 sursa de Co — 60. Curbele calității imaginii la diverse emulsii radiografice, ca cele din figura 5, se ridică din determinările senzitometrice pentru o anumită densitate de înnegrire ce ne interesează.

În concluzie, astfel de studii senzitometrice conduc la cunoașterea caracteristicilor și a formulei de expunere a diverselor filme radiografice, la aprecierea lor comparativă, precum și la alegerea lor și a surselor — pentru examinarea unei piese din material și dimensiuni date — pe baza criteriului esențial în controlul calității produselor, acela al sensibilității de detectare a defectelor, al calității imaginilor radiografice.

Primită la redacție la 27 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Doc. IIS-V-39-57 — *Recherche par voie sensitométrique des conditions d'emploi optimum des sources radioactives en gammagraphie de l'acier*, 1957 (H. de Leiris et E. Antoni).
2. Doc. IIS-V-185-61 — *Étude sensitométrique des émulsions employées en gammagraphie de l'acier*, 1961 (J. Kalbfleisch et A. Nouvet).
3. Doc. IIS-V-242-62 — *Projet de recommandation concernant les essais sensitométriques des films radiographiques sans écran ou avec écrans de plomb*, 1962.
4. Doc. IIS-V-103-59 — *La mise en oeuvre pratique de l'indicateur de qualité d'image normalisé, utilisé en radiographie*, 1959 (G. Chanty).
5. Doc. IIS-V-139-60 — *Projet de recommandation concernant les indicateurs de qualité d'image radiographique*, 1960.
6. Doc-IIS-V-208-62 — *Étude de qualité d'image des emulsions employées en gammagraphie de l'acier*, 1962 (J. Kalbfleisch et A. Nouvet).
7. Doc. IIS-V-259-64 — *Règles de lecture de I.Q.I. dont l'usage a été recommandé par la Commission* V, 1964.
8. Doc. IIS-V-288-65 — *Étude de la qualité d'image en gammagraphie à l'aide de l'indicateur normalisé français à gradins percés.* Limitations d'emploi de cet indicateur, 1965 (G. Charlet).
9. M. Gr. Năstase, *Unele rezultate privind coeficienții de atenuare în defectoscopia nedistructivă prin gamagrafie*, Comunicările celei de-a V-a Conferințe de sudură și încercări de metale, Timișoara, septembrie 1965.

UNELE APLICAȚII SPECIALE ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE ÎN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

de VASILE MARCU și TRAIAN CIOBANU

Articolul expune pe scurt aspectele generale ale metalizării prin pulverizare, avîntul luat de această metodă în lagărul socialist și aplicațiile mai importante efectuate în Republica Socialistă România.
Urmează descrierea a trei aplicații speciale de mare economicitate, și anume metalizarea unei statui din piatră artificială și a Coloanei infinite de la Tg.-Jiu, opera sculptorului C. Brîncuși, precum și metalizarea tablierului podului de peste Olt de la Cîineni.

[OBIECTIVUL LUCRĂRII DE FAȚĂ

Metalizarea prin pulverizare s-a afirmat în ultimele decenii ca avînd un rol important atît în metalurgia prelucrătoare, cît și în alte domenii ale economiei naționale.

În străinătate, atît în lagărul socialist, cît și în țările occidentale, această metodă și aplicațiile ei sînt cunoscute și apreciate, însă la noi nu s-a ajuns încă la această situație. Timp de 10 ani a existat la fostul Institut de mecanică aplicată al Academiei Republicii Socialiste România un colectiv de metalizare prin pulverizare, a cărui activitate, în ce privește cercetările fundamentale și aplicațiile practice, au antrenat la alte institute și la numeroase întreprinderi executarea de lucrări care au dat însemnate economii și rezultate apreciate favorabil.

Întrucît acel colectiv nu mai există și metalizarea prin pulverizare nu mai face obiectul cercetărilor la vreun departament, credem util ca prin lucrarea de față să schițăm un succint bilanț al activității dezvoltate atît la I.M.A., cît și în întreprinderi în domeniul metalizării prin pulverizare.

În același timp am considerat oportun să ne ocupăm mai pe larg de două aplicații care nu au fost menționate în articole, protocoale sau comunicări făcute de colectivul I.M.A. și de alte instituții tehnice, aplicații pe care le-am denumit *speciale*.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 463—480

1. ASPECTE GENERALE ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE

1.1. PRIVIRE ISTORICĂ

Metalizarea prin pulverizare s-a dovedit a fi o excelentă metodă de acoperire a materialelor metalice sau nemetalice cu straturi din metale pulverizate, avînd numeroase şi variate aplicaţii în construcţii metalice şi energetice, în industrie, transporturi şi alte domenii. Avantajele tehnice şi economice ale metalizării prin pulverizare, dovedite practic în ultimii 50 de ani, au antrenat în Occident înfiinţarea de puternice întreprinderi pentru construcţii de utilaj destinat metalizării prin pulverizare şi pentru efectuarea de aplicaţii, din care majoritatea pentru protecţia contra coroziunii şi recondiţionarea organelor de maşini uzate.

În lagărul socialist s-au înfiinţat institute de cercetări care se ocupă de sudură şi de problemele conexe, printre care şi metalizarea prin pulverizare. În paralel, la unele întreprinderi de construcţii metalice sau transporturi s-au organizat ateliere dotate cu utilaje pentru a se efectua metalizări prin pulverizare. Dintre ţările socialiste vom cita pe cele mai importante înainte de a examina situaţia din Rupublica Socialistă România.

1.2. AVÎNTUL METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE ÎN ŢĂRILE SOCIALISTE

1.2.1. Uniunea Sovietică

Studiile şi cercetările fundamentale, precum şi aplicaţiile industriale ale metalizării prin pulverizare, au luat o remarcabilă dezvoltare în U.R.S.S., după cum se constată din numeroasele tratate şi monografii şi din comunicările prezentate la conferinţele internaţionale de metalizare prin pulverizare ţinute în ultimii 12 ani. În U.R.S.S. se construiesc anual peste 3 500 de aparate de metalizare, din care 70% electrometalizatoare, iar 30% aparate a căror sursă termică este asigurată de gaze combustibile, în special acetilena. S-au realizat mari progrese în construcţia acestor aparate, în special în ce priveşte mărirea productivităţii, realizarea de metalizatoare bazate pe înaltă frecvenţă sau dotate cu trei sîrme pentru metalizarea cu pseudoaliaje destinate lagărelor.

Aplicaţia de bază care a permis să se obţină importante economii în exploatarea maşinilor de tot felul este recondiţionarea prin metalizare a organelor ajunse la limita de uzură în întreprinderile de construcţii, energetice şi transporturi (1).

1.2.2. R. P. Polonia

Această ţară ocupă al doilea loc în lagărul socialist în ce priveşte dezvoltarea metalizării prin pulverizare şi ponderii acestei metode în economia naţională. La Institutul de mecanică din Varşovia există încă din 1956 o întreagă secţie cu 15 ingineri, 45 de tehnicieni de înaltă calificare şi 7 laboratoare, avînd ca profil numai studii, cercetări şi aplicaţii ale metalizării prin pulverizare. În industria poloneză existau încă de acum 12 ani peste

500 de întreprinderi cu instalații proprii de metalizare prin pulverizare, iar la toate manifestările internaționale din domeniul metalizării prin pulverizare, ca conferințe, congrese sau simpozioane, R. P. Polonă este reprezentată de 2—3 delegați, ale căror comunicări sînt printre cele mai apreciate.

În afară de avantajele clasice ale metalizării prin pulverizare, în R. P. Polonă s-a ajuns la valorificarea unor metode originale care dau însemnate economii.

Astfel, datorită alitării produselor siderurgice s-a putut renunța la importul oțelurilor rezistente la temperaturi înalte, economisindu-se importante sume în valută (2).

1.2.3. În alte țări socialiste

a) *R. S. Cehoslovacă*

Metalizarea prin pulverizare ocupă un loc de frunte în domeniul construcțiilor metalice, dîndu-se prioritate în special construcției de metalizatoare de tip oxiacetilenic, ca, de exemplu, aparatul AD—1 cu sîrmă AP—4 cu pulbere ca material de aport, precum și aparatul semiautomat tip EMP —2—57, prezentat la o expoziție organizată de R. S. Cehoslovacă în țara noastră acum cîțiva ani.

Cercetătorii cehi s-au remarcat și prin studii fundamentale valoroase în domeniul metalizării prin jet de plasmă (3).

b) *R. D. Germană*

Metalizarea prin pulverizare este studiată și aplicată de mulți ani, în R. D. Germană, care a organizat în 1956, la Institutul de studii asupra sudurii din Halle, prima conferință internațională de metalizare prin pulverizare, cu participarea a peste 300 de referenți și delegați din țări socialiste și occidentale (4).

În 1963 a avut loc la același institut a treia conferință internațională, dovedindu-se existența în R.D. Germană a unei intense activități de cercetare fundamentală și aplicativă în domeniul metalizării prin pulverizare.

2. METALIZAREA PRIN PULVERIZARE ÎN ROMÂNIA

2.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Metalizarea prin pulverizare și-a manifestat prezența în țara noastră încă de acum 30 de ani prin cîteva aplicații, dintre care citățm următoarele :

a) metalizarea în scop anticoroziv a unei părți dintr-un pod peste Bega ;

b) protecția la temperaturi înalte prin alitare a unor bare pentru grătare de la focarele de locomotivă ;

c) prima metalizare a coloanei infinite de la Tg.-Jiu, una dintre operele ilustrului sculptor Brâncuși, efectuată în 1938. Aceste aplicații n-au fost însă urmate de altele la acea epocă, în special în domeniul industrial,

astfel încît metalizarea prin pulverizare a fost mult timp abandonată şi reluată abia în anii regimului actual, după 1950, la cîteva institute şi întreprinderi indicate mai jos.

2.2. LA INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ (I.M.A.)

2.2.1. În 1954 s-a constituit în cadrul I.M.A. un colectiv pentru :

a) cercetări şi aplicaţii asupra metalizării prin pulverizare ;

b) acordarea de asistenţă tehnică întreprinderilor care doreau să utilizeze metalizarea prin pulverizare ;

c) realizarea de utilaje, în primul rînd de aparate pentru metalizare.

Din activitatea colectivului expunem mai jos cîteva dintre rezultatele mai importante care s-au obţinut, după cum urmează :

2.2.2. Studii şi cercetări experimentale

a) Stabilirea formulei care dă intensitatea curentului necesar la metalizare pentru topirea sîrmelor utilizate ca material de aport.

b) Determinarea presiunii de fretaj la metalizarea suprafeţelor convexe.

c) Studiul aderenţei straturilor metalizate cu diferite metale.

d) Determinarea proprietăţilor fizice, chimice şi mecanice ale straturilor obţinute prin pulverizarea de metale.

e) Cercetări asupra rezistenţei la coroziune a straturilor metalizate.

f) Studiul pseudo-aliajelor obţinute prin metalizare, ca material antifricţiune pentru lagărele de alunecare.

2.2.3. Realizări de utilaj

a) Un aparat de electrometalizare în colaborare cu Uzina I.O.R., construit ulterior în serie.

b) Un banc experimental pentru studiul rezistenţei la uzură a fusurilor de axe în regim nepermanent.

c) Un aparat pentru determinarea grosimii straturilor depuse prin pulverizare de metale.

d) Amenajarea unui laborator de metalizare prin pulverizare, dotat cu toate agregatele, aparatele de măsură şi accesoriile necesare.

2.2.4. Aplicaţii industriale

Dintre aceste aplicaţii, efectuate pe bază de convenţii de colaborare cu unele întreprinderi, citäm următoarele mai importante.

a) recondiţionarea arborilor de la motoarele de tractoare, în colaborare cu Institutul de cercetări pentru mecanizarea şi electrificarea agriculturii şi cu atelierul de reparat utilaj agricol de la Ciulniţa ;

b) recondiționarea butoanelor cap de osie de la vagoanele de tramvai ale I.T.B. și a motoarelor de autovehicule de la întreprinderea de reparații I.R.A. nr. 1;

c) protecția prin alitare a dornurilor pentru perforarea țaglelor destinate fabricării tuburilor fără sudură la Uzina „Republica" din capitală;

d) recondiționarea unor arbori de turbină și a altor diverse piese de motoare diesel stabile la întreprinderea „Energoreparații" din București;

e) aplicații de recondiționări la Uzinele „23 August" și „Semănătoarea", precum și la Uzina „Steagul roșu" din Brașov.

Aplicațiile metalizării prin pulverizare au permis realizarea unor importante economii, cifrate — după o statistică oficială — la următoarele valori:

1,5 mil. în 1960,
2,5 mil. în 1961,
3,6 mil. în 1962,
4,5 mil. în 1963.

2.2.5. Lucrări publicate

Activitatea menționată mai sus este reflectată prin publicarea a numeroase articole în revistele „Studii și cercetări de mecanică aplicată", „Metalurgia" și altele. De asemenea s-a mai publicat în editura I.D.T. o broșură de 120 de pagini pentru instructajul metalizatorilor (5) și în Editura Academiei o monografie de 330 de pagini (6).

2. 3. LA ÎNTREPRINDERI

2.3.1. La Uzina „1 Mai", din Ploiești

I. În domeniul protecției anticorozive

a) Protecția anticorozivă a utilajului petrolier de export în climat tropical.

b) Protecția unor construcții metalice de la turnătoria fabricii de băi și radiatoare din București-Militari (cu strat de zinc având grosimea de (0,15—0,20 mm) în suprafață de 700 m^2.

c) Metalizarea cu aluminiu pulverizat în grosime de 0,2 mm a unor elemente de tîmplărie mecanică de la Șantierul de construcții Brazi și a unor vagoneți de mină pentru export.

d) Metalizări anticorozive a construcțiilor metalice de la sere.

e) Efectuarea de protecții anticorozive a rezervoarelor de carburant pentru locomotive de mină destinate întreprinderii „Unio" din Satu-Mare, a rezervoarelor pentru apă de la Fabrica de băi și radiatoare, precum și a unor cisterne pentru Arsenalul din Sibiu.

f) Protejarea interioară contra coroziunii a diverse rezervoare și recipiente, ca, de exemplu, rezervoare de fenol la rafinăria „Teleajen" și Combinatul de cauciuc sintetic din Orașul Gheorghe Gheorghiu-Dej, precum și a rezervoarelor agregatelor de cementare a Uzinei „1 Mai" din Ploiești.

g) Metalizarea cu aluminiu pulverizat a malaxoarelor centrifuge de la Rafinăria de zahăr Roman, lucrare care se repetă în fiecare an.

h) Metalizarea cu zinc a cordoanelor de sudură de la butoaie metalice sau alte construcţii sudate din tablă galvanizată.

II. *Recondiţionări şi remedierea unor defecte*

a) Recondiţionarea de arbori cotiţi de autovehicule, de bucşe şi lagăre de la maşini-unelte şi pompe.

b) Remanierea axelor de la troliile de foraj.

c) Recondiţionarea filierelor pentru fabricarea cărămizilor şi ţiglelor.

III. *Diverse alte lucrări de metalizare la Uzina „1 Mai"*

a) Metalizarea modelelor de turnătorie.

b) Protecţia oţelului la temperaturi ridicate prin alitare, aplicată la cuptoare de recoacere şi oale de recoacere, la cutii de cementare etc.

c) Metalizarea cu molibden a axelor pompelor de ulei de la motorul LDE fabricat de UCM-Reşiţa, precum şi metalizarea cu aliaj „Berkalloy" a bucşelor cilindrilor de la motorul diesel fabricat de Uzinele „23 August" din capitală.

d) Ecranarea izolatorilor de porţelan, ecranarea măştii şi carcasei de televizor şi radio ; ecranarea carcaselor a 28 de aparate Roentgen cu un strat de plumb de 0,5 mm grosime.

e) Protecţia contra coroziunii prin metalizarea cu plumb la uzina „Petru Poni" de la Valea Călugărească.

f) Metalizarea de malaxoare pentru frămîntat pîine şi autoclave.

g) Metalizarea cu aliaje dure tip „stelit" a sapelor de foraj.

h) Experienţe de protecţie cu strat din mase plastice şi acoperiri cu materiale ceramice şi refractare.

i) Metalizări cu pseudoaliaje plumb-aluminiu şi cupru-aluminiu, rezolvîndu-se problema sîrmei bimetalice pentru metalizarea lagărelor.

j) Construirea unui aparat de metalizare oxiacetilenic, care s-a dovedit în exploatare superior multor aparate străine.

2.3.2. La alte întreprinderi

Metalizarea prin pulverizare s-a aplicat de la caz la caz şi la alte întreprinderi pentru rezolvarea unor probleme de moment, ca de exemplu :

a) metalizări de autocisterne la Arsenalul de la Sibiu ;

b) alitări a cutiilor de cementare la Uzina „Steagul roşu" din Braşov ;

c) metalizări interioare a vagoanelor-cisterne pentru fenol la Uzina de superfosfaţi şi acid sulfuric de la Năvodari ;

d) protecţia prin alitare a tecilor de pirometre la Uzina „Automatica" din capitală ;

e) metalizarea electrozilor de grafit la Uzina „Carbochim" din Cluj ;

f) recondiţionări de piese uzate la uzinele „23 August" şi „Semănătoarea" din Bucureşti, la Uzina „Teleajen" din Ploieşti şi Uzina „Poiana" din Cîmpina etc.

3. APLICAȚII SPECIALE ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE

Această denumire am adoptat-o pentru unele aplicații ale metalizării efectuate ca cercetări, care, deși au dat rezultate satisfăcătoare, nu au trecut la serie, neavînd utilizări curente, cum este cazul cu aplicațiile menționate la capitolul precedent.

Dintre aplicațiile speciale citățm mai jos succint cîteva :

3.1. LAGĂRE DIN METALE PULVERIZATE

În construcțiile de mașini se consumă cantități importante de metale și de aliaje neferoase, ca aluminiu, zinc, cupru, bronz pentru cuzineții lagărelor de alunecare. Întrucît costul metalelor și aliajelor neferoase este destul de ridicat și în multe țări ele trebuie importate, s-au experimentat cu succes în unele țări socialiste adoptarea de cuzineți din metale pulverizate, realizîndu-se așa numitele „pseudoaliaje", mai economice decît aliajele turnate.

În Uniunea Sovietică s-au obținut bune rezultate chiar cu cuzineți la care materialul antifricțiune este constituit din oțel cu anumite calități, care asigură lagărelor respective o bună capacitate de rodare și de încărcare. În unele cazuri s-a constatat că pseudoaliajele se comportă chiar mai bine decît aliajele turnate ca material antifricțiune din metale neferoase.

Colectivul de metalizare prin pulverizare de la I.M.A. a efectuat cercetări similare în acest domeniu, obținînd rezultate interesante care au făcut obiectul unui studiu (7).

3.2. LAGĂRE CU CUPLURI INVERSATE

Lagărele clasice sînt constituite dintr-un fus construit din oțel și un cuzinet prevăzut cu un strat de material antifricțiune, care asigură o bună comportare la frecare și uzură. În Uniunea Sovietică s-au făcut experiențe reușite cu așa-numitele „cupluri inversate", la care fusul este prevăzut cu material antifricțiune depus prin pulverizare, iar cuzinetul este din oțel tratat termic la duritate înaltă.

Astfel de cercetări s-au efectuat și în țara noastră la Institutul de mecanică aplicată (8).

3.3. ALTE APLICAȚII

a) Metalizarea prin pulverizare a fost aplicată cu succes și în domeniul artei plastice, după cum se constată dintr-o comunicare prezentată de un delegat polonez la primul Congres de metalizare prin pulverizare din R.D.G., ținut în 1956 la Halle. Exemplul acesta a fost urmat și în România, în două cazuri expuse în capitolul următor.

b) Protecția contra coroziunii a podurilor metalice prin metalizarea tablierului sau a suprastructurii.

Deoarece astfel de aplicații nu au fost expuse pînă acum în literatura noastră de specialitate, am considerat util să constituie obiectul articolului de față.

4. METALIZAREA ÎN ARTA PLASTICĂ

4.1. METALIZAREA UNEI STATUI

Colectivul de metalizare prin pulverizare de la I.M.A. a fost solicitat să metalizeze cu cupru o statuie din piatră artificială de circa 2,50 m înăl-

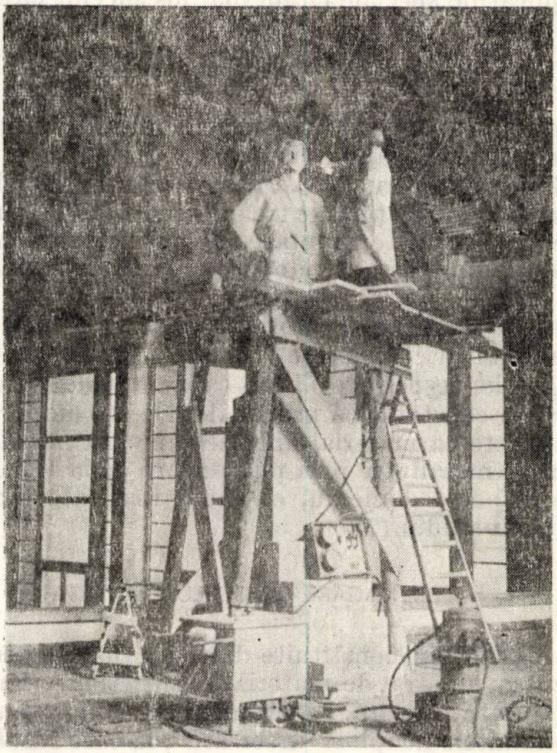


Fig. 1. — Metalizarea unei statui din piatră artificială.

ţime, reprezentînd un oţelar, destinată a figura la o expoziţie în 1958. Colectivul s-a inspirat în executarea acestei lucrări de un precedent din R. P. Polonă expus într-o comunicare citată mai sus.

Metalizarea s-a făcut cu un aparat electric cu arc tip EM—3A de fabricaţie sovietică, avînd următoarele caracteristici:

— presiunea de regim a aerului comprimat . . . . 4,5 — 6 at;
— consumul de aer comprimat la 6 at . . . . . 1,2 m ^{3}/min;
— viteza maximă de avans a sîrmelor . . . . . 3 m/min;
— intensitatea curentului de lucru . . . . . 130 Å;
— productivitatea aparatului cu sîrmă de oţel avînd diametrul de 1,5 mm . . . . . 1,5 kg/h;
— greutatea aparatului . . . . . 2,2, kg.

Materialul de aport era constituit din două sîrme de cupru, antrenate de un dispozitiv avînd o turbină acţionată cu aer comprimat.

În vederea metalizării s-a transportat din laboratorul de metalizare de la I.M.A. instalația cuprinzînd compresorul, filtrul de aer, generatorul de curent și tabloul de comandă în hala expoziției, după cum se poate vedea în figura 1.

S-a construit un eșafodaj cu o platformă în jurul statuii și s-a procedat la metalizarea cu un strat de cupru avînd grosimea de 0,15—0,20 mm. Stratul a fost apoi polizat și tratat chimic pentru a i se da aspectul bronzului. Statuia a fost expusă și, în afară de organizatorii expoziției și de specialiștii de la I.M.A., publicul care a vizitat expoziția a avut convingerea că statuia era de bronz masiv. Turnarea statuii din acest aliaj ar fi necesitat circa 700 kg de cupru, pe cînd metalizarea prin pulverizare nu a consumat decît 15 kg de sîrmă de cupru, ceea ce dă o economie de metal neferos de circa 82%. Statuia se găsește și astăzi în bună stare, după zece ani de expunere în fața Combinatului Fondului plastic din str. Nuferilor nr. 2. Metalizarea statuii nu a necesitat pregătirea suprafeței pentru obținerea aderenței stratului pulverizat, deoarece această suprafață avea o rugozitate proprie care nu mai necesita o sablare.

4.2. METALIZAREA COLOANEI INFINITE DE LA TG.-JIU

4.2.1. Antecedente

În anii 1937 și 1938, celebrul sculptor român C. Brâncuși, gorjean de origine, dar stabilit la Paris, a fost invitat în țară și solicitat să realizeze la Tg.-Jiu un ansamblu de monumente, printre care și renumita *Coloană infinită*, ca un omagiu pentru eroii neamului cărora le datorăm o infinită recunoștință. Coloana, înaltă de 29,35 m, este formată din 15 elemente plus două semielemente. Fiecare element era constituit din două trunchiuri de piramidă reunite prin baza mare, cu excepția celor de la bază și vîrf, care nu erau constituite decît de un singur trunchi de piramidă.

Aceste elemente din fontă au fost turnate în atelierele întreprinderii miniere Petroșani după modelul din lemn executat personal de Brâncuși și apoi montate unul peste altul pe un pivot central bine ancorat într-o fundație din beton (fig. 2).

Aceste lucrări s-au executat în 1937 sub conducerea ing. Gh. Georgescu- Gorjan, prieten al lui Brîncuși, coloana fiind instalată pe un platou, devenit apoi parc. Acest amplasament a fost ales de Brâncuși pentru a-i asigura o perspectivă demnă de concepția coloanei, iar pentru a o ataşa la celelalte monumente aflate în grădina publică din Tg.-Jiu s-a realizat o alee, numită a „eroilor".

Operația de instalare a elementelor pe pivotul central este arătată în figura 2. După terminarea montajului s-a efectuat metalizarea cu alamă a coloanei pentru a se evita coroziunea fontei și a-i da aspectul de galben-auriu pe care Brâncuși îl considera ca avînd un efect artistic optim (9).

4.2.2. Situația în 1965

Brâncuși, stabilit la Paris din 1904, ajunsese un sculptor de o celebritate mondială, ale cărui opere și expoziții în Europa și America stîrneau admirația mai ales a celor care apreciau curentele noi în artă.

Monumentele de la Tg.-Jiu, printre care în primul rînd *Coloana infinită*, opera preferată a lui Brâncuși, neputînd fi deplasate, impunea pentru mulți dintre pasionații artei contemporane să vină în țara noastră spre a le admira la fața locului.

În 1966, după 28 de ani de la instalare, *Coloana infinită*, avînd suprafața corodată de trecerea anilor, își pierduse culoarea galbenă inițială,

Fig. 2. — Montarea elementelor coloanei.

fapt prejudiciabil pentru un monument de faimă mondială care atrăgea mulți turiști în țara noastră.

În fața acestei situații, Comitetul de Stat pentru Cultură și Artă, și Consiliul popular al Municipiului Tg.-Jiu au luat hotărîrea de restaurare a *Coloanei infinite*. Pentru aducerea la îndeplinire a acestei delicate sarcini s-a constituit un colectiv, din care sectorul tehnic era format din ing. Gh. Georgescu-Gorjan, care organizase și condusese lucrările din 1937—1938 pentru realizarea și instalarea coloanei infinite, precum și autorii articolului de față.

O restaurare capitală ar fi impus demontarea coloanei prin scoaterea elementelor de pe pivotul central și repararea porțiunilor fisurate care permiteau pătrunderea apei în interiorul coloanei și agravarea coroziunii. O astfel de lucrare de vaste proporții ar fi necesitat mijloace financiare și materiale importante și ar fi provocat pentru un timp foarte îndelungat scoaterea din patrimoniul artistic a *Coloanei infinite*.

S-a decis atunci să se refacă numai metalizarea suprafeței coloanei, beneficiindu-se de perfecționările metodei de metalizare apărute în cursul celor 27 de ani de la construcția coloanei.

4.2.3. Tehnologia lucrărilor

A. Organizarea șantierului

Amplasarea lucrării care trebuia executată a impus organizarea complexă a unui șantier care să permită accesul la întreaga suprafață a coloanei înalte de circa 30 m, depozitarea de numeroase materiale și utilaje și spații pentru muncitori în vederea pregătirii lucrului. În consecință, s-au construit o schelă dublă (fig. 3) în jurul coloanei, ancorată și la sol, barăci pentru materiale și amplasamente pentru agregatele necesare operațiilor de sablare și metalizare.

În ce privește manopera, dat fiind că se impunea executarea ireproșabilă a unei lucrări pe care urmau s-o aprecieze și vizitatorii străini, s-a

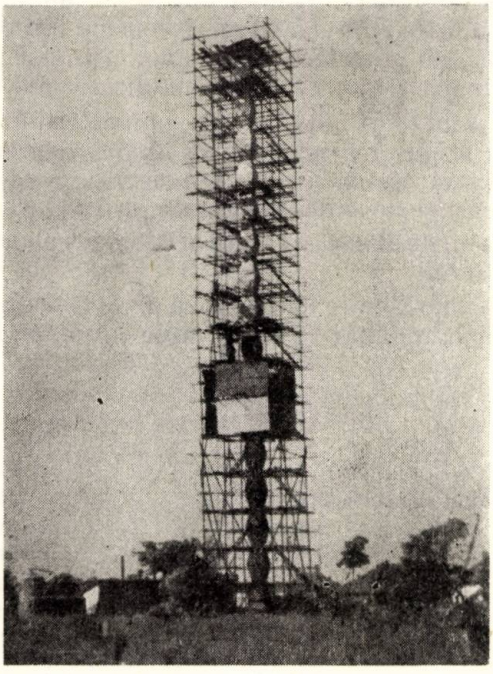


Fig. 3. — Vedere de ansamblu a schelei.

deplasat echipa de metalizatori de înaltă calificare și experiență de la Uzina „1 Mai" din Ploiești, care avea la activul său numeroase și delicate lucrări de metalizare, indicate mai sus la cap. 2.3.1.

B. *Utilaje și materiale*

a) Două motocompresoare, fiecare cu debit de 8 m^3/min la presiunea de 6 kgf/cm^2, cuplate la un rezervor cu capacitate de 3 m^3. Transmiterea aerului se făcea printr-o conductă instalată pînă la vîrful coloanei, cu racorduri din 4 în 4 m. Curățirea aerului de impurități și de umiditate se făcea grație unui filtru aflat între rezervorul de aer și instalația de metalizare.

b) O instalație de sablare, amplasată inițial pe schelă pentru elementele de vîrf și coborîtă ulterior spre sol pe măsură ce sablarea se deplasa de sus în jos.

c) Metalizarea s-a efectuat cu o instalație franceză oxiacetilenică tip „Top-Jet", furnizată de „Société nouvelle de métallisation".

d) Ca material de aport s-a utilizat sîrmă de zinc și alamă.

e) Sablarea s-a efectuat cu corindon, granulație 0,5—2 mm.

C. *Executarea metalizării*

a) Pregătirea suprafeței pentru obținerea aderenței s-a făcut prin sablare cu corindon, care a impus un mare consum din acest material abraziv din cauza coroziunii puternice, a neplaneității unor porțiuni din suprafață și a urmelor foarte aderente de la metalizarea inițială.

b) S-a realizat un strat inițial de zinc pulverizat, urmat de un al doilea din alamă, pentru asigurarea unei cît mai bune aderențe și rezistențe la coroziune, ultimul strat avînd și rolul de asigurare a aspectului galben-auriu dorit de Brâncuși și la prima metalizare în 1938 (fig. 4).

c) Stratul ultim, de alamă, a fost apoi lustruit cu un polizor pneumatic, avînd un disc de șlefuit.

d) A urmat apoi o lăcuire manuală cu un lac special, incolor, injectîndu-se cu seringa lac la îmbinări și în regiunile cu sulfuri sau alte defecte ale suprafeței.

D. *Principale materiale consumate*

Corindon	14,6 tone
sîrmă de zinc, diametru 2 mm	154 kg
sîrmă de alamă „ 2 mm	300 kg
acetilenă	315 kg
oxigen	226 m^3
lac incolor	43 kg
întăritor	35 kg
diluant	30 kg

În afară de aceste materiale s-au mai consumat pentru închiderea schelei spre a se evita împrăștierea abrazivului și a se permite recuperarea lui, precum și protejarea coloanei pînă la operația finală a lăcuirii:

polietilenă folie	243 kg
plăci fibro-lemnoase	1,543 m^3

4.2.4. Rezultate obținute

Metalizarea *Coloanei infinite* a dat o protecție mai satisfăcătoare decît cea inițială din 1938, datorită faptului că s-au depus două straturi pulverizate, unul de zinc și celălalt de alamă, precum și lăcuirii finale, care-i va

Fig. 4. — Metalizarea coloanei.

menține culoarea și luciul cîțiva ani. Aspectul coloanei atît în timpul zilei la soare, cît și noaptea sub lumina proiectoarelor s-a constatat că realiza efectul de galben-auriu preconizat de Brâncuși.

Menționăm că durabilitatea protecției va putea fi sensibil mărită dacă după o anumită perioadă, de exemplu cinci ani, se va reînnoi stratul de lac incolor.

5. METALIZAREA PODULUI RUTIER PESTE OLT DE LA CÎINENI (Fig. 5)

5.1. GENERALITĂȚI ASUPRA METALIZĂRII PODURILOR

Podurile metalice sînt deosebit de vulnerabile față de coroziunea atmosferică sau aceea provocată de infiltrațiile de apă, iar protecția dată de vopselele organice este insuficientă ca durată și calitate.

În ultimele trei decenii s-a recurs la metalizarea prin pulverizare cu zinc sau aluminiu la numeroase poduri din străinătate, obținîndu-se rezul-

tate mult mai satisfăcătoare decît cu acoperirile organice lipsite de un strat de bază metalic.

Cercetările experimentale întreprinse în multe țări au arătat că suprafețele metalizate au o durată de protecție de 4—5 ori mai mare decît suprafețele acoperite numai cu vopsele organice.

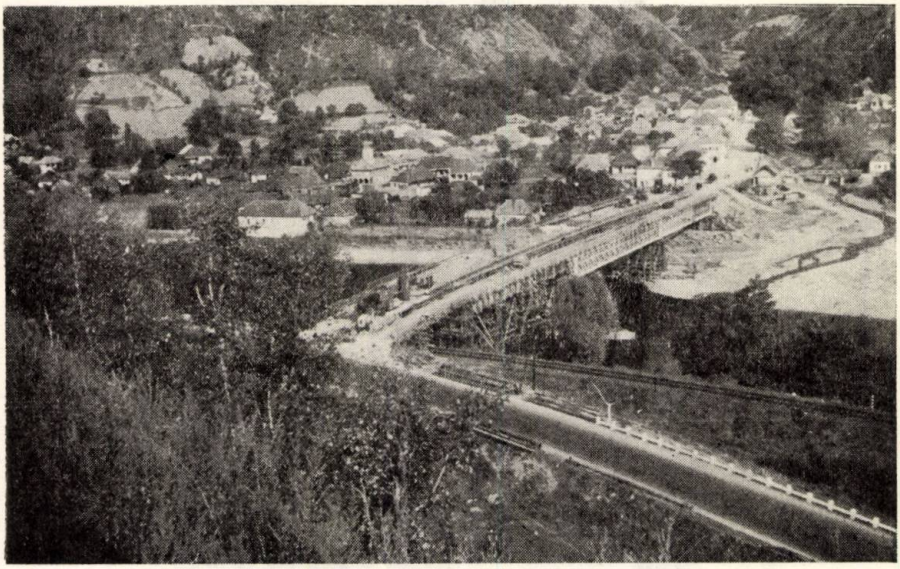


Fig. 5. — Vedere de ansamblu în timpul metalizării.

Numeroase lucrări, efectuate în special în Anglia, au arătat că soluția optimă a protecției contra coroziunii constă dintr-un strat de bază din zinc pulverizat, acoperit apoi cu două sau trei straturi de vopsele speciale, acest ansamblu putînd dura între 10 și 20 de ani.

W. E. Ballard citează într-un tratat al său numeroase exemple, din care citām mai jos numai două |10| :

a) Unul dintre cele mai lungi poduri de cale ferată din Anglia, de la River Forth, necesita o vopsire continuă, deoarece vopsirea, cînd se termina la un capăt al podului trebuia reluată la capătul opus, unde apăreau deja semne de coroziune. S-a construit alături întîmplător un pod rutier a cărui suprafață a fost metalizată cu zinc, ceea ce a permis să se constate că durata de protecție anticorosivă era cu mult mai mare decît aceea a straturilor de vopsea de la podul de cale ferată.

b) Un foarte vechi pod suspendat din Anglia, construit la Clifton în 1864, era intens expus la coroziunea atmosferei marine din cauza vînturilor, care aduceau de la Canalul Bristol, situat în apropiere, stropi fini de apă cu particule de sare. Din cauza vopsirii frecvente, în curs de aproape 100 de ani se depusese pe suprafața podului un strat foarte gros de vopsele, care constituia o îngreuiere exagerată a podului. S-a remediat această situație prin sablare, care a îndepărtat toate straturile vechi de vopsele, după care suprafața podului a fost protejată prin metalizare cu zinc, urmată de trei

straturi din vopsele speciale, care aveau o durată mult mai mare pe stratul de zinc.

Noile concepții constructive aplicate la construcția podurilor metalice rutiere dau o atenție deosebită reducerii greutății, care se poate obține prin metode ale tehnicii înaintate. Astfel placa ortotropă care constituie grinda superioară a tablierului și suportul căii de rulare s-a prevăzut a fi metalizată prin pulverizare pentru a fi protejată contra coroziunii provocate de infiltrarea apei prin fisurile stratului de asfalt. Metalizarea fiind precedată de sablare, s-a constatat că această operație produce și o mărire a rezistenței la oboseală a tablierului podului.

5.2. METALIZAREA PODULUI DE LA CÎINENI

5.2.1. Generalități

Apreciindu-se avantajele metalizării prin pulverizare, s-a aplicat această metodă și la noi în țară în 1965, la construcția podului rutier de la Cîineni de peste Olt. Fiind prima aplicație a metalizării prin pulverizare la construcția podurilor, pregătirea documentației necesare a lipsit cu desăvîrșire. În străinătate se mai aplicase în ultimii ani metalizarea prin pulverizare la tablierul unor poduri printre care citățm următoarele : podul suspendat „Elisabeta" din Budapesta peste Dunăre, viaductul din Cracovia (R. P. Polonă) și podul „Povlear Street Bridge" din S.U.A.

În România nu se cunoșteau din literatura tehnică decît foarte puține date asupra metalizării acestor poduri, în ce privește procesul tehnologic, instrucțiunile de executare, organizarea șantierului și condițiile de recepție. Ca urmare, aceste lucrări au fost inițiate și duse la bun sfîrșit numai grație experienței și inventivității colectivului de execuție al metalizării podului de la Cîineni, după cum urmează :

5.2.2. Organizarea șantierului și utilaje

Această lucrare s-a făcut avînd la bază ideea reducerii la minimum a timpului de execuție din cauza condițiilor climaterice nefavorabile, inerente faptului că lucrarea s-a efectuat în intervalul 7 septembrie — 15 octombrie 1966.

S-a pus un accent deosebit pe sablare, care impune un volum mare de muncă și provoacă o strangulare a ritmului de lucru dacă randamentul instalației de sablare este insuficient, cum era de fapt situația la Cîineni. Deficiența a fost remediată prin dublarea numărului aparatelor de sablare, ajungîndu-se la sincronizarea operațiilor de sablare și de metalizare, precum și la reducerea simțitoare a duratei ansamblului acestor operații.

Pentru a realiza o protecție contra unor eventuale intemperii, dar mai ales pentru a impiedica împrăștierea abrazivului, sablarea s-a făcut într-o baracă din panouri de PFL montată pe un cadru metalic suportat de roți și deplasată spre înainte după curățirea suprafeței sablate. Metalizarea acesteia se făcea în afara barăcii (fig. 6).

Execuția concomitentă a polizării sudurilor, a sablării cu două aparate și a metalizării a necesitat o stație importantă de aer comprimat, res-

pectiv compresoare cu debit şi rezervoare de aer mari. Astfel a fost adus un compresor de 15 m^3/min şi altul de 8 m^3/min, cuplate cu un rezervor de 18 m^3. Primul compresor asigura sablajul, iar cel mic metalizarea şi polizarea. Staţia a fost amplasată pe culee, iar printr-o conductă cu racorduri aerul a fost distribuit pe toată lungimea podului.

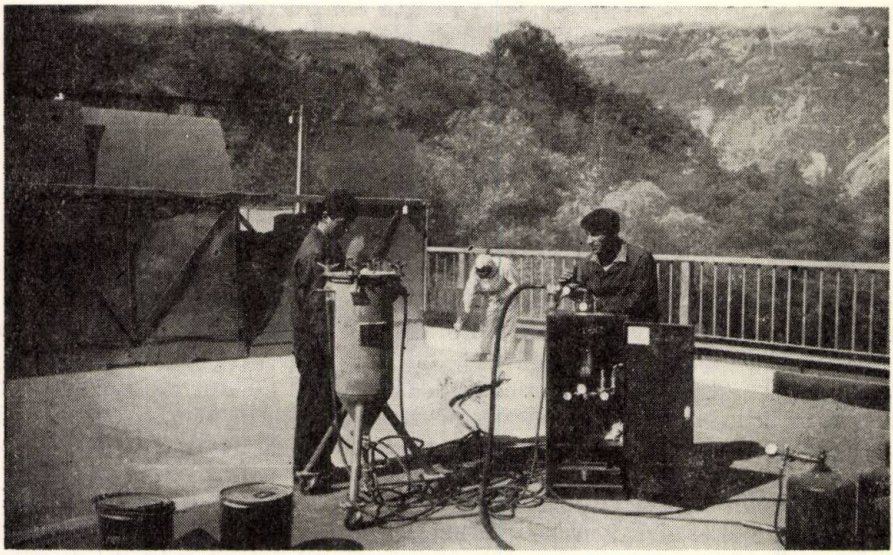


Fig. 6. — Metalizarea plăcii carosabile a podului.

Curăţirea aerului a fost asigurată prin rezervoarele-tampon şi prin filtrele individuale ale aparatelor de sablare.

Pentru polizarea sudurilor s-au utilizat două polizoare pneumatice cu diametrul de 200 mm, iar metalizarea s-a efectuat cu o instalaţie de fabricaţie engleză tip Berk, care utiliza metalul de aport sub formă de pulbere (fig. 6).

Materialele consumate au fost următoarele :

I. Pentru sablare :

— electrocorindon cu granulaţia de 0,5—2,5 mm.

II. Pentru metalizare :

—pulbere Berkalloy, un aliaj de 65% zinc şi 35% aluminiu, de fabricaţie engleză ;

— propan în butelii ;

— oxigen tehnic.

5.2.3. Procesul tehnologic

Acesta a constat din următoarele operaţii :

I. *Polizarea sudurilor* şi îndepărtarea stropilor de sudură, urmată de o verificare vizuală a suprafeţei tablierului.

II. *Degresarea suprafeţei*, care s-a efectuat prin frecare cu cîrpe şi benzină de extracţie, după care s-a verificat dispariţia petelor de ulei.

III. *Sablarea rugoasă și fără umbre*, executată cu corindon uscat, aer comprimat curat, fără apă și ulei, la presiunea de 6 kgf/cm ^{2}. S-a verificat aspectul suprafeței sablate vizual și cu lupa.

IV. *Metalizarea*, efectuată la maximum patru ore după sablare, depunîndu-se o grosime minimă a stratului pulverizat de 0,2 mm, precum și o aderență și granulație uniformă a acestui strat.

Consumurile de materiale au fost următoarele :

Denumirea materialelor	Unitatea de măsură	Consumul	Proveniența materialului
Corindon	tone	11,300	R.S.R.
Berkalloy	kg	1 600	Anglia
Propan	butelii	44	R.S.R.
Oxigen	m^3	526	R.S.R.
Benzină	kg	650	R.S.R.

5.2.4. Forțe de muncă

Lucrările de sablare — metalizare au început la data de 6 septembrie 1965 și s-au terminat la 15 octombrie 1965, ceea ce face un total de 40 de zile calendaristice, din care s-a metalizat efectiv în 23 de zile.

Suprafața totală metalizată fiind de 1 017 m^2, rezultă următoarele cifre pentru suprafața metalizată zilnic :

— pentru durata calendaristică a lucrării, 1 017 : 40 = 25 m^2/zi ;

— pentru durata efectivă a lucrării, 1 017 : 23 = 44 m^2/zi.

6. CONSIDERAȚII FINALE

În articolul de față s-au studiat practic două categorii de aplicație ale metalizării prin pulverizare utilizînd datele unor lucrări efectiv realizate în România, și anume : metalizarea prin pulverizare în arta plastică și metalizarea podurilor metalice sudate cu tablier format din placă ortotropă. S-a constatat că prima categorie de aplicație, care s-a referit la metalizarea unei statui și a *Coloanei infinite* de la Tg.-Jiu, opera sculptorului C. Brâncuși, permite a se realiza economii însemnate, în special la metalizarea statuilor. După cum s-a constatat și în R. P. Polonă, economia la metal neferos depășește circa 80%, ceea ce reprezintă aplicația cea mai rentabilă a metalizării prin pulverizare.

Metalizarea prin pulverizare în domeniul artei plastice este adesea utilizată în străinătate pentru a crea straturi protectoare deosebit de artistice pe statui, basoreliefuri și coloane, aplicația stratului metalizat făcîndu-se în acest caz pe materiale ceramice. O altă variantă a acestei aplicații constă în metalizarea lemnului, obținîndu-se efecte metalice foarte artistice la decorarea interioară a navelor de pasageri, de exemplu transatlanticele. Acest gen decorativ s-a impus pe nave pentru ca materialele utilizate să aibă o greutate cît mai redusă.

În ce privește metalizarea podurilor, această aplicație a început să fie din ce în ce mai utilizată în străinătate și în curînd se va face în și la noi în țară o a doua aplicație, de mai mare anvergură, prin metalizarea tablierului podului rutier de peste Dunăre de la Giurgeni-Vadul Oii.

Primită la redacție la 8 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. E. V. Antosin, *Tools and Research of Metal Spraying in U.R.S.S.*, comunicare prezentată la al doilea Congres internațional de metalizare prin pulverizare, ținut la Birmingham în 1958.
2. J. Lapinski, *Die Entwicklung des Metallspritzverfahrens in der Volksrepublik Polen*, comunicare prezentată la primul congres internațional de metalizare prin pulverizare, ținut la Halle în R.D.G., 1956.
3. R. Kopec, A. Pospisil, *Metallspritzen in der Tchecoslowakeischen Republik vom Standpunkt der Forschung aus*, comunicare prezentată la primul congres de metalizare prin pulverizare, 1956.
4. *Möglichkeiten des Spritzschweissesprozesses*, comunicare prezentată la primul congres, 1956.
5. * * * *Metalizarea prin pulverizare*, Sinteză aplicativă, București, I.D.T., 1958.
6. Marcu Vasile, *Metalizarea prin pulverizare*, Edit. Academiei, București, 1963.
7. — *Cercetări experimentale asupra lagărelor cu cuzineți din metale pulverizate*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *5*, (1963).
8. — *Asupra lagărelor cu cupluri de frecare inversate obținute prin pulverizarea de metale*, St. cerc. mec. apl. **16**, *4* (1964).
9. Șt. Georgescu-Gorjan, *The Genesis of the „Column without end*, Revue roumaine d'histoire de l'art, **I**, *2* (1964).
10. W. E. Ballard, *Metal Spraying and sprayed Metals*, Londra, Charles Griffin and Cie, Ltd., 1948.

METODE FIZICE ŞI ELECTRICE FOLOSITE ÎN STUDIUL FRECĂRII ŞI UZĂRII

de ILIUC IVAN
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se face o trecere în revistă a unor metode fizice şi electrice de analiză folosite în cercetările de frecare şi de uzură. Un accent deosebit s-a pus pe metodele care oferă posibilităţi mari de investigaţii : microscopia şi difracţia de electroni, microsonda electronică. Sînt prezentate şi unele rezultate tocmai pentru a sublinia posibilitatea metodelor respective.

Ştiinţa frecării, ştiinţă relativ tînără, a luat naştere din îmbinarea unor cunoştinţe dobîndite în practică cu alte domenii bine conturate ale ştiinţei. În mod natural, primele cercetări cu caracter ştiinţific au operat cu mărimi „exterioare" de exploatare, uşor de controlat (solicitare, turaţie, temperatură de răcire etc.). Concomitent, cercetători de diferite specialităţi au abordat anumite aspecte particulare ale frecării cu metode specifice pregătirii lor. Treptat, procesul de cercetare devine complex, mărimile exterioare sînt înlocuite cu mărimi locale în legătură directă cu fenomenul de frecare şi de uzare. Cercetările privind mecanismul procesului se lovesc însă de dificultăţi, datorate în primul rînd scării microscopice la care se desfăşoară acesta şi imposibilităţii observării lui directe. Progresul în această direcţie va fi determinat de folosirea unor metode sensibile şi eficace pentru controlul mărimilor din zona de frecare ; aceste metode sînt împrumutate, în majoritatea cazurilor, din alte discipline ştiinţifice.

Referatul de faţă se ocupă de unele metode fizice moderne folosite în studiul frecării ; sînt dezvoltate metodele pe care le-am considerat că oferă posibilităţi bogate de investigaţie, fiind omise procedeele curent folosite (de exemplu gravimetrie, metode radiometrice), sau cele care ţin de alte domenii (de exemplu tehnica vidului înalt). Totodată sînt prezentate şi unele rezultate tocmai pentru a sublinia posibilităţile metodelor respective.

Expunerea va urmări următoarea schemă, din care, după cum s-a menţionat, anumite metode nu vor fi abordate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 2, 1969, P. 481—490

METODE DE ANALIZĂ ALE UNOR FACTORI AI PROCESULUI DE FRECARE

I. Topografia suprafeței :	— metoda vîrfului ;
	— microscopie optică : lumină directă ; cîmp întunecat ; contrast de fază ; interferență ;
	— secțiuni înclinate ;
	— microscopie electronică.
II. Structura suprafeței și a straturilor :	— difracție de raze X ;
	— difracție de electroni.
III. Uzură-pierdere și transfer de material :	— gravimetrie ;
	— măsurarea dimensiunilor ;
	— metode radiometrice ;
	— autoradiografie ;
	— spectroscopie optică ;
	— sondă de raze X.
IV. Forța de frecare :	— dinamometrie tensoelectrică.
V. Grosimea peliculei :	— metode inductive, capacitive (grosimi mari) ;
	— rezistive (grosimi mici) ;
	— cu radiații.
VI. Temperatura de suprafață :	— termocuple ;
	— termocuplu natural.
VII. Mediul :	— tehnica obținerii substanțelor pure ;
	— tehnica vidului ultraînalt.

I. TOPOGRAFIA SUPRAFEȚELOR

Comportarea la frecare a două suprafețe este mult influențată de microgeometria și de microstructura elementelor cuplei de frecare. Pentru analiza geometriei sau a microstructurii există numeroase metode care se completează reciproc.

Metoda vîrfului. Pentru determinarea stării de rugozitate se folosesc în prezent pe scară largă profilometrele (profilografele) cu vîrf ascuțit. Folosind traductoare și amplificatoare electronice, tipurile recente de asemenea aparate asigură amplificări pe verticală pînă la 10 000 sau mai mult. De asemenea, cu ajutorul unor circuite electronice corespunzătoare, se obțin direct valori caracteristice ale profilului R_a sau R_z. Posibilitățile acestei metode sînt limitate de raza de curbură minimă a vîrfului palpator (cuprinse între 0,007 și 0,0007 mm). Metoda prezintă inconvenientul că măsoară rugozitatea pe o singură direcție. De asemenea, în cazul suprafețelor moi se produce o alterare a profilului, cauzată de vîrful palpator [1].

De multe ori obținerea unei profilograme este însoțită de o imagine microfotografică.

Microscopia optică este cea mai răspîndită metodă de analiză a suprafețelor. Microscopul metalografic prin reflexie, cu mărime utilă pînă la 1 500 x, permite studiul structurii metalografice a suprafețelor. Pentru punerea în evidență a microstructurii, de cele mai multe ori este necesară atacarea suprafeței cu reactivi. Posibilitățile de observare în condiții bune

a suprafeţelor atacate sau a urmelor de uzură depinde de profunzimea microscopului. Profunzimea este, într-o anumită măsură invers proporţională cu deschiderea numerică a obiectivului şi cu mărirea. Pentru folosirea măririlor mari sînt necesare suprafeţe cu denivelări reduse, fapt care limitează utilizarea microscopiei optice pentru investigarea suprafeţelor puternic deteriorate prin uzare.

Folosirea tehnicii secţiunilor înclinate şi a microscopiei optice permite obţinerea unor indicaţii utile privind microgeometria suprafeţei, a structurii metalografice şi a modificărilor suferite de aceasta în zona superficială [2].

Alături de microscopia clasică (prin reflexie şi iluminare perpendiculară), în ultimul timp au început să fie utilizate pentru analiza suprafeţelor şi unele metode optice speciale : iluminarea pe cîmp întunecat, contrast de fază, metode interferenţiale. Metoda cîmpului întunecat foloseşte pentru obţinerea imaginii numai razele difractate. Lumina directă care loveşte suprafaţa sub un unghi foarte mare nu poate pătrunde în obiectiv. Metoda este avantajoasă în cazul suprafeţelor rugoase sau al corpurilor transparente.

În figura 1[3] este redată imaginea, obţinută prin această metodă a unei suprafeţe de safir uzată. În lumină perpendiculară contrastul este mult redus.

Microscopia interferenţială realizează, prin diferite procedee, franjuri de interferenţă, a căror formă este determinată de profilul suprafeţei. În funcţie de procedeul folosit pentru obţinerea razei directe şi reflectate se obţin rezoluţii pe verticală de ordinul sutimilor de micron pînă la zeci de angstromi. Pe orizontală, rezoluţia este aceeaşi ca la microscoapele obişnuite. Principalul avantaj al metodei este posibilitatea de a observa microgeometria unor suprafeţe şi nu numai profilul pe o direcţie.

În figura 2 [4] sînt arătate pentru comparaţie imaginile obţinute prin această metodă ale unei suprafeţe de aluminiu finisate mecanic sau polizate electrolitic. Este clar că cu ajutorul unui profilograf este greu să se obţină o diferenţiere netă între geometriile celor două suprafeţe. Metoda permite deci o apreciere globală a stării de suprafaţă, posibilitate deosebit de importantă cînd se urmăreşte influenţa microgeometriei. S-a observat prin această metodă că, folosind acelaşi procedeu de prelucrare a suprafeţei, microgeometria „globală" poate varia de la o piesă la alta. Dacă suprafaţa este prea rugoasă, imaginea de interferenţă nu mai poate fi folosită.

Un alt procedeu, prin contrast interferenţial [5], [6] (Normarski), permite vizualizarea diferenţelor de nivel de ordinul zecilor sau sutelor de angstromi fără a recurge la franjuri de interferenţă.

În figura 3 [5] este reprodusă imaginea unei lame de grafit, pe care se pot observa (şi măsura exact) diferenţe de nivel de 50 Å.

Metoda contrastului de fază realizează o mărire a contrastului imaginii pentru corpuri care au componenţi cu transparenţe apropiate, însă cu indici de refracţie diferiţi. Metodă de mare folos în biologie, a fost folosită şi în studierea suprafeţelor, permiţînd observarea unor componenţi greu vizibili în lumină normală (de exemplu incluziuni de abraziv în suprafaţă).

În figura 4 sînt arătate două imagini ale aceleiaşi suprafeţe : una obţinută în lumină normală, cealaltă prin metoda contrastului de fază [4].

Microscopia electronică. Folosirea unui fascicul de electroni de energie medie, care pot fi uşor deviaţi cu ajutorul cîmpului electric sau magnetic, permite obţinerea unei rezoluţii curente de 10—15 Å şi o putere de mărire de 100 000 de ori (sau mai mult).

În funcţie de modul de explorare a obiectului, există trei procedee de investigare a suprafeţelor :

— microscopia prin transmisie, cea mai perfecţionată, care necesită secţiuni subţiri sau utilizarea replicei ;

— microscopia prin reflexie, la care fasciculul de electroni explorează suprafaţa sub un unghi foarte ascuţit. Deşi puterea de rezoluţie este mai mică decît la primul tip, procedeul se foloseşte totuşi în studiul suprafeţei datorită posibilităţilor care le oferă punerea în evidenţă a microgeometriei (fig. 5 şi 6) [2], [4] ;

— microscopia prin emisie, care foloseşte pentru formarea imaginii electroni emişi de suprafaţa metalică. Cel mai utilizat microscop în metalurgie rămîne totuşi microscopul prin transmisie cu lentile electromagnetice, iar ca metodă de obţinere a imaginii metoda replicii.

Procedeul folosit la obţinerea replicii trebuie ales cu deosebită grijă, deoarece replica conţine toate informaţiile referitoare la suprafaţă ; tratarea necorespunzătoare poate conduce la deformarea ei şi la obţinerea unei imagini alterate.

Replica poate fi confecţionată din diferite materiale : polimeri organici, depuşi din soluţie ; carbon sau bioxid de siliciu, depus prin evaporare ; metale cu structură foarte fină, depuse prin evaporare ; oxizi, detaşaţi de pe suprafaţa metalică prin procedee chimice sau electrochimice. Cea mai frecventă replică este cea de carbon, detaşată prin atac chimic. Deoarece replica acţionează asupra fasciculului de electroni prin atenuare, iar diferenţele de grosime pe suprafaţă sînt mici, şi contrastul va fi redus. Pentru mărirea contrastului se foloseşte metoda umbririi replicii cu un metal cu un număr atomic mare. Grosimea metalului depus şi unghiul sub care se depune permit realizarea unor contraste variabile şi determinarea cotelor pe verticală. Spre deosebire de microscopul optic, deschiderea numerică a obiectivului microscopului electronic este redusă, ceea ce permite realizarea unei profunzimi mari. Acest lucru este deosebit de important în cazul suprafeţelor rugoase, unde există posibilitatea obţinerii unei clarităţi sporite. În figura 6 [4] este arătată imaginea unei urme de uzură în care se poate constata profunzimea realizabilă cu microscopul electronic. Microscopia electronică poate aduce contribuţii importante şi la cunoaşterea stării de suprafaţă.

Alături de această metodă se utilizează în anumite cazuri şi microscopia de transmisie. Folosind acest procedeu, s-au putut studia în detaliu forma şi distribuţia particulelor de uzură şi structura unsorilor consistente. Folosind tehnica straturilor subţiri şi a straturilor duble, se poate pune în evidenţă în unele cazuri şi structura internă a anumitor substanţe. Această metodă a fost folosită pentru evidenţierea structurii lamelare a unor lubrifianţi (fig. 7) [2].

Plecînd de la procedeele dezvoltate în microscopia electronică, s-a dezvoltat procedeul replicii pentru suprafeţe mai mari [4], [7]. Avantajele principale ale metodei sînt : posibilitate de observare a stării suprafeţei în locuri inaccesibile pentru observarea directă sau imposibil de adus pe

Fig. 1.— Imaginea unei suprafețe de safir uzate obținută prin metoda cîmpului întunecat [3].

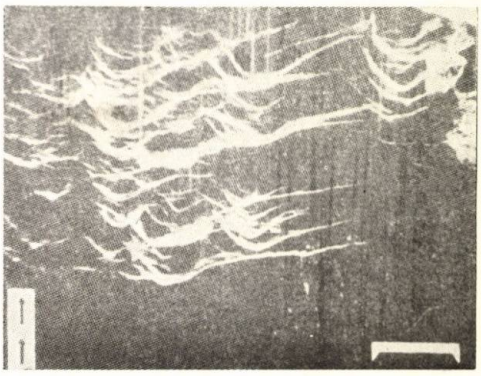
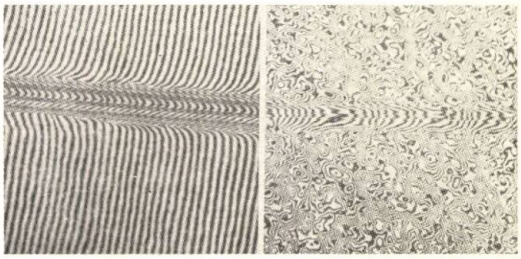
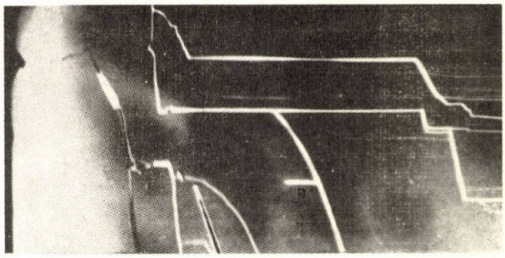


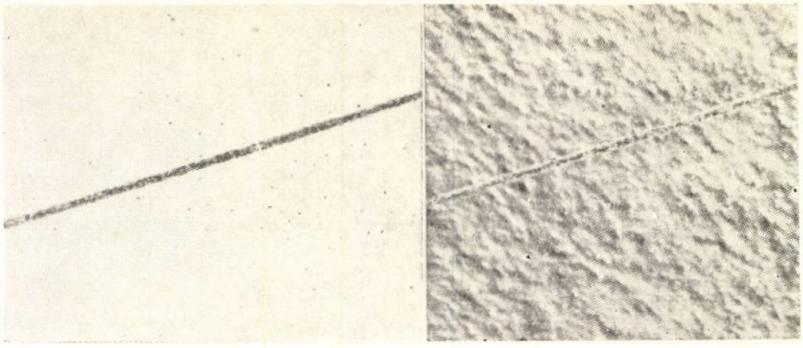
Fig. 2. — Imaginea unei suprafețe de aluminiu obținută cu ajutorul microscopului interferențial : *a* — suprafață prelucrată mecanic (× 50) [4] ; *b* — suprafață finisată electrolitic.



a *b*

Fig. 3. — Imaginea unei lame de grafit obținută prin procedeul de contrast interferențial (× 1350) [5].





a *b*

Fig. 4. — Imagini ale unei suprafețe de aluminiu obținute prin iluminare normală (*a*) și prin contrast de fază (*b*) (× 75) [4].

Fig. 5. — Imaginea electronică (reflexie) a unei suprafețe de cupru uzate (mărire orizontală × 1120; mărire verticală × 5600) [2].

Fig. 6.— Imaginea urmei de uzare pe o bilă din oțel obținută la microscopul electronic (× 7 500) [4].

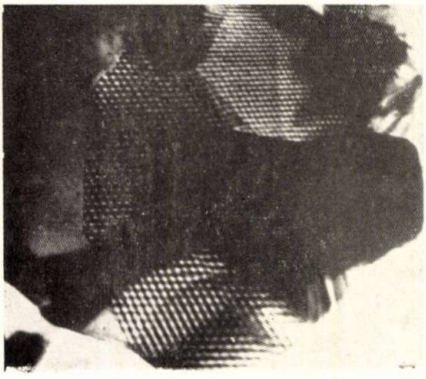


Fig. 7. — Imaginea electronică a nitrurii de bor obținută prin transmisie (× 27 000) [2].

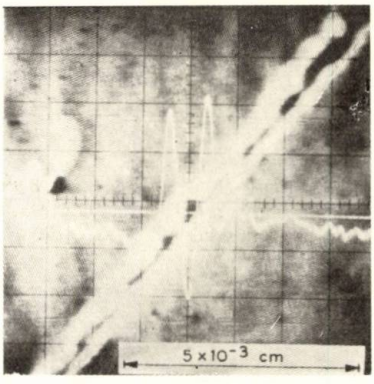


Fig. 10.— Imaginea electronică a unei suprafețe de cobalt obținută folosind curentul transmis. Se observă atît urma de uzare, cît și profilul stratului de cobalt [17].

masa microscopului; eliminarea efectului curburii asupra clarităţii imaginii (la fotografiere replica se aduce în stare plană); posibilitatea de fixare şi de observare a produselor de uzură rămase pe suprafaţa de lucru. Majoritatea acestor produse se desprind din suprafaţă şi trec în replică.

II. STRUCTURA SUPRAFEŢEI ŞI A STRATURILOR SUBŢIRI

Pentru analiza structurii straturilor subţiri aderente la suprafeţe, straturi care au o mare importanţă în procesul de frecare şi de uzare, se poate folosi difracţia de raze X şi difracţia de electroni. Folosirea tehnicii obişnuite pentru obţinerea imaginii de difracţie în cazul razelor X nu este posibilă datorită puterii mari de pătrundere ale acestora. Reducerea energiei de asemenea nu este posibilă sub orice limită, deoarece, conform legii lui Bragg, este necesară o anumită lungime de undă. Totuşi, dacă se foloseşte un unghi de incidenţă mic, astfel încît fasciculul de raze să străbată un drum cît mai lung în stratul studiat, se pot obţine imagini de difracţie satisfăcătoare. În acest mod s-a putut determina structura unui strat de reacţie format pe suprafaţa unei picături de mercur trimiţînd un fascicul paralel de raze X tangent la suprafaţă [8]. În cazul unui acid gras s-a constatat formarea de straturi monomoleculare suprapuse, moleculele fiecărui strat fiind orientate perpendicular pe suprafaţa metalică. Difracţia de raze X a fost folosită de asemenea şi pentru studiul influenţei procesului de polizare asupra stării de suprafaţă. Folosirea radiaţiilor X este indicată, totuşi, în special pentru straturi groase, polimoleculare.

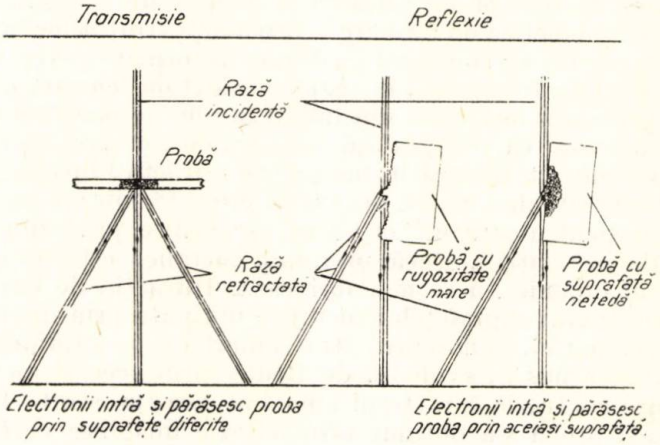


Fig. 8. — Procedee folosite în difracţia electronică [9].

O metodă mult mai eficientă în cazul suprafeţelor utilizate în studiul frecării şi uzării este difracţia de electroni [9]. Parcursul electronilor pentru energii mijlocii este de cîteva sute de straturi atomice, care este tocmai zona care participă direct la procesul de frecare. Se folosesc de obicei electroni cu lungime de undă între 0,05 şi 0,07 Å (U_a = 40 000 V). Proba este examinată prin transmisie sau prin reflexie (fig. 8) [9].

De o mare importanţă pentru obţinerea unor imagini bune este pregătirea suprafeţei. Procedeul de pregătire trebuie să fie adaptat naturii stratului studiat. Folosirea unui procedeu necorespunzător va conduce la modificarea structurii stratului. Din analiza imaginii de difracţie se pot obţine informaţii asupra gradului de ordonare a stratului şi chiar a compoziţiei chimice a stratului cristalin.

Iniţial au fost efectuate studii asupra straturilor de acizi graşi sau săruri ale acizilor graşi depuşi după metoda lui Langmuir. S-a confirmat şi prin această metodă orientarea perpendiculară a moleculelor în raport cu suprafaţa metalică. Pentru a realiza condiţii mai apropiate de realitate, straturile de acizi graşi au fost obţinute prin înmuierea unor probe de metal polizate în soluţii de acizi graşi în hexadecan pur [10]. S-a constatat în acest caz că imaginea de difracţie este cu atît mai netă, cu cît concentraţia substanţei active este mai mare. De exemplu, concentraţia de 0,001% nu dă imagine de difracţie; la 0,01% se obţine o imagine difuză, iar la 0,05% se obţine o imagine clară. De asemenea, rugozitatea suprafeţei afectează claritatea imaginii obţinute.

Au fost efectuate şi studii comparative folosind diferite uleiuri comerciale, iar rezultatele obţinute cu ajutorul difracţiei de electroni au fost comparate cu rezultatele obţinute cu aceleaşi uleiuri cu o maşină de încercat uzuală. S-a constatat că uleiurile care determinau formarea unui strat orientat pe suprafaţă asigurau cea mai eficace protecţie a suprafeţei. Există unele cazuri însă în care stratul protector nu dă o imagine de difracţie. Este cazul stratului format în prezenţa naftenatului de plumb şi a sulfului (aditivi pentru angrenaje hipoide).

Folosirea metodelor de difracţie a permis de asemenea efectuarea de studii privind cinetica de formare şi rezistenţa straturilor faţă de diferiţi agenţi. De exemplu, s-a constatat că durata de formare a stratului se poate prelungi de la circa 10 minute, în cazul suprafeţelor curate, pînă la cîteva ore dacă suprafaţa a fost înmuiată iniţial în ulei de parafină pur. De asemenea s-a constatat că o suprafaţă metalică de fier proaspăt obţinută în condiţiile existente în incinta instalaţiei de difracţie, furnizează imaginea corespunzătoare fierului α. În decurs de circa 15 minute apare imaginea caracteristică pentru straturi organice (provenite prin migraţiune din alte părţi ale instalaţiei). Dacă suprafaţa metalică este obţinută în aer, atunci stratul organic nu se mai formează. Difracţia de electroni a fost folosită şi la studiul suprafeţelor metalice obţinute prin diferite procedee de prelucrare. Astfel, cunoscutul strat amorf de pe suprafeţele metalice rectificate a fost pus în evidenţă de Beilby prin aceeaşi metodă. Există cercetări care contrazic caracterul amorf al acestui strat. De exemplu, pentru aceeaşi probă s-a obţinut prin reflexie imaginea corespunzătoare stării amorfe, iar prin transmisie cea corespunzătoare stării cristaline.

Din exemplele de mai sus rezultă complexitatea proceselor care au loc la suprafeţele metalice şi capacitatea metodei de difracţie de electroni de a discerne între diferitele stări.

Metoda difracţiei de electroni reprezintă un puternic instrument pentru controlul direct al stării de suprafaţă, condiţie esenţială pentru efectuarea unor studii fundamentale eficiente în domeniul frecării solidelor.

III. UZURA

Folosirea radioizotopilor şi a analizei spectrale îm studiul uzării. Deoarece în procesele de uzare are loc un transport de masă de la o suprafaţă la altă suprafaţă sau de la suprafaţă la lubrifiant, iar masa deplasată este mică, metoda trasorilor radioactivi este deosebit de indicată pentru studiul acestor procese [11], [12].

Metoda prezintă numeroase avantaje, care sînt o consecinţă a sensibilităţii mari a traductoarelor de radiaţii şi a posibilităţii de măsurare continuă. Sensibilitatea metodei cu radioizotopi poate fi teoretic oricît de mare. Acest fapt a permis studierea proceselor de scurtă durată inaccesibile prin alte metode. S-a reuşit, de exemplu, să se pună în evidenţă uzura provocată de o pornire la rece sau de schimbare a vitezei la un motor cu combustie internă [13]. Totuşi, metoda trasorilor radioactivi utilizată în studiul uzurii prezintă unele limitări, legate de precizia măsurătorilor [14], de activarea pieselor, de protecţie şi de costul cercetării. Din această cauză, în unele cazuri, de exemplu în studiul uzurii pieselor de maşini lubrifiate, metoda de analiză spectrală poate concura într-o anumită măsură cu metoda cu radioizotopi [15]. Sensibilitatea detectării metalului în ulei în acest caz este cuprinsă între $1 : 10^{-6}$ şi $1 : 10^{-8}$, în funcţie de metal, volumul necesar de ulei pentru analiză fiind redus la 1 cm^3. Această sensibilitate este suficientă pentru a detecta uzura după cîteva ore de funcţionare. Un avantaj important al metodei de analiză spectrală este faptul că se poate urmări uzura în mai multe puncte simultan, urmărind diferite elemente de aliere ale pieselor respective (arbore, lagăr, cilindru, segmenţi).

Microsondă electronică. Un instrument de analiză a suprafeţei cu mari posibilităţi este microsonda electronică. În principiu, metoda furnizează informaţii despre suprafaţa studiată analizînd diversele radiaţii (sau curenţi) care rezultă prin bombardarea acesteia cu un fascicul de electroni (fig. 9) [16].

Dacă pentru analiza radiaţiei X emergente se foloseşte un spectrometru, atunci este posibilă determinarea compoziţiei calitative şi cantitative a suprafeţei. Puterea de rezoluţie este determinată de dimensiunile petei focale, care în cazul folosirii opticii electronice poate ajunge pînă la fracţiuni de microni. Ataşînd un microscop optic pentru cercetarea probei, este posibilă şi determinarea compoziţiei componenţilor metalografici. Dacă proba analizată îndeplineşte condiţiile de strat subţire, atunci metoda permite determinarea cantităţii totale a elementelor dintr-o suprafaţă. O posibilitate cu totul inedită oferită de această metodă este microscopia analitică, adică obţinerea unei imagini a distribuţiei diferitor elemente în suprafaţă. Imaginea se obţine pe un tub catodic a cărui luminozitate este modulată de intensitatea măsurată de spectrometru. Baleiajul suprafeţei de analizat de către spotul electronic este sincronă cu baleiajul tubului catodic. Fineţea spotului primar şi posibilităţile oferite de circuitele electronice anexe asigură realizarea unor microfotografii pe elemente de aceeaşi mărire, ca şi cele obţinute la microscopul optic.

Pentru studiile de uzură, metoda prezintă un mare interes atît pentru controlul suprafeţelor, cît şi pentru studiul transferului de material sau uzura straturilor subţiri. Este posibilă determinarea cu mare precizie

a profilului urmei de uzură a compoziţiei şi distribuţiei materialului transferat [17].

În figura 10 este redată imaginea obţinută folosind curentul transmis unei suprafeţe de cobalt pe care există o urmă de uzură. Dacă se foloseşte

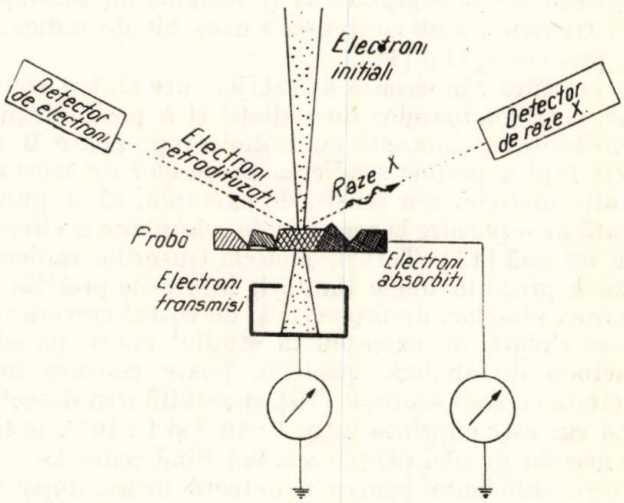


Fig. 9. — Diferitele posibilităţi de analiză ale unei suprafeţe în cazul microsondei electronice [16].

linia $K\ \alpha$ a cobaltului, atunci se poate determina cu precizie profilul urmei de uzare.

Microsonda electronică împreună cu microscopia electronică şi cu procedeul de difracţie de electroni au suficiente elemente comune care să permită realizarea de instalaţii complexe. De exemplu, se fabrică în prezent microscoape electronice cu instalaţii auxiliare, care permit transformarea lor în microanalizoare sau în aparate de difracţie.

Trebuie subliniat că folosirea acestor procedee nu este simplă, ele necesitînd personal de deservire specializat şi permanent. Posibilităţile pe care le oferă însă compensează cu prisosinţă efortul necesar pentru procurare şi exploatare.

V. GROSIMEA PELICULEI

În cazul cuplelor lubrifiante, prezenţa peliculei de lubrifiant are o mare importanţă pentru funcţionarea optimă a acestora. Metodele de determinare experimentală sînt condiţionate de valoarea absolută a grosimii.

Metode inductive, capacitive. În cazul grosimilor mari (lagăre în funcţionare) se pot folosi micrometre inductive, capacitive sau pneumatice. Dificultăţile principale întîmpinate la folosirea acestor metode sînt legate de miniaturizarea traductorilor şi de folosirea uneia dintre suprafeţele cuplei ca suprafaţă de referinţă. Folosind traductoare inductive, care pot

alimenta direct instrumentul de măsură, plasate pe generatoarele cuzinetului, s-a realizat o metodă comodă pentru determinarea poziţiei centrului fusului în anumite condiţii [18]. Pentru a obţine însă rezultate concludente şi în concordanţă cu teoria, este necesar să se acorde o atenţie deosebită eliminării diferitelor surse de erori : rigiditatea fixării traductoarelor în cuzinet, rigiditatea montării cuzinetului faţă de încărcare,

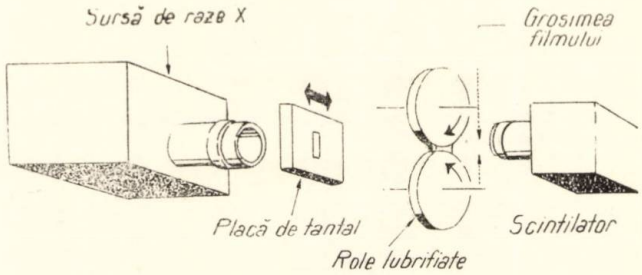


Fig. 11. — Instalaţie pentru determinarea grosimii peliculei de lubrifiant în cazul rolelor [22].

legătura suplimentară introdusă la încărcarea cuzinetului, efectul deformaţiilor datorită variaţiei de temperatură şi altele.

Metode rezistive. Pentru determinarea grosimilor mici întîlnite în regim metahidrodinamic se foloseşte dependenţa unei mărimi de grosimea peliculei, ca, de exemplu, rezistenţa electrică a peliculei sau transparenţa la radiaţii. În cazul măsurătorilor de rezistenţă electrică, există mai multe variante, care toate necesită o etalonare pentru determinarea valorii absolute a grosimii şi unele studii pentru interpretarea corectă a rezultatelor. Cea mai simplă metodă este măsurarea rezistenţei electrice cu ajutorul unui circuit adecvat şi al unui oscilograf. Grosimea peliculei în condiţii date va fi direct proporţională cu rezistenţa măsurată. Un dezavantaj al metodei este variaţia foarte mare a rezistenţei măsurate, de zero la valori foarte mari, deoarece uleiurile lubrifiante sînt în general izolanţi electrici. Totuşi, metoda poate fi folosită la studiul factorilor care influenţează regimul de ungere [19]. Pentru a reduce amplitudinea fluctuaţiilor valorilor măsurate şi pentru a fixa rezistenţa specifică a uleiului la o anumită valoare, s-a introdus în ulei un aditiv cu conductibilitate electrică. În acest fel se poate ajusta instrumentul de măsură pe domeniul de grosimi care urmează să fie măsurat [20].

O altă posibilitate de măsurare a grosimii peliculei este folosirea „tensiunii de descărcare", care pentru un ulei dat nu depinde decît de grosimea peliculei şi este independent de curent. Şi în acest caz apar unele efecte perturbatoare, datorită impurităţilor solubile sau suspensiilor din ulei. Cunoscînd tensiunea de descărcare pentru un anumit ulei, se poate măsura grosimea peliculei în orice cuplă de frecare. Metoda a fost folosită în special pentru măsurarea peliculei la cuplele cu sarcină concentrată [21].

Metode cu radiaţii. Deoarece rezistenţa electrică a peliculei este funcţie de mai mulţi factori într-o anumită măsură greu de controlat, s-a recurs la atenuarea radiaţiilor X pentru măsurarea distanţei dintre două role în rotaţie lubrifiate [22]. Instalaţia utilizată este cea arătată în figura 11.

Dacă se alege energia radiației X suficient de redusă, astfel încît adsorbția în corpul metalic al rolelor să fie importantă, atunci se poate obține o dependență convenabilă între intensitatea radiației în spatele rolelor și grosimea peliculei de lubrifiant. Dacă se folosește o cuplă de frecare cu un element transparent, metoda de interferență optică poate fi folosită de asemenea la determinarea grosimii straturilor subțiri de lubrifiant.

BIBLIOGRAFIE

1. R. G. Quiney, și colab., *The Measurement of Surface Roughness and Profiles on Metals*, ASLE Transactions, *2* (1967).
2. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford at the Clarendow Press.
3. E. J. Duwell, H. C. Butzke, *Microscopical observation of wear surfaces on sapphire*, J. Appl. Physics, nov. 1964.
4. L. Grünberg și colab., *The investigation of surface deformation*, Brit. J. of Appl. Physics, *4* (1961).
5. R. H. Savage, *The membrau character of graphite : Wear implications*, Wear, *5* (1967).
6. R. Courtel, *Sur l'observation de certains dommages periodiques causés aux surfaces par le frottement et leur interpretation*, Comptes Rendus des Seances de l'Académie de Sciences, *253*, 14 (1961).
7. F. Hanisch, *Procedés d'empreinte pour l'examen des surfaces*, Energie fluide et lubrification, dec., 1967.
8. R. Brill, *X-Ray and Electron-difraction Studies of Lubricating Surfaces*, Ann. N. Y. Acad. of Sciences, **53**, 4 (1951).
9. Douglas Godfrey, *Electron Diffraction in Lubrication Research*, Lubric. Eng., nov. 1957.
10. R. C. French, *Polish on Metals*, Nature, *129*, 169 (1932).
11. L. Wagner, *Die Anwendung von Radionukliden für Verschleiss — und Schmierunter suchungen*, Isotopenpraxis, *3* (1968).
12. E. P. Diacenko, *Primenenie radioactivnik izotopov v tehnike*, Moscova, Mașghiz, 1958.
13. J. K. Deterding, J.R.B. Colow, *Radioizotopes Measure of Engine Wear*, Atomics and Nuclear Energy, *9*, 312—315 (1958).
14. D. Pavelescu, *Cu privire la erorile de măsură și ponderea acestor erori în cazul studiului uzurii cu izotopi radioactivi*, St. cerc. mec. apl., *3* (1963).
15. J. Jaspert, A. Renter, *Verschleismessungen an Verbrennungsmotoren mit radioactiven Isotopen und mit hilfe der Spectralanalyse*, M.T.Z., mai 1960.
16. J. J. Trillat, *La Microsonde electronique et ses applications a l'etude et a l'analyse de materiaux*, Nucleus, *6* (1966).
17. H. R. Potts, *Electron Microprobe Study of Wear Involving thin Sections*, Wear, *3* (1966).
18. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Metode pentru măsurarea grosimii filmului de lubrifiant la lagăre circulare*. St. cerc. mec. apl., *5* (1961).
19. D. Pavelescu, *Aspecte ale evoluției uzurii în frecarea-limită și semifluidă în legătură cu caracterul statistic al fenomenului și al metodei de măsură*, teză de doctorat, 1967.
20. S. I. El-Sisi, G.A. Shawki, *Measurement of Oil-Film, Thichness Between Disks by Electrical Conductivity*, Transactions of the ASME, Serie D, martie 1960.
21. I. O. Mac Conochie, A. Cameron, *The measurement of Oil-Film Thickness in Grear Teeth*, Transactions of the ASME, Serie D, martie 1960.
22. J. W. Kannel, *Elasto-Hidrodynamic Lubrication*, Battelle Technical Review, nov. 1963.

RECENZII

Symposium on reinforced concrete columns (Simposion asupra stîlpilor de beton armat), Special Publication, No 13, American Concrete Institute, Detroit, 1966, 377 p.

Volumul cuprinde 14 lucrări, în care se prezintă rezultate ale studiilor teoretice şi experimentale consacrate îmbunătăţirii calculului stîlpilor de beton armat şi de beton precomprimat. O atenţie specială este acordată efectului zvelteţei asura comportării acestor elemente de construcţie.

În lucrarea *Stîlpul de beton armat în perspectivă* de M. A. Sozen, B. B. Broms, I. Martin şi R. Diaz de Cossio se prezintă stadiul actual al teoriei şi al comportării stîlpilor de beton armat şi se trasează principalele obiective ale cercetărilor viitoare în acest domeniu.

Lucrarea *Privire critică asupra calculului stîlpilor de beton armat* de I. Martin, J. G. MacGregor, E. O. Pfrang şi J. E. Breen cuprinde o comparaţie critică a prevederilor regulamentului pentru calculul elementelor de beton armat, elaborat de Institutul american pentru beton în 1963, cu cele ale recomandărilor Comitetului european pentru beton, elaborate în 1964.

În lucrarea *Încercări pe cadre cu stîlpi încovoiaţi într-un singur sens* de R. W. Furlong şi P. M. Ferguson se arată că stîlpii, care fac parte dintr-un cadru ale căror deformate nu au puncte de inflexiune, posedă o capacitate portantă cu 5—15% mai mare decît cea a stîlpilor izolaţi.

Influenţa forţelor orizontale şi efectul de durată al sarcinilor asupra capacităţii portante a stîlpilor de beton armat sînt studiate în lucrarea *Studiul stîlpilor de beton armat ai cadrelor solicitate de sarcini orizontale* de P. M. Ferguson şi J. E. Breen.

În lucrările *Încercări pe stîlpi zvelţi de beton armat încovoiaţi în două sensuri* de I. Martin şi E. Olivieri şi *Stîlpi svelţi de beton armat comprimaţi excentric în două sensuri* de J. G. MacGregor şi S. L. Barter se prezintă comportarea a 14 stîlpi de beton armat solicitaţi de forţe axiale şi de momente încovoietoare de acelaşi sens, aplicate la capetele lor.

Reguli practice pentru calculul la stabilitate a stîlpilor zvelţi de beton armat sînt date în lucrarea *Capacitatea portantă a stîlpilor zvelţi comprimaţi excentric* de A. L. Parme.

Rezultatele experimentale cuprinse în lucrarea *Efectul distanţei dintre etrieri asupra capacităţii portante a stîlpilor de beton armat* de F. M. Hudson arată că eventuale erori în stabilirea şi respectarea distanţei dintre etrieri nu afectează sensibil capacitatea portantă a stîlpilor.

În lucrarea *Stîlpi de beton armat cu secţiunea variabilă comprimaţi excentric* de L. Riad se studiază capacitatea portantă a stîlpilor cu secţiunea variind în trepte.

Stîlpii comprimaţi excentric în raport cu două axe perpendiculare între ele sînt studiaţi experimental în lucrarea *Cercetarea rezistenţei stîlpilor cu secţiunea pătrată şi dreptunghiulară solicitaţi la compresiune excentrică pe două direcţii* de L. N. Ramamurthy.

În studiul *Efectul curgerii lente şi contracţiei asupra capacităţii portante a stîlpilor de beton armat* de S. P. Mauch se arată că curgerea lentă poate avea ca efect micşorarea pînă la 50% a sarcinii de pierdere a stabilităţii stîlpilor de beton armat, în timp ce efectul contracţiei este neînsemnat.

Determinarea deformatei stîlpilor zvelţi de beton precomprimat şi studiul efectului acesteia asupra capacităţii portante a stîlpilor fac obiectul lucrării *Calculul la stabilitate a stîlpilor de beton precomprimat comprimaţi excentric* de A. P. Kabaila şi A. S. Hall.

Efectul mărimii forţei de precomprimare asupra capacităţii portante a stîlpilor de beton precomprimat solicitaţi centric şi excentric este studiat în lucrarea *Încercări pe stîlpi zvelţi de beton precomprimat* de H. R. Brown şi H. S. Hall.

În studiul *Efectul solicitării triaxiale asupra capacităţii portante a elementelor de beton armat* de E. Ben-Zvi, G. Muller şi I. Rosenthal se arată influenţa precomprimării circumferenţiale asupra stîlpilor circulari de beton precomprimat.

Lucrările cuprinse în acest volum se ocupă cu aspecte fundamentale ale calculului și comportării stîlpilor din construcțiile moderne de beton armat și de beton precomprimat. Studierea lor este utilă atît cercetătorilor, cît și inginerilor care se ocupă cu proiectarea unor astfel de structuri.

V. Petcu

D. J. JOHNS, *Thermal stress analyses*, Oxford-Londra-Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt, Pergamon Press, 1965, 211 p.

În ultimul timp, studiul problemelor de termoelasticitate a constituit obiectul unor aprofundate investigații. Monografia *Thermal stress analyses* se încadrează în această categorie de preocupări și, mai mult decît atît, se numără printre puținele tratate dedicate exclusiv acestei probleme deosebit de actuale.

Varietatea materialului abordat reiese din simpla trecere în revistă a titlurilor celor opt capitole care constituie monografia.

Primul capitol este consacrat formulării problemelor generale, fundamentale de termoelasticitate; cel de-al doilea formulării soluțiilor problemelor bidimensionale; al treilea problemei stării de tensiune de întindere termică în plăcile plane; al patrulea stării de tensiune de încovoiere în plăcile plane; al cincilea tensiunilor termice în bare și cilindrii circulari; al șaselea problemei termoelastice a învelitorilor; al șaptelea flambajului termic; al optulea problemelor de proiectare a structurilor supuse la sarcini termice.

Lucrarea se încheie cu o anexă consacrată problemei transferului de căldură în structuri și cu o bogată bibliografie, incluzînd titlurile lucrărilor apărute în acest domeniu pînă în 1963.

Varietatea problemelor abordate și claritatea expunerii fac ca această monografie să poată fi deosebit de utilă tuturor celor ce se preocupă de aceste probleme.

L. Librescu

E. F. HUMPHREY și D. H. TARUMOTO, *Fluidics, Fluid amplifier associates*, Boston, Mass., 1965, 268 p + 237 fig.

Editată în 1965, lucrarea reprezintă una dintre puținele încercări de a sistematiza bogatul material existent pînă la acea dată într-unul din cele mai noi domenii, „fluidica". Date fiind aplicațiile care se prevăd în viitor pentru elementele de amplificare și de fluid fără părți mobile, cunoașterea lor este necesară atît specialiștilor care lucrează în automatică, cît și acelora din aerodinamică.

Lucrarea de față face o introducere în acest domeniu, prezentînd cîteva aspecte legate de principiile care stau la baza funcționării elementelor de amplificare cu fluid, fabricarea și aplicațiile lor.

Prima parte a lucrării se ocupă cu descrierea tipurilor de amplificatori cu fluid, arătîndu-se fenomenele aerodinamice care stau la baza funcționării lor. Sînt menționate principalele caracteristici care definesc calitățile amplificatorului cu fluid, precum și anumite performanțe în legătură cu acestea. Sînt arătate avantajele și dezavantajele pe care aceste elemente le au față de dispozitivele clasice pneumatice folosite curent în automatică.

În partea a doua, autorii tratează cîteva probleme legate de fabricarea amplificatorilor cu fluid. Sînt examinate particularitățile care apar în proiectarea elementelor cu fluid pentru diferite aplicații industriale.

În capitolul privind materialele care pot fi folosite la fabricarea elementelor cu fluid se face analiza proprietăților pe care metalele, materialele plastice și ceramice le au din punctul de vedere a rezistenței mecanice, chimice și termice, în strînsă legătură cu prețul de cost.

În capitolul următor sînt examinate diferitele tehnologii de fabricație a elementelor cu luid, scoțîndu-se în evidență aspectul economicității care determină prețul de cost pe element.

În partea a treia, acordîndu-se o deosebită importanță utilizării elementelor cu fluid în automatizare și control, în comanda mașinilor-unelte, în echipamentul navelor cosmice și al rachetelor, în tehnica medicală și maritimă, autorii discută și aspectul financiar al problemei. Astfel utilizarea noilor elemente trebuie să asigure o mai mare economicitate față de elementele clasice cunoscute în prezent, mergînd pînă la înlocuirea lor.

Ultima parte prezintă rezumativ principalele probleme cuprinse în lucrare, scoțîndu-se încă o dată în evidență aspectele mai importante legate de performanțele diferitelor tipuri de amplificatori, proiectare, fabricare, aplicații și posibilități de desfacere.

Lucrarea cuprinde în final un apendix tehnic în care se reiau în discuție cîteva tipuri de amplificatori cu fluid, încercîndu-se o analiză matematică în studiul acestora; ea reușește să scoată în evidență problemele importante legate de adaptabilitatea amplificatorilor cu fluid în diferite circuite fluidice. Prezentarea tipurilor de amplificatori este făcută în mod critic, scoțîndu-se în evidență performanțele care le fac utilizabile în diferite aplicații și dîndu-se astfel indicii în proiectarea circuitelor în componența cărora intră acești amplificatori.

Volumul se adresează inginerilor, studenților și tuturor specialiștilor care se interesează de acestă nouă tehnică, punîndu-le la dispoziție un material introductiv necesar documentării.

P. V. Marinescu

CHARLES O. HELLER, *Dictionary of engineering mechanics Russian-English* (Dicționar de inginerie mecanică, rus-englez), Amsterdam—Londra—New York, Elsevier Publishing Company, 1965.

Dicționarul, de dimensiuni mici, conține termenii tehnici din limba rusă și traducerea lor în limba engleză pentru principalele ramuri ale ingineriei mecanice. Specialitățile incluse în dicționar sînt aeromecanica, elasticitatea, mecanica fluidelor, plasticitatea, mecanica rigidelor, teoria structurilor și vibrațiile. Din restul volumului mai semnalăm o scurtă introducere în gramatica limbii ruse.

Lucrarea este utilă pentru specialiștii din domeniile indicate mai sus.

T. Oroveanu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectorilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15 sectorul 7.

A. PETRE

DIVERGENȚA AEROELASTICĂ LA SUPRAFEȚE PORTANTE DATORITĂ EFECTELOR COMBINATE DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚĂ PRODUSE DE VÎNT

Se prezintă calculul vitezei critice de divergență pentru structuri în consolă și pentru structuri rezemate la capete. Domeniul de stabilitate este dat, funcție de parametri adimensionali, sub formă de tabele și diagrame.

St. cerc. mec. apl. Tom. 28, nr. 2, 1969, p. 267—288
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

VALERIU PETCU

GENERALIZAREA TEORIEI CALCULULUI PLASTIC OPTIM AL STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT

În lucrare se extinde teoria calculului plastic optim la structurile continue de beton armat la care atît sarcinile permanente, cît și sarcinile temporare sînt variabile. Teoria dezvoltată se bazează pe optimizarea condițiilor de rupere și de exploatare, specifice structurilor de beton armat, prin minimalizarea limitei superioare a mărimilor domeniilor plastice de comportare a structurilor, corespunzătoare tuturor schemelor nefavorabile de încărcare.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 289—308
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

A. PETRE, V. COSAC

VIBRAȚIILE VERTICALE ALE GRINZILOR PENDULARE LUÎND ÎN CONSIDERARE EFECTELE DE FLAMBAJ DINAMIC

În lucrare se studiază vibrațiile verticale ale grinzilor cu rigiditate transversală mai mică decît cea verticală și care, datorită încărcării, își pierd stabilitatea, rotindu-se cu un unghi α.
Se stabilesc relații de calcul pentru unghiul de rotire α și pentru raportul dintre frecvența vibrației pe verticală a grinzii rotite și frecvența proprie a vibrației pe verticală a grinzii nerotite.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, nr. 2, 1969, p. 309—323
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

LEON BEINER, MARIA GAVRILĂ

O SOLUȚIE RIGUROASĂ ÎN PROBLEMA ÎNTÎLNIRII CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL PE ORBITE CIRCULARE

În lucrare s-a studiat manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil a două aparate cosmice pe orbite circulare în ipoteza că aparatul urmărit (fără instalație de propulsie) se află în mișcare pe o orbită circulară, în timp ce aparatul urmăritor, prevăzut cu instalație de propulsie, se mișcă pe o orbită apropiată. S-au obținut soluții aproximative ale problemei variaționale de extremum condiționat, bazate pe condițiile de anulare a accelerațiilor datorită tracțiunii la acostare.
Se dau soluții exacte ale aceleiași probleme fără a mai impune condiții restrictive accelerației datorită tracțiunii la acostare.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 325—338
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

AL. VAICUM

MODELE REOLOGICE PENTRU CALCULUL DEFORMAȚIILOR PĂMÎNTURILOR SATURATE

În lucrare se prezintă modele reologice pentru pămînturile saturate (cu sau fără schelet rigido-elastic) stabilite prin urmărirea schematizată a procesului de deformare. De asemenea se dau funcțiile reologice și diagramele de fluaj și de relaxare.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, nr. 2, 1969, p. 339—347
Redacția: Bucureti, str. Const. Mille, 15

ADRIANA NĂSTASE

ARIPĂ DELTA DE REZISTENȚĂ MINIMĂ ÎN CURENT HIPERSONIC MODERAT

În lucrare se determină forma optimă a suprafeței unei aripi delta groase portante plasate într-un curent hipersonic, pentru care sînt date proiecția în plan, portanța momentului de picaj, volumul; aripa se presupune de asemenea închisă pe bordurile sale de atac și de fugă.
Aplicînd metoda variațională, problema de extremum propusă se reduce la rezolvarea unui sistem finit de ecuații algebrice de gradul doi.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 349—359
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

IOAN DAVID

ASUPRA MIȘCĂRII APELOR ARTEZIENE ÎNTR-UN DOMENIU LIMITAT CU CONDIȚII MIXTE PE CONTUR

În lucrare se dezvoltă o metodă analitică pentru calculul hidraulic al unui sistem de captare compus din puțuri cînd acesta este dispus într-un strat acvifer limitat. Pe conturul care limitează acviferul se consideră condiții de margine mixte, adică existența unor porțiuni de alimentare cu diferite adîncimi ale apei și a unei porțiuni impermeabile.
Metoda expusă se aplică apoi în cîteva cazuri practice cînd sistemul de captare este dispus în domenii interfluviale unghiulare sau lungi.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 361—367
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

I. SETEANU

MIȘCAREA PLANĂ A FLUIDULUI VISCOS ÎNTR-UN DOMENIU SIMPLU CONEX NEMĂRGINIT

Se studiază mișcarea plană laminară a fluidului viscos incompresibil într-un domeniu de tip bandă cu frontierele asimptotic paralele la infinit, amonte și aval. Se deduce ecuația integrală a fluidului viscos și se obține soluția, aplicînd teoria perturbațiilor pornind de la aproximația zero aleasă în mod convenabil.

St. cerc. mec apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 369—379
Redactia: Bucuresti, str. Const. Mille, 15

PĂUN ANTONESCU

CONTRIBUȚII LA SINTEZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIALE

În lucrare sînt rezolvate două probleme de sinteză cinematică grafică în funcție de coeficientul de productivitate impus : excentricitatea mecanismului spațial și, respectiv, lungimea bielei. Se folosesc în acest scop metodele grafice din geometria descriptivă. Sînt considerate și cîteva cazuri particulare care pot apărea în practică.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 381—392
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

D. TUTUNARU

MECANISME PENTRU CONDUCEREA RECTILINIARĂ A MIȘCĂRII

Autorul realizează o serie de mecanisme noi pentru conducerea rectiliniară exactă și periodică a mișcării. Aceste mecanisme se pot folosi pe scară largă în industrie și în sinteza mecanismelor plane. La începutul lucrării se descriu mecanismele de bază și metoda generală folosită pentru formarea mecanismelor rectiliniare cu mișcare periodică.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 393—402
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

N. I. MANOLESCU

PENTRU ADOPTAREA UNUI PUNCT DE VEDERE UNITAR ÎN STUDIUL ANALIZEI STRUCTURALE A LANȚURILOR CINEMATICE ȘI A MECANISMELOR

În lucrare se prezintă legătura dintre diferitele „criterii" care determină gradul de mobilitate M al unui mecanism, modul de identificare a „familiei" mecanismului sau a diferitelor porțiuni ale acestuia.
Se stabilește apoi formula generală a numărului de cicluri independente (Z) ale unui mecanism în funcție de „structura assurică" a acestuia pe baza a două teoreme, după care se determină numărul (Z_g) de contururi închise deformabile ale unei grupe Assur de familie f.
În încheiere se prezintă modul de conducere a calculului cinematic al unui mecanism pe baza ciclurilor independente aflate în structura lui.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 403—426
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

P. DODOC

FENOMENE DE REZONANȚĂ LA AXELE PRINCIPALE ALE MAȘINILOR-UNELTE ȘI INFLUENȚA LOR ASUPRA PRECIZIEI DE PRELUCRARE LA STRUNJIRE

În articol se arată că în domeniul subcritic sistemul vibrator „piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină unealtă" poate fi excitat în rezonanțe de diferite ordine. Datorită acestui fenomen, axa de rotație a piesei descrie o traiectorie numită de autor „trocoidă de rezonanță", care, transmițîndu-se la suprafața piesei în procesul de așchiere, provoacă apariția unor erori de prelucrare considerabile. Mai departe se indică căile pentru micșorarea acestor erori.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 427—438
Redacția : București, str. Const. Mille, 15

MARTHA SĂLCUDEAN, GH. MARIN

VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A UNEI METODE ANALITICE DE CALCUL A LAGĂRELOR CIRCULARE ALIMENTATE SUB PRESIUNE

Se prezintă metoda şi rezultatele experimentale obţinute în vederea verificării metodei analitice elaborate pentru calculul lagărelor circulare alimentate sub presiune.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 439—452
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

M. GR. NĂSTASE

ALEGEREA JUDICIOASĂ A PARAMETRILOR DE EXPUNERE ÎN RADIOLOGIA INDUSTRIALĂ

În lucrare se prezintă o serie de consideraţii teoretice şi rezultate experimentale privind unele criterii ce trebuie luate în considerare pentru a se putea face o alegere judicioasă a parametrilor de expunere în radiologia industrială.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28 , nr. 2, 1969, p. 453—461
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

VASILE MARCU, TRAIAN CIOBANU

UNELE APLICAŢII SPECIALE ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE ÎN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Articolul începe printr-o scurtă expunere a aspectelor generale ale metalizării prin pulverizare, avîntului luat de această metodă în lagărul socialist şi aplicaţiilor mai importante efectuate la noi în ţară.
Urmează descrierea a trei aplicaţii speciale de mare economicitate, şi anume: metalizarea unei statui din piatră artificială şi a Coloanei infinite de la Tg.-Jiu, opera sculptorului C. Brâncuşi, precum şi metalizarea tablierului podului de peste Olt la Cîineni.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 463—480
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

ILIUC IVAN

METODE FIZICE ŞI ELECTRICE FOLOSITE ÎN STUDIUL FRECĂRII ŞI UZURII

Se face o trecere în revistă a unor metode fizice şi electrice de analiză folosite în cercetările de frecare şi de uzură. Un accent deosebit s-a pus pe metodele care oferă posibilităţi mari de investigaţie: microscopia şi difracţia de electroni, microsonda electronică. Sînt prezentate şi unele rezultate tocmai pentru a sublinia posibilitatea metodelor respective.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, Nr. 2, 1969, p. 481—490
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 3 1969

SUMAR

STUDII

Pag.

D. DUMITRESCU, C. I. CRĂCIUN, Mişcarea fluidului vîscos în lungul unei plăci plane la numere Reynolds mici 497

N. TIPEI, ST. NEDELCU, L. STĂNOIU, Despre posibilităţile de caracterizare a mediilor nenewtoniene 507

T. OROVEANU, I. SPULBER, Unele aspecte ale dezlocuirii bidimensionale a fluidelor miscibile în medii poroase. 517

E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, Scurgerea supersonică în jurul aripii delta arcuită şi torsionată simetric, ţinînd seama de separaţia curentului la bordurile de atac . . 525

ADRIANA NĂSTASE, Aripa delta subţire, de geometrie variabilă, optimă la două regimuri de zbor supersonice 551

ION SETEANU, Soluţii în serie în studiul fluidului vîscos 573

CORNELIU CRĂCIUN, Mişcarea de antrenare şi transferul de căldură pentru fluide vîscoase stratificate 585

MARIA ARSENIE, DUMITRU ARSENIE, O propunere privind lungimea de amestec din teoria lui L. Prandtl, pentru cazul curgerii turbulente în canale şi conducte, avînd la bază un principiu variaţional 595

S. GĂLETUŞE, Asupra căderii de presiune la scurgerile prin conducte în regim turbulent 607

AUGUSTIN PETRE, Repartiţia sarcinilor datorită acţiunii vîntului asupra construcţiilor elastice, luînd în considerare efectele combinate de rezistenţă la înaintare şi portanţă 615

MIRCEA SOARE, Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul reţelelor spaţiale planare pătrate 631

ION MUNTEANU, IOSIF STURZ Contribuţii la rezolvarea structurilor spaţiale. . . 665

MIRCEA RADEŞ, Vibraţiile transversale forţate ale grinzilor finite, rezemate pe fundaţie deformabilă amortizantă. 677

EINAR KEINTZEL, Calculul simplificat al conlucrării spaţiale a diafragmelor cu mai multe şiruri de goluri 697

N. BOICU, Deformaţia locală, de contact elastic liniar, la roţile dinţate 705

Pag.

ANDREI ALBU, EUGEN PAY, Contribuţii la dinamica vibraţiilor supapelor de presiune din circuitele hidraulice de acţionare ale maşinilor-unelte 725

N. ORLANDEA, Contribuţii la sinteza mecanismelor pe baza algoritmului de formare a curbelor de înfăşurare liniară 731

DAN PAVELESCU, BORIS DIMITROV, Uzarea în condiţiile alunecării sacadate 747

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

D. MANGERON, Congresul jubiliar canadian de mecanică aplicată. Anul centenarului, 1967, Universitatea LAVAL, Québec, 22—26 mai 1967 757

TUDOR-VASILE HUNCHER, A V-a Consfătuire asupra problemelor de bază ale teoriei maşinilor şi mecanismelor. Suhumi — U.R.S.S., 15—20 mai 1967 761

RECENZII 765

MIŞCAREA FLUIDULUI VÎSCOS ÎN LUNGUL UNEI PLĂCI PLANE LA NUMERE REYNOLDS MICI

de D. DUMITRESCU şi C. I. CRĂCIUN
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se integrează cu ajutorul calculatoarelor numerice ecuaţiile Navier-Stokes nesimplificate, scrise în diferenţe, pentru mişcarea fluidului vîscos în prezenţa unei plăci plane de lungime finită paralelă curentului. Se trasează spectrele liniilor de curent şi de echivîrtej. Rezultatele se compară cu cele obţinute folosind maşini analogice (Janssen-California).

INTRODUCERE

Mişcarea unui fluid vîscos în prezenţa unei plăci plane la incidenţă zero poate fi cercetată fie pornind de la ecuaţii simplificate (ecuaţiile liniarizate ale lui Oseen sau ecuaţiile stratului-limită) [1], fie pornind de la ecuaţiile generale Navier-Stokes.

Ca şi Janssen [2], [3] sau Dennis şi Dunwoody [4], vom folosi ecuaţiile generale, nesimplificate, pentru care vom căuta soluţii prin metode de aproximare.

Janssen, cu ajutorul unui calculator analogic, obţine valori în cîmpul funcţiei de curent ψ şi al vîrtejului ζ, care satisfac ecuaţiile scrise în diferenţe. Folosind valorile vîrtejului pe placă, el calculează şi coeficientul de rezistenţă C_D pentru trei numere Reynolds alese : 0,1 ; 1 ; 10.

Dennis şi Dunwoody urmează o cale deosebit de laborioasă, îndreptîndu-şi eforturile spre calculul coeficientului de rezistenţă C_D. Prin adaptarea unor metode folosite în rezolvarea ecuaţiilor liniarizate Oseen, ei reduc întîi ecuaţiile cu derivate parţiale pentru ψ şi ζ la ecuaţii diferenţiale ordinare şi acestora le aplică metode de rezolvare numerică. Soluţia este limita unui şir de aproximaţii succesive. Metoda este aplicabilă pentru întreaga gamă de numere Reynolds, de la zero la infinit, prilejuind comparaţii cu soluţii cunoscute din teoria lui Oseen, respectiv a stratului-limită.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 497–506, BUCUREŞTI, 1969

În prezenta lucrare ne propunem să rezolvăm problema pe o cale mai directă, folosind, ca şi în alte cazuri [5], metoda diferenţelor finite. Într-un sens, metoda noastră are ca scop înlăturarea unora dintre dificultăţile metodei lui Janssen, dintre care vom cita pe cele mai importante : a) Folosirea reţelei de rezistenţe este complicată pentru un număr mare de puncte, fapt pentru care autorul a folosit un pas (constantă a reţelei) de cinci ori mai mare decît cel care rezulta din consideraţiile bazate pe limitarea erorii de discretizare. b) În afara erorilor de contur şi a celor de discretizare, inerente metodei diferenţelor finite, reţeaua electrică implică erori ca cele de voltaj aplicat pe frontiere şi cele de calcul al rezidualelor. Ambele dificultăţi dispar dacă se foloseşte un calculator numeric şi de aceea am considerat indicată obţinerea soluţiei pe această cale.

În vederea comparării rezultatelor, au fost menţinute ipotezele fundamentale din lucrarea [2], chiar dacă unele sînt susceptibile de îmbunătăţiri, şi pentru exemplificare s-a ales numărul Reynolds egal cu 1.

ECUAŢIILE ÎN DIFERENŢE ALE PROBLEMEI

Ecuaţiile la care satisfac funcţia de curent ψ $\left(u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \; v = \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ şi vîrtejul ζ $\left(\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ în mişcarea bidimensională a unui fluid vîscos incompresibil se scriu adimensional

$$\Delta \zeta' = \frac{\mathcal{R}e}{2}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \zeta'}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\Delta \psi' = \zeta' \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{2}$$

Transformarea conformă $t = t(z)$, care reprezintă planul fizic $z = x + iy$ pe planul $t = \xi + i\eta$, conduce la noile ecuaţii

$$\Delta_t \zeta = \frac{\mathcal{R}e}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right), \tag{3}$$

$$\Delta_t \psi = \frac{1}{q^2}\zeta \qquad \left(\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right), \tag{4}$$

unde $q = \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}\right|$ reprezintă modulul transformării.

Dacă se acoperă domeniul cu o reţea pătrată de latură a şi se notează cu 0 un punct particular al ei şi cu 1, 2, 3, 4, nodurile vecine

(fig. 1 *a*), atunci cea mai simplă exprimare în diferențe finite pentru (3) și (4) se va scrie

$$\zeta_0 = \frac{1}{4}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) - \frac{\mathcal{R}e}{32}[(\psi_1 - \psi_3)(\zeta_2 - \zeta_4) - (\psi_2 - \psi_4)(\zeta_1 - \zeta_3)], \tag{5}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) - \frac{a^2}{4q_0^2}\zeta_0. \tag{6}$$

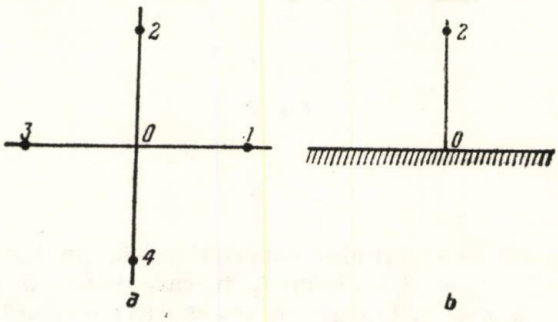


Fig. 1

Vom utiliza „metoda cîmpului dublu", adică vom opera simultan sau alternativ în cîmpurile ψ și ζ cu formulele (5) și (6), deoarece viteza de convergență a soluției numerice este mai mare decît dacă se folosește direct ecuația de ordinul patru pentru ψ care s-ar obține eliminînd ζ între (3) și (4). În plus, pe această cale apar mai puține dificultăți în vecinătatea frontierelor.

Valorile la limită pentru ψ sînt cunoscute, dar valorile lui ζ pe placă trebuie determinate din relații pe frontieră. Valoarea lui ζ într-un punct 0 al frontierei solide poate fi calculată cu formula lui Woods [6]

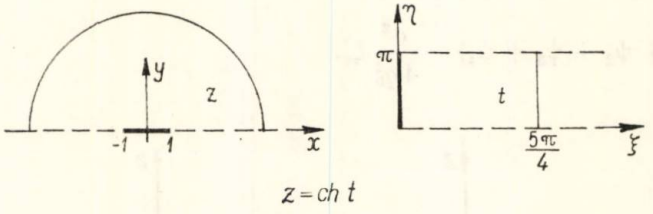
$$\zeta_0 = \frac{3q_0^2}{a^2}(\psi_2 - \psi_0) - \frac{q_0^2}{2q_2^2}\zeta_2, \tag{7}$$

în care punctul 2 se află pe normala la perete trecînd prin punctul 0, la distanța a în interiorul cîmpului (fig. 1*b*).

Eroarea în orice punct din cîmp este compusă din două părți: a) eroarea de discretizare, inerentă reprezentării ecuațiilor diferențiale prin ecuații în diferențe, și b) eroarea de frontieră, datorită impunerii condițiilor de la infinit pe o frontieră la distanță finită.

CAZUL PLĂCII PLANE ȘI CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Considerăm într-un fluid nelimitat o placă de lungime finită paralelă vitezei curentului neperturbat ($\vec{V} \parallel Ox$), $y = 0, -1 \leqslant x \leqslant 1$. Datorită simetriei curgerii față de axa Ox, putem mărgini studiul la semiplanul superior al planului z (fig. 2).



$z = ch\, t$

Fig. 2

Transformarea

$$z = \operatorname{ch} t \tag{8}$$

reprezintă, conform semiplanului superior $y > 0$, pe banda semiinfinită $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \xi < \infty$ din planul t, în care plăcii îi corespunde segmentul $\xi = 0$, $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$. Transformarea este avantajoasă deoarece modulul este mic, departe de origine, contractînd planul transformat și foarte mare în regiunea plăcii, dilatînd zona de interes.

Condițiile la limită decurg din aderența fluidului pe placă

$$\xi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \tag{9}$$

și din simetria mișcării față de axa Ox pe care se află situată

$$\eta = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \zeta = 0, \tag{10}$$

$$\eta = \pi, \qquad \psi = 0, \qquad \zeta = 0. \tag{11}$$

Condițiile la infinit trebuie să exprime faptul că viteza este constantă și paralelă cu axa Ox $\left(\text{în adimensional } \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \psi'}{\partial y} = -1\right)$ și, ca urmare, vîrtejul nul. În planul transformat ele se scriu

$$\xi \to \infty, \qquad \frac{1}{\operatorname{ch} \xi \sin \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -1, \qquad \frac{1}{\operatorname{sh} \xi \cos \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -1. \tag{12}$$

Janssen ia pentru distribuția valorilor funcției de curent la mari distanțe ($\xi = \xi_\infty$) expresia $\psi = -\operatorname{sh} \xi_\infty \sin \eta$, care satisface relațiile (12). El adaugă, așadar, condițiilor la limită (9), (10), (11) condiția

$$\xi = \xi_\infty, \qquad \psi = -\operatorname{sh} \xi_\infty \cdot \sin \eta, \qquad \zeta = 0. \tag{13}$$

Limitarea semibandei printr-o verticală $\xi=\xi_\infty$, aleasă la o distanţă convenabilă, suficient de mare, ne conduce la calculul cîmpurilor ψ şi ζ pe un dreptunghi. Valorile funcţiei ψ sînt cunoscute pe toate laturile, iar cele ale vîrtejului, nule pe trei dintre ele, se calculează cu formula (7) pe cea de-a patra ($\xi = 0 \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi$). Rămîne în discuţie alegerea distanţei ξ_∞ şi a pasului reţelei.

Dennis şi Dunwoody, analizînd condiţiile la infinit (13) printr-un procedeu sugerat de liniarizarea Oseen, ajung la concluzia că valorile funcţiei ψ la mari distanţe trebuie să fie de forma

$$\psi(\xi, \eta) \sim -\frac{1}{2} e^{\xi} \sin \eta + C_D\left(1 - \frac{\eta}{\pi}\right), \tag{13'}$$

unde C_D este coeficientul de rezistenţă, apriori necunoscut. Din această cauză este nevoie să se recurgă la un pocedeu de aproximaţii succesive, calculîndu-se în fiecare aproximaţie cîmpurile ψ şi ζ şi apoi C_D care determină condiţia la mari distanţe pentru aproximaţia următoare. În absenţa termenului avînd ca factor pe C_D, repartiţiile (13) şi (13') coincid, deoarece la mari distanţe $\operatorname{sh} \xi \sim \frac{1}{2} e^{\xi}$. Mergînd însă pe linia comparării cu rezultatele lui Janssen, am folosit condiţia (13).

LIMITAREA DOMENIULUI ŞI ALEGEREA PASULUI REŢELEI

Cînd se studiază mişcarea fluidului vîscos în jurul cilindrului prin metoda diferenţelor finite, apar dificultăţi considerabile în regiunea dîrei. În aval, departe de cilindru, dîra încă afectează curgerea. Apelt [7] a arătat că metoda de a impune valorile de la infinit la o distanţă oarecare finită şi de a muta această condiţie de cvasifrontieră din ce în ce mai departe nu dă rezultate.

În cazul plăcii, o aproximare departe în aval este posibilă pornind de la analiza dîrei laminare, bazată pe teoria stratului-limită şi pe aproximarea lui Oseen la distanţă. Poziţia frontierei exterioare este aleasă la o asemenea distanţă faţă de placă, la care vîrtejul maxim din dîra laminară devine destul de mic ca să poată fi neglijat. Pe scurt, în aproximarea lui Oseen vîrtejul este maxim [2, p. 51—52] pentru

$$y = 2\sqrt{\frac{x}{\mathcal{R}e}}, \tag{14}$$

avînd valoarea

$$\zeta_{max} = -0{,}1607\,\frac{\mathcal{R}e}{x}. \tag{15}$$

În ecuațiile (14) și (15) abscisa x se măsoară de la o origine situată aproximativ la bordul de fugă al plăcii.

Procedeul de determinare a frontierei exterioare este următorul: Se admite o eroare maximă pentru ζ. Vîrtejul maxim ζ_{max} este egalat cu eroarea admisă, și ecuația (15) este rezolvată în raport cu x. Poziția frontierei este dată de $r_\infty \leqslant x + 1$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dacă eroarea maximă admisă pentru vîrtej în mijlocul plăcii este aleasă arbitrar 3%, rezultă $x = 22{,}8$. Pentru ca semibanda să se împartă în pătrate, este avantajos ca limitarea în planul t să se facă printr-o verticală la o distanță ξ_∞ egală cu produsul dintre π și un număr rațional. Dacă se ia $\xi_\infty = \frac{5}{4}\pi$, din transformarea conformă (8) rezultă $r_\infty = 25{,}37$, deci o valoare acoperitoare pentru eroarea admisă.

Considerații bazate pe limitarea erorii de discretizare conduc la valoarea $\frac{\pi}{40}$ pentru pasul rețelei [2, p. 54—57]. Dar, datorită dificultăților care apar pentru un număr mare de noduri, Janssen a mărit pasul de cinci ori, alegînd valoarea $\frac{\pi}{8}$ pentru $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{3}{8}\pi$, dublîndu-l chiar la valoarea $\frac{\pi}{4}$ pentru $\frac{3}{8}\pi \leqslant \xi \leqslant \frac{5}{4}\pi$, deși s-a stabilit că eroarea de discretizare introdusă nu este de loc neglijabilă.

În prezenta lucrare am ales, pentru a putea compara rezultatele, pasul $\frac{\pi}{8}$ în întreg domeniul, calculul la pas $\frac{\pi}{16}$ neprezentînd nici o dificultate.

METODA DE CALCUL ȘI REZULTATE

Pentru a exemplifica metoda s-a ales $\mathcal{R}e = 1$. După ce s-au calculat valorile lui $\frac{a^2}{q^2}$ (tabela 1) necesare în formula (6) și distribuția funcției ψ la distanța $\xi_\infty = \frac{5}{4}\pi$, s-au dat valori în nodurile rețelelor din cele două cîmpuri. S-au calculat cu formula (5) valorile în toate punctele din cîmpul ψ, apoi cu formula (6) valorile în punctele cîmpului ζ și cu formula (7) valorile pe frontiera corespunzătoare plăcii. S-au recalculat valorile lui ψ, apoi ale lui ζ și așa mai departe, pînă cînd schimbarea valorilor de la o iterație la alta devine satisfăcător de mică. Valorile stabilizate pentru ψ și ζ sînt cele din tabelele 2 și 3. Pentru comparație, tabelele conțin în

paranteze rezultatele lui Janssen. Urmînd acelaşi procedeu [2, p. 67], s-a calculat coeficientul de rezistenţă

$$C_D = -\frac{2}{\mathcal{R}e}\int_0^{\pi} \zeta\,(0,\,\eta)\,\sin\,\eta\,d\eta.$$

Valoarea obţinută $C_D=2{,}54$ este cu 9% mai mică decît cea din lucrarea citată.

Figura 3 reprezintă o porţiune din cîmpul curgerii, avînd trasate liniile de curent (jumătatea superioară) şi liniile de echivîrtej (jumătatea inferioară), ambele corespunzînd mişcării din semiplanul superior.

Primită la redacţie la 19 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. R. Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch der Physik*, Band **VIII**, 2, Springer Verlag, 1963.
2. E. Janssen, I. *An analog method for solving the hydrodynamic equations for two-dimensional viscous flow.* II. *Application of the method to the case of flow past a flat plate* (Dissertation), Univ. of California, Los Angeles, 1956.
3. E. Janssen, *Flow past a flat plate at low Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., vol. 3, part. 4, p. 329, 1958.
4. S.C.R. Dennis şi J. Dunwoody, *The steady flow of a viscous fluid past a flat plate*, J. Fluid Mech. vol. 24, part. 3, p. 577, 1966.
5. D. Dumitrescu, M. Cazacu, C. Crăciun, *Solutions numériques et recherches expérimentales dans l'hydrodynamique des fluides visqueux, à de nombres de Reynolds petits.* Applied Mechanics. Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics. Münich (Germany), Springer Verlag 1964, p. 1170.
6. L. C. Woods, *A note on the numerical solution of fourth order differential ecuations*, Aero. Quart. 5, 176.
7. J. C. Apelt, *The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds numbres 40 and 44*, Aero. Res. Counc., Rep. & Mem. No. 3175, 1961.

Tabela 1

Valori pentru a^2/q^2

π	0,0000	0,0250	0,1164	0,3333	0,8167	1,8804	4,2149	9,3358	20,5679	45,2028	99,2342
$\frac{7\pi}{8}$	0,0226	0,0476	0,1390	0,3559	0,8393	1,9030	4,2375	9,3584	20,5904	45,2254	99,2568
$\frac{3\pi}{4}$	0,0771	0,1021	0,1935	0,4104	0,8938	1,9575	4,2920	9,4130	20,6450	45,2799	99,3113
$\frac{5\pi}{8}$	0,1316	0,1567	0,2480	0,4649	0,9483	2,0120	4,3465	9,4675	20,6995	45,3344	99,3658
$\frac{\pi}{2}$	0,1542	0,1792	0,2706	0,4875	0,9709	2,0346	4,3691	9,4901	20,7221	45,3570	99,3884
$\frac{3\pi}{8}$	0,1316	0,1567	0,2480	0,4649	0,9483	2,0120	4,3465	9,4675	20,6995	45,3344	99,3658
$\frac{\pi}{4}$	0,0771	0,1021	0,1935	0,4104	0,8938	1,9575	4,2920	9,4130	20,6450	45,2799	99,3113
$\frac{\pi}{8}$	0,0226	0,0476	0,1390	0,3559	0,8393	1,9030	4,2375	9,3584	20,5904	45,2254	99,2568
0	0,0000	0,0250	0,1164	0,3333	0,8167	1,8804	4,2149	9,3358	20,5679	45,2028	99,2342
	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$

Tabela 2

Funcția de curent (valori inmulțite cu 1000)

π	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{7\pi}{8}$	0	−27 (−30)	−103 (−110)	−251 (−280)	−512	−947	−1630	−2678	(−4217)	−6455	−9707,6
$\frac{3\pi}{4}$	0	−45 (−50)	−178 (−200)	−438 (−500)	−900 (−1040)	−1676	−2926 (−3210)	−4858	−7718 (−8040)	−11889	−17937,3 (−17940)
$\frac{5\pi}{8}$	0	−55 (−60)	−210 (−250)	−537 (−601)	−1109	−2080	−3667	−6163	−9920	−15435	−23436,2
$\frac{\pi}{2}$	0	−56 (− 60)	−213 (−250)	−531 (−620)	−1108 (−1300	−2090	−3719 (−4140)	−6345	−10423 (−11100)	−16502	−25367,2 (−25370)
$\frac{3\pi}{8}$	0	−48 (−51)	−177 (−200)	−448 (−510)	−927	−1749	−3132	−5425	−9121	−14863	−23436,2
$\frac{\pi}{4}$	0	−34 (−36)	−129 (−140)	−313 (−350)	−639 (−700)	−1200	−2151 (−2200)	−3748	−6414 (−6270)	−10805	−17937,3 (−17940)
$\frac{\pi}{8}$	0	−17 (−21)	− 66 (−70)	−156 (−180)	−319	−594	−1058	−1836	−3148	−5410	−9707,6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$

Tabela 3

Virtejul. (Valori înmulțite cu 1000)

π	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{7\pi}{8}$	−2578 (−2920)	−957 (−1070)	−414 (−440)	−198 (−160)	−95	−41	−12,63	−2,076	0,000	0,000	0
$\frac{3\pi}{4}$	−1187 (−1380)	−850 (−950)	−526 (−560)	−308 (−310)	−168 (−160)	−83	−33,97 (−20)	−7,381	−0,901 (0,0)	0,000	5
$\frac{5\pi}{8}$	−823 (−890)	−720 (−770)	−530 (−560)	−359 (−370)	−223	−120	−55,48	−17,35	−3,387	−0,275	0
$\frac{\pi}{2}$	−710 (−740)	−650 (−680)	−520 (−540)	−380 (−390)	−256 (−250)	−159	−89,58 (−70)	−37,96	−10,00 (+10)	−1,876	0
$\frac{3\pi}{8}$	−712 (−750)	−640 (−670)	−505 (−520)	−377 (−390)	−268	−187	−121,94	−70,21	−31,19	−9,134	0
$\frac{\pi}{4}$	−893 (−940)	−648 (−720)	−460 (−490)	−336 (−340)	−239 (−250)	−178	−127,72 (−140)	−89,41	−56,83 (−80)	−31,00	0
$\frac{\pi}{8}$	−1579 (−2010)	−642 (−780)	−336 (−370)	−209 (−200)	−145	−108	−83,58	−65,02	−51,87	−44,35	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$

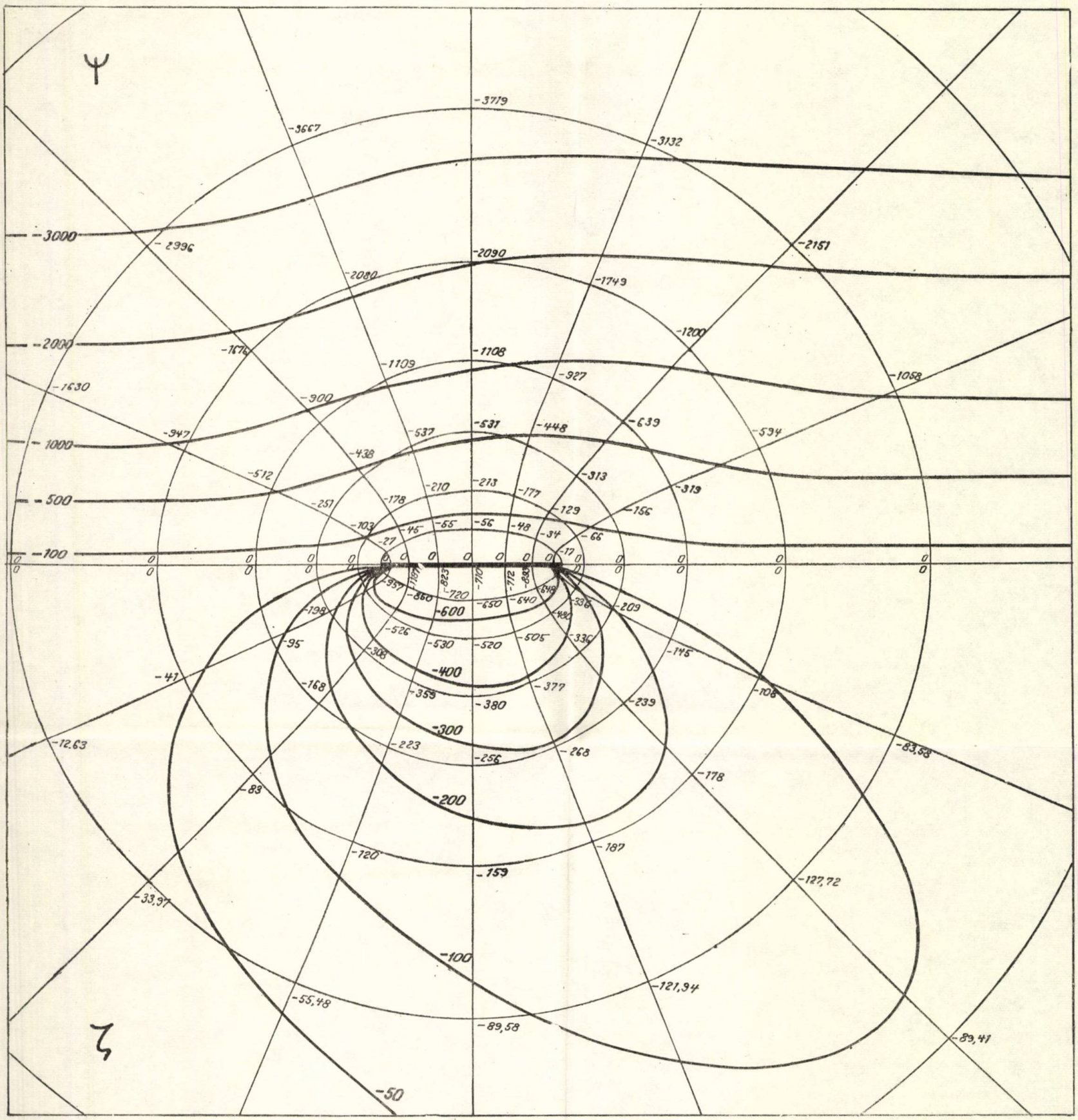
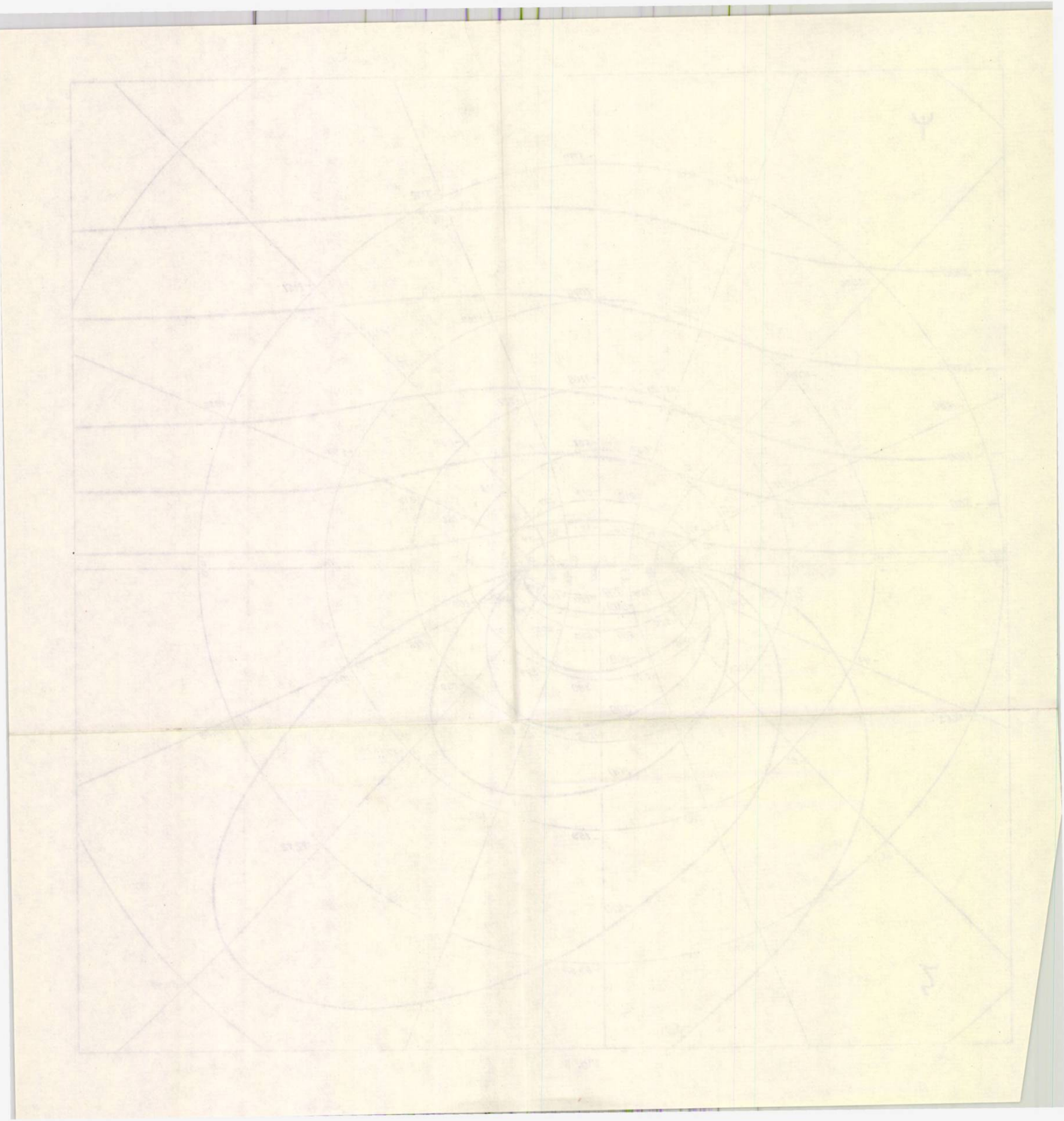

Ψ
ζ
-3000
-2000
-1000
-500
-100
-600
-400
-300
-200
-100
-50
-3719
-3667
-3132
-2996
-2151
-2090
-2080
-1749
-1200
-1676
-1108
-1109
-927
-1058
-1630
-900
-639
-531
-448
-537
-594
-947
-438
-512
-313
-319
-210
-213
-177
-251
-178
-129
-156
-103
-45
-55
-56
-48
-34
-66
-27
-17
-957
-1187
-823
-710
-712
-893
-648
-860
-720
-650
-640
-336
-209
-198
-480
-526
-530
-520
-505
-336
-95
-308
-145
-41
-168
-377
-108
-359
-380
-239
-12.63
-223
-256
-268
-83,58
-178
-83
-120
-187
-159
-127,72
-33,97
-121,94
-55,48
-89,58
-89,41

Fig. 3



DESPRE POSIBILITĂȚILE DE CARACTERIZARE A MEDIILOR NENEWTONIENE

de N. TIPEI
membru corespondent al
Academiei Republicii Socialiste România,

ST. NEDELCU și L. STĂNOIU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Folosindu-se rezultatele generale date de teoria mediilor nenewtoniene, sînt dezvoltate două metode pentru caracterizarea acestor medii, cu ajutorul atît al datelor teoretice, cît și al celor experimentale, pentru a face posibilă astfel o comparație privind proprietățile diferitelor fluide legate de gradientul de viteză.
Prima metodă se bazează pe dezvoltări în serie aplicate la mișcări bidimensionale și necesită o aparatură experimentală simplă : cilindri coaxiali și plăci paralele. Sînt examinate două medii nenewtoniene și se determină coeficienții de viscozitate de ordin superior, care le caracterizează. A doua metodă generalizează cei doi termeni ai mediilor Bingham, folosindu-se coeficienți variabili, a căror comportare permite o mai bună informare asupra proprietăților reologice. Se realizează un calcul al profilelor de viteză și se dă un exemplu numeric.
Se trag apoi concluzii asupra posibilităților și condițiilor de experimentare necesare pentru a se putea caracteriza aceste medii, și în special lubrifianții cu comportare nenewtoniană.

Pentru realizări practice în tehnica lubrificației, comportarea mediilor nenewtoniene prezintă o mare importanță. Se simte nevoia unor mai largi cunoștințe în acest domeniu, de asemenea a unei metode standard de caracterizare a mediilor nenewtoniene; nu există încă astfel de metode, capabile să dea rezultate comparative și cuprinzătoare. Pentru a se aduce o contribuție în această direcție s-au dezvoltat ideile care urmează.

Utilizarea seriilor de puteri. Dacă luăm în considerare un mediu nenewtonian, atunci tensiunile de forfecare, în mișcarea bidimensională în planul axelor x_1 și x_2, sînt exprimate în modul cel mai general prin

$$q_{ij} = 2S\mu_0 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n+1} d^n \eta_{ij} \qquad (ij = 1, 2,\ S = \operatorname{sign} \eta_{ij}), \quad (1)$$

unde d este invariantul [1]

$$d = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix}, \qquad \eta_{11} + \eta_{22} = 0 \tag{2}$$

şi μ_{2n+1} reprezintă coeficienţii de viscozitate.

În cele ce urmează, se cercetează scurgerea între două suprafeţe paralele, adică plăci paralele sau cilindri coaxiali. În acest din urmă caz, într-un sistem de coordonate r şi θ, dacă vitezele axiale şi radială sînt nule ($v_r = v_3 = 0$), avem

$$\eta_{\theta r} = \eta_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta\right), \qquad \eta_{rr} = \eta_{\theta\theta} = 0. \tag{3}$$

Din (2) şi (1) rezultă

$$\begin{aligned} d &= (\eta_{r\theta})^2 = \overset{2}{\eta}_{r\theta}, \\ q_{r\theta} &= 2S\mu_0 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n+1} \overset{2n+1}{\eta}_{r\theta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ecuaţiile de mişcare, dacă p este presiunea, ρ densitatea, $\overset{2n+1}{D}$ divergenţa tensorului $\| \overset{2n+1}{\eta}_{ij} \|$ [2], χ_{2n+1} divergenţa de ordinul $2n+1$ a vitezei [3] şi F forţa exterioară raportată la unitatea de volum, sînt:

$$\rho\dot{v}_j = F_j - p/j + q_{ij}/i = F_j - p/j + 2\mu_0 \overset{0}{D}{}''_j +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} [2(\mu_{2n+1} \overset{2n+1}{D}{}''_j + \mu_{2n+1}/j \overset{2n+1}{\eta}_{ij}) - \frac{2}{3}(\mu_{2n+1}\chi_{2n+1}/j + \chi_{2n+1}\mu_{2n+1}/j)]. \tag{5}$$

Pentru cilindri coaxiali avem

$$\chi_{2n+1} = \frac{1}{r^{2n+1}}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r\right)^{2n+1} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^{2n+1} + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^{2n+1} \tag{6}$$

şi, în baza presupunerilor anterioare, $\chi_{2n+1} = 0$. Atunci ecuaţia (5) devine:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = 4S\mu_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \mu_{2n+1}\left[\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^{2n+1} + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^{2n+1}\right], \\ &\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Notăm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{2^{2n}}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^{2n+1} = y, \qquad \ln r = x. \tag{8}$$

Cu aceste substituţii, prima ecuaţie (7) devine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y + 4S\mu_0 - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = 0. \tag{9}$$

Soluția ecuației (9) rezultă imediat:

$$y = e^{-2x}\left[C_1 - \int\left(4S\mu_0 - \frac{dp}{d\theta}\right)e^{2x}\,dx. \right. \tag{10}$$

În cazul studiat se poate considera, din cauza simetriei, $dp/d\theta = 0$ sau, mai general,

$$4S\mu_0 - \frac{dp}{d\theta} = 2A = \text{const.} \tag{11}$$

Din (10) se obține

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{2^{2n}}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^{2n+1} - \frac{C_1}{r^2} + A = 0, \tag{12}$$

din care pot fi deduse n valori ale lui v_θ

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{2n+1} - f_{2n+1}(r) = 0, \\ &(v_\theta)_{2n+1} = r\left[\int\frac{f_{2n+1}(r)}{r}\,dr + C_2\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Din toate soluțiile posibile corespunzătoare lui $f_{2n+1}(r)$ trebuie excluse cele complexe sau imaginare. Totodată convergența seriei (12), C_1 fiind o valoare finită, conduce la condițiile

$$\begin{aligned} &-1 < (2\mu_{2n+1})^{\frac{1}{n+1}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\right]^{\frac{2n+1}{n+1}} < 1, \\ &\left|\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right| < \left(\frac{4^n}{\mu_{2n+1}}\right)^{\frac{1}{2n+1}}; \quad -1 < \frac{\mu_{2n+1}}{4\mu_{2n-1}}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) < 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Folosind condițiile de convergență și (12), soluția compatibilă v_θ este determinată pentru un interval de valori, $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ (R_1, R_2 fiind razele cilindrilor).

Să considerăm, de exemplu, trei termeni în dezvoltarea (4). Se găsește

$$\begin{aligned} f(r) = &\sqrt[3]{-\frac{2}{\mu_3}\left(A - \frac{C_1}{r^2}\right) + \frac{2}{\mu_3}\sqrt{\left(A - \frac{C_1}{r^2}\right)^2 + \frac{16}{27}\frac{\mu_1^3}{\mu_3}}} + \\ &+ \sqrt[3]{-\frac{2}{\mu_3}\left(A - \frac{C_1}{r^2}\right) - \frac{2}{\mu_3}\sqrt{\left(A - \frac{C_1}{r^2}\right)^2 + \frac{16}{27}\frac{\mu_1^3}{\mu_3}}} \end{aligned} \tag{15}$$

și, dacă M_1, M_2 sînt momentele aplicate cilindrilor cu razele R_1, R_2 și lungimea H,

$$2S\mu_0 + \mu_1 f(R_{1,2}) + \frac{1}{4}\mu_3 f^3(R_{1,2}) = -\frac{M_{1,2}}{\pi R_{1,2}^2 H}. \tag{16}$$

Această relație permite calcularea constantei C_1 pentru un dispozitiv dat și pentru un moment măsurat. Dacă vitezele unghiulare ω_1, ω_2 sînt cunoscute, ecuația (13) dă

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{v_{\theta 1}}{R_1} - \frac{v_{\theta 2}}{R_2} \tag{17}$$

și constanta C_2 este de asemenea obținută. Apoi, cu ajutorul altor valori experimentale pentru momentele $M_{1,2}$ și pentru vitezele ω_1, ω_2, pot fi calculați coeficienții μ_0, μ_1, μ_3, care caracterizează proprietățile de forfecare ale mediului. Dar efectuarea calculelor, cînd folosim ecuația (16), este destul de dificilă și laborioasă, dacă sînt întrebuințate expresiile vitezelor unghiulare (metoda grafică este preferabilă în ultimul caz).

Mișcarea între plăci paralele fără gradient de presiune apare ca un caz mai simplu. Distribuția de viteze în lungul axei normale la suprafețe x_2, este liniară și, dacă x_1 este variabila în lungul direcției de mișcare, $V_1 V_2$ vitezele suprafețelor, iar $V = V_1 - V_2$ și h grosimea filmului, avem:

$$q_{21} = 2S\mu_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \mu_{2n+1} \left(\frac{V}{h}\right)^{2n+1}, \tag{18}$$

și forța de rezistență pentru suprafața de contact s este evident

$$F = q_{21} \cdot s. \tag{19}$$

Astfel, cu ajutorul a N măsurători experimentale independente, se obțin valorile unui număr egal de coeficienți μ_{2n+1}. Presupunînd că mișcarea unei mase m pleacă din repaus și că la timpul dat t^* viteza atinge valoarea V^*, ecuația de mișcare este

$$m\dot{V} = F - q_{21} \cdot s, \tag{20}$$

cu condiția ca $F > 2\mu_0 \cdot s$. Timpul t^* rezultă din (20)

$$t^* = m \int_0^{V^*} \frac{\mathrm{d}V}{F - s\left[2S\mu_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{2^{2n}} \left(\frac{V}{h}\right)^{2n+1}\right]}. \tag{21}$$

Limitînd seria la un număr finit de termeni, N, calculul dă pentru N valori ale lui t^*, V^* și h, experimental determinați, coeficienții $\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}$. În cazul mai general cînd și h este o funcție de timp, ale cărei valori sînt de asemenea măsurate ca și t^*, V^*, atunci, folosind o nouă variabilă $\theta = \frac{V}{h}$, se obține

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{F - sq_{21}(\theta)}{m\dot{h}} - \theta}. \tag{22}$$

Soluția poate fi obținută prin aproximații succesive, considerînd inițial, de exemplu, o variație liniară a lui h în funcție de timp, între h_0 și

h^*. O primă relație $\theta(h) = \theta(t)$ rezultă integrînd (22), în care $\dot{h} \cong (h^* - h_0)/t^*$; atunci $h(\theta)$ și $\dot{h}(\theta) = (\mathrm{d}h/\mathrm{d}\theta)\,\dot{\theta}$ rezultă, permițînd o nouă operație pînă la obținerea unei precizii satisfăcătoare. Folosind N valori experimentale, coeficienții μ_{2n+1} pot fi calculați pentru fiecare aproximare. Diferența

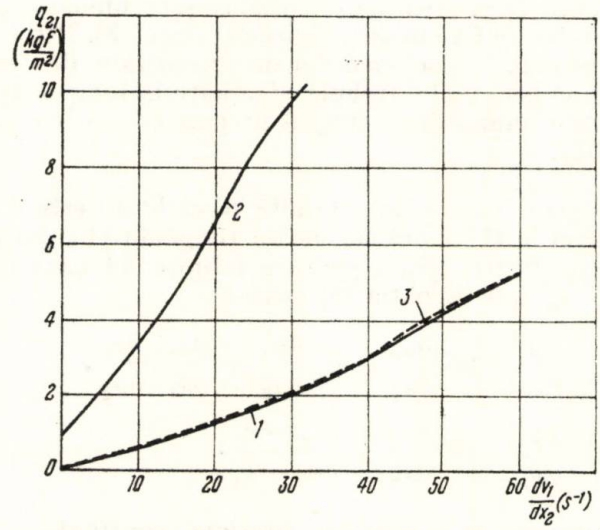


Fig. 1. — Curbele experimentale, tensiuni de forfecare-gradient de viteză pentru două medii nenewtoniene, ulei STAS 419 + polymethacrylat (1), miere (2) și soluția analitică (3). Temperatura = 30°C.

dintre valoarea măsurată finală a lui V^* și produsul $h^*\theta^*$ calculat arată precizia ultimului rezultat.

Cînd curbura suprafețelor este neglijabilă, în cazul cilindrilor coaxiali cu ($h \ll R_{1,2}$), se pot utiliza direct formulele (18), (19), forța exterioară F și q_{21} rezultînd din momentele aplicate. Astfel, curbele $q_{21} = f(\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}x_2) = f(V/h)$ pot fi stabilite în mod experimental. Ca exemplu, în figura 1 sînt prezentate două curbe aparținînd unor medii cu comportare reologică, una pentru uleiul românesc STAS 419 + 10% aditiv (Plexol) [4] și alta pentru miere (un mediu cu totul neobișnuit, dar cu o comportare sugestivă). S-au utilizat valorile $R_1 = 24$ mm, $R_2 = 25$ mm și vitezele unghiulare în domeniul 2,4 ÷ 13 rot/min. Pentru a se elimina efectele de capăt, rezultatele au fost determinate prin scăderea valorilor obținute pentru diferite nivele în cavitatea dintre cilindrii verticali coaxiali. Un calcul simplu arată că eroarea introdusă prin neglijarea curburii suprafețelor este de ordinul $h/r = 4\%$, deci admisibilă. Valorile calculate din curbele experimentale ale coeficienților sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Mediul	μ_0 kgf/m²	μ_1 kgfs/m²	μ_3 kgfs^{-3}/m²	μ_5 kgfs^5/m²
Ulei 419 + 10% Plexol	5×10^{-2}	$4{,}65 \times 10^{-2}$	$9{,}08 \times 10^{-5}$	$-5{,}2 \times 10^{-8}$
Miere	5×10^{-1}	$2{,}24 \times 10^{-1}$	$9{,}28 \times 10^{-4}$	$-2{,}72 \times 10^{-6}$

Este de remarcat că valorile obţinute pentru coeficienţii de viscozitate sînt valabile pentru un anumit domeniu al gradienţilor de viteză, care în practică pot atinge valori sensibil mai ridicate. În multe situaţii poate să fie necesar un număr mai mare de coeficienţi. În scopul de a obţine rezultate comparabile, pentru diverse medii, trebuie considerat acelaşi interval pentru gradienţii de viteză, ca şi un număr egal de termeni sau variind între limite fixe în dezvoltările (1) sau (18). Este, de asemenea, de semnalat dependenţa coeficienţilor de viscozitate de temperatură şi de timp. Astfel, experienţele trebuie efectuate la temperaturi constante, şi datele prelevate numai după timpul necesar ca efectele de relaxare să devină neglijabile.

Medii Bingham generalizate. O altă posibilitate este de a considera numai doi termeni în (1), adică un mediu Bingham [1], dar cu coeficienţi variabili μ_0 şi μ_1. Pentru plăci paralele infinite, în baza presupunerilor anterioare, $v_2 = v_3 = 0$. Ecuaţia (5) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 2S\frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} + \mu_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 2S\frac{\partial \mu_0}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Pentru mişcarea cu gradient de presiune constant, v_1 este funcţie numai de x_2; atunci

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}; \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} = \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} = 0 \tag{24}$$

şi de obicei

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}.$$

Ecuaţia derivînd din (1),

$$q_{21} = 2S\mu_0 + \mu_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}, \tag{25}$$

reprezintă o curbă dată experimental, iar

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2} = \eta_{21}(x_2); \ \mu_1(x_2) = \mu_1(\eta_{21}) = \frac{\partial q_{21}}{\partial \eta_{21}}; \ \mu_0(x_2) = \mu_0(\eta_{21}). \tag{26}$$

În plus, se poate presupune că q_{21} şi derivatele sale sînt continue; prin urmare ,μ_0 şi μ_1, ţinînd seamă de aceste restricţii, pot fi definiţi în mod arbitrar şi de aceea trebuie impusă o condiţie suplimentară. Fie

$$2S\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\eta_{21}} + \eta_{21}\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\eta_{21}} = 0 \tag{27}$$

şi atunci, deoarece $q_{21}\ (\eta_{21})$ este cunoscut, rezultă μ_0 şi μ_1 :

$$\mu_0 = -\frac{1}{2} S\left(\eta_{21}\mu_1 - \int \mu_1 \mathrm{d}\eta_{21} + C\right),$$
$$\int \mu_1 \mathrm{d}\eta_{21} - C = q_{21}. \tag{28}$$

Dar, în acest caz $(\mathrm{d}q_{21}/\mathrm{d}\eta_{21}) = (\partial q_{21}/\partial \eta_{21}) = \mu_1$ şi ecuaţia (26) reprezintă tangenta într-un punct la curba $q_{21}\ (\eta_{21})$, corespunzătoare valori-

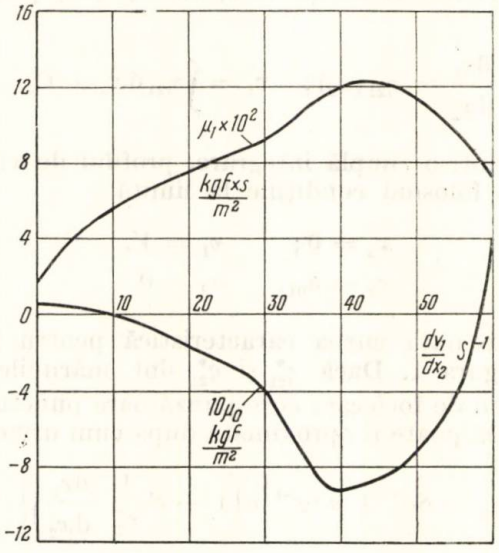


Fig. 2. — Variaţia coeficienţilor de viscozitate μ_0 şi μ_1 în funcţie de gradientul de viteză.

lor μ_0 şi μ_1 considerate constante. În plus, valorile μ_0 şi μ_1 pot fi direct aflate din diagramă (fig. 1).

Figura 2 arată variaţia lor cu η_{21} şi poate fi considerată mai degrabă ca reprezentativă pentru fiecare material decît curba $q_{21}\ (\eta_{21})$. Într-adevăr, figurile 1 şi 2 arată că, pentru μ_0 şi μ_1 constante, curbele $q_{21}\ (\eta_{21})$ diferă mult mai puţin decît $\mu_0\ (\eta_{21})$ şi $\mu_1\ (\eta_{21})$, care, în ultimul caz, devin paralele cu axa absciselor.

Să considerăm $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x_1) = 0$. Gradientul de viteză este $(\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}x_2) = -V/h$ şi rezultă q_{21}. Prin urmare,

$$\mu_1 = \left(\frac{\partial q_{21}}{\partial \eta_{21}}\right)_{\eta_{21}=V/h}, \quad \mu_0 = -\frac{1}{2}\left(q_{21} - \frac{V}{h}\frac{\partial q_{21}}{\partial \eta_{21}}\right)_{\eta_{21}=V/h}. \tag{29}$$

Cu ambele valori μ_0 şi μ_1 astfel calculate, soluţiile cunoscute pentru mediile Bingham pot fi folosite.

Dacă gradientul de presiune este constant, $dp_1/dx_1 = p' \neq 0$, relația generală

$$\frac{\partial q_{21}}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \tag{30}$$

conduce, folosind și condițiile la limită $x_2 = h_{01}$, $v_1 = (dv_1/dx_2)_1 = 0$ $(q_{21})_1 = 2S\mu_0$, la expresia

$$q_{21} = p'(x_2 - h_{01}) + 2S\mu_0. \tag{31}$$

Profilele de viteză. Ecuațiile (25), (26) și (31) permit să se obțină funcția

$$\frac{dv_1}{dx_2} = \eta_{21}(x_2); \quad v_1 = \int \eta_{21} dx_2 + C_3 \tag{32}$$

și, după aceea, printr-o simplă integrare, profilul de viteze. Constantele h_{01} și C_3 se obțin folosind condițiile la limită

$$\begin{aligned} x_2 &= 0; & v_1 &= V, \\ x_2 &= h_{01}, & v_1 &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Aplicație. Fie dată curba caracteristică pentru un ulei aditivat, reprezentată în figura 1. Dacă η_{21}^* și q_{21}^* sînt mărimile gradientului de viteză și al tensiunii de forfecare corespunzătoare punctului de inflexiune, curba experimentală poate fi aproximată după cum urmează :

$$q_{21} = Sq_{21}^* + a \operatorname{tg}^{-1}\left[b\left(1 - S\frac{1}{\eta_{21}^*}\frac{dv_1}{dx_2}\right)\right], \tag{34}$$

a și b fiind coeficienți, avînd valori diferite după cum $0 < S\eta_{21} < \eta_{21}^*$ sau $S\eta_{21} > \eta_{21}^*$. Ei pot fi obținuți din următoarele două grupe de condiții, dacă valorile experimentale extreme sînt $\bar{\eta}_{21}$ și $\bar{q}_{21}$:

$$\begin{aligned} &\frac{dv_1}{dx_2} = 0, \; q_{21} = 2S\mu_0, \; b = 1 && (0 < S\eta_{21} < \eta_{21}^*), \\ &\frac{dv_1}{dx_2} = 0, \; q_{21} = 2S\mu_0, \quad \frac{dv_1}{dx_2} = \bar{\eta}_{21}, \quad q_{21} = S\bar{q}_{21} && (S\eta_{21} > \eta_{21}^*). \end{aligned} \tag{35}$$

Figura 1 redă curba experimentală (linie continuă) și pe aceea care o aproximează (linie întreruptă) obținută din (34) și (35). Egalînd (31) și (34), obținem

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx_2} &= \left[-\frac{1}{b}\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}^{-1}b + \frac{x_2 - h_{01}}{a}p'\right) + 1\right]\eta_{21}^* S, \\ v_1 &= S\eta_{21}^*\left[x_2 + \frac{a}{bp'}\ln\cos\left(\frac{x_2 - h_{01}}{a}p' + \operatorname{tg}^{-1}b\right)\right] + C_4, \end{aligned} \tag{36}$$

apoi, utilizînd condiţiile la limită (33), rezultă un sistem de ecuaţii :

$$V = S\eta_{21}^* \frac{a}{bp'} \ln \cos\left(\mathrm{tg}^{-1} b - \frac{h_{01}}{a} p'\right) + C_4,$$
$$0 = S\eta_{21}^* \left[h_{01} + \frac{a}{bp'} \ln \cos(\mathrm{tg}^{-1} b)\right] + C_4. \tag{37}$$

Cînd $h_{01} > h$, în ecuaţiile (37) h_{01} trebuie să fie înlocuit cu h. În final, distribuţia de viteze va fi dată de formula

$$v_1 = V + S\eta_{21}^* \left[x_2 + \frac{a}{bp'} \ln \frac{\cos\left(\frac{x_2 - h_{01}}{a} p' + \mathrm{tg}^{-1} b\right)}{\cos\left(\mathrm{tg}^{-1} b - \frac{h_{01}}{a} p'\right)}\right], \tag{38}$$

unde h_{01} este dat de

$$S \frac{V + S\eta_{21}^* h_{01}}{a\eta_{21}^*} bp' = \ln \frac{\cos\left(\mathrm{tg}^{-1} b - \frac{h_{01}}{a} p'\right)}{\cos(\mathrm{tg}^{-1} b)}. \tag{39}$$

Mai departe, ca exemplu numeric, considerăm $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x_1) = 5000$ kgf/m^3, $h = 6 \times 10^{-4}$ m, $V = V_1 = 0{,}025$ m/s, $(S = -1)$ şi, din figura 1, $2\mu_0 = 0{,}1$ kgf/m^2, $\eta_{21}^* = 40$ s^{-1}, $q_{21}^* = 3$ kgf/m^2. Cu datele de mai sus rezultă $a = \frac{11{,}6}{\pi}$ $(-\eta_{21} < \eta_{21}^*)$, respectiv $a = \frac{7{,}6}{\pi}$ şi $b = 2{,}57$ pentru $-\eta_{21} > \eta_{21}^*$. Formula (39) dă $h_{01} = 9{,}09 \times 10^{-4}$ m $> h$ pentru $-\eta_{21} < \eta_{21}^*$. Dacă x_{20} este cota unde $(\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}x_2) = -\eta_{21}^*$, condiţia ca $v_1(x_{20})$ să aibă aceeaşi valoare pentru amîndouă seriile de coeficienţi a şi b în (36) dă $h_{01} = 9{,}91 \times 10^{-4}$ m pe intervalul $-\eta_{21} > \eta_{21}^*$. Într-adevăr, în această aplicaţie diferenţele sînt neglijabile, şi o aceeaşi formulă $v_1(x_2)$ poate fi utilizată pe întreg intervalul. Figura 3 reprezintă distribuţia de viteze pentru cazul examinat şi distribuţia de viteze pentru fluidul newtonian, cores-

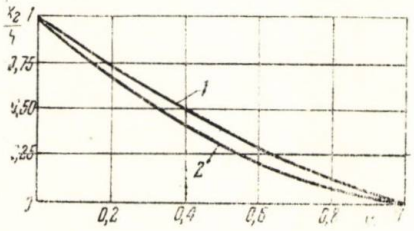


Fig. 3. — Profilele de viteză pentru ulei STAS 419 cu 10% Plexol (polymethacrylat) (1) şi fără aditiv (newtonian) (2).

punzătoare aceloraşi valori, şi $\mu_1 = 4{,}65 \times 10^{-2}$ kgfs/m^2 (tabela 1). Diferenţele relevă oportunitatea de a considera fluidul real, nenewtonian, în calculul forţelor de frecare, chiar pentru gradienţi de viteză mici.

Concluzii. Pentru a se obţine caracteristicile comportării reologice se pot realiza experienţe standard, utilizîndu-se o aparatură simplă, cum ar fi cilindrii coaxiali. Este însă necesară o definire a domeniilor standard de temperaturi şi gradienţi de viteză care să permită compararea diferitelor medii reologice, lucrînd în condiţii date. Reiese de asemenea că o caracterizare cu ajutorul unei singure valori a unui parametru, cum ar fi viscozitatea în cazul fluidelor newtoniene, nu mai este posibilă şi de aceea sînt necesare numeroase determinări sau o curbă experimentală.

Dezvoltările în serie de puteri conduc direct la valorile numerice ale unor coeficienţi caracteristici fiind astfel mai indicate pentru obţinerea datelor comparative. Teoria generalizată cu doi termeni poate fi mai cuprinzătoare, deşi trebuie luate în consideraţie curbe pentru amîndoi coeficienţii μ_0 şi μ_1.

Profilele de viteză pot fi de asemenea semnificative pentru comportarea reologică şi se pot obţine din curbele tensiunilor de forfecare în funcţie de gradientul de viteză, adică prin calcule folosind date experimentale. O determinare directă a profilelor de viteză este mai complicată şi, astfel, de interes practic mai redus.

Autorii doresc să exprime mulţumiri ing. Olga Biţă, care a efectuat toate experienţele menţionate în această lucrare.

Primită la redacţie la 14 septembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. L. A. Scipio, *Principles of Continua with Applications*, New York, John Wiley & Sons, 1967.
2. B. Finzi, M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, N. Zanichelli, 1949.
3. N. Tipei, *On the Mechanics of Non-Newtonian Media*, Transactions of the ASME — Journal of Basic Engineering, vol. 87, Series D, No. 3.
4. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le graissage des moteurs*, Paris, TECNIP, 1962.

UNELE ASPECTE ALE DEZLOCUIRII BIDIMENSIONALE A FLUIDELOR MISCIBILE ÎN MEDII POROASE

de T. OROVEANU şi I. SPULBER
Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti

Se consideră problema dispersiei unui fluid într-un mediu poros, în cazul în care acesta dezlocuieşte un alt fluid cu aceeaşi viscozitate şi greutate specifică. În cazul în care scurgerea este plană, iar coeficienţii de dispersie depind de viteză, dacă dispersia este staţionară, concentraţia satisface o ecuaţie de tip eliptic. Sînt propuse metode de rezolvare pentru unele probleme de limită. Atunci cînd este valabilă legea lui Darcy, apar unele simplificări, dar problemele matematice rămîn în fond aceleaşi. Se consideră şi cazul dispersiei nestaţionare, pentru care sînt valabile consideraţii asemănătoare cu cele precedente.

1. INTRODUCERE

Dezlocuirea unui fluid care saturează un mediu poros de către un altul miscibil cu el a făcut obiectul unor cercetări teoretice relativ numeroase. Pornind de la concepţii destul de diferite studiile au condus aproape fără excepţie la stabilirea ecuaţiei

$$\frac{\partial C}{\partial t} + g^{ij}\overline{w}_j \frac{\partial C}{\partial \zeta^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} K_{jk} g^{kl} \frac{\partial C}{\partial \zeta^l}\right), \tag{1}$$

scrisă în cazul de faţă într-un sistem de coordonarte curbilinii ζ^i, cu utilizarea notaţiilor calculului tensorial. În ecuaţia (1), C reprezintă concentraţia într-unul din cele două fluide, $\overline{w}_j$ componentele covariante ale vitezei medii reale, care se obţine împărţind viteza de filtrare cu porozitatea, şi K_{jk} componentele covariante ale tensorului de dispersie. De asemenea, am notat cu g valoarea absolută a determinantului tensorului metric g_{ij} şi cu g^{ij} componentele tensorului contravariant asociat tensorului metric. Într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale x_i, ecuaţia (1) ia forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{w}_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

la scrierea căreia am utilizat din nou convenţia indicelui de sumare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 517–524, BUCUREŞTI, 1969

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Mai mulţi cercetători [1], [2], [7], [8], [12], [13] au pus în evidenţă existenţa unei anizotropii în fenomenul de dispersie într-un mediu poros, chiar dacă acesta din urmă este izotrop. Mai este necesar să precizăm că, pentru a ajunge la ecuaţia (1) sau (2), trebuie să presupunem că cele două fluide sînt incompresibile.

În cele ce urmează, ne vom mărgini la studiul scurgerii plane într-un mediu poros omogen şi izotrop, problemă care, după cîte ştim, a făcut obiectul unui număr destul de restrîns de cercetări [4], [5], [6], [9], [10], [14]. Dacă adoptăm concluziile lucrărilor [2], [8] şi [13], există în acest caz ($\overline{w}_3 = 0$) numai cinci coeficienţi diferiţi de zero, şi anume K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{12} şi K_{21}. Mai mult, într-un sistem de coordonate rectangulare nu sînt decît patru coeficienţi de dispersie diferiţi între ei, deoarece, în acest caz, $K_{12} = K_{21}$. În conformitate cu unele dintre aceste consideraţii teoretice, K_{33} este destul de mic faţă de K_{11} şi de K_{22}, ceea ce ne conduce la ideea de a-l neglija, pentru a studia astfel o problemă esenţial bidimensională. Scopul nostru nu este, de altfel, acela de a rezolva anumite probleme particulare, ci de a indica metode de rezolvare ce ar putea fi aplicate în acest scop.

În principiu, viteza medie reală nu este supusă nici unei restricţii în ceea ce priveşte mărimea ei. Atunci cînd scurgerea este destul de lentă pentru ca legea lui Darcy să fie valabilă, se poate determina destul de uşor cîmpul de viteze. Singura dificultate importantă care apare în acest caz este datorită faptului că viscozitatea este funcţie de concentraţie. Acest inconvenient poate fi înlăturat presupunîndu-se că cele două fluide au aceeaşi viscozitate, lucru care a fost făcut, de altfel, în multe studii teoretice referitoare la dispersia în medii poroase.

Atît cercetările teoretice, cît şi cele experimentale, acestea din urmă referindu-se în special la scurgerile unidimensionale, au arătat că există o dependenţă de viteză a coeficienţilor de dispersie. Trebuie să remarcăm însă că relaţiile empirice nu sînt totdeauna în bun acord cu formulele teoretice, afară de regimul de difuzie mecanică pură, în care difuzia moleculară nu mai joacă nici un rol [11]. Aceasta din urmă apare în formulele teoretice fie cu un termen aditiv [8], fie într-un mod mai complicat [12].

Vom considera mai întîi fenomenul de dispersie independent de timp, pentru a trece apoi la cazul mai general ce corespunde la o variaţie în timp a concentraţiei, De asemenea, vom presupune mai întîi că scurgerea nu ascultă de legea lui Darcy; utilizarea acestei legi, care uşurează într-o oarecare măsură calculele, va fi luată în considerare ulterior.

2. DISPERSIA STAŢIONARĂ

În conformitate cu ipotezele pe care le-am făcut, atunci cînd nu depinde de timp, concentraţia este o soluţie a ecuaţiei

$$K_{11}\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + 2K_{12}\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22}\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial K_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{12}}{\partial x_2} - \overline{w}_1\right)\frac{\partial C}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial K_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial K_{12}}{\partial x_1} - \overline{w}_2\right)\frac{\partial C}{\partial x_2} = 0. \tag{3}$$

Această ecuație este de tip eliptic, deoarece avem

$$K_{12}^2 - K_{11}K_{22} = K_{11}K_{22}\left(\frac{K_{12}^2}{K_{11}K_{22}} - 1\right) < 0, \tag{4}$$

dat fiind că, în conformitate cu rezultatele teoretice și cu unele date experimentale, coeficientul de dispersie transversală este mai mic decît coeficienții de dispersie longitudinală. Într-adevăr, dacă punem ([2], [13])

$$K_{11} = a_I \frac{\overline{w}_1^2}{|\overline{w}|} + a_{II}\frac{\overline{w}_2^2}{|\overline{w}|}\,;\; K_{22} = a_{II}\frac{\overline{w}_1^2}{|\overline{w}|} + a_I\frac{\overline{w}_2^2}{|\overline{w}|}, \tag{5}$$

$$K_{12} = K_{21} = (a_I - a_{II})\frac{\overline{w}_1\overline{w}_2}{|\overline{w}|},$$

a_I și a_{II} fiind constante pozitive, rezultă

$$\frac{K_{12}^2}{K_{11}K_{22}} = \frac{a_I^2 + a_{II}^2 - 2a_Ia_{II}}{a_I^2 + a_{II}^2 + a_Ia_{II}\left(\dfrac{\overline{w}_1^2}{\overline{w}_2^2} + \dfrac{\overline{w}_2^2}{\overline{w}_1^2}\right)} < 1. \tag{6}$$

Ecuația (3) poate fi adusă la forma canonică, gradul de dificultate al calculelor fiind legat de posibilitatea de a se găsi soluțiile sistemului de ecuații

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{K_{12} \pm \sqrt{K_{12}^2 - K_{11}K_{22}}}{K_{11}}, \tag{7}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{(a_I - a_{II})\,\overline{w}_1\overline{w}_2 \pm i\overline{w}^2\sqrt{a_Ia_{II}}}{a_I\overline{w}_1^2 + a_{II}\overline{w}_2^2} \tag{8}$$

dacă ținem seama de (5).

Notînd cu $f(x_1,x_2) = c$ și $f^*(x_1, x_2) = c$ integralele generale complex conjugate ale sistemului (8) și introducînd variabilele

$$\xi_1 = \frac{f + f^*}{2}, \quad \xi_2 = \frac{f - f^*}{2i}, \tag{9}$$

obținem ecuația

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \xi_2^2} + a_1(\xi_1, \xi_2)\frac{\partial C}{\partial \xi_1} + a_2(\xi_1, \xi_2)\frac{\partial C}{\partial \xi_2} = 0, \tag{10}$$

în care funcțiile $a_1(\xi_1, \xi_2)$ și $a_2(\xi_1, \xi_2)$ sînt cunoscute.

Pentru această ecuație, sau pentru sistemul de tip eliptic de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi care îi corespunde, pot fi considerate diferite probleme la limită [3], [15].

Astfel, dacă ne referim la problema lui Dirichlet pentru un domeniu D simplu conex (concentrația ia valori date pe frontiera acestui domeniu), se poate arăta că soluția este unică. Scriind ecuația (10) sub forma

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \xi_2^2} = -a_1(\xi_1, \xi_2)\frac{\partial C}{\partial \xi_1} - a_2(\xi_1, \xi_2)\frac{\partial C}{\partial \xi_2}, \tag{11}$$

se constată că, dacă membrul al doilea ar fi cunoscut, aceasta ar fi ecuaţia lui Poisson. Ca urmare a acestui fapt, soluţia problemei lui Dirichlet rezultă din ecuaţia integro-diferenţială

$$C(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2\pi}\iint_D G(\xi_1, \xi_2; X_1, X_2)\left[a_1(X_1, X_2)\frac{\partial C}{\partial X_1} + \right.$$

$$\left. + a_2(X_1, X_2)\frac{\partial C}{\partial X_2}\right] \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2,] \tag{12}$$

$G(\xi_1, \xi_2; X_1, X_2)$ fiind funcţia lui Green pentru ecuaţia lui Laplace pentru domeniul D, şi $F(\xi_1, \xi_2)$ o funcţie armonică ce satisface condiţia la limită a problemei.

Pentru obţinerea soluţiei se poate utiliza un procedeu de aproximaţii succesive, punînd

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \tag{13}$$

cu

$$C_0 = F(\xi_1, \xi_2) \tag{14}$$

şi

$$C_n(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi}\iint_D G(\xi_1, \xi_2; X_1, X_2)\left[a_1(X_1, X_2)\frac{\partial C_{n-1}}{\partial X_1} + \right.$$

$$\left. + a_2(X_1, X_2)\frac{\partial C_{n-1}}{\partial X_2}\right] \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2. \tag{15}$$

Procedeul este convergent dacă a_1 şi a_2 sînt funcţii continue în raport cu ξ_1 şi ξ_2, împreună cu derivatele lor de primul ordin, şi dacă funcţia $C(\xi_1, \xi_2)$ are pe frontiera domeniului D derivate de primele trei ordine.

Există posibilitatea de a se reduce (12) la o ecuaţie integrală; după un calcul simplu, în care facem să intervină faptul că funcţia lui Green este nulă pe frontiera lui D, găsim

$$C(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2\pi}\iint_D \left[\frac{\partial(a_1 G)}{\partial X_1} + \frac{\partial(a_2 G)}{\partial X_2}\right] C(X_1, X_2)\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2, \tag{16}$$

ecuaţie care poate fi rezolvată tot printr-un procedeu de aproximaţii succesive.

Cu notaţia

$$U = \frac{\partial C}{\partial \xi_1} - \mathrm{i}\frac{\partial C}{\partial \xi_2}, \tag{17}$$

găsim, în loc de (10), ecuaţia

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^*} = AU + A^*U^*, \tag{18}$$

în care

$$A = -\frac{1}{4}(a_1 + \mathrm{i}a_2), \tag{19}$$

iar U^* şi A^* reprezintă conjugatele complexe ale funcţiilor U şi A, iar

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right). \tag{20}$$

Printre problemele la limită pentru ecuaţia (18) care şi-ar putea găsi aplicaţie în cadrul acestor consideraţii, sînt şi acelea studiate în [15].

În cazul în care este valabilă legea lui Darcy, avem, în coordonate carteziene ortogonale,

$$\overline{w}_i = \frac{v_i}{m} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2), \quad \varphi = -\frac{k}{m\mu}(p + V), \tag{21}$$

v_i reprezentînd componentele vitezei de filtrare, m porozitatea, k permeabilitatea, μ viscozitatea dinamică a fluidului, p presiunea şi V potenţialul forţelor exterioare. Funcţia φ şi funcţia de curent ψ sînt armonice şi conjugate dacă, aşa cum am precizat mai înainte, viscozitatea dinamică este constantă. Cu φ şi ψ se poate defini deci un sistem de coordonate ortogonale, obţinîndu-se astfel [2] ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(K_1 \frac{\partial C}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(K_2 \frac{\partial C}{\partial \psi}\right) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} = 0, \tag{22}$$

K_1 fiind coeficientul de dispersie longitudinală, iar K_2 coeficientul de dispersie transversală.

Dacă luăm pentru aceşti coeficienţi expresiile

$$K_1 = a_{\mathrm{I}}\overline{w}; \quad K_2 = a_{\mathrm{II}}\overline{w}, \tag{23}$$

deduse din (5), şi introducem noile variabile

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{a_{\mathrm{I}}}}\varphi, \quad \Psi = \frac{1}{\sqrt{a_{\mathrm{II}}}}\psi, \tag{24}$$

găsim, în loc de (22),

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\overline{w}}\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \Phi} - \frac{1}{\sqrt{a_{\mathrm{I}}}}\right)\frac{\partial C}{\partial \Phi} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \Psi}\frac{\partial C}{\partial \Psi} = 0. \tag{25}$$

Pentru simplificare, introducem funcţia

$$f = \overline{w} - \frac{\Phi}{\sqrt{a_{\mathrm{I}}}}, \tag{26}$$

obţinînd în acest mod ecuaţia

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Phi}\frac{\partial C}{\partial \Phi} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Psi}\frac{\partial C}{\partial \Psi} = 0, \tag{27}$$

care, aşa cum este uşor de constatat, îşi păstrează forma atunci cînd se efectuează o reprezentare conformă.

Ecuația (27) poate fi privită ca un caz particular al ecuației (10) și, prin urmare, problema lui Dirichlet are soluția

$$C(\Phi, \Psi) = F(\Phi, \Psi) + \frac{1}{2\pi}\iint_D G(\Phi, \Psi; \widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}) \left[\frac{1}{\overline{w}} \frac{\partial f}{\partial \widetilde{\Phi}} \frac{\partial C}{\partial \widetilde{\Phi}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\overline{w}} \frac{\partial f}{\partial \widetilde{\Psi}} \frac{\partial C}{\partial \widetilde{\Psi}}\right] d\widetilde{\Phi}\, d\widetilde{\Psi}, \tag{28}$$

dedusă din (12). Procedeul de aproximații succesive menționat mai înainte se poate aplica fie acestei ecuații, fie ecuației integrale care rezultă din ea și este analogă cu (16). Faptul că (27) nu-și schimbă forma în urma unei reprezentări conforme ușurează calculele, deoarece putem reprezenta domeniul D pe un altul de formă convenabilă în acest sens.

Am considerat mai de aproape problema lui Dirichlet, deoarece este cea mai simplă. În aplicațiile eventuale, această problemă apare destul de particulară, condițiile la limită fiind adesea mixte. Semnalăm faptul că studiile teoretice referitoare la problemele la limită pentru ecuația de tip eliptic de care ne ocupăm sînt foarte dezvoltate și permit să se poată rezolva și alte probleme decît aceea a lui Dirichlet.

3. DISPERSIA NESTAȚIONARĂ

Atunci cînd concentrația depinde și de timp, trebuie considerată ecuația

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \overline{w}^3 \left[\frac{\partial^2 C}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\overline{w}}\left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \Phi} - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)\frac{\partial C}{\partial \Phi} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \Psi}\frac{\partial C}{\partial \Psi}\right], \tag{29}$$

dacă facem de la început ipoteza că legea lui Darcy este valabilă și dacă utilizăm pentru K_1 și K_2 aceleași formule ca și mai sus. Introducînd și de data aceasta funcția definită prin (26), obținem

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \overline{w}^3 \left[\frac{\partial^2 C}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Phi}\frac{\partial C}{\partial \Phi} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Psi}\frac{\partial C}{\partial \Psi}\right], \tag{30}$$

ecuație care este liniară ca și precedenta. Dacă aplicăm, de exemplu, transformarea lui Laplace,

$$\overline{C} = \int_0^\infty C\, e^{-st}\, dt, \tag{31}$$

găsim

$$\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Phi}\frac{\partial \overline{C}}{\partial \Phi} + \frac{1}{\overline{w}}\frac{\partial f}{\partial \Psi}\frac{\partial \overline{C}}{\partial \Psi} - \frac{s}{\overline{w}^3}\overline{C} = \frac{C_0}{\overline{w}^3}, \tag{32}$$

unde C_0 reprezintă valoarea concentrației la $t = 0$. În multe cazuri se poate considera $C_0 = 0$, iar dacă C_0 este o constantă, o schimbare de funcție simplă în (30) aduce condiția inițială tot la această formă. Astfel ecuația (32) devine mai simplă, dar, în orice caz, ea este tot de tip eliptic. Prin urmare, considerații analoge cu cele precedente pot fi dezvoltate și în acest caz.

În sfîrşit, în cazul în care separarea variabilei t este posibilă, se obţine pentru funcţia care depinde numai de Φ şi de Ψ o ecuaţie de acelaşi tip ca (32).

Mai semnalăm faptul că, dacă viteza depinde şi ea de timp, problema devine extrem de complicată.

4. CONCLUZII

Aşa cum am precizat, acest studiu a avut ca obiect numai să arate unele posibilităţi de a se găsi soluţiile problemelor de dezlocuire bidimensională a fluidelor miscibile. Rezultatele nu sînt deosebit de încurajatoare, deoarece rezolvarea unei ecuaţii de tipul pe care l-am întîlnit prezintă dificultăţi de calcul destul de mari. Metodele care aduc această problemă la rezolvarea unei ecuaţii integro-diferenţiale sau integrale au totuşi avantajul de a permite lămurirea unor probleme referitoare la existenţa şi unicitatea soluţiei.

Posibilitatea de a se găsi soluţii aproximative făcîndu-se unele simplificări în ecuaţia diferenţială poate fi de asemenea luată în consideraţie. Aceste simplificări sînt însă legate de cazurile particulare ce trebuie studiate şi, ca atare, nu intră în cadrul consideraţiilor de ordin general.

Primită la redacţie la 6 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. J. Bear, *On the tensor form of dispersion in porous media*, Journal of Geophysical Research, **66**, *4* (1961).
2. J. Bear, I. Bachmat, *The general equations of hydrodynamic dispersion in homogeneous, isotropic, porous mediums*, Journal of Geophysical Research, **69**, *12* (1964).
3. F. D. Gahov, *Kraevie zadaci*, Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematiceskoi literaturi, Moskva, 1958, p. 365–401.
4. G. F. Carrier, *The mixing of ground water and sea water in permeable subsoils*, Journal of Fluid Mechanics, **4**, *5* (1958).
5. A. O. Garder Jr. D. W. Peaceman, A. L. Pozzi Jr., *Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics*, Transactions AIME, *231* (1964).
6. J. A. Hoopes, D. R. F. Harleman, *Wastewater recharge and dispersion in porous media*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division, *93*, HY5, 1967.
7. G. de Josselin de Jong, *Longitudinal and transversal diffusion in granular deposits*, Transactions of American Geophysical Union, **39**, *1* (1958).
8. V. N. Nikolaevski, *Konvektivnaia diffuziia v poristh sredah*, Prikladnaia matematika i mehanika, **XXIII**, *6* (1959).
9. D. W. Peaceman, H. H. Rachford Jr., *Numerical calculation of multidimensional miscible displacement*, Transactions AIME, *225* (1962).
10. D. W. Peaceman, *Improved treatment of dispersion in numerical calculation of multidimensional miscible displacement*, Transactions AIME, *237* (1966).

11. H. O. PFANNKUCH, *Contributions à l'étude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux*, Revue de l'Institut Français du Pétrole et Annales des combustibles liquides, **XVIII**, 2 (1963).

12. P. G. SAFFMAN, *A theory of dispersion in a porous medium*, Journal of Fluid Mechanics, **6**, *3* (1959).

13. A. E. SCHEIDEGGER, *General theory of dispersion in porous media*, Journal of Geophysical Research, **66**, *10* (1961).

14. H. L. STONE, P. L. T. BRIAN, *Numerical solutions of convective transport problems*, AIChE Journal, **9**, *5* (1963).

15. I. N. VEKUA, *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Akademie Verlag, Berlin, 1963, p. 181—133.

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPII DELTA ARCUITĂ ŞI TORSIONATĂ SIMETRIC, ŢINÎND SEAMA DE SEPARAŢIA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

de acad. ELIE CARAFOLI şi ŞTEFAN STAICU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În această lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subţiri deformate, avînd distribuţia de incidenţe simetrică şi variind proporţional cu x_1 şi x_2. Luînd în consideraţie separaţia curentului la bordurile de atac subsonice, se determină distribuţia de presiuni şi caracteristicile aerodinamice ale aripii, prin intermediul unei aripi fictive, echivalentă din punct de vedere aerodinamic, cu aripa reală.

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

În lucrarea prezentă vom studia scurgerea supersonică cu separaţia curentului la bordurile de atac ale aripii delta subţiri deformată, astfel încît incidenţa este simetrică în raport cu axa de simetrie şi variază proporţional cu x_1 şi x_2 (fig. 1).

Ca şi la aripa delta subţire plană, cu incidenţa constantă [1], [9], şi în cazul de faţă curentul se separă la bordurile de atac, creînd cîte un strat de vîrtejuri ce se înfăşoară sub forma aproximativă a două cornete, care se transformă apoi în cea mai mare parte a intensităţii turbionare în două nuclee concentrate de vîrtejuri, situate simetric în raport cu axa Ox_1 (fig. 1) şi definite de coordonatele c şi t. Sistemul celor două vîrtejuri considerate concentrate va aduce modificări esenţiale asupra scurgerii.

Mişcarea rezultantă, care devine acum mai complicată, vom căuta s-o studiem pe baza teoriei mişcărilor conice de ordinul doi. În acest scop, vom urmări calea utilizată în lucrările anterioare [1], [3] şi [9], unde s-au dat soluţiile pentru aripile delta subţiri cu incidenţa constantă şi, respectiv, cu incidenţa constantă antisimetrică (antisimetrie forţată) în raport cu Ox_1, care ne-au condus la o mişcare conică propriu-zisă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 525–549, BUCUREŞTI, 1969

Astfel, vom admite că efectul desprinderii curentului la bordurile de atac ale aripii şi deci al formării nucleelor de vîrtejuri pe extrados este acela de a modifica vitezele verticale şi axiale de perturbaţie, devenind finite la borduri. Acest efect complex îl putem echivala cu acela al unei aripi

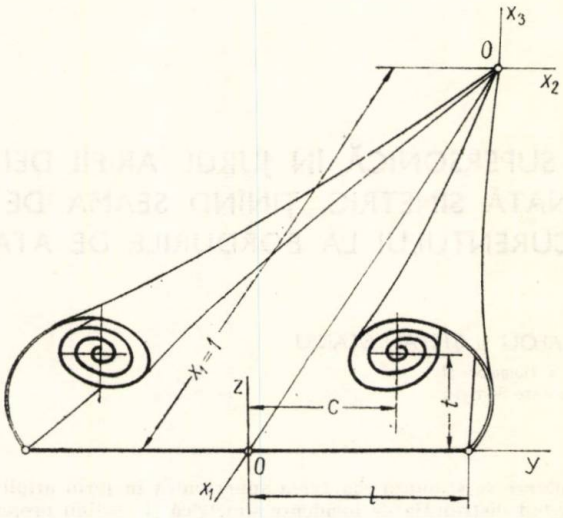


Fig. 1

cu o variaţie corespunzătoare a incidenţei sau cu o variaţie a vitezelor verticale de perturbaţie. Prin aceasta am înlocuit vitezele orizontale de perturbaţie printr-o distribuţie echivalentă de viteze verticale.

Vom obţine o distribuţie simetrică de viteze verticale pe extradosul aripii, care va corespunde astfel unei aripi delta subţiri fictive, cu incidenţa variabilă, avînd în acelaşi timp o viteză finită la bordurile de atac. Se va admite că aripa reală subţire, care are în mod cert vitezele finite la borduri prin efectul separării curentului, este echivalentă, din punct de vedere aerodinamic, cu o aripă fictivă, avînd aceeaşi variaţie de incidenţe pe care am definit-o mai sus.

Deoarece incidenţa este variabilă pe suprafaţa aripii, axa pe care se înfăşoară cornetul va fi o curbă, iar intensitatea turbionară a nucleului este variabilă în lungul axei, proporţional cu pătratul deschiderii aripii. Pentru simplificare, în cele ce urmează, axa pe care se situează nucleele de vîrtejuri se consideră o linie dreaptă.

Notînd mai departe

$$w'_u = -\alpha'_u U_\infty, \quad w'_l = -\alpha'_l U_\infty \quad (w_0 = -\alpha_0 U_\infty, \; w_1 = -\alpha_1 U_\infty) \tag{1}$$

vitezele verticale şi incidenţele w'_u, α'_u pe faţa superioară, respectiv w'_l, α'_l pe faţa inferioară, vom putea scrie pentru aripa subţire fictivă relaţia

$$\int_0^l w'_u \, dy + \int_0^l w'_l \, dy = 2wl \quad (w = -\alpha U_\infty), \tag{2}$$

unde viteza w pe aripa reală, într-o mișcare conică de ordinul doi, este funcție omogenă de ordinul unu

$$w = w_{10}x_1 \pm w_{01}x_2 = x_1(w_{10} \pm w_{01}y) = -x_1(\alpha_{10} \mp \alpha_{01}y)U_\infty \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right), \quad (3)$$

în care termenul $w_{10}\, x_1$ corespunde incidenței cu *simetrie naturală* (aripa delta arcuită), iar $\pm\, w_{01}\, x_2$ corespunde incidenței cu *simetrie forțată* (aripa delta torsionată), semnul (+) fiind considerat pentru partea dreaptă și (—) pentru cea stîngă.

În același mod ca în [1], [3] și [9], vom descompune aripa fictivă corespunzătoare distribuției de viteze verticale de mai sus în trei aripi componente.

1) Aripa subțire cu variația de incidență corespunzător aleasă, astfel încît să respecte oarecum sensul fenomenului modificării presiunii la bordurile de atac. Se obține astfel o aripă subțire fictivă cu vitezele finite la bordurile de atac, dar egale și de sens contrar pe cele două fețe, superioară și inferioară.

2) Aripa de grosime simetrică, avînd panta variabilă în același mod ca și incidența primei aripi. Această aripă combinată cu cea de la 1) are presiunile diferite pe cele două fețe, cum se întîmplă și în realitate.

3) Aripa a treia va avea o grosime simetrică, cu panta tot simetrică, însă astfel încît, combinată cu aripa din 2), să se obțină o pantă medie nulă, corespunzătoare unei aripi reale subțiri.

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

În continuare vom determina, pentru cele trei aripi componente fictive, vitezele axiale de perturbație, fiindu-ne necesare la calculul distribuției de presiuni și al caracteristicilor aerodinamice ale aripii fictive rezultante, care sînt presupuse a fi aceleași cu cele ale aripii delta subțiri reale, avînd incidența definită de (3).

Însă, mișcarea în jurul aripii fiind conică de ordinul doi, vom utiliza aceleași metode obișnuite, considerînd în acest sens secțiunea obținută în planul Oyz normal pe direcția curentului neperturbat U_∞ și avînd coordonatele

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \quad (4)$$

axele Oy și Oz fiind paralele, respectiv, cu Ox_2 și Ox_3. Mai departe vom face transformarea analogă cu cea dată de Busemann (fig. 2):

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2} \quad (x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}), \quad (5)$$

obținînd un plan ce are proprietatea de a păstra urma aripii ($\mathcal{Y} = y$, $z = \zeta = 0$) în adevărata mărime.

După cum se știe, în acest plan primele derivate ale vitezelor de perturbație u, v, w sînt funcții armonice și li se pot asocia funcțiile conjugate respective astfel încît să obținem funcții analitice de variabila complexă

$$x = \mathcal{Y} + i\zeta. \tag{6}$$

Să studiem mai departe, pe rînd, fiecare aripă definită mai sus.

1). *Aripa subțire.* Ca urmare a efectului celor două nuclee de vîrtejuri, se modifică viteza verticală atît pe aripa reală, cît și pe prima aripă componentă definită mai sus. Astfel, pentru punctele cuprinse între $[-s < y < s]$ de pe urma aripii din planul $x = \mathcal{Y} + i\zeta$ (6), viteza verticală este de aceeași formă cu cea dată de (3):

$$\frac{w'}{x_1} = w_{10}^{(0)} \pm w_{01}^{(0)} y = -(\alpha_{10}^{(0)} \mp \alpha_{01}^{(0)} y) U_\infty, \tag{7}$$

unde parametrii $w_{10}^{(0)}$ și $w_{01}^{(0)}$ corespund abscisei $y = s$, iar pe intervalele $[-l, -s]$ și $[s, l]$ vom scrie

$$\frac{w'}{x_1} = w'_{10}(y) \pm w'_{01}(y)\ y = -\left(\alpha'_{10}(y) \mp \alpha'_{01}(y)\, y\right) U_\infty, \tag{8}$$

așa încît la bordurile aripii vom obține

$$\frac{w^{(1)}}{x_1} = w_{10}^{(1)} \pm w_{10}^{(1)} l. \tag{9}$$

Variația continuă a vitezelor verticale (sau, mai precis, a parametrilor $w_{10}(y)$ și $w_{01}(y)$) ori a incidențelor corespunde unei distribuții continue de muchii elementare situate pe aripă în interiorul intervalului considerat, care dau în fiecare punct $y = \eta$ saltul elementar

$$\left(\frac{dw'_{10}}{dy} \pm \frac{dw'_{01}}{dy} y\right)_{y=\eta} d\eta. \tag{10}$$

Ținînd seama de lucrările anterioare [2], [4], contribuția, în expresia vitezei axiale de perturbație, a unei muchii elementare situate în punctul $y = \eta$ de pe aripa subțire cu bordurile subsonice ($l < 1/B$), prin aplicarea metodei analogiei hidrodinamice, va fi

$$d\mathcal{U}_1^{(d)} = (q_{20}^{(d)} + x\, q_{21}^{(d)}) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}\, d\eta. \tag{11}$$

În mod asemănător, pentru contribuția muchiei elementare situate în stînga originii, $y = -\eta$, vom avea

$$d\mathcal{U}_1^{(s)} = (q_{20}^{(s)} + x\, q_{21}^{(s)}) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta+x)}}\, d\eta. \tag{12}$$

Aceste *contribuții ale muchiilor* în expresiile vitezelor axiale și verticale de perturbație pe aripă se realizează plasînd pe urma aripii din planul $x = \mathcal{Y} + i\zeta$ (6) niște singularități de ordinul doi (în cazul de față — surse).

În felul acesta reușim să prindem în calcul efectul pînzei de vîrtejuri care se desprinde de la borduri și al nucleelor de vîrtejuri considerate concentrate, printr-o distribuție continuă de surse.

Mai departe vom admite o formă cît mai simplă a repartiției de surse, care să satisfacă condițiile impuse de problemă, de a obține concomitent vitezele axiale și verticale de perturbație preconizate mai sus pe baza observațiilor și conform rezultatelor experimentale.

Astfel, vom alege o variație liniară a intensității surselor

$$q' = (q^{*(n)} + q^{*(f)}) \left(1 - \frac{\eta}{l}\right), \tag{13}$$

unde constantele $q^{*(n)}$ și $q^{*(f)}$ corespund simetriei naturale, respectiv forțate, a incidențelor. Întrucît scurgerea este conică de ordinul doi, așa cum se vede și din (11), (12) vom scrie

$$q'_{20} = q^*_{20}\left(1 - \frac{\eta}{l}\right), \quad q'_{21} = q^*_{21}\left(1 - \frac{\eta}{l}\right) \quad (s \leqslant \eta \leqslant l). \tag{14}$$

Ținînd seama de aceste repartiții ale surselor, pornind de la (11) și (12) și vom considera contribuțiile tuturor muchiilor elementare distribuite, ca și pe cele ale bordurilor subsonice [2], pentru a obține următoarea expresie a vitezei axiale de perturbație a primei aripi componente :

$$\mathcal{U}_{1i} = \frac{1}{x_1}\,\mathcal{U}_i = \frac{A_{20} + A_{22}\,x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}\int_s^l (q'_{20} + q'_{21}\,x) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}\, d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_s^l (q'_{20} - q'_{21}\,x) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta+x)}}\, d\eta. \tag{15}$$

Introducînd pe q'_{20} și q'_{21} din (14) și efectuînd calculele se obține

$$\frac{1}{x_1}\,\mathcal{U}_i = \frac{A_{20} + A_{22}\,x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{1}{\pi}\left\{(q^*_{20} + q^*_{21}\,x)\,(s-x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} + \right.$$

$$+ (q^*_{20} - q^*_{21}\,x)\,(s+x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} +$$

$$\left. + \left[q^*_{20}\,l\left(\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}} - 2\cos^{-1}\frac{s}{l}\right) + q^*_{21}\,x^2 \cos^{-1}\frac{s}{l}\right]\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right\}, \tag{16}$$

în care A_{20}, A_{22}, q^*_{20}, q^*_{21} sînt niște constante ce se vor determina mai jos

2). *Aripa de grosime simetrică, cu panta egală cu incidența primei aripi subțiri.* Prin introducerea acestei aripi de grosime simetrică se înlătură vîrfurile accentuate de presiuni pe intradosul aripii, unde distribuția de presiuni, obținută prin suprapunerea cu aripa subțire 1)., este diferită de cea de pe extrados. Urmînd metoda generală a mișcărilor conice [2], [4], corespunzător unei aripi de grosime simetrică, cu panta definită de aceleași distribuții de surse date de relațiile (13) și (14), vom scrie pentru viteza axială de perturbație următoarea expresie:

$$\mathcal{U}_{1t} = \frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t = \frac{2}{\pi}\int_s^l (q'_{20} + q'_{21}\,x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}}\,d\eta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_s^l (q'_{20} - q'_{21}x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\,d\eta + L, \qquad (17)$$

care, în urma efectuării calculelor, devine

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t = \frac{1}{\pi}\left\{(q^*_{20} + q^*_{21}\,x)\left[(l-x)\left(1-\frac{l+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \right.\right.$$

$$-(s-x)\left(1-\frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2sx}{B(s-x)}\Big] +$$

$$+(q^*_{20} - q^*_{21}\,x)\left[(l+x)\left(1-\frac{l-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)} - \right.$$

$$-(s+x)\left(1-\frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2sx}{B(s+x)}\Big] +$$

$$+\frac{1}{Bl}\left[2l\left(\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + \frac{\sqrt{1-B^2l^2}-\sqrt{1-B^2s^2}}{2Bl}\right)q^*_{20} - \right.$$

$$\left.\left.-(\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs)\,x^2\,q^*_{21}\right]\sqrt{1-B^2x^2}\right\} + L, \qquad (18)$$

unde termenul L este datorit pantei bordului de atac:

$$\frac{\gamma^{(1)}}{x_1} = \gamma^{(1)}_{10} + \gamma^{(1)}_{01}\,l. \qquad (19)$$

3). *Aripa de grosime simetrică compensatoare de pantă.* Prin introducerea efectului aripii de la punctul 2)., aripa rezultantă a devenit aripă de „grosime simetrică". Pentru a compensa acest lucru și a ne pune în acord cu realitatea, vom introduce o nouă distribuție de surse de o formă oarecare, ce va readuce aripa la o grosime medie nulă. Variația de viteze verticale w''_{10}, egală cu $-w^{(1)}_{10}$, respectiv $\gamma^{(1)}_{10} = -\alpha^{(1)}_{10}$ la extremitatea aripii (unde indicele (1) corespunde celor două părți marginaale ale aripii), va corespunde cu „aripa compensatoare de pantă" de grosime simetrică,

care va anula panta și efectul L al pantei $\frac{\gamma^{(1)}}{x_1}$ de la extremitatea aripii 2). Astfel se elimină termenul care produce la bordul de atac o viteză tinzînd către infinit după o expresie logaritmică. Distribuția de surse q'' va trebui să creeze, în același timp, pe intradosul aripii o distribuție de presiuni fără vîrfuri accentuate, aproximativ constantă cu excepția regiunilor din apropierea bordurilor de atac.

De aceea, pentru simplificare, vom alege următoarele funcții pentru distribuția surselor:

$$q''_{20} = k_{20}\,\eta(1 + k_{10}\,\eta), \tag{20a}$$

$$q''_{21} = k_{21}\,\eta(1 + k_{11}\,\eta) \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant l). \tag{20b}$$

Astfel, am realizat ca cele două „aripi groase" componente, 2). și 3)., să se reducă la una cu panta variabilă, avînd însă *panta medie nulă*.

Pentru „aripa compensatoare", funcția vitezei axiale $\mathcal{U}_{1c}$ va fi, analog cu (17), următoarea:

$$\mathcal{U}_{1c} = \frac{1}{x_1}\,\mathcal{U}_c = \frac{2}{\pi}\int_0^l (q''_{20} + q''_{21}\,x)\,\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\eta)\,(1 - Bx)}{2\,B\,(\eta - x)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^l (q''_{20} - q''_{21}\,x)\,\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\,\eta)\,(1 + Bx)}{2\,B\,(\eta + x)}}\,\mathrm{d}\eta - L. \tag{21}$$

În urma calculelor sîntem conduși la expresia

$$\frac{1}{x_1}\,\mathcal{U}_c = \frac{k_{20}}{2\pi B^2}\Bigg[B^2(l^2 - x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1 - B^2\,lx}{B(l - x)} + \cosh^{-1}\frac{1 + B^2\,lx}{B\,(l + x)}\right) +$$

$$+ 2\,B^2\,x^2\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + 2\left(1 - \sqrt{1 - B^2\,l^2}\right)\sqrt{1 - B^2\,x^2}\Bigg] +$$

$$+ \frac{k_{20}\,k_{10}}{3\pi B^3}\Bigg[B^3(l^3 - x^3)\,\cosh^{-1}\frac{1 - B^2\,lx}{B\,(l - x)} + B^3(l^3 + x^3)\cosh^{-1}\frac{1 + B^2 lx}{B(l + x)} +$$

$$+ \left(2\sin^{-1}Bl\,B^2\,x^2 + \sin^{-1}Bl - Bl\sqrt{1 - B^2\,l^2}\right)\sqrt{1 - B^2\,x^2}\Bigg] +$$

$$+ x\Bigg\{\frac{k_{21}}{2\pi B^2}\Bigg[B^2(l^2 - x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} - \cosh^{-1}\frac{1 + B^2\,lx}{B(l + x)}\right) +$$

$$+ 2\sin^{-1}Bl\,Bx\,\sqrt{1 - B^2\,x^2}\Bigg] +$$

$$+ \frac{k_{21}\,k_{11}}{3\pi B^3}\Bigg[B^3(l^3 - x^3)\cosh^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l - x)} - B^3(l^3 + x^3)\cosh^{-1}\frac{1 + B^2\,lx}{B(l + x)} +$$

$$+ 2\,B^3\,x^3\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + 2\left(1 - \sqrt{1 - B^2\,l^2}\right)Bx\,\sqrt{1 - B^2\,x^2}\Bigg]\Bigg\} - L. \tag{22}$$

Prin superpoziţia celor trei aripi componente, se obţine aripa fictivă rezultantă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală, pentru care viteza axială de perturbaţie va fi

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{1l} + \mathcal{U}_{1t} + \mathcal{U}_{1c}. \tag{23}$$

Să observăm că viteza $\mathcal{U}_{1l}$ pe extrados este egală şi de semn contrar cu cea de pe intrados, fiind corespunzătoare unei aripi subţiri.

CAZUL SIMPLIFICAT AL UNOR SURSE CONCENTRATE

Dacă vom considera, pentru simplificare, o variaţie bruscă a vitezei verticale în punctul de abscisă $s' = c$ datorită influenţei vîrtejului din dreptul acestui punct, vom avea cazul unui salt brusc de incidenţă, corespunzător unei „muchii" de separaţie a vitezelor verticale $(w_{10}^{(0)} + w_{01}^{(0)} c)\, x_1$ şi $(w_{10}^{(1)} + w_{01}^{(1)} c)\, x_1$ [2]. Saltului brusc în distribuţia de incidenţe îi va corespunde o variaţie de viteze verticale exprimată analitic de sursa concentrată în $s' = c$ de intensitate $Q_0 = Q_0^{(n)} + Q_0^{(r)}$, pentru partea dreaptă a aripii, unde $Q_0^{(n)}$ corespunde simetriei naturale, iar $Q_0^{(r)}$ celei forţate a incidenţelor.

Urmărind în continuare calea prezentată mai sus, ca şi cele din [1] şi [3], vom obţine pentru cele trei aripi componente următoarele expresii ale vitezelor axiale de perturbaţie:

$$\mathcal{U}'_{1l} = \frac{1}{x_1}\mathcal{U}'_l = \frac{A_{20} + A_{22}\,x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}(Q_{20} + Q_{21}\,x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+c)\,(l-x)}{2l\,(c-x)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(Q_{20} - Q_{21}\,x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+c)\,(l+x)}{2l\,(c+x)}} =$$

$$= \frac{A_{20} + A_{22}\,x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}\left[Q_{20}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{l^2 - x^2}{c^2 - x^2}} \pm\right.$$

$$\left. \pm\, Q_{21}\,x\cosh^{-1}\frac{c}{l}\sqrt{\frac{l^2 - x^2}{c^2 - x^2}}\right] \tag{24}$$

pentru „aripa portantă",

$$\mathcal{U}'_{1t} = \frac{1}{x_1}\mathcal{U}'_t = \frac{2}{\pi}(Q_{20} + Q_{21}\,x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bc)\,(1-Bx)}{2B\,(c-x)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(Q_{20} - Q_{21}x)\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bc)\,(1+Bx)}{2B\,(c+x)}} + L =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[Q_{20}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2\,x^2}{B^2(c^2 - x^2)}} \pm Q_{21}\,x\cosh^{-1}Bc\sqrt{\frac{1 - B^2\,x^2}{B^2(c^2 - x^2)}}\right] + L \tag{25}$$

pentru „aripa de grosime simetrică", avînd panta egală cu incidența $\frac{\alpha'}{x_1}$ a aripii portante, care s-au dedus din (17) considerînd sursele de intensități Q_{20} și Q_{21}, concentrate în $y = c$ în locul celor distribuite liniar, [2], și

$$\mathcal{U}'_{1c} = \mathcal{U}_{1c} \tag{26}$$

pentru „aripa compensatoare" de pantă, unde $\mathcal{U}_{1c}$ are expresia dată de (22).

Vom remarca și de data aceasta că semnul vitezei axiale $\mathcal{U}'_{1l}$ este diferit pe cele două fețe ale aripii. Expresia vitezei axiale totale va fi cea dată de (23), care ne va da distribuția de presiuni pe aripa deformată.

3. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru determinarea constantelor q^*_{20} și q^*_{21}, care apar în expresia lui $\mathcal{U}_{1l}$ (16), vom porni de la condițiile

$$\operatorname{Im} \int_\sigma \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta}, \tag{27a}$$

$$-\operatorname{Im} \int_\sigma \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x}\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}w'_{01}}{\mathrm{d}\eta}, \tag{27b}$$

deduse din teoria mișcărilor conice [4], integrarea fiind efectuată pe un semicerc σ de rază foarte mică în jurul unui punct oarecare $y = \eta$ de pe aripă, cuprins pe intervalul $(y = s, y = l)$ (fig. 2).

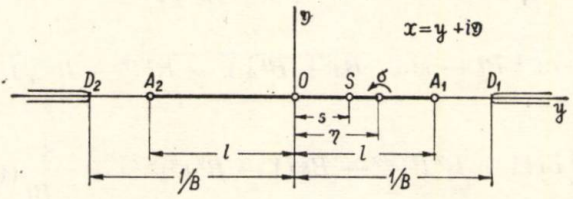


Fig. 2

Procedînd astfel, vom obține relațiile

$$q'_{20} = \frac{\eta}{(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}\left[(2 - B^2\eta^2)\frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta} + \eta\frac{\mathrm{d}w'_{01}}{\mathrm{d}\eta}\right], \tag{28a}$$

$$q'_{21} = -\frac{\eta}{(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}\left[\frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta} + B^2\eta^3\frac{\mathrm{d}w'_{01}}{\mathrm{d}\eta}\right], \tag{28b}$$

care stabilesc dependența dintre variația surselor și distribuția vitezelor verticale pe aripa fictivă subțire.

Pornind de la aceste relații și ținînd seama de (14), punem condițiile la limită în punctele $\eta = s$ și $\eta = l$, pentru viteza verticală $w' = w'_{10}\, x_1 + w'_{01}\, x_2$, și vom obține

$$w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)} = \frac{q_{20}^{*(n)}}{l} \int_s^l \frac{(l-\eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}{\eta(2 - B^2\eta^2)}\,\mathrm{d}\eta, \tag{29a}$$

$$w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)} = -\frac{q_{21}^{*(n)}}{l} \int_s^l (l-\eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{29b}$$

în cazul simetriei naturale, pentru care $q'_{20} = q'^{(n)}_{20}$, iar $w'_{01} = 0$. De aici găsim primele relații dintre constantele $q^{*(n)}_{20}$, $q^{*(n)}_{21}$, $w^{(0)}_{10}$ și $w^{(1)}_{10}$:

$$\frac{1}{2} q_{20}^{*(n)} \left[\sqrt{1 - B^2 l^2} - \sqrt{1 - B^2 s^2} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bl} + \right.$$

$$+ \cosh^{-1}\frac{1}{Bs} - \left(1 - \frac{s}{l}\right)\sqrt{1 - B^2 s^2} + \frac{1}{Bl}(\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} + \sin^{-1}\frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} - \sin^{-1}\frac{1 - Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bs} - \right.$$

$$\left. - \sin^{-1}\frac{1 + Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bs}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\,Bl}\left(\sin^{-1}\frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} - \sin^{-1}\frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} - \right.$$

$$\left.\left. - \sin^{-1}\frac{1 - Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bs} + \sin^{-1}\frac{1 + Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bs}\right)\right] = w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)}, \tag{30a}$$

$$- \frac{q_{21}^{*(n)}}{8B}\left[3\left(\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs\sqrt{1 - B^2 s^2}\right) + \right.$$

$$+ 2\left(Bl(1 - B^2 l^2)^{3/2} - Bs(1 - B^2 s^2)^{3/2}\right) + \frac{8}{5\,Bl}\left((1 - B^2 l^2)^{5/2} - \right.$$

$$\left.\left. - (1 - B^2 s^2)^{5/2}\right)\right] = w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)}. \tag{30b}$$

Pentru incidențele cu simetrie forțată, făcînd $q'_{20} = q'^{(f)}_{20}$ și $w'_{10} = 0$, din (28 a) și (28 b) obținem

$$w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)} = \frac{q_{20}^{*(f)}}{l} \int_s^l \frac{(l-\eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}{\eta^2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{31a}$$

$$w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)} = -\frac{q_{21}^{*(f)}}{B^2 l} \int_s^l \frac{(l-\eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}{\eta^3}\,\mathrm{d}\eta, \tag{31b}$$

de unde deducem relațiile următoare:

$$\frac{q_{20}^{*(f)}}{l}\left\{\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-B^2s^2}-2\sqrt{1-B^2l^2}-\frac{3}{2}Bl\,(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}B^2l^2\left(\sqrt{1-B^2l^2}-\frac{s}{l}\sqrt{1-B^2s^2}\right)-\frac{1}{3}[(1-B^2l^2)^{3/2}-$$

$$\left.-(1-B^2s^2)^{3/2}]+\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}-\cosh^{-1}\frac{1}{Bs}\right\}=w_{01}^{(1)}-w_{01}^{(0)}, \tag{32a}$$

$$\frac{q_{21}^{*(f)}}{2B^2l^2}\left\{(1-B^2l^2)^{3/2}+\left[B^2l^2\left(2-\frac{s}{l}\right)+\frac{l^2}{s^2}\left(1-2\frac{s}{l}\right)\right]\sqrt{1-B^2s^2}+\right.$$

$$\left.+3\,Bl\left[Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}-\cos^{-1}\frac{1}{Bs}\right)+\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs\right]\right\}=$$

$$=w_{01}^{(0)}-w_{01}^{(1)}. \tag{32b}$$

Pe de altă parte, viteza verticală medie sau incidența aripii reale, dată de (3), egală cu cea a primei aripi componente ca și cu cea a aripii rezultante fictive, se obține pornind de la relația (2). Astfel, ținînd seama că cele două aripi groase 2). și 3). se compensează reciproc, relația (2) se scrie mai simplu

$$\frac{1}{l}\int_0^l(w_{10}'+w_{01}'\,\eta)\,\mathrm{d}\eta=w_{10}+\frac{1}{2}w_{01}\,l, \tag{33}$$

corespunzător numai aripii componente subțiri 1).

Mai departe, relația se poate pune sub forma

$$w_{10}^{(0)}\,s+\frac{1}{2}w_{01}^{(0)}\,s^2+\int_s^l(w_{10}'+w_{01}'\eta)\,\mathrm{d}\eta=w_{10}\,l+\frac{1}{2}w_{01}\,l^2, \tag{34}$$

care, după efectuarea integralei, devine

$$w_{10}-w_{10}^{(1)}=\frac{q_{21}^{*(n)}}{48B^3l^2}\left\{\frac{8}{5}[B(6l-5s)\,(1-B^2s^2)^{5/2}-Bl(1-B^2l^2)^{5/2}]-\right.$$

$$-2\,[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}]-$$

$$\left.-3\,(Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}-\sin^{-1}Bl+\sin^{-1}Bs)\right\}, \tag{35}$$

în cazul simetriei naturale a incidențelor, și

$$w_{01}^{(1)} - w_{01} = \frac{q_{20}^{*(f)}}{8Bl^2}\Big\{3\left[\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right] +$$

$$+ 2\left[Bl(1-B^2l^2)^{3/2} - Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right] + \frac{8}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2} -\right.$$

$$\left. -(1-B^2s^2)^{5/2}\right]\Big\}, \tag{36}$$

pentru cazul incidenței cu simetrie forțată.

Pentru determinarea constantelor A_{20} și A_{22}, care apar în expresia (16), se va lua în considerație variația vitezei verticale $\frac{w'}{x_1} = w'_{10} + w'_{01}\,y$, de pe prima aripă componentă, de la un punct de pe aripă pînă la unul de viteză verticală nulă (de exemplu de pe conul Mach), așa cum se procedează în teoria mișcărilor conice. Ca și în [1] și [3], pentru a evita unele calcule laborioase pentru determinarea acestor constante, vom considera, prin aproximație, că sursele distribuite liniar în intervalul (s, l) sînt concentrate în $y = s'$, de intensități Q_{20} și Q_{21}, astfel încît vom avea

$$s' = s + \frac{l-s}{3}, \quad Q_{20} = \frac{1}{2}q_{20}^{*}\,l\left(1-\frac{s}{l}\right)^2, \quad Q_{21} = \frac{1}{2}q_{21}^{*}\,l\left(1-\frac{s}{l}\right)^2. \tag{37}$$

Procedînd în felul acesta, vom putea scrie relațiile

$$-\operatorname{Im}\int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}'_{1l}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = w_{01}^{(0)}, \tag{38a}$$

$$\operatorname{Im}\int_{\text{aripă }(l)}^{\text{cercul Mach }(1/B)} \sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}'_{1l}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = w_{10}^{(1)}, \tag{38b}$$

unde $\mathcal{U}'_{1l}$ reprezintă viteza axială de perturbație pentru cazul simplificat al sursei concentrate în $y = s'$, dată de expresia (24).

Prin efectuarea integralelor care apar mai sus, pe un cerc de rază foarte mică în jurul originii pentru (38 a) și pe axa absciselor ($\eta = 0$), între limitele l și $1/B$ pentru (38 b), rezultă

$$A_{20} + 2l^2A_{22} + \frac{2}{\pi}l^2\Big\{q_{20}^{*}\Big[\Big(1+\frac{s}{l}\Big)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}} - \cos^{-1}\frac{s}{l} - \cosh^{-1}\frac{l}{s}\Big] +$$

$$+ q_{21}^{*}\,l\Big[2\Big(\cosh^{-1}\frac{l}{s} - \sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\Big) + \frac{s}{l}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}} - \cos^{-1}\frac{s}{l}\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}w_{01}^{(0)}\,l^2, \tag{39a}$$

$$(A_{20} + A_{22} l^2) \frac{B^2}{1 - B^2 l^2} [E(k) - K(k)] + A_{22} E(k) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{s}{l}\right)^{5/2} \sqrt{2 + \frac{s}{l}} \left(\frac{1}{3} B^2 l^2 Y q_{20}^* + \frac{Y - K(k)}{l + 2s} q_{21}^* l^2\right) = w_{10}^{(1)}, \tag{39b}$$

în care am notat

$$Y = \frac{\pi}{2} \frac{s'}{\sqrt{(l^2 - s'^2)(1 - B^2 s'^2)}} - \frac{B^2 s'^2}{1 - B^2 s'^2} \Pi(\rho, k) + \frac{1}{1 - B^2 s'^2} K(k), \tag{40a}$$

$$\Pi(\rho, k) = K(k) + \frac{\sqrt{1 - B^2 s'^2}}{B^2 s' \sqrt{l^2 - s'^2}} \left[\frac{\pi}{2} - K(k) E(\varphi_0, k') + \right.$$

$$\left. + (K(k) - E(k)) F(\varphi_0, k')\right], \tag{40b}$$

iar $K(k)$, $E(k)$ și $\Pi(\rho, k)$ reprezintă integralele eliptice complete de prima, a doua, respectiv, a treia speță, avînd modulul k și parametrul ρ dați de relațiile

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2}, \quad \rho = B^2 s'^2 - 1 = \frac{1}{9} B^2 (l + 2s)^2 - 1, \quad k' = Bl, \quad \varphi_0 =$$

$$= \sin^{-1} \frac{s'}{l}. \tag{41}$$

Datorită separației curentului la bordurile aripii și ca urmare a prezenței vîrtejurilor pe extrados, se realizează viteze finite în acele puncte. Impunînd această condiție, vom putea scrie relația

$$A_{20} + l^2 A_{22} = 0. \tag{42}$$

Mai departe, se observă că în expresia lui $\frac{1}{x_1} \mathcal{U}_e$ dată de (22) apar constantele k_{10}, k_{20}, k_{11} și k_{21}, care urmează a fi determinate. Luînd în considerație rolul celei de-a treia aripi componente, care va avea panta medie $-w_{10} x_1 \mp w_{01} x_2$, și ținînd seama de relațiile (20a) și (20b), putem scrie, asemănător cu (33):

$$\frac{1}{l} \int_0^l (w_{10}'' + w_{01}'' \eta) \, d\eta = - w_{10} - \frac{1}{2} w_{01} l, \tag{43}$$

de unde deducem relaţiile

$$(w_{10} - w_{10}^{(1)})\, l = -\, k_{21}^{(n)} \int_0^l \eta^2 (1 + k_{11}^{(n)}\, \eta)\, (1 - B^2\, \eta^2)^{3/2}\, \mathrm{d}\eta, \tag{44a}$$

$$(w_{10} - w_{10}^{(1)})\, l = k_{20}^{(n)} \int_0^l \eta^2\, (1 + k_{10}^{(n)}\, \eta)\, \frac{(1 - B^2\, \eta^2)^{3/2}}{\eta\, (2 - B^2\, \eta^2)}\, \mathrm{d}\eta, \tag{44b}$$

în cazul incidenţei cu simetrie naturală, care, în urma efectuării integralelor, devin

$$w_{10} - w_{10}^{(1)} = \frac{k_{21}^{(n)}}{2\, B^2} \left\{ \frac{1}{3} (1 - B^2\, l^2)^{5/2} - \frac{1}{12} (1 - B^2\, l^2)^{3/2} - \right.$$

$$- \frac{1}{8} \left(\sqrt{1 - B^2\, l^2} + \frac{\sin^{-1} Bl}{Bl} \right) - \frac{2\, k_{11}^{(n)}}{B^2 l} \left[\frac{1}{5} (1 - (1 - B^2\, l^2)^{5/3}) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{7} (1 - (1 - B^2\, l^2)^{7/2}) \right] \right\}, \tag{45a}$$

$$w_{10} - w_{10}^{(1)} = \frac{k_{20}^{(n)}}{8\, B^2 l} \left\{ \frac{k_{10}^{(n)}}{B} \left[Bl \sqrt{1 - B^2 l^2}\, (3 + 2\, B^2 l^2) - 11 \sin^{-1} Bl - \right. \right.$$

$$- \frac{8}{\sqrt{2}} \left(\sin^{-1} \frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} - \sin^{-1} \frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} \right) \Big] +$$

$$+ \frac{8}{3} \left[B^2 l^2 \sqrt{1 - B^2 l^2} - 2 (1 - \sqrt{1 - B^2 l^2}) \right] +$$

$$\left. + 2\pi - 4 \left(\sin^{-1} \frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} + \sin^{-1} \frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} \right) \right\}. \tag{45b}$$

Pentru cazul particular al simetriei forţate, vom porni de asemenea de la relaţia (42), ţinînd seama, bineînţeles, şi de (20 a), (20 b), (28 a), (28b), şi obţinem

$$(w_{01} - w_{01}^{(1)})\, l^2 = k_{20}^{(f)} \int_0^l \eta\, (1 + k_{10}^{(f)}\, \eta)\, (1 - B^2 \eta^2)^{3/2}\, \mathrm{d}\eta, \tag{46a}$$

$$(w_{01} - w_{01}^{(1)})\, l^2 = -\, \frac{k_{21}^{(f)}}{B^2} \int_0^l (1 + k_{10}^{(f)}\, \eta)\, (1 - B^2 \eta^2)^{3/2}\, \mathrm{d}\eta, \tag{46b}$$

care, după efectuarea calculelor, capătă forma

$$w_{01}^{(1)} - w_{01} = \frac{k_{20}^{(f)}}{B^2 l^2}\left\{\frac{1}{5}\left((1-B^2l^2)^{5/2}-1\right)+\frac{1}{2}\,k_{10}^{(f)} l\left[\frac{1}{3}\,(1-B^2l^2)^{5/2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{12}\,(1-B^2l^2)^{3/2}-\frac{1}{8}\left(\sqrt{1-B^2l^2}+\frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)\right]\right\}. \tag{47a}$$

$$w_{01}^{(1)} - w_{01} = \frac{k_{21}^{(f)}}{B^3 l^2}\left\{\frac{1}{8}\,Bl\left[2(1-B^2l^2)^{3/2}+3\left(\sqrt{1-B^2l^2}+\frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{k_{11}^{(f)}}{5B}\left((1-B^2l^2)^{5/2}-1\right)\right\}. \tag{47b}$$

Vom remarca, în continuare, că ecuațiile (30a), (30b) (35), (39a), (39b) și (42) constituie sistemul pentru determinarea constantelor pentru aripa delta subțire arcuită (cu simetrie naturală). Astfel, din (39a), în care am înlocuit q^* prin $q^{*(n)}$ și $w_{01}^{(0)} = 0$, și din (42) rezultă

$$A_{20}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\,l^2\left\{q_{20}^{*(n)}\left[\left(1+\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}-\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]+\right.$$

$$\left.+\,q_{21}^{*(n)} l\left[2\left(\cosh^{-1}\frac{l}{s}-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\right)+\frac{s}{l}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cosh^{-1}\frac{s}{l}\right]\right\}, \tag{48a}$$

$$A_{22}^{(n)} = -\frac{1}{l^2}\,A_{20}^{(n)}, \tag{48b}$$

iar din (35) și (39b) deducem relația

$$\frac{2}{\pi}\,q_{20}^{*(n)}\left\{\left[\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}-\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]E(k)+\right.$$

$$+\frac{1}{3}\,B^2l^2Y\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\Bigg\}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\,q_{21}^{*(n)} l\left\{\left[2\left(\cosh^{-1}\frac{l}{s}-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\right)+\frac{s}{l}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}\right]E(k)+\right.$$

$$+\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\,\frac{Y-K(k)}{1+2\,\frac{s}{l}}-$$

$$-\frac{\pi}{96\,B^3l^3}\left[\frac{8}{5}\left(B(6l-5s)\,(1-B^2s^2)^{5/2}-Bl\,(1-B^2l^2)^{5/2}\right)-\right.$$

$$-2\left(Bl\,(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right)-$$

$$\left.\left.-3\,(Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}-\sin^{-1}Bl+\sin^{-1}Bs)\right]\right\}=-w_{10}\,; \tag{49}$$

mai departe, împreună cu relația

$$4Bq_{20}^{*(n)}\left\{\sqrt{1-B^2l^2}-\sqrt{1-B^2s^2}-\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}+\cosh^{-1}\frac{1}{Bs}-\right.$$

$$-\left(1-\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-B^2s^2}+\frac{1}{Bl}(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}+\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}-\right.$$

$$\left.-\sin^{-1}\frac{1+Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bs}\right]+\frac{1}{\sqrt{2}Bl}\left[\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}-\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}-\right.$$

$$\left.\left.-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}+\sin^{-1}\frac{1+Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bs}\right]\right\}+$$

$$+q_{21}^{*(n)}\left\{3\left[\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right]+\right.$$

$$+2\left[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right]+$$

$$\left.+\frac{8}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2}-(1-B^2s^2)^{5/2}\right]\right\}=0, \tag{50}$$

obținută din (30a) și (30b), se formează sistemul celor două ecuații care determină constantele $q_{20}^{*(n)}$ și $q_{21}^{*(n)}$.

Procedînd astfel, vom găsi

$$q_{20}^{*(n)}=-\frac{I_{21}^{(n)}}{I_{21}^{(n)}J_{20}^{(n)}-I_{20}^{(n)}J_{21}^{(n)}}\,w_{10}, \tag{51a}$$

$$q_{21}^{*(n)}=\frac{I_{20}^{(n)}}{I_{21}^{(n)}J_{21}^{(n)}-I_{20}^{(n)}J_{21}^{(n)}}\,w_{10}, \tag{51b}$$

unde am făcut notațiile

$$I_{20}^{(n)}=2B\left\{2\left[\sqrt{(1-B^2l^2}-\left(2-\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-B^2s^2}-\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}+\cosh^{-1}\frac{1}{Bs}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{Bl}\left[2(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)-(Bl-\sqrt{2})\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-(Bl+\sqrt{2})\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}\right)\right]\right\}, \tag{52a}$$

$$I_{21}^{(n)}=3(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2})+$$

$$+2\left[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right]+$$

$$+\frac{8}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2}-(1-B^2s^2)^{5/2}\right], \tag{52b}$$

$$J_{20}^{(n)}=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}-\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]E(k)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}B^2l^2Y\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\right\}, \tag{52c}$$

$$J_{21}^{(n)}=\frac{2}{\pi}l\left\{\left[2\left(\cosh^{-1}\frac{l}{s}-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\right)+\frac{s}{l}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}\right]E(k)+\right.$$

$$+\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\,\frac{Y-K(k)}{1+2\,\frac{s}{l}}-$$

$$-\frac{\pi}{96\,B^3l^3}\left[\frac{8}{5}\left(B(6l-5s)\,(1-B^2s^2)^{5/2}-Bl(1-B^2l^2)^{5/2}\right)-\right.$$

$$-2\left(Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right)-$$

$$\left.\left.-3\left(Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}-\sin^{-1}Bl+\sin^{-1}Bs\right)\right]\right\}. \tag{52d}$$

Din (35), (45a) și (45b), considerînd pentru k_{10} și k_{11} valorile convenabile,

$$k_{10}=k_{11}=-\frac{1}{2l}, \tag{53}$$

rezultă, pentru constantele $k_{20}^{(n)}$ și $k_{21}^{(n)}$, expresiile:

$$k_{20}^{(n)}=\frac{q_{21}^{*(n)}}{6\,Bl}\left\{\frac{8}{5}\left[B(6l-5s)\,(1-B^2s^2)^{5/2}-Bl(1-B^2l^2)^{5/2}\right]-\right.$$

$$-2\left[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right]-$$

$$\left.-3\left(Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}-\sin^{-1}Bl+\sin^{-1}Bs\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{8}{3}\left[B^2l^2\sqrt{1-B^2l^2}-2\left(1-\sqrt{1-B^2l^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+2\pi-4\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}+\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2\,Bl}\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2}\,(3+2B^2l^2)-11\sin^{-1}Bl\right]-$$

$$\left.-4\sqrt{2}\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}-\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}\right)\right\}^{-1}, \tag{54a}$$

$$k_{21}^{(n)} = \frac{q_{21}^{*(n)}}{24\,Bl^2}\left\{\frac{8}{5}[B(6l-5s)(1-B^2s^2)^{5/2} - Bl(1-B^2l^2)^{5/2}] - \right.$$

$$-2[Bl(1-B^2l^2)^{3/2} - Bs(1-B^2s^2)^{3/2}] -$$

$$\left. -3(Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} - \sin^{-1}Bl + \sin^{-1}Bs)\right\} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{3}(1-B^2l^2)^{5/2} - \frac{1}{12}(1-B^2l^2)^{3/2} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{Bl}\sin^{-1}Bl + \sqrt{1-B^2l^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B^2l^2}\left[\frac{1}{5}\left(1-(1-B^2l^2)^{5/2}\right) - \frac{1}{7}\left(1-(1-B^2l^2)^{7/2}\right)\right]^{-1}\right\}. \qquad (54b)$$

Considerînd acum aripa torsionată, avînd o simetrie forțată a incidențelor în raport cu planul Ox_1x_3 (fig. 1), sistemul care va determina constantele va fi format din excuațiile (32 a), (32 b), (36), (39 a), (39 b) și (42), în care se va considera $q^* = q^{*(f)}$ și $w_{10}^{(1)} = 0$. Vom obține, succesiv, din (39 b) și din (42):

$$A_{20}^{(f)} = -\frac{2l^2}{\pi E(k)}\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\left(\frac{1}{3}B^2l^2Yq_{20}^{*(f)} + \frac{Y-K(k)}{1+2\dfrac{s}{l}}q_{21}^{*(f)}l\right), \qquad (55a)$$

$$A_{22}^{(f)} = -\frac{A_{20}^{(f)}}{l^2}, \qquad (55b)$$

iar din celelalte ecuații rezultă valorile constantelor $q_{20}^{*(f)}$ și $q_{21}^{*(f)}$ analog cu (51a) și (51b), în care s-a notat

$$I_{20}^{(f)} = 2B^2l\left\{\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-B^2s^2} - 2\sqrt{1-B^2l^2} + \cosh^{-1}\frac{1}{Bl} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bs} - \right.$$

$$-\frac{1}{2}Bl\left[Bl\left(\sqrt{1-B^2l^2} - \frac{s}{l}\sqrt{1-B^2s^2}\right) + 3(\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs)\right] -$$

$$\left. -\frac{1}{3}[(1-B^2l^2)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2}]\right\}, \qquad (56a)$$

$$I_{21}^{(f)} = (1-B^2l^2)^{3/2} + \frac{l^2}{s^2}\left[1-2\frac{s}{l} + B^2s^2\left(2-\frac{s}{l}\right)\right]\sqrt{1-B^2s^2} +$$

$$+ 3Bl\left[\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bs}\right)\right]. \qquad (56b)$$

$$J_{20}^{(f)}=\frac{1}{Bl^2}\left\{\frac{3}{8}\left[\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left[Bl\,(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right]+$$

$$+\frac{1}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2}-(1-B^2s^2)^{5/2}\right]+$$

$$+Bl\left[\cos^{-1}\frac{s}{l}+\cosh^{-1}\frac{l}{s}-\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{B^2l^2Y}{3E(k)}\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}\right]\right\}, \tag{56c}$$

$$J_{21}^{(f)}=\frac{1}{2B^2l^2}\left\{(1-B^2l^2)^{3/2}+\frac{l^2}{s^2}\left[1-2\frac{s}{l}+B^2s^2\left(2-\frac{s}{l}\right)\right]\sqrt{1-B^2s^2}+\right.$$

$$\left.+3\,Bl\left[\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl}-\cosh^{-1}\frac{1}{Bs}\right)\right]\right\}+$$

$$+\cos^{-1}\frac{s}{l}-2\cosh^{-1}\frac{l}{s}+\left(2-\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-$$

$$-\frac{Y-K(k)}{\left(1+2\frac{s}{l}\right)E(k)}\left(1-\frac{s}{l}\right)^{5/2}\sqrt{2+\frac{s}{l}}. \tag{56d}$$

Constantele $k_{20}^{(f)}$ și $k_{21}^{(f)}$ se deduc din (47a) și (47b), ținînd seama și de (53). Vom avea

$$k_{20}^{(f)}=\frac{1}{2}\,Bq_{20}^{*(f)}\left\{3\left[\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right]+\right.$$

$$+2\left[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}\right]+$$

$$\left.+\frac{8}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2}-(1-B^2s^2)^{5/2}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{7}{15}(1-B^2l^2)^{5/2}+\frac{1}{12}(1-B^2l^2)^{3/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\left(\sqrt{1-B^2l^2}+\frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)-\frac{4}{5}\right\}^{-1}, \tag{57a}$$

$$k_{21}^{(f)} = \frac{1}{4} B^3 l q_{20}^{*(f)} \left\{ 3[\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2}] + \right.$$

$$+ 2[Bl(1-B^2l^2)^{3/2} - Bs(1-B^2s^2)^{3/2}] +$$

$$\left. + \frac{8}{5Bl}[(1-B^2l^2)^{5/2} - (1-B^2s^2)^{5/2}] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4} B^2l^2 \left[2(1-B^2l^2)^{3/2} + 3\left(\sqrt{1-B^2l^2} + \frac{\sin^{-1} Bl}{Bl} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}((1-B^2l^2)^{5/2} - 1) \right\}^{-1}. \tag{57b}$$

CAZUL SURSEI CONCENTRATE

Pornind de la ecuaţiile (27a) şi (27b), vom găsi, în cazul sursei concentrate, pentru Q_{20} şi Q_{21} următoarele expresii:

$$Q_{20} = \frac{c}{(1-B^2c^2)^{3/2}} [(2-B^2c^2)(w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)}) + c(w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)})], \tag{58a}$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{(1-B^2c^2)^{3/2}} [w_{10}^{(1)} - w_{10}^{(0)} + B^2c^3(w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)})], \tag{58b}$$

iar din (38a) şi (38b), în care vom introduce pe $\mathcal{U}'_{1l}$ dat de (24), vom obţine

$$A_{20} + 2l^2A_{22} + \frac{2}{\pi}\frac{l^2}{c^2}\sqrt{l^2-c^2}(Q_{20} + 2cQ_{21}) = \frac{2}{\pi} w_{01}^{(0)} l^3, \tag{59a}$$

$$(A_{20} + A_{22}\, l^2)\frac{B^2}{1-B^2l^2}(E(k) - K(k)) + A_{22}\, E(k) - \\ - \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{l^2-c^2}}{c^2}[Q_{20}\, B^2c^2\, Y + cQ_{21}(Y - K(k))] = w_{10}^{(1)}, \tag{59b}$$

unde Y este dat de expresia (40 a) pentru $s' = c$.

Folosind relaţia (33), obţinem

$$\frac{c}{l}\left(w_{10}^{(0)} + \frac{1}{2} c\, w_{01}^{(0)}\right) + \left(1 - \frac{c}{l}\right)\left(w_{10}^{(1)} + \frac{1}{2}(l+c)\, w_{01}^{(1)}\right) = w_{10} + \frac{1}{2} w_{01} l, \tag{60}$$

care, împreună cu ecuaţia (58a), (58b), (59a), (59b) şi (42), formează sistemul de ecuaţii din care deducem constantele.

Astfel, vom obține

$$\frac{w_{10}^{(0)}}{w_{10}} = \frac{2B^2c^2\sqrt{l^2-c^2}\,[(1-B^2c^2)\,\Pi(\rho,k)+K(k)-E(k)]}{2B^2c^2\sqrt{l^2-c^2}\,[(1-B^2c^2)\,\Pi(\rho,k)+K(k)-E(k)]-\pi c\left(1-\frac{c}{l}\right)(1-B^2c^2)^{3/2}}, \tag{61a}$$

$$\frac{w_{10}^{(1)}}{w_{10}} = 1 - \frac{\pi c\,\frac{c}{l}\,(1-B^2c^2)^{3/2}}{2B^2c^2\sqrt{l^2-c^2}\,[(1-B^2c^2)\,\Pi(\rho,k)+K(k)-E(k)]-\pi c\left(1-\frac{c}{l}\right)(1-B^2c^2)^{3/2}}, \tag{61b}$$

$$A_{20}^{(n)} = \frac{2B^2l^2c\sqrt{l^2-c^2}}{\pi(1-B^2c^2)^{3/2}}\,(w_{10}^{(0)}-w_{10}^{(1)}), \tag{61c}$$

$$A_{22}^{(n)} = -\frac{2B^2c\sqrt{l^2-c^2}}{\pi(1-B^2c^2)^{3/2}}\,(w_{10}^{(0)}-w_{10}^{(1)}), \tag{61d}$$

$$Q_{20}^{(n)} = -\frac{\pi c^2(2-B^2c^2)\,w_{10}}{2B^2c^2\sqrt{l^2-c^2}\,[(1-B^2c^2)\,\Pi(\rho,k)+K(k)-E(k)]-\pi c\left(1-\frac{c}{l}\right)(1-B^2c^2)^{3/2}}, \tag{61e}$$

$$Q_{21}^{(n)} = \frac{\pi c\,w_{10}}{2B^2c^2\sqrt{l^2-c^2}\,[(1-B^2c^2)\,\Pi(\rho,k)+K(k)-E(k)]-\pi c\left(1-\frac{c}{l}\right)(1-B^2c^2)^{3/2}} \tag{61f}$$

în cazul aripii delta arcuite, și

$$\frac{w_{01}^{(0)}}{w_{01}} = \frac{(1-2B^2c^2)\,E(k)+B^2c^2K(k)}{(1-B^2c^2)^{3/2}\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}+(1-2B^2c^2)\,E(k)+B^2c^2K(k)}, \tag{62a}$$

$$\frac{w_{01}^{(1)}}{w_{01}} = \frac{(1-B^2c^2)^{3/2}+\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\,[(1-2B^2c^2)\,E(k)+B^2c^2K(k)]}{\left(1-\frac{c^2}{l^2}\right)(1-B^2c^2)^{3/2}+\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\,[(1-2B^2c^2)\,E(k)+B^2c^2K(k)]}, \tag{62b}$$

$$A_{20}^{(f)} = -\frac{2}{\pi} l^2 \left[w_{01}^{(0)} l - \frac{1 - 2B^2c^2}{(1 - B^2c^2)^{3/2}} \sqrt{l^2 - c^2}\, (w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)}) \right], \tag{62c}$$

$$A_{22}^{(f)} = \frac{2}{\pi} \left[w_{01}^{(0)} l - \frac{1 - 2B^2c^2}{(1 - B^2c^2)^{3/2}} \sqrt{l^2 - c^2}\, (w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)}) \right], \tag{62d}$$

$$Q_{20}^{(f)} = w_{01} \frac{c^2}{\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)(1 - B^2c^2)^{3/2} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}}\, [(1 - 2B^2c^2) E(k) + B^2c^2 K(k)]}, \tag{62e}$$

$$Q_{21}^{(f)} = -w_{01} \frac{B^2c^3}{\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)(1 - B^2c^2)^{3/2} + \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}}\, [(1 - 2B^2c^2) E(k) + B^2c^2 K(k)]} \tag{62f}$$

pentru aripa delta torsionată.

Constantele k_{20}, k_{21} se deduc imediat din (45a), (45b) (47a), (47b), ţinînd seama de (53), (61a), (61b), (62a) (62b).

4. CALCULUL DISTRIBUŢIEI DE PRESIUNI ŞI AL CARACTERISTICILOR AERODINAMICE

Am arătat mai sus că viteza axială de perturbaţie pe aripa reală rezultă prin superpoziţia celor trei aripi fictive componente, obţinîndu-se formula (23).

Pentru calculul distribuţiei de presiuni se va considera viteza axială totală dată de (3) (fig. 3)

$$C_p = -2 \frac{u_1}{U_\infty} = -2 \operatorname{Re} \frac{\mathcal{U}_1}{U_\infty}. \tag{63}$$

Trecînd mai departe la calculul coeficientului de portanţă al aripii, vom face observaţia că aripile de grosime simetrică nu dau portanţă, încît se va lua în consideraţie numai coeficientul de portanţă dat de „aripa portantă subţire" :

$$C_z = \frac{8}{3l U_\infty} \int_0^l u_{1l}\, dy. \tag{64}$$

Ţinînd seama de (16), vom obţine următoarea expresie a coeficientului de portanţă al aripii :

$$C_z = \frac{4l}{3 U_\infty} \left\{ \frac{\pi A_{20}}{2l^2} + q_{20}^* \left[\cos^{-1} \frac{s}{l} - \frac{s}{l} \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)^{3/2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} q_{21}^* l \left[\left(\frac{8}{3} \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right) - \frac{s}{l} \left(1 - 2\frac{s^2}{l^2}\right) \right) \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2} - \cos^{-1} \frac{s}{l} \right] \right\}, \tag{65}$$

în cazul unei surse distribuite, și

$$C_z = \frac{8}{3\,U_\infty}\left[\frac{\pi A_{20}}{4\,l} + \left(Q_{20} + \frac{c}{2}\,Q_{21}\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\right], \tag{66}$$

în ipoteza unei surse concentrate în punctul $y = c$ de pe aripă.

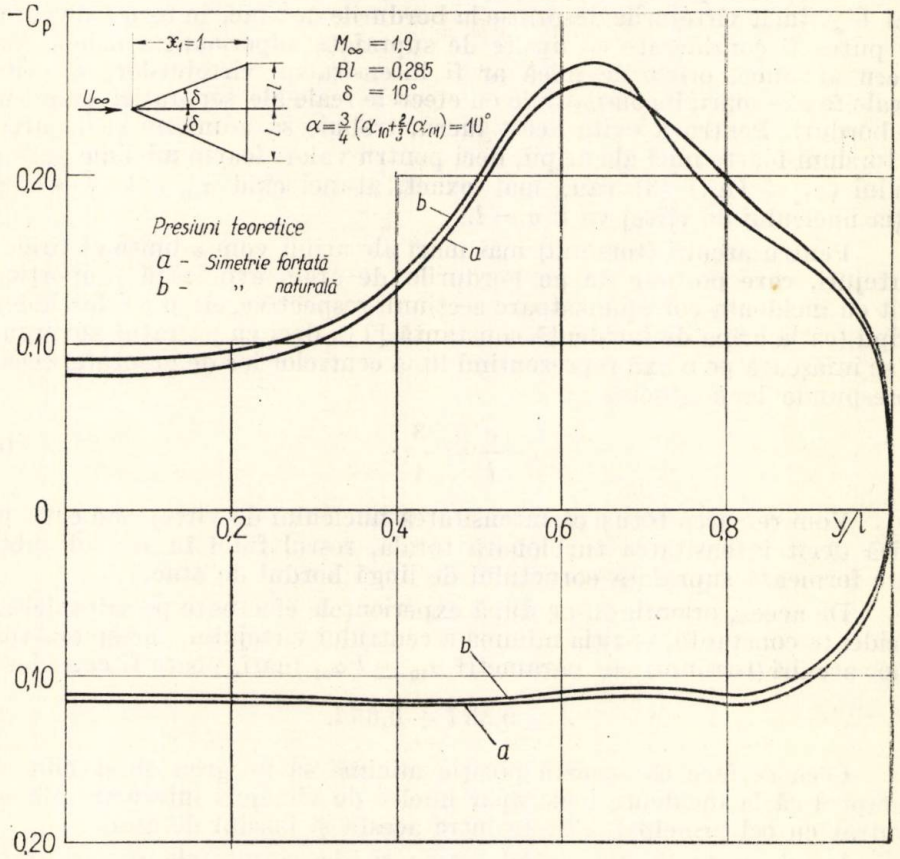


Fig. 3

Pentru a defini parametrul $\frac{s}{l}$, care intră în expresiile de mai sus și care determină limitele distribuției de surse, vom remarca mai întîi că poziția de maxim a distribuției de presiuni coincide cu abscisa $y = c$ a centrului nucleului de vîrtej, așa cum se constată de altfel și din experiențe. Dar, făcînd calculul pe baza distribuției de surse (14), se constată că vîrful depresiunilor de pe extradosul aripii cade aproximativ la jumătatea distanței dintre centrul de greutate al intensității surselor și punctul de abscisă

s, pe care urmărim să-l determinăm. În modul acesta putem deduce relaţia între s şi c:

$$c = s + \frac{1}{6}(l - s) \qquad \left(\frac{s}{l} = 1{,}2\,\frac{c}{l} - 0{,}2\right). \tag{67}$$

Mai departe, pentru determinarea poziţiilor centrelor nucleelor de vîrtejuri, vom observa că, la arcuiri şi torsiuni mici ale aripii, aceasta se poate considera perfect plană şi paralelă cu direcţia curentului neperturbat U_∞, încît vîrtejurile desprinse la bordurile de atac, în formă de cornet, ar putea fi considerate ca lipsite de suprafaţa superioară a aripii. Acest lucru ar duce, oricît de mică ar fi intensitatea vîrtejurilor, la viteze locale foarte mari, incompatibile cu efectele reale ale separaţiei curentului la borduri. Pentru a evita acest lucru, trebuie să admitem că la arcuiri şi torsiuni foarte mici ale aripii, deci pentru valori foarte mici ale parametrului $(\alpha_{10} \pm l\,\alpha_{01})$ (3) sau, mai exact, atunci cînd $\alpha_{10} \pm l\,\alpha_{01} \to 0$, poziţia nucleului de vîrtej va fi $c = l$.

Pentru arcuiri (torsiuni) mai mari ale aripii vom admite că firele de vîrtejuri, care pornesc de pe bordurile de atac, evoluează proporţional atît cu incidenţa corespunzătoare secţiunii respective, cît şi cu deschiderea aripii (ca la aripa de incidenţă constantă [1]), deci cu pătratul anvergurii, şi se înfăşoară pe o axă reprezentînd linia centrelor lor de greutate, ceea ce corespunde la o abscisă

$$\frac{c}{l} = \frac{3}{4}. \tag{68}$$

Vom remarca totuşi că intensitatea nucleului de vîrtej este ceva mai mică decît intensitatea turbionară totală, restul fiind în stratul subţire care formează suprafaţa cornetului de lîngă bordul de atac.

De aceea, orientîndu-ne după experienţele efectuate pe aripa delta cu incidenţa constantă, poziţia minimă a centrului vîrtejului, corespunzătoare unor arcuiri (torsiuni) sau parametri $\alpha_{10} \pm l\,\alpha_{01}$ mari, poate fi considerată

$$c \cong 0{,}55\,l \div 0{,}65\,l. \tag{69}$$

Ceea ce face ca această poziţie minimă să fie greu de stabilit este şi faptul că la incidenţe mari apar nuclee de vîrtejuri interioare, de sens contrar cu cel principal, situate între acesta şi bordul de atac.

Între aceste limite, ţinînd seama şi de rezultatele experimentale obţinute de diverşi autori, pe aripa delta plană cu incidenţa constantă, vom admite pentru poziţia nucleului de vîrtej următoarea formulă aproximativă de variaţie cu incidenţa:

$$\frac{c}{l} \cong \frac{1}{1 + 1{,}4\,(\alpha)^{1/2}}, \tag{70}$$

unde α reprezintă incidenţa aripii arcuite într-o secţiune convenabilă, corespunzătoare centrului de greutate al efectelor aerodinamice, adică

$$x_1 = \frac{3}{4}. \tag{71}$$

Pentru aripa torsionată (cu simetrie forțată), datorită variației incidenței în secțiunea x_1 în funcție de x_2, vom considera ca incidență de calcul, în formula (70), pe cea a punctului

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{2}{3} l x_1 = \frac{1}{2} l. \tag{72}$$

Vom remarca că întregul raționament care a condus la stabilirea formulei (70) se poate aplica pentru fiecare secțiune a aripii, obținîndu-se în felul acesta o linie curbă pentru pozițiile nucleelor de vîrtejuri. Dar abaterile de la o linie dreaptă se constată la incidențele mici, către vîrful aripii, unde contribuția la portanța aripii și la distribuția de presiuni este mică datorită incidenței și suprafeței mici, iar în spatele aripii, unde incidențele cresc, vîrtejurile sînt așezate rectiliniu. În felul acesta am reușit să schematizăm o pînză de vîrtejuri în formă de cornet, pe a cărei axă — fiind considerată o linie dreaptă—se află nucleele de vîrtejuri ale căror efecte pe aripă sînt introduse prin cele ale surselor distribuite. Acest lucru era necesar, întrucît numai astfel putem aplica metodele scurgerilor conice de ordin superior [2]. În caz contrar, nucleele fiind așezate pe o linie curbă, rezultă o pînză de vîrtejuri cvasiconică, și deci mișcarea devenea, ca atare, mai complicată.

Primită la redacție la 10 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Șt. Staicu, *Asupra teoriei aripii delta subțiri cu separația curentului de bordurile de atac*, St. cerc. mec. apl., **XXII**, *4* (1966).
2. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Edit. tehnică, București, 1956.
3. E. Carafoli, Șt. Staicu, *Antisymmetrical thin delta wing with flow separation at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Mécanique Appliquée, **XI**, *6* (1966).
4. E. Carafoli, D. Mateescu, *Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogènes, en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mécanique Appliquée, **X**, *2* (1965).
5. E. Carafoli, A. Năstase, *Studiul aripilor triunghiulare subțiri cu simetrie forțată în curent supersonic*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *4* (1958).
6. L. C. Squire, *The estimation of the non-linear lift of delta wings at supersonic speeds*, Tourn. R.A.S., Aug. 1963.
7. M. Roy, *Sur la théorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en cornets*, C. R. Acad. Sci., R. A. *56* (1957).
8. R. Legendre, *Nappes de tourbillons déferlant des bords d'attaques des ailes en delta*, ONERA, Commun. Présentée au Symposium IUTAM, Ann- Arbor, 6—10 juillet 1964.
9. E. Carafoli, Șt. Staicu, *Sur un modèle théorique concernant l'aide delta mince avec décollement aux bords d'attaque*. Journal de Mécanique, **6**, *2* (1967), Paris.
10. — *On the delta wing with forced antisymmetry in supersonic flow, considering the leading edge separation*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée, **XIII**, *2*. (1968).
11. — *On the flow separation from the edges of the antisymmetrical delta wing in supersonic regime*, Anniv. vol. ded. prof. L. I. Sedov, *Problems of hydrodynamics and continuum mechanics*, Moscow, 1968, p. 257—272.
12. K. W. Mangler, T. H. Smith, *Atheory of the flow part a slender delta wing with leading edge separation*, Proc. Roy. Soc., Mai 1959.

ARIPA DELTA SUBȚIRE, DE GEOMETRIE VARIABILĂ, OPTIMĂ LA DOUĂ REGIMURI DE ZBOR SUPERSONICE*)

de ADRIANA NĂSTASE

Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

În prezentul articol se determină forma suprafeței componente subțiri a aripii delta groase portante, de geometrie variabilă, care are anvergura $2\,l$ dată atunci cînd e complet pliată (fig. 1) și care trebuie să fie optimă cînd este plasată în curentul caracterizat prin numărul Mach M, iar atunci cînd este complet depliată (fig. 2) are anvergura $2L > 2l$ și trebuie să fie optimă cînd este plasată în curentul caracterizat prin numărul Mach $M_1 < M$.

Pentru aripa delta subțire de geometrie variabilă sînt date proiecțiile în plan, portantele și momentele de picaj în poziție pliată și depliată, precum și forma profilului central. Pentru a evita desprinderile de curent pe bordurile de atac subsonice vom anula viteza axială de perturbație u în lungul bordurilor de atac subsonice ale aripii în poziție pliată și depliată. De asemenea aripa în poziție depliată trebuie să fie continuă la traversarea bordurilor aripii pliate (devenite muchii pe aripa depliată). Prin aplicarea metodei variaționale, problema aflării formei suprafeței aripii delta subțiri optime la două regimuri de croazieră supersonice se reduce la rezolvarea unui sistem algebric de ecuații liniare.

1. CONSIDERAȚII GENERALE. REDUCEREA PROBLEMEI DE EXTREMUM A ARIPII DELTA SUBȚIRI DE GEOMETRIE VARIABILĂ, PROPUSE LA STUDIUL A DOUĂ PROBLEME VARIAȚIONALE ÎN CASCADĂ REFERITOARE LA ARIPA PLIATĂ ȘI DEPLIATĂ

Din cercetarea literaturii de specialitate nu am găsit nici o altă lucrare teoretică referitoare la determinarea formei suprafeței aripii de geometrie variabilă, optimă la două regimuri de croazieră supersonice. Pe de altă parte, aripile de geometrie variabilă prezintă un interes special în aviația modernă, deoarece ele au o serie de avantaje față de aripile de formă invariabilă, avantaje dintre care menționăm pe cele mai importante:

— facilitează aterizajul reducînd lungimea pistei de aterizare și viteza de aterizare;

— permit mărirea capacității portante a aripii la viteze mari;

— permit controlul accelerațiilor și controlul termic la ieșire și intrare în atmosfera densă.

*) Principalele rezultate prezentate în această lucrare au fost comunicate la Academia Militară Tehnică din Brno, nov. 1968, sub titlul „The Thin Delta Wing, with Variable Geometry, Optimum for two Supersonic Cruising Speeds".

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 551–571, BUCUREȘTI, 1969

Vom studia în acest articol forma suprafeței aripii delta subțiri, de geometrie variabilă, optimă în două regimuri de croazieră supersonice. Acest tip de aripă își poate găsi utilizarea în special la navele aerospațiale care ies și reintră în atmosfera densă.

În prezenta lucrare începem studiul aripii delta groase portante de geometrie variabilă, optimă la două regimuri de zbor supersonice, prevăzută eventual cu o muchie de separație centrală pentru care sînt date: proiecțiile în plan, portanțele, momentele de picaj și volumele aripii în poziție pliată și depliată, forma profilului central, precum și o serie de condiții geometrice de închidere a aripii în lungul bordurilor sale de atac și de fugă, de continuitate de cotă a aripii depliate în lungul bordurilor de atac ale aripii pliate (devenite muchii pe aripa pliată). De asemenea, vitezele axiale de perturbație trebuie să fie nule în lungul bordurilor de atac ale aripii pliate și depliate pentru a evita la cele două viteze de croazieră nașterea vîrtejurilor în cornet, care au tendința de a se forma în lungul bordurilor de atac subsonice.

Deoarece în cadrul teoriei liniarizate se poate separa efectul de portanță de efectul de grosime atît în poziție pliată, cît și în poziție depliată, vom avea deci de studiat separat componenta subțire și cea de grosime simetrică.

Studiul aripii delta subțiri de geometrie variabilă se reduce la rezolvarea următoarelor două probleme de extremum în cascadă: prima, în care se determină forma optimă a suprafeței aripii pliate (de anvergură $2l$) (fig. 1 *a*, *b*) la regimul de croazieră caracterizat prin numărul Mach M, și cea de-a doua, în care se determină forma optimă a suprafeței adăugate S (care se prezintă, în cazul nostru, sub forma unor voleți de bord de atac) în așa fel, ca întreaga aripă delta depliată (de anvergură $2L$) (fig. 2 *a*, *b*, *c*) să fie optimă la regimul de croazieră caracterizat prin numărul Mach M_1.

Prima problemă variațională constă deci în determinarea formei suprafeței unei aripi delta subțiri care are rezistența la înaintare minimă la regimul de zbor caracterizat prin numărul Mach M și pentru care sînt date proiecția în plan a aripii (reprezentată prin triunghiul isoscel OA_1A_2). portanța C_l, momentul de picaj C_m și profilul central. În plus, vom considera că viteza axială de perturbație u se anulează în lungul bordurilor de atac subsonice OA_1 și OA_2 pentru a împiedica, la regimul de croazieră considerată, nașterea vîrtejurilor în forma de cornet. În calculul rezistenței la înaintare vom include și forțele de succiune care apar pe bordurile de atac subsonice ale aripii subțiri pliate.

De asemenea, vom presupune, pentru generalitate, că aripa este prevăzută și cu o muchie centrală OC.

Cea de-a doua problemă variațională constă în determinarea formei suprafeței adăugate S (haşurată în fig. 2 *a*, *b*, *c*), astfel încît întreaga aripă depliată să aibă rezistența minimă la înaintare, la regimul de croazieră caracterizat prin numărul Mach $M_1 < M$ și pentru care sînt date: proiecția în plan a aripii (reprezentată prin triunghiul isoscel $OA_1'A_2'$), portanța C_L și momentul de picaj C_M. În plus, vom impune condiția ca, în lungul liniilor OA_1 și OA_2 (bordurile aripii pliate care devin muchii pe aripa depliată), cota suprafeței aripii să fie continuă, iar viteza axială de perturbație u să se anuleze în lungul bordurilor de atac subsonice OA_1' și OA_2'. De asemenea, vom include în rezistența la înaintare și forțele de succiune ce apar pe bordurile de atac subsonice OA_1' și OA_2' ale aripii subțiri depliate.

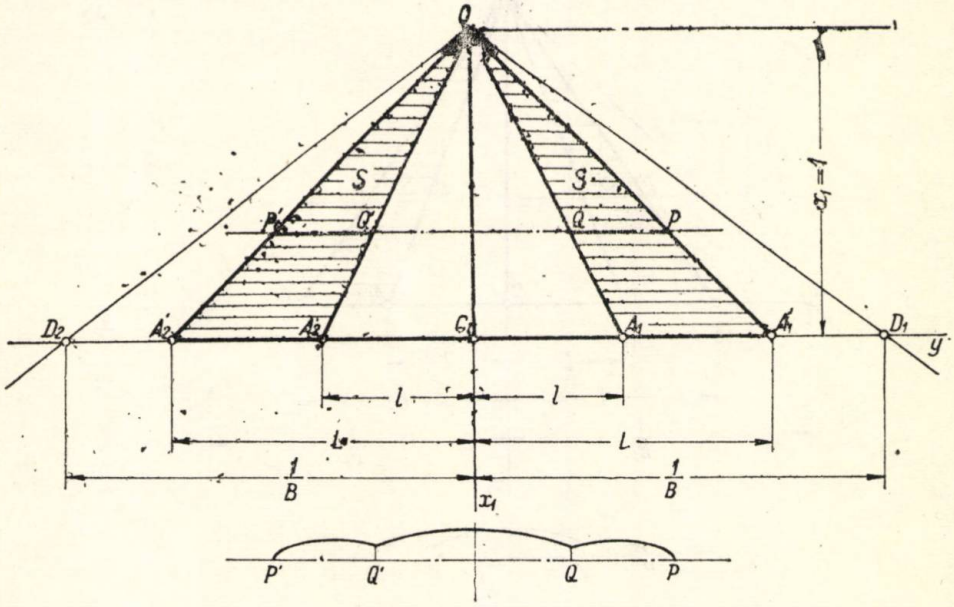

O
S
S
P'
Q'
Q
P
$x_1=1$
D_2
A'_2
A_2
C
A_1
A'_1
D_1
y
l
l
L
L
$\frac{1}{B}$
$\frac{1}{B}$
x_1
P'
Q'
Q
P

Fig. 1*a*

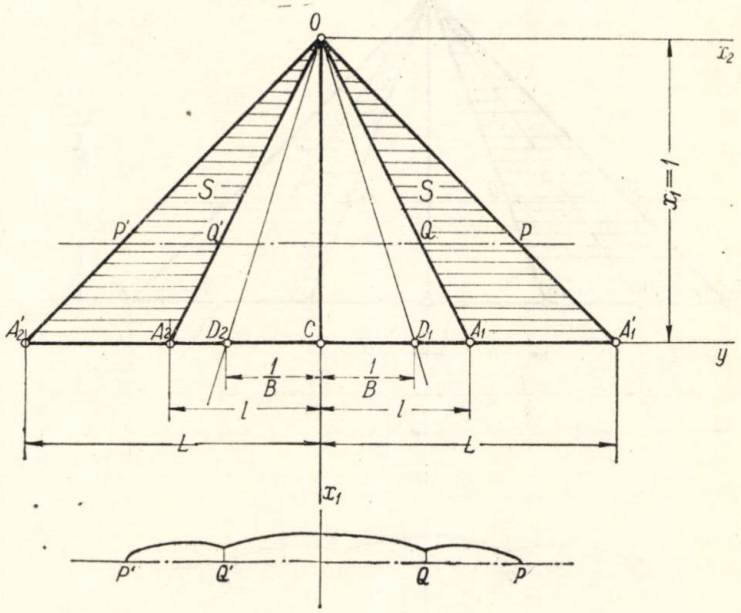

O
x_2
$x_1=1$
S
S
P'
Q'
Q
P
A'_2
A_2
D_2
C
D_1
A_1
A'_1
y
$\frac{1}{B}$
$\frac{1}{B}$
l
l
L
L
x_1
P'
Q'
Q
P

Fig. 1*b*

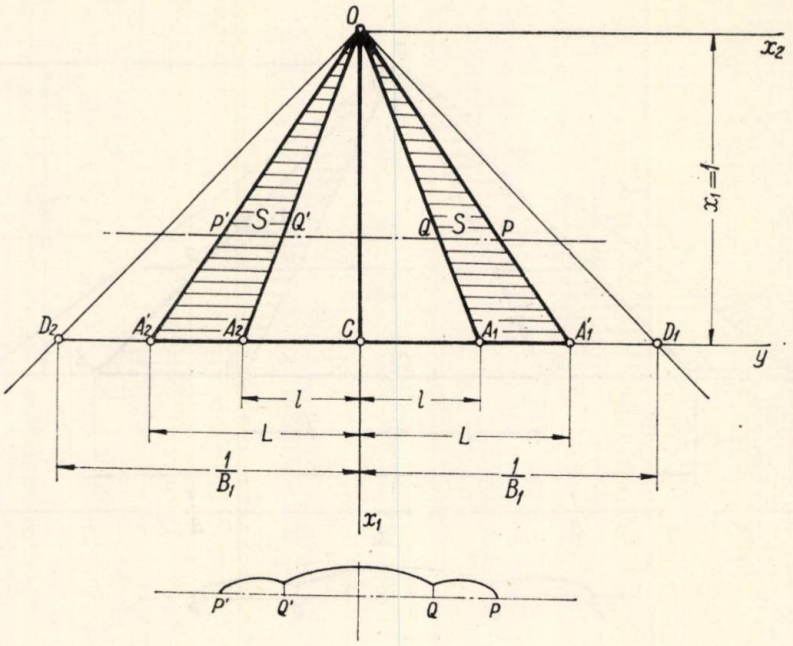

0
x_2
$x_1=1$
P'
S
Q'
Q
S
P
D_2
A'_2
A_2
C
A_1
A'_1
D_1
y
l
l
L
L
$\frac{1}{B_1}$
$\frac{1}{B_1}$
x_1
P'
Q'
Q
P

Fig. 2*a*

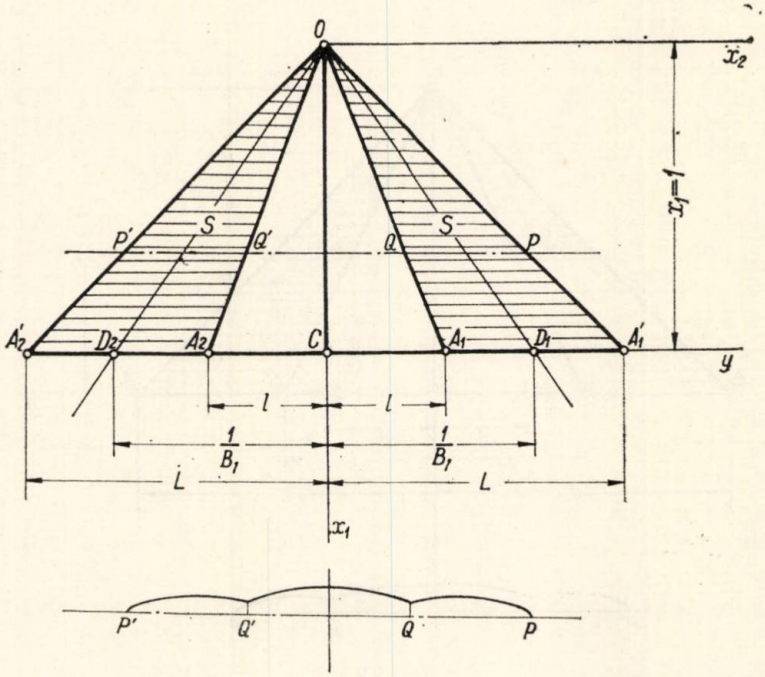

0
x_2
$x_1=1$
P'
S
Q'
Q
S
P
A'_2
D_2
A_2
C
A_1
D_1
A'_1
y
l
l
$\frac{1}{B_1}$
$\frac{1}{B_1}$
L
L
x_1
P'
Q'
Q
P

Fig. 2*b*

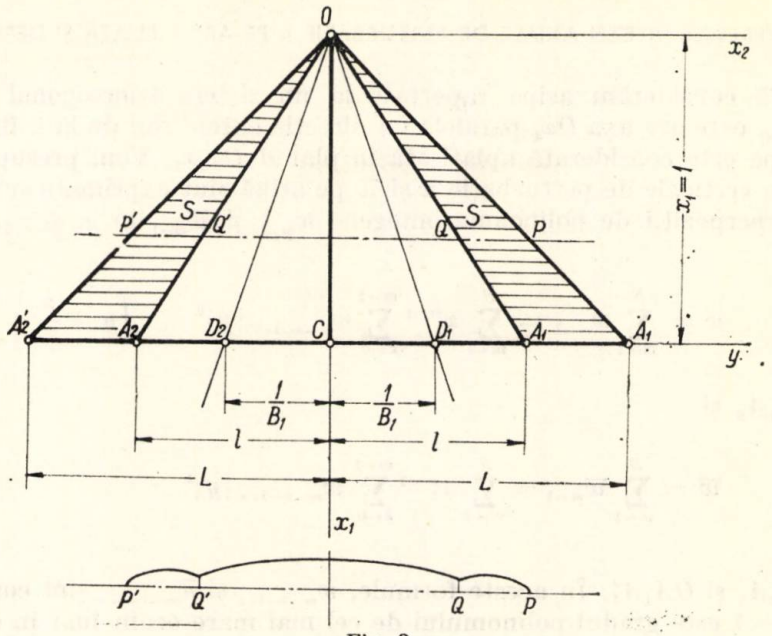


Fig. 2, *c*

Ca şi în lucrările precedente [1]—[6], referitoare la determinarea formelor optime ale suprafeţelor unor sisteme portante subţiri, vom trata cele două probleme variaţionale sus-menţionate în următoarele două ipoteze de calcul:

— prima ipoteză, oarecum clasică, în care viteza axială de perturbaţie u este infinită pe bordurile de atac subsonice, apare succiunea şi se neglijează efectul de desprindere de pe bordurile de atac; această ipoteză este valabilă la incidenţe mici;

— cea de-a doua ipoteză, la care, la viteza de zbor aleasă, evităm desprinderea de curent pe bordurile de atac subsonice, prin anularea vitezei axiale de perturbaţie u în lungul acestor borduri. În acest caz, efectul de conturare a bordurilor de atac subsonice ale aripii subţiri dispare şi, o dată cu dispariţia acestui efect, dispar şi forţele de succiune care luau naştere tocmai datorită acestui efect.

După cum s-a arătat mai sus în enunţarea celor două probleme variaţionale, s-a inclus, în rezistenţele la înaintare, şi succiunea, iar printre condiţiile de legătură ale problemei, şi condiţiile de anulare a vitezei axiale de perturbaţie u în lungul bordurilor de atac subsonice.

În consecinţă, dacă în sistemele finale, care dau soluţiile celor două probleme de extremum enunţate mai sus, excludem condiţiile de anulare a vitezei axiale de perturbaţie pe bordurile de atac subsonice, ne situăm în prima ipoteză de calcul. Dacă însă excludem din sistemele finale termenii proveniţi din succiune, ne vom situa în cea de-a doua ipoteză de calcul.

2. EXPRESIILE VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE u PE ARIPA PLIATĂ ȘI DEPLIATĂ

Să considerăm aripa raportată la un sistem triortogonal de axe $Ox_1x_2x_3$, care are axa Ox_1 paralelă cu direcția curentului de la infinit U_∞, iar aripa este considerată aplatisată în planul Ox_1x_2. Vom presupune că vitezele verticale de perturbație w și $\overline{w}$ pe aripă sînt exprimate sub forma unei superpoziții de polinoame omogene w_{m-1} și $\overline{w}_{m-1}$ în x_1 și x_2, adică:

$$w = \sum_{m=1}^{N} w_{m-1} = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k} |y|^k \qquad \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1}$$

pe OA_1A_2 și

$$\overline{w} = \sum_{m=1}^{N} \overline{w}_{m-1} = \sum_{m=1}^{N} x_1^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \overline{w}_{m-k-1,\,k} |y|^k \tag{2}$$

pe OA_2A_2' și OA_1A_1'. În aceste formule, $w_{m-k-1,\,k}$ și $\overline{w}_{m-k-1,\,k}$ sînt constante, iar $N-1$ este gradul polinomului de cel mai mare ordin luat în considerație în expresiile lui w și $\overline{w}$.

Dacă integrăm expresiile (1) și (2) în raport cu x_1, obținem cotele $Z(x_1, x_2)$ și $\overline{Z}(x_1, x_2)$ pe OA_1A_2 și, respectiv, pe OA_2A_2' și OA_1A_1':

$$Z(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \int w \mathrm{d}x_1 + f(x_2) =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k} \frac{|y|^k}{m-k} + f(x_2) \qquad \left(y = \frac{x_2}{x_1}\right) \tag{3}$$

și

$$\overline{Z}(x_1, x_2) = \frac{1}{U_\infty} \int \overline{w} \mathrm{d}x_1 + \overline{f}(x_2) =$$

$$= \frac{1}{U_\infty} \sum_{m=1}^{N} x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} \overline{w}_{m-k-1,\,k} \frac{|y|^k}{m-k} + \overline{f}(x_2). \tag{4}$$

În formulele de mai sus, $f(x_2)$ și $\overline{f}(x_2)$ sînt niște funcții arbitrare de x_2 care ne pot, eventual, folosi la punerea unor condiții geometrice suplimentare pe suprafața aripii.

Considerînd mai întîi aripa pliată (strînsă) (fig. 1) avînd pe OA_1 şi OA_2 ca borduri de atac pe şi OC ca muchie centrală, expresia vitezei axiale de perturbaţie u pe aripa pliată va fi [7]

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \frac{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{n,2q}\, y^{2q}}{\sqrt{B^2(l^2 - y^2)}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q}\, y^{2q} \operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{l^2}{y^2}} \right\} \tag{5}$$

dacă aripa pliată are bordurile de atac subsonice şi

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \frac{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A_{n,2q}\, y^{2q}}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{n,2q}\, y^{2q} \operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{1}{B^2 y^2}} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq}\, y^q \left[\arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - By)}{2B(l - y)}} + \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + By)}{2B(l + y)}} \right] \right\} \tag{6}$$

pentru aripa pliată cu ambele borduri de atac supersonice.

Să considerăm acum aripa depliată (fig. 2). Deoarece geometria porţiunii centrale a aripii este invariabilă, rezultă că şi $w = \dfrac{\partial Z}{\partial x_1}$ va fi invariabil pe porţiunea OA_1A_2. Fostele borduri de atac OA_1 şi OA_2 devin muchii pe noua aripă depliată, iar noile borduri de atac sînt acum OA_1' şi OA_2'. Cu aceste observaţii, viteza de perturbaţie u pe aripa depliată va fi de forma

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \frac{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A'_{n,2q}\, y^{2q}}{\sqrt{B_1^2(L^2 - y^2)}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C'_{n,2q}\, y^{2q} \operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{L^2}{y^2}} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} G'_{n,q}\, y^q \left[\operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{(L + l)(L - y))}{2L(l - y)}} + \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^q \operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{(L + l)(L + y)}{2L(l + y)}} \right] \right\} \tag{7}$$

dacă bordurile OA_1' și OA_2' sînt subsonice sau

$$u = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \left\{ \frac{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A'_{n,2q}\, y^{2q}}{\sqrt{1 - B_1^2 y^2}} + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C'_{n,2q} y^{2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 y^2}} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} G'_{nq}\, y^q \left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + B_1 l)(1 - B_1 y)}{2B_1(l - y)}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + B_1 l)(1 + B_1 y)}{2B_1(l + y)}} \right] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} H'_{nq}\, y^q \left[\operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1 + B_1 L)(1 - B_1 y)}{2B_1(L - y)}} + \right.$$

$$\left. \left. + (-1)^q \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{(1 + B_1 L)(1 + B_1 y)}{2B_1(L + y)}} \right] \right\} \tag{8}$$

dacă bordurile de atac OA_1' și OA_2' sînt supersonice.

Observații:

a) În formulele (6) și (8) primul termen s-a amplificat cu $\sqrt{1 - B^2 y^2}$ și, respectiv, cu $\sqrt{1 - B_1^2 y^2}$ pentru ca radicalul să apară la numitor și să putem astfel sistematiza mai bine calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripii.

b) Dacă atît bordurile aripii pliate, cît și cele ale aripii depliate sînt supersonice pentru numărul Mach M_1 de zbor, atunci în termenii care conțin coeficientul G'_{nq} ai formulei (8) și care reprezintă contribuția bordurilor aripii pliate în expresia lui u se înlocuiește „argch" cu argcos".

Coeficienții $A_{n,2q}$, $C_{n,2q}$ etc. ai vitezelor axiale de perturbație u sînt legați în mod univoc de coeficienții vitezelor verticale de perturbație prin relații liniare deduse din condițiile de compatibilitate ale lui P. Germain [8]. Coeficienții vitezei axiale de perturbație u pe aripa pliată vor depinde numai de coeficienții $w_{n-j-1,j}$ ai lui w, deoarece sînt funcție doar de forma suprafeței aripii pliate. Vom putea deci scrie

$$A_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2q,j}^{(n)}\, w_{n-j-1,j}, \tag{9a}$$

$$C_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} c_{2q,j}^{(n)}\, w_{n-j-1,j}, \tag{9b}$$

$$G_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} g_{qj}^{(n)}\, w_{n-j-1,j}. \tag{9c}$$

În schimb, coeficienții vitezei axiale pe aripa depliată vor depinde atît de coeficienții lui w, cît și de cei ai lui $\overline{w}$. Vom avea deci

$$A'_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} (a'^{(n)}_{2q,j} w_{n-j-1,j} + \overline{a}'^{(n)}_{2q,j} \overline{w}_{n-j-1,j}), \tag{10a}$$

$$C'_{n,2q} = \sum_{j=0}^{n-1} (c'^{(n)}_{2q,j} w_{n-j-1,j} + \overline{c}'^{(n)}_{2q,j} \overline{w}_{n-j-1,j}), \tag{10b}$$

$$G'_{n,q} = \sum_{j=0}^{n-1} (g'^{(n)}_{qj} w_{n-j-1,j} + \overline{g}'^{(n)}_{qj} \overline{w}_{n-j-1,j}), \tag{10c}$$

$$H'_{nq} = \sum_{j=0}^{n-1} (h'^{(n)}_{qj} w_{n-j-1,j} + \overline{h}'^{(n)}_{qj} \overline{w}_{n-j-1,j}). \tag{10d}$$

Observații.

a) În această ultimă expresie, $h'^{(n)}_{qj} = 0$ deoarece constantele H'_{nq} se obțin calculînd un semireziduu în jurul punctului $y = L$, deci depind doar de saltul vitezei verticale de perturbație din acest punct, care este $-\overline{w}$. Pentru omogenitate am scris însă expresiile coeficienților H'_{nq} sub forma (10d).

b) În formulele (9a), (9b) și (9c), coeficienții $a^{(n)}_{2q,j}$, $c^{(n)}_{2q,j}$ și $g^{(n)}_{qj}$ depind numai de forma în plan a aripii pliate (deci de l) și de viteza de zbor aleasă caracterizată prin numărul Mach M la care aripa este pliată ($B = \sqrt{M^2 - 1}$).

c) Coeficienții $a'^{(n)}_{2q,j}$, $\overline{a}'^{(n)}_{2q,j}$ etc. depind atît de forma în plan a aripii pliate, cît și de forma în plan a aripii depliate, deci de l și L, precum și de numărul Mach M_1 de zbor la care aripa este în poziție depliată ($B_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$). Deci, pentru niște proiecții în plan date și pentru niște viteze de zbor date atît pentru aripa pliată, cît și pentru aripa depliată, coeficienții $a^{(n)}_{2q,j}$, $a'^{(n)}_{2q,j}$, $\overline{a}'^{(n)}_{2q,j}$ etc. sînt constanți în studiul celor două probleme de extremum propuse. În consecință, din prima problemă variațională, referitoare la aripa pliată, vom determina valorile optime ale coeficienților $w_{n-j-1,j}$ ai lui w, iar din cea de-a doua problemă variațională, referitoare la aripa depliată, vom determina valorile optime ale coeficienților $\overline{w}_{n-j-1,j}$ ai vitezei verticale de perturbație $\overline{w}$. În cea de-a doua problemă variațională, coeficienții $w_{n-j-1,j}$ ai vitezei verticale de perturbație w, determinați de prima problemă variațională, vor fi socotiți constanți.

Vom trece acum să rezolvăm succesiv cele două probleme variaționale sus-menționate. Condițiile geometrice de legătură și caracteristicile aerodinamice le vom considera doar pe jumătate de aripă, datorită simetriei aripii.

3. STUDIUL PRIMEI PROBLEME VARIAȚIONALE REFERITOARE LA ARIPA PLIATĂ

Înainte de a trece la rezolvarea primei probleme variaționale, vom explicita condițiile geometrice de legătură și caracteristicile aerodinamice ce intervin în problema de extremum a aripii delta pliate. În acest sens vom folosi o serie de rezultate obținute anterior pentru aripa delta subțire de rezistență minimă prevăzută cu o muchie centrală.

3.1. EXPLICITAREA CONDIȚIILOR GEOMETRICE DE LEGĂTURĂ ALE ARIPII PLIATE

Condițiile geometrice de legătură pentru aripa pliată sînt:

a) condiția ca profilul central al aripii să fie impus;

b) condiția ca viteza axială de perturbație să se anuleze în lungul bordurilor de atac subsonice ale aripii subțiri.

a) Din condiția ca profilul central să fie impus $[Z(x_1, 0) = \varphi(x_1)]$ prin dezvoltare în serie Mac Laurin a lui $\varphi(x_1)$ și identificare cu $Z(x_1, 0)$ obținem relațiile

$$f(0) = \varphi(0), \tag{11a}$$

$$R_N(x_1) = 0, \tag{11b}$$

$$E_t \equiv w_{t-1,0} - \frac{U_\infty}{(t-1)!}\varphi^{(t)}(0) = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots N. \tag{11c}$$

Prima relație (11a) ne impune valoarea lui $f(0)$, cea de-a doua (11b) ne arară că profilul central trebuie să fie dat sub forma unui polinom de grad N, iar relațiile (11c) intervin ca relații de legătură în problema de extremum studiată.

Din condiția de anulare a vitezei axiale de perturbație u în lungul bordului de atac subsonic $OA_1(y = l,\ u = 0)$ obținem, similar cu [6], relațiile

$$F_1^{(t)} \equiv \sum_{j=0}^{t-1} \Theta_{tj}\, w_{t-j-1,j} = 0, \tag{12a}$$

$$\Theta_{tj} = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{t}{2}\right)} l^{2q}\, a_{2q,j}^{(t)}, \qquad t = 1, 2, \ldots, N. \tag{12b}$$

Observație.

Pentru ca să asigurăm simetria suprafeței aripii pliate în raport cu planul Ox_1x_3 și ca o consecință și continuitate a cotei suprafeței la traversarea muchiei din origine, e necesar și aici ca funcția $f(x_2)$, care intervine în expresia (3) a cotei suprafeței, să fie pară în raport cu x_2, adică să avem

$$f(x_2) = f(-x_2). \tag{13}$$

3.2. EXPLICITAREA CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE ARIPII PLIATE

Caracteristicile aerodinamice care intervin în problema de extremum a aripii pliate sînt:

a) portanța C_z;

b) momentul de picaj C_m;

c) rezistența de unde C_d;

d) coeficientul de succiune σ_0.

a) Condiția ca portanța aripii să fie dată $C_z = \text{const}$ devine

$$C_z = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = \text{const.} \tag{14}$$

În această formulă Λ_{nj} sînt constante în problema de extremum studiată și care sînt de forma

$$\Lambda'_{nj} = \frac{8}{lU_\infty (n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a^{(n)}_{2q,j} \mathcal{J}_{2q}(0, l) + \right.$$

$$\left. + Bl \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c^{(n)}_{2q,j}}{2q+1} \mathcal{J}_{2q}(0, l) \right\} \tag{15}$$

dacă aripa delta are bordurile de atac subsonice și, respectiv,

$$\Lambda^{**}_{nj} = \frac{8}{lU_\infty (n+1)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a^{(n)}_{2q,j} \mathcal{J}^{**}_{2q}\left(0, \frac{1}{B}\right) + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c^{(n)}_{2q,j}}{2q+1} \mathcal{J}^{**}_{2q}\left(0, \frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g^{(n)}_{qj}}{q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{2} \left(1 + (-1)^q\right) \sum_{t=0}^{q} l^{q-t} \mathcal{J}^{**}_t \left(0, \frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + l^{q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} \right] \right\} \tag{16}$$

dacă aripa delta are bordurile de atac supersonice.

b) Condiția ca momentul de picaj al aripii să fie dat devine

$$C_m = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{nj} w_{n-j-1,j} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1}{n+2} \Lambda_{nj} w_{n-j-1,j} = C_{m_0}. \tag{17}$$

În această formulă Λ_{nj} au semnificația din (14).

c) Expresia coeficientului de rezistență de undă devine

$$C_d = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_{nmkj} w_{n-j-1,j} w_{m-k-1,k}, \tag{18}$$

unde Ω_{nmkj} sînt următoarele constante:

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2\, l\,(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)}\, \mathcal{J}_{k+2q}(0,l) + \right.$$

$$\left. + Bl \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1}\, \mathcal{J}_{k+2q}(0,l) \right\} \tag{19}$$

pentru aripa delta pliată cu bordurile de atac subsonice și, respectiv,

$$\Omega_{nmkj}^{**} = \frac{8}{U_\infty^2\, l\,(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{2q,j}^{(n)}\, \mathcal{J}_{k+2q}^{**}\left(0,\frac{1}{B}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c_{2q,j}^{(n)}}{k+2q+1}\, \mathcal{J}_{k+2q}^{**}\left(0,\frac{1}{B}\right) + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g_{qj}^{(n)}}{k+q+1} \left[\frac{\sqrt{B^2l^2-1}}{2} \left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^q \right) \sum_{t=0}^{k+q} l^{k+q-t}\, \mathcal{J}_t^{**}\left(0,\frac{1}{B}\right) + l^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B^2l^2}} \right] \right\} \tag{20}$$

pentru aripa delta pliată cu bordurile supersonice.

În formulele (15), (16), (19) și (20) integralele $\mathcal{J}_k$ și $\mathcal{J}_k^{**}$ au următoarele valori

$$\mathcal{J}_{2t}(0,\, l) = \int_0^l \frac{y^{2t}\, dy}{\sqrt{B^2(l^2-y^2)}} = \frac{\pi\,(2t)!\, l^{2t}}{2^{2t+1}\,(t!)^2\, B}, \qquad \text{pentru } k = 2t, \tag{21a}$$

$$\mathcal{J}_{2t+1}(0,l) = \int_0^l \frac{y^{2t+1}\, dy}{\sqrt{B^2\,(l^2-y^2)}} = \frac{2^{2t}(t!)^2\, l^{2t+1}}{(2t+1)!\, B}, \qquad \text{pentru } k = 2t+1, \tag{21b}$$

$$\mathcal{J}_{2t}^{**}\left(0,\frac{1}{B}\right) = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^{2t}\, dy}{\sqrt{1-B^2y^2}} = \frac{\pi\,(2t)!}{2^{2t+1}\;(t!)\;B^{2t+1}}, \qquad \text{pentru } k = 2t, \tag{22a}$$

$$\mathcal{J}_{2t+1}\left(0,\frac{1}{B}\right) = \int_0^{\frac{1}{B}} \frac{y^{2t+1}\, dy}{\sqrt{1-B^2y^2}} = \frac{2^{2t}\,(t!)^2}{(2t+1)!\, B^{2t+2}}, \qquad \text{pentru } k = 2t+1 \tag{22b}$$

d) În sfîrșit, analog cu [1], [9], expresia coeficientului de succiune va fi de forma

$$\sigma = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{nmkj}\, w_{m-k-1,\,k}\, w_{n-j-1,\,j}, \tag{23}$$

unde

$$\Delta_{mmkj} = \frac{4\pi}{U_\infty^2\,(m+n)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{q'=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} l^{2(q+q')} \sqrt{1-B^2l^2}\, a_{2q,j}^{(n)}\, a_{2q',k}^{(n)}. \tag{24}$$

3.3. DETERMINAREA VALORII OPTIME A VITEZEI VERTICALE DE PERTURBAȚIE w PENTRU ARIPA PLIATĂ

Avem deci de găsit

$$C_d = \text{minim} \tag{25}$$

cu condiția de legătură

$$C_l = C_{l_0}, \quad C_m = C_{m_0}, \quad E_t = 0, \quad F_1^{(t)} = 0, \qquad t = 1,2 \ldots N; \tag{26}$$

analog cu [1]—[6], calculul acestui extremum cu legături se reduce la calculul extremumului fără legături al expresiei

$$H = (C_d + \sigma) + \lambda^{(1)} C_l + \lambda^{(2)} C_m + \sum_{t=1}^{N} (\lambda_t E_t + \mu_t F_1^{(t)}). \tag{27}$$

Anulînd, ca și în [1]—[6], coeficienții variațiilor $\delta w_{0\sigma}$, obținem următoarele ecuații:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{n-1} (\Omega_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} + \Omega_{\theta+\sigma+1,n,j\sigma} + \Delta_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j} +$$

$$+ \Delta_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}) w_{n-j-1,j} + \lambda^{(1)} \Lambda_{\theta+\sigma+1,\sigma} + \lambda^{(2)} \Gamma_{\theta+\sigma+1,\sigma} +$$

$$+ \lambda_{\theta+1} \delta_0^{\sigma} + \mu_{\theta+\sigma+1} \Theta_{0+\sigma+1,\sigma} = 0,$$

$$\theta, \sigma = 0,1 \ldots (N-1), \qquad 1 \leqslant \theta + \sigma + 1 \leqslant N. \tag{28}$$

Aceste ecuații, împreună cu condițiile de legătură (26), formează un sistem algebric liniar care determină în mod univoc valorile coeficienților $w_{\theta\sigma}$ ai lui w, precum și valorile multiplicatorilor lagrangeeni λ_t, și μ_t.

Prima problemă variațională referitoare la aripa pliată poate fi socotită deci rezolvată.

4. STUDIUL CELEI DE-A DOUA PROBLEME VARIAȚIONALE REFERITOARE LA ARIPA DELTA DEPLIATĂ

Ca și în cazul primei probleme variaționale, vom explicita mai întîi condițiile geometrice de legătură și caracteristicile aerodinamice ce intervin în formularea problemei de extremum pentru aripa depliată. După aceea vom considera porțiunea centrală a aripii, adică aripa delta pliată A_1OA_2 dată de prima problemă variațională, și vom determina forma suprafeței adăugate compusă din doi voleți de bord de atac (formată din triunghiurile A_1OA_1' și A_2OA_2'), astfel încît întreaga aripă depliată să fie de rezistență minimă la cel de-al doilea regim de zbor caracterizat prin numărul Mach M_1.

4.1. EXPLICITAREA CONDIȚIILOR GEOMETRICE DE LEGĂTURĂ ALE ARIPII PLIATE

În cazul aripii delta depliate, vom impune următoarele condiții de legătură de natură geometrică:

a) condiția de continuitate a cotei suprafeței aripii la traversarea muchiilor OA_1 și OA_2 (care sînt bordurile de atac ale aripii pliate);

b) condițiile de anulare a vitezei axiale de perturbație u în lungul bordurilor de atac subsonice OA_1' și OA_2' ale aripii depliate.

Din cauza simetriei aripii, condițiile sus-menționate vor fi puse numai pe muchia OA_1 și pe bordul OA_1'.

a) Din condiția de continuitate a cotei suprafeței aripii depliate în lungul muchiei OA_1 ($y = l$, $Z = \overline{Z}$) se obține relația

$$\frac{1}{U_\infty}\sum_{m+1}^{N} x_1^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{l^k}{m-k}\,(w_{m-k-1,k} - \overline{w}_{m-k-1,k}) = f(x_1 l) - \overline{f}(x_1 l), \tag{29}$$

care este analogă cu cea stabilită anterior [10] (în care trebuie să facem înlocuirea $s = l$).

Dacă presupunem, în mod similar, că $f(x_1 l)$ și $\overline{f}(x_1 l)$ sînt dezvoltabile în serie Mac Laurin, obținem relațiile:

$$\overline{R}_N(x_1 l) = R_N(x_1 l), \tag{30a}$$

$$\overline{f}(0) = f(0) = \varphi(0), \tag{30b}$$

$$\frac{1}{U_\infty}\sum_{k=0}^{t-1} \frac{l^k}{t-k}\,(w_{t-k-1,k} - \overline{w}_{t-k-1,k}) = \frac{l^t}{t!}\,[\overline{f}^{(t)}(0) - f^{(t)}(0)],\ t = 1,2,\ldots,N \tag{30c}$$

Relațiile (30a) arată că dezvoltările în serie ale funcțiilor arbitrare $f(x_1 l)$ și $\overline{f}(x_1 l)$ trebuie să aibă același rest de ordin N.

Din (30b) rezultă că aceste funcții trebuie să aibă și termenul liber același și egal cu $\varphi(0)$, așa cum rezultă din (30b) și (11a), iar relațiile (30c) pot fi interpretate ca relații de legătură între funcțiile arbitrare $f(x_2)$ și $\overline{f}(x_2)$ și deci pot fi eliminate dintre condițiile de legătură ale problemei de extremum studiat.

b) Condiția de anulare a vitezei axiale de perturbație u în lungul bordului de atac subsonic OA_1' ($y = L$, $u = 0$) conduce la următoarele relații de legătură:

$$\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} A'_{n,2q} L^{2q} = 0, \qquad n = 1,2,\ldots,N. \tag{31}$$

Dacă notăm cu Θ'_{tj} și $\overline{\Theta}'_{tj}$ expresiile

$$\Theta'_{tj} = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{t}{2}\right)} L^{2q}\, a'^{(t)}_{2q,j}, \tag{32a}$$

$$\overline{\Theta}'_{tj} = \sum_{q=0}^{E\left(\frac{t}{2}\right)} L^{2q}\, \overline{a}'^{(t)}_{2q,j}, \tag{32b}$$

atunci relațiile (24) se pot scrie sub forma

$$F_1^{(t)} = \sum_{j=0}^{t-1} (\Theta'_{tj} w_{t-j-1,j} + \overline{\Theta}'_{tj} \overline{w}_{t-j-1,j}) = 0, \quad t = 1,2,\ldots,N. \tag{33}$$

4.2. EXPLICITAREA EXPRESIILOR CARACTERISTICILOR AERODINAMICE PENTRU ARIPA DEPLIATĂ

Ca și în cazul aripii pliate, avem de explicitat următoarele caracteristici aerodinamice:

a) portanța C_L;
b) momentul de picaj C_M;
c) rezistența la înaintare C_D;
d) succiunea σ'.

a) Condiția ca portanța aripii C_L să fie dată ($C_L = C_{L_0} = \text{const}$) devine, în cazul aripii depliate, de forma

$$C_L = \frac{8}{U_\infty L}\int_{0CA_1'} u x_1 \, dx_1 \, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}(\Lambda'_{nj} w_{n-j-1,j} + \overline{\Lambda}'_{nj}\,\overline{w}_{n-j-1,j}) = C_{L_0} = \text{const.} \tag{34}$$

În această formulă, constantele Λ'_{nj} au valorile date în anexă, iar constantele $\overline{\Lambda}'_{nj}$ se obțin din Λ'_{nj} înlocuind coeficienții $a'^{(n)}_{2a,j}$, $c'^{(n)}_{2a,j}$ etc. prin corespondenții lor barați.

b) În mod analog, condiția ca momentul de picaj să fie dat, $C_M = C_{M_0} = \text{const}$, devine, în cazul aripii depliate, de forma

$$C_M = \frac{8}{U_\infty L}\int_{0CA_1'} u x_1^2 \, dx_1 \, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}(\Gamma'_{nj} w_{n-j-1,j} + \overline{\Gamma}'_{nj}\,\overline{w}_{n-j-1,j}) = C_{M_0} = \text{const.} \tag{35}$$

În această expresie, constantele Γ'_{nj} și $\overline{\Gamma}'_{nj}$ sînt legate de constantele Λ'_{nj} și $\overline{\Lambda}'_{nj}$ din formula (27) prin relațiile:

$$\Gamma'_{nj} = \frac{n+1}{n+2}\Lambda'_{nj}, \qquad \overline{\Gamma}'_{nj} = \frac{n+1}{n+2}\overline{\Lambda}'_{nj}. \tag{36}$$

c) Expresia coeficientului de rezistență de undă devine, în cazul aripii depliate, de forma

$$C_D = \frac{8}{U_\infty^2 L}\left[\int_{OA_1C} w u x_1 \, dx_1 \, dy + \int_{0A_1A_1'} \overline{w} u x_1 \, dx_1 \, dy\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}[\Omega_{nmkj} w_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} + \Omega^{(1)}_{nmkj}\overline{w}_{m-k-1,k} w_{n-j-1,j} +$$

$$+ \overline{\Omega}_{nmkj} w_{m-k-1,k}\overline{w}_{n-j-1,j} + \overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}\overline{w}_{m-k-1,j}\overline{w}_{n-j-1,j}]. \tag{37}$$

Constantele Ω_{nmkj} și $\Omega^{(1)}_{nmkj}$ sînt date în anexă, iar constantele $\overline{\Omega}_{nmkj}$ și $\overline{\Omega}^{(1)}_{nmkj}$ se deduc din Ω_{nmkj}, respectiv din $\Omega^{(1)}_{nmkj}$, înlocuind coeficienții $a'^{(n)}_{2a,j}$, $c'^{(n)}_{2a,j}$ etc prin corespondenții lor barați.

d) Coeficientul de succiune σ' este, analog cu [9], [1],

$$\sigma' = -\frac{4\pi}{U_\infty^2 L}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m+n}\lim_{y\to L}\frac{\sqrt{1-B_1^2L^2}}{L}(L-y)\,u_{m-1}\,u_{n-1} \tag{38}$$

și se poate scrie sub forma [1]

$$\sigma' = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}[\Delta_{nmkj}\,w_{m-k-1,k}\,w_{n-j-1,j} + \Delta^{(1)}_{nmkj}\,\overline{w}_{m-k-1,k}\,w_{n-j-1,j} +$$

$$+ \overline{\Delta}_{nmkj}\,w_{m-k-1,k}\,\overline{w}_{n-j-1,j} + \overline{\Delta}^{(1)}_{nmkj}\,\overline{w}_{m-k-1,k}\,\overline{w}_{n-j-1,j}], \tag{39}$$

unde

$$\Delta_{nmkj} = -\frac{4\pi\sqrt{1-B^2L^2}}{U_\infty^2\,(m+n)}\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\sum_{q'=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)}L^{2(q+q')}\,a'^{(n)}_{2q,j}\,a'^{(m)}_{2q',k}, \tag{40}$$

iar constantele $\Delta^{(1)}_{nmkj}$, $\overline{\Delta}_{nmkj}$ și $\overline{\Delta}^{(1)}_{nmkj}$ se obțin înlocuind în Δ_{nmkj}, pe rînd, unul din coeficienții $a'^{(n)}_{2q,j}$, $a'_{2q',k}$ sau, respectiv, ambii coeficienți prin corespondenții lor barați.

4.3. REZOLVAREA CELEI DE-A DOUA PROBLEME VARIAȚIONALE PENTRU ARIPA DEPLIATĂ

Avem explicitați acum toți termenii care intervin în problema de extremum a aripii depliate. Coeficienții $a'^{(n)}_{2q,j}$, $\overline{a}'^{(n)}_{2q,j}$ etc. sînt funcție de proiecțiile în plan ale aripilor pliate și depliate (adică de l și L), precum și de numărul Mach M_1 al celui de-al doilea zbor de croazieră. În consecință, acești termeni sînt constanți în problema de extremum studiată.

De asemenea, coeficienții $\overline{w}_{n-j-1,j}$ ai lui w, care au fost determinați din prima problemă variațională referitoare la aripa pliată, sînt constanți în cea de-a doua problemă de extremum.

Rezultă deci că trebuie să determinăm coeficienții $\overline{w}_{n-j-1,j}$ ai lui $\overline{w}$ așa fel încît, pentru aripa depliată, expresia

$$C_D + \sigma' = \text{minim}, \tag{41}$$

la regimul de croazieră definit prin numărul Mach M_1, cu condițiile de legătură

$$C_L = \text{const}, \qquad C_M = \text{const}, F_1^{(t)} = 0, \qquad t = 1, 2, \ldots, N. \tag{42}$$

Această problemă de extremum cu legături se reduce la calculul extremumului fără legături al expresiei

$$H = (C_D + \sigma') + \lambda^{(1)}C_L + \lambda^{(2)}C_M + \sum_{t=1}^{N}\lambda_t F_1^{(t)}. \tag{43}$$

Avem explicitați toți termenii care intervin în expresia hamiltonianului. Calculînd prima sa variație și anulînd-o, obținem extremumul lui H. Dacă ținem mai departe seama că coeficienții $\overline{w}_{\theta\sigma}$ sînt independenți, vom obține, prin anularea coeficienților variațiilor $\delta\overline{w}_{\theta\sigma}$, ecuații de forma

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}[(\overline{\Omega}^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}+\overline{\Omega}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}+\overline{\Delta}^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}+\overline{\Delta}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma})\,\overline{w}_{n-j-1,j}+$$

$$+(\Omega^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}+\overline{\Omega}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma}+\Delta^{(1)}_{n,\theta+\sigma+1,\sigma,j}+\overline{\Delta}_{\theta+\sigma+1,n,j,\sigma})\,w_{n-j-1,j}]+$$

$$+\lambda^{(1)}\overline{\Lambda}_{\theta+\sigma+1,\sigma}+\lambda^{(2)}\overline{\Gamma}_{\theta+\sigma+1,\sigma}+\lambda_{\theta+\sigma+1}\overline{\Theta}_{\theta+\sigma+1,\sigma}=0, \tag{44}$$

$$(\theta,\ \sigma)=0,1,\ldots,(N-1),$$

$$1\leqslant\theta+\sigma+1\leqslant N.$$

Aceste ecuații, împreună cu relațiile de legătură (35), alcătuiesc un sistem liniar de ecuații algebrice, care determină în mod univoc valorile optime ale coeficienților $\overline{w}_{n-j-1,j}$ ai lui $\overline{w}$, precum și valorile multiplicatorilor $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ și λ_t.

Problema determinării formei suprafeței aripii delta depliate optime la viteza de croazieră, caracterizată prin numărul Mach M_1, poate fi și ea socotită deci rezolvată.

5.4. ANEXĂ DE CALCUL

Să notăm cu I_k următoarea integrală nedefinită:

$$I_k=\int\frac{y^k\,dy}{\sqrt{B_1(L^2-y^2)}}=-\frac{y^{k-1}}{kB_1^2}\sqrt{B_1^2(L^2-y^2)}+\frac{k-1}{k}L^2I_{k-2}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(k!)(2j)!\,L^{k-j}}{(j!)^3(k-j)!\,B_1}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^j\arcsin\frac{y}{L}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{B_1^2(L^2-y^2)}}{B_1}\sum_{\nu=1}^{j}\frac{[(j-\nu)!]^2\,L^{\nu-1}}{2^\nu(2j-2\nu+1)!}(L-y)^{j-\nu}\right] \tag{45}$$

și, respectiv, cu $\mathcal{J}'_k(\alpha,\beta)$ și $\mathcal{J}'^{**}_k(\alpha,\beta)$ următoarele integrale definite de tip I_k:

$$\mathcal{J}'_k(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{y^k\,dy}{\sqrt{B_1^2(L^2-y^2)}} \tag{46}$$

și

$$\mathcal{J}'^{**}_k(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta\frac{y^k\,dy}{\sqrt{1-B_1^2y^2}}\cdot \tag{47}$$

Aceste integrale definite se pot obține luînd integrala nedefinită dată în (45) între limitele α și β și făcînd, pentru integrala $\mathcal{J}'^{**}_k(\alpha,\beta)$ și înlocuirea $L=\dfrac{1}{B_1}$.

Cu aceste notații, expresiile Λ_{nj} din formula (34) a coeficientului de portanță C_L vor fi de forma

$$\Lambda'_{nj} = \frac{8}{U_\infty L(n+1)}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{J}'_{2q}(0, L) + B_1 L \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'^{(n)}_{2q,j}}{2q+1}\,\mathcal{J}'_{2q}(0, L) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{B_1^2(L^2-l^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{q} \frac{[1+(-1)^t]\,l^{q-t}}{q+1}\,\mathcal{J}'_t(0, L)\right\} \tag{48}$$

dacă aripa depliată are ambele borduri de atac subsonice și, respectiv,

$$\Lambda'^{**}_{nj} = \frac{8}{U_\infty L(n+1)}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{J}'^{**}_{2q}\left(0, \frac{1}{B_1}\right) + \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'^{(n)}_{2q,j}}{2q+1}\,\mathcal{J}'^{**}_{2q}\left(0, \frac{1}{B_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1-B^2l_1^2}}{2} \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{t=1}^{q} \frac{g'^{(n)}_{qj}}{q+1}\,[1+(-1)^t]\,l^{q-t}\,\mathcal{J}'^{**}_t\left(0, \frac{1}{B_1}\right)\right\} \tag{49}$$

dacă aripa depliată are ambele borduri de atac supersonice și muchiile (provenite din bordurile aripii pliate) sînt subsonice.

Dacă muchiile OA_1 și OA_2 devin și ele supersonice, atunci în expresia (46) se înlocuiește $\sqrt{1-B_1^2l^2}$ cu $\sqrt{B_1^2l^2-1}$ în termenii care conțin coeficienții $g'^{(n)}_{qj}$ și care reprezintă tocmai contribuția acestor muchii în expresia lui Λ'^{**}_{nj}.

În mod analog, expresiile Ω_{nmkj} și $\Omega^{(1)}_{nmkj}$ din formula (37) a coeficientului de rezistență de undă a aripii depliate vor fi, respectiv, de forma

$$\Omega_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 L(m+n)}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{J}'_{k+2q}(0, l) + \right.$$

$$+ \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'^{(n)}_{2q,j}}{k+2q+1}\left[B_1 L\mathcal{J}'_{k+2q}(0, l) + l^{k+2q}\,\operatorname{arcch}\sqrt{\frac{L^2}{l^2}}\right] +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{B_1^2(L^2-l^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k+q} \frac{g'^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\,[1+(-1)^{k+t}]\,l^{k+q-t}\,\mathcal{J}'_t(0, l)\right\} \tag{50}$$

și

$$\Omega^{(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 L(m+n)}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a'^{(n)}_{2q,j}\,\mathcal{J}'_{k+2q}(l, L) + \right.$$

$$+ \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c'^{(n)}_{2q,j}}{k+2q+1}\left[B_1 L\mathcal{J}'_{k+2q}(l, L) - l^{k+2q}\,\operatorname{arcch}\sqrt{\frac{L^2}{l^2}}\right] +$$

$$\left. + \frac{\sqrt{B_1^2(L^2-l^2)}}{2} \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k+q} \frac{g'^{(n)}_{qj}}{k+q+1}\,[1+(-1)^{k+t}]\,l^{k+q-t}\,\mathcal{J}'_t(l, L)\right\} \tag{51}$$

pentru aripa delta subțire depliată cu ambele borduri de atac subsonice.

Dacă aripa depliată are bordurile de atac supersonice și muchiile subsonice, vom avea expresiile Ω^{**}_{nmkj} și $\Omega^{**(1)}_{nmkj}$, respectiv, de forma

$$\Omega^{**}_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 L(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a^{\prime(n)}_{2q,j} \mathcal{J}'^{**}_{k+2q}(0, l) + \right.$$

$$+ \sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c^{\prime(n)}_{2q,j}}{k+2q+1} \left\langle \mathcal{J}'^{**}_{k+2q}(0, l) + l^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B^2 l^2}} \right\rangle +$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g^{\prime(n)}_{qj}}{2(k+q+1)} \left\langle \sqrt{1 - B_1^2 l_1^2} \sum_{t=0}^{k+q} [1 + (-1)^{k+t}] l^{k+q-t} \mathcal{J}'^{**}_t(0, l) + \right.$$

$$+ [1 + (-1)^{k+1}] l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 l^2}} +$$

$$\left. + 2(-1)^q [1 + (-1)^{k+q}] l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1 l)^2}{4 B_1 l}} \right\rangle +$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{h^{\prime(n)}_{qj}}{2(k+q+1)} \left\langle \sqrt{B_1^2 L^2 - 1} \sum_{t=0}^{k+q} [1 + (-1)^{k+t}] L^{k+q-t} \mathcal{J}'^{**}_t(0, l) + \right.$$

$$+ [1 + (-1)^{k+1}] L^{k+q+1} \arccos \sqrt{\frac{1}{B_1^2 L^2}} -$$

$$- 2(L^{k+q+1} - l^{k+q+1}) \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1-B_1 l)}{2 B_1 (L-l)}} +$$

$$\left. \left. + 2(-1)^q [l^{k+q+1} - (-L)^{k+q+1}] \arccos \sqrt{\frac{(1+B_1 L)(1+B_1 l)}{2 B_1 (L+l)}} \right\rangle \right\} \quad (52)$$

și

$$\Omega^{**(1)}_{nmkj} = \frac{8}{U_\infty^2 L(m+n)} \left\{ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a^{\prime(n)}_{2q,j} \mathcal{J}'^{**}_{k+2q}\left(l, \frac{1}{B_1}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{c^{\prime(n)}_{2q,j}}{k+2q+1} \left\langle \mathcal{J}'^{**}_{k+2q}\left(l, \frac{1}{B_1}\right) - l^{k+2q} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1}{B_1^2 l^2}} \right\rangle +$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} \frac{g^{\prime(n)}_{qj}}{2(k+q+1)} \left\langle \sqrt{1 - B_1^2 l^2} \sum_{t=0}^{k+q} [1 + (-1)^{k+t}] l^{k+q-t} \mathcal{J}'^{**}_t\left(l, \frac{1}{B_1}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(-1)^{q+1} [1 + (-1)^{k+q}] l^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+B_1 l)^2}{4 B_1 l}} \right\rangle +$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\frac{h_{qj}^{\prime(n)}}{2(k+q+1)}\left\{\sqrt{B_1^2L^2-1}\sum_{t=0}^{k+q}[1+(-1)^{k+t}]L^{k+q-t}\mathcal{I}_t^{\prime**}\left(l,\frac{1}{B_1}\right)+\right.$$

$$+2(L^{k+q+1}-l^{k+q+1})\arccos\sqrt{\frac{(1+B_1L)(1-B_1l)}{2B_1(L-l)}}+$$

$$\left.+2(-1)^{q+1}[l^{k+q+1}-(-L)^{k+q+1}]\arccos\sqrt{\frac{(1+B_1L)(1+B_1l)}{2B_1(L+l)}}\right\}. \quad (53)$$

Dacă și muchiile și bordurile de atac ale aripii depliate sînt supersonice, vom avea, respectiv, expresiile:

$$\Omega_{nmkj}^{**}=\frac{8}{U_\infty^2L(m+n)}\left\{\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}a_{2q,j}^{\prime(n)}\mathcal{I}_{k+2q}^{\prime**}\left(0,\frac{1}{B_1}\right)+\right.$$

$$+\sum_{q=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{c_{2q,j}^{\prime(n)}}{k+2q+1}\mathcal{I}_{k+2q}^{\prime**}\left(0,\frac{1}{B_1}\right)+$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\frac{g_{qj}^{\prime(n)}}{2(k+q+1)}\left\{\sqrt{B_1^2l^2-1}\sum_{t=0}^{k+q}[1+(-1)^{k+t}]l^{k+q-t}\mathcal{I}_t^{\prime**}\left(0,\frac{1}{B_1}\right)+\right.$$

$$+[1+(-1)^{k+1}]l^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{1}{B_1^2l^2}}\Bigg\}+$$

$$+\sum_{q=0}^{n-1}\frac{h_{qj}^{\prime(n)}}{2(k+q+1)}\left\{\sqrt{B_1^2L^2-1}\sum_{t=0}^{k+q}[1+(-1)^{k+t}]L^{k+q-t}\mathcal{I}_t^{\prime**}\left(0,\frac{1}{B_1}\right)+\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^{k+1}]L^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{1}{B_1^2L^2}}-\pi(L^{k+q+1}-l^{k+q+1})\right\}\Bigg\} \quad (54)$$

și

$$\Omega_{nmkj}^{**(1)}=\frac{4\pi}{U_\infty^2L(m+n)}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{L^{k+q+1}-l^{k+q+1}}{k+q+1}(g_{qj}^{\prime(n)}+h_{qj}^{\prime(n)}). \quad (55)$$

Primită la redacție la 12 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *Minimum Drag Thin Triangular Wing in Supersonic Flow*, Rev. Méc. Appl. **5**, *5* (1960).
2. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *Trapeţievidnie krilia s minimalnim lobovim soprotivleniem v sverhzvukovom potoke*, Mehanika (Moscova), *1* (1961).
3. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *L'utilisation de la méthode des résidus dans le problème de résistance minimum de l'aile trapézoïdale en courant supersonique*, Arhiwum Mechaniki Stosowanej, (Polonia) **16**, *3* (1964).

4. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *Utilisation of the Residuus Method in the Minimum Drag Problem of the Trapezoidal Wing in Supersonic Flow*, Fluid Dynamic Transaction, (Anglia) *2* (1965).
5. Năstase Adriana, *The Thin Cruciform Wing in Supersonic Flow*, Comunicată la Dresda, 1964. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **13**, *5*, (1969) (sub tipar).
6. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *Minimum Drag Thin Delta Wing with Finite Velocity at the Leading Edges in Supersonic Flow*, Rev. Roum. Sci. Tehn.—Méc. Appl., **11**, *4*, (1967).
7. Carafoli E., Ionescu M, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique*, Rev. Méc. Appl., **1**, *2* (1957).
8. Germain P., *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul des certaines ailes delta en régime supersonique*, Rech. Aero. *7* (3—16) (1949).
9. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *Etude des ailes triangulaires minces à symétrie forcée*, Rev. Méc. Appl., *4*, *3* (1958).
10. Carafoli Elie, Năstase Adriana, *On the Minimum Drag Problem of the Triangular Wing of Symmetrical Thickness in Supersonic Flow*, Rev. Méc. Appl., **7**, *2* (1962).

SOLUȚII ÎN SERIE ÎN STUDIUL FLUIDULUI VÎSCOS

de ION SETEANU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se studiază fenomenul curgerii plane a fluidului vîscos incompresibil, folosindu-se metoda dezvoltării în serie. Printr-o transformare conformă adecvată se satisfac automat condițiile la limită. Soluția se obține prin compararea cu dezvoltarea ei asimptotică în punctele extreme ale curgerii.

1. INTRODUCERE

Una din metodele cele mai utilizate pentru a se obține soluția unei ecuații cu derivate parțiale liniară o constituie dezvoltarea soluției în serii de funcții ortogonale. De obicei, acest procedeu este combinat cu metoda separării variabilelor, folosindu-se principiul superpoziției soluțiilor particulare și determinarea constantelor cu ajutorul condițiilor suplimentare ale problemei (la limită, inițiale etc.).

Metoda separării variabilelor și principiul superpoziției nu mai pot fi folosite pentru găsirea soluției unei ecuații cu derivate parțiale neliniară. Totuși se cunosc multe studii care au condus la rezultate fructuoase și în care s-a folosit dezvoltarea în serie sub diferite forme. De obicei se impune ca soluția să aibă forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, g_n(y), \tag{a}$$

unde funcțiile f_n au expresii predeterminate, iar funcțiile g_n se găsesc din condiția ca ecuația cu derivate parțiale să fie satisfăcută. În general se obțin pentru funcțiile g_n ecuații diferențiale ordinare neliniare. Funcțiile f_n se aleg fie în funcție de condițiile la limită, fie din alte considerente fizice, cum ar fi simetria. În general se preferă funcțiile elementare sau funcții cu valorile tabelate [1].

Metoda dezvoltării în serie, aplicată în hidrodinamica fluidului vîscos, prezintă o serie de avantaje față de metoda iterațiilor, în special, deoarece permite o examinare mai sistematică a termenilor în funcție de

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 573–583, BUCUREȘTI, 1969

ordinul lor de micime. Metoda iteraţiilor, aplicată la problemele neliniare, dă, în cadrul fiecărui pas de aproximare, şi o parte din termenii de ordin superior, a căror considerare nu este folositoare, întrucît nu se obţin toţi termenii de acelaşi ordin.

Dezvoltarea după coordonate este eficace şi naturală pentru problemele relative la ecuaţiile de tip hiperbolic şi parabolic. Soluţia se obţine pentru valori mici ale variabilei, iar fiecare termen este independent de termenii următori. Rezultatul reprezintă dezvoltarea soluţiei perturbate şi exprimă de obicei stadiul iniţial al evoluţiei unui fenomen, pornind de la o stare fundamentală cunoscută. Un exemplu tipic îl constituie seriile lui Goertler din teoria stratului-limită [2], în care folosirea seriilor (a) duce la obţinerea soluţiei exacte a mişcării în strat, pentru o distribuţie arbitrară de presiune.

Pentru ecuaţiile de tip eliptic, dezvoltarea după coordonate permite de obicei obţinerea doar a unor rezultate calitative. Întrucît, în mod uzual, se pune o problemă la limite, ca urmare a influenţei reciproce orice soluţie obţinută local este influenţată de condiţiile la limite la mari distanţe [3]. În acest mod este posibil să se obţină doar forma generală a dezvoltării, iar fiecare termen conţine una sau mai multe constante nedeterminate. Uneori unele din aceste constante se pot identifica cu forţa portantă, cu rezistenţa la înaintare etc. [4].

În lucrarea de faţă se indică o metodă care permite obţinerea unei dezvoltări după funcţii de coordonate în cazul unei probleme la limite pentru ecuaţia de mişcare plană a fluidului vîscos incompresibil, prin utilizarea unei reprezentări conforme adecvate.

2. ENUNŢUL PROBLEMEI

Se studiază mişcarea plană a fluidului vîscos incompresibil într-un domeniu de tip bandă simplu conex. Se presupune că în vecinătatea punc-

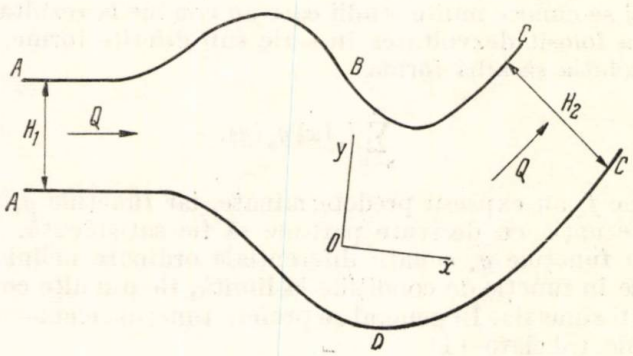


Fig. 1

tului de la infinit, amonte şi aval, frontierele devin asimptotic paralele, iar curgerea se face de la stînga spre dreapta (fig. 1). Frontierele se presupun curbe netede pe porţiuni.

Se studiază procesul staționar. Prin introducerea funcției de curent și eliminarea presiunii, ecuațiile lui Navier-Stokes devin:

$$\Delta\Delta\psi = -\operatorname{Re}\frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(x, y)}. \tag{1}$$

Condițiile la limite de aderență pe frontiera solidă

$$\frac{\partial\psi}{\partial S} = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } \widehat{ABC} \text{ și } \widehat{ADC} \tag{2}$$

și comportarea asimptotică de tip Poiseuille plan, la infinit amonte și aval, completează datele problemei pentru ecuația cu derivate parțiale (1).

Studiul acestei probleme cu ajutorul metodei perturbațiilor efectuat prin alegerea unei prime aproximații adecvate care să asigure caracterul regulat al perturbațiilor este prezentat în lucrarea [5].

3. ASPECTUL GENERAL AL SOLUȚIEI

Fie funcția de variabilă complexă

$$\zeta = f(z), \tag{3}$$

care realizează reprezentarea conformă a domeniului din figura 1 pe semiplanul superior $\eta \geqslant 0$ din planul ζ (fig. 2).

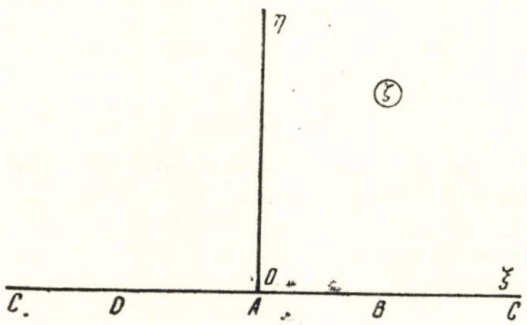


Fig. 2

În punctele de discontinuitate ale tangentei la frontiera domeniului fizic, funcția de transformare are singularități. Se elimină din domeniu aceste puncte cu ajutorul unor cercuri de rază mică. Se înlocuiește studiul ecuației (1) cu condițiile (2) prin studiul ecuației transformate cu ajutorul formulei (3) completată prin condițiile transformate în mod corespunzător.

Folosind identitățile

$$\Delta_{xy}\,\psi\,(x, y) = M\Delta_{\xi\eta}\,\psi\,(\xi, \eta),$$
$$\frac{D\,(\varphi, \psi)}{D\,(x, y)} = M\frac{D\,(\varphi, \psi)}{D\,(\xi, \eta)}, \tag{4}$$

ecuația (1) capătă noua formă

$$\Delta(M\Delta\psi) = -\operatorname{Re}\frac{D(\psi, M\Delta\psi)}{D(\xi, \eta)}. \tag{5}$$

S-a folosit notația

$$M = \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2. \tag{6}$$

Deoarece derivatele funcțiilor se transformă liniar și omogen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ etc.},$$

rezultă că, prin transformarea (3), condițiile la limite nu se schimbă:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \quad \text{pentru } \eta = 0. \tag{7}$$

În planul ζ se poate scrie imediat aspectul general al soluției ecuației (5) cu condițiile la limite (7)

$$\psi = 1 - u(\xi) + \eta^2 f(\xi, \eta), \tag{8}$$

unde u este funcția unitate a lui Heaviside:

$$u(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \xi > 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pentru } \xi = 0, \\ 0, & \text{pentru } \xi < 0. \end{cases}$$

Aspectul funcției f se poate determina independent de condițiile la limite ale problemei, folosind ecuația transformată (5) și condițiile de uniformitate în vecinătatea originii și a punctului de la infinit, în planul ζ.

În cele ce urmează se va căuta funcția sub forma unei serii de puteri Mac-Laurin în variabila η

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(\xi)\,\eta^n. \tag{9}$$

Se va admite că soluția există și are forma (8) cu f dată de (9) peste tot unde coeficientul M dat de (6) admite o dezvoltare convergentă.

4. DEZVOLTAREA ÎN SERIE A SOLUȚIEI

În loc de a folosi expresia funcției ψ dată de formula (8), unde f este determinată prin formula (9), se adoptă dezvoltarea în serie de puteri

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi)\,\eta^n. \tag{10}$$

Expresia coeficienților care se obține este aceeași sub aspect formal cu cea care rezultă dacă se caută dezvoltarea după puterile lui ξ sau, în general, după puterile lui $\xi \pm a$ și $\eta \pm b$. Această observație se va folosi ulterior la aplicarea metodei într-un caz concret.

Admițînd pentru funcția M dezvoltarea în serie de puteri

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n (\xi)\, \eta^n, \tag{11}$$

cu coeficienții μ_n funcții cunoscute de ξ, se obține următorul șir de egalități:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \eta^n, \\ M\Delta\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \eta^n, \\ \frac{D(\psi, M\Delta\psi)}{D(\xi, \eta)} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, \eta^n, \\ \Delta(M\Delta\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n\, \eta^n, \end{aligned} \tag{12}$$

unde s-a notat:

$$\begin{aligned} b_n &= (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a''_n, \\ c_n &= \sum_{p=0}^{\infty} \mu_{n-p}\, b_p, \\ d_n &= f_n - g_n, \\ f_n &= \sum_{p=0}^{n} (p+1)\, c_{p+1}\, a'_{n-p}, \\ g_n &= \sum_{p=0}^{n} (p+1)\, a_{p+1}\, c'_{n-p}, \\ e_n &= (n+2)(n+1)\, c_{n+2} + c''_n\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Dacă se introduc formulele (12) în ecuația fundamentală (5) și se identifică coeficienții acelorași puteri ale lui η, se obține relația de recurență fundamentală

$$-e_n = \mathrm{Re} \cdot d_n. \tag{14}$$

Întrucît b_n conține pe a_{n+2}, iar c_n conține pe b_n, urmează că coeficienții c_n conțin pe a_{n+2}. Coeficienții f_n conțin pe c_{n+1}, deci pe a_{n+3}, iar g_n doar

pe a_{n+2}, adică d_n conţin pe a_{n+3}. Coeficientul e_n conţine pe c_{n+2}, deci pe a_{n+4}, adică relaţia de recurenţă (14) determină pe a_{n+4} în funcţie de coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_{n+3}$ şi de derivatele lor. Dacă se scoate în evidenţă coeficientul a_{n+4} în expresia lui e_n notîndu-se

$$e_n = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\, a_{n+4}\, \mu_0 + h_n, \tag{15}$$

atunci se poate exprima formula de recurenţă pentru coeficienţii a_n

$$a_{n+4} = -\frac{\mathrm{Re} \cdot d_n + h_n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\,\mu_0}. \tag{16}$$

Formula (16) exprimă faptul că ecuaţia fundamentală (5) determină coeficienţii începînd cu a_4 inclusiv, iar coeficienţii a_0, a_1, a_2, a_3 constituie patru funcţii arbitrare de ξ care urmează a se determina din alte condiţii (condiţii la limite, expresia asimptotică la infinit etc.).

Este interesant de observat că formula (16) determină coeficienţii în mod direct, fără alte operaţii de integrare sau diferenţiere, spre deosebire, de exemplu, de cazul stratului-limită [2]. Apariţia celor patru funcţii arbitrare este determinată de faptul că ecuaţia (5) este de ordinul 4.

Formula (16) determină coeficienţii a_n în mod succesiv, fiecare termen depinzînd doar de termenii anteriori. Ei depind de condiţiile suplimentare ale problemei doar prin intermediul dependenţei de primii patru coeficienţi. În acest fel se realizează dezideratul amintit în introducere, privitor la eliminarea influenţei termenilor de ordin mai înalt asupra termenilor precedenţi.

Prin combinarea formulelor (13), se obţine

$$d_n = \sum_{p=0}^{n} (p+1) \left\{ a'_{n-p} \sum_{r=0}^{p+1} \mu_{p-r+1} \left[(r+2)(r+1)\, a_{r+2} + a''_r \right] - \right.$$
$$\left. - a_{p+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \sum_{r=0}^{n-p} \mu_{n-p-r} \left[(r+2)(r+1)\, a_{r+2} + a''_r \right] \right\}. \tag{17}$$

Coeficienţii a_0 şi a_1 se determină cu ajutorul formulelor (7) şi (8)

$$a_0 = 1 - u(\xi),$$

$$a_1 = 0.$$

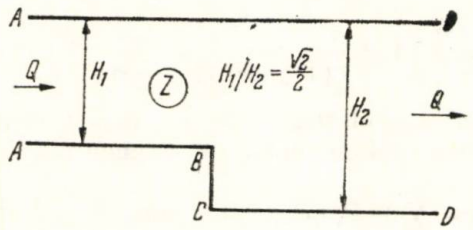
Deoarece în vecinătatea punctului 0 (fig. 2) funcţia M se apropie asimptotic de M_0, obţinută din reprezentarea unei benzi paralele pe semiplanul superior, iar funcţia M nu are influenţă asupra coeficienţilor a_0, a_1, a_2, a_3, se poate deduce că aceştia pot fi determinaţi prin compararea asimptotică cu soluţia mişcării plane Poiseuille, reprezentată pe semiplanul superior prin expresia asimptotică a funcţiei de reprezentare conformă (3), adică prin funcţia care transformă o bandă paralelă pe semiplanul superior.

Dezvoltarea (10) își pierde valabilitatea în domeniile în care dezvoltarea (11) nu are loc. În aceste domenii se poate încerca să se obțină dezvoltarea după puterile lui ξ, $\xi \pm a$, $\xi \pm b$. Această situație apare în punctele singulare ale transformării conforme (3). Analiza amănunțită a aplicabilității metodei se efectuează pe cazul particular al canalului cu îngustare bruscă (fig. 3).

5. STUDIUL CANALULUI CU ÎNGUSTARE BRUSCĂ

Funcția care realizează reprezentarea conformă a domeniului din figura 3 pe semiplanul superior este dată de [6]

$$Z = \operatorname{arch}(2\zeta - 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arch}\left(3 - \frac{4}{\zeta}\right), \tag{18}$$



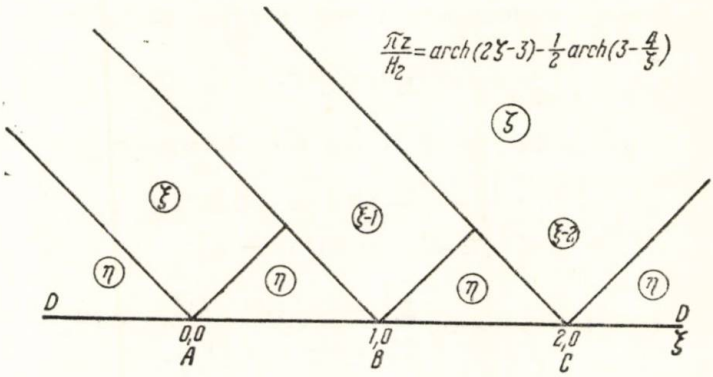


Fig. 3

din care se obține funcția (6)

$$M = \left|\zeta \sqrt{\frac{\zeta - 2}{\zeta - 1}}\right|^2 = (\xi^2 + \eta^2) \sqrt{\frac{(\xi - 2)^2 + \eta^2}{(\xi - 1)^2 + \eta^2}}. \tag{19}$$

Punctele singulare ale transformării sînt $\zeta = 0; 1; 2$. În consecință, se poate diviza semiplanul superior într-o reuniune de subdomenii,

în care studiul soluției se va efectua separat (fig. 3). În aceste subdomenii se indică expresia după care se realizează dezvoltarea. Se obține

$$M = \xi^2 \frac{\xi-2}{\xi-1}\left\{1 + \left[\frac{2\,\xi-3}{2\,(\xi-1)^2\,(\xi-2)} + \frac{1}{\xi^2}\right]\eta^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{(2\,\xi-3)\,[3\,(\xi-2)^2+(\xi-1)^2]}{8\,(\xi-1)^4\,(\xi-2)^4} + \frac{2\,\xi-3}{2\,\xi^2\,(\xi-1)^2\,(\xi-2)^2}\right]\eta^4 + \ldots\right\},$$

$$M = \frac{\eta^2\sqrt{4+\eta^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\left\{1 + \frac{2-\eta^2}{(1+\eta^2)\,(4+\eta^2)}\,\xi + \left[\frac{2-\eta^2}{2\,(1+\eta^2)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{(1+\eta^2)\,(4+\eta^2)} + \frac{\eta^2}{2(4+\eta^2)^2} + \frac{1}{\eta^2}\right]\xi^2 + \ldots\right\}, \tag{20}$$

$$M = \frac{(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{\eta}\left[1 + \frac{1}{1+\eta^2}(\xi-1) + \ldots\right],$$

$$M = \frac{\eta\,(4+\eta^2)}{\sqrt{1+\eta^2}}\left[1 + \frac{3\,\eta^2}{(4+\eta^2)\,(1+\eta^2)}(\xi-2) + \ldots\right].$$

Pentru obținerea dezvoltărilor (20) s-a folosit formula de definiție a funcției generatoare a polinoamelor lui Legendre [7]

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,tx+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,P_k(x), \quad |t| < \min\,|x \pm \sqrt{x^2-1}|, \tag{21}$$

precum și a funcției generatoare a polinoamelor lui Cebîșev

$$\frac{1}{1-2\,tx+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x)\,t^k, \quad |x|,\ |t| < 1. \tag{22}$$

Prin definiția polinoamelor se pot scrie formulele

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,(2\,n-2\,k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2\,k)!}\,x^{n-2k},$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\,(n-k)!}{k!\,(n-2\,k)!}\,(2\,x)^{n-2k}. \tag{23}$$

Deoarece soluția mișcării Poiseuille plane cu debit unitar este

$$\psi_0 = y^2\,(3-2\,y), \tag{24}$$

rezultă că transpunerea formulei (24) în variabilele ξ, η, efectuată cu ajutorul funcției

$$\xi + i\eta = e^{\pi(x+iy)}, \tag{25}$$

are expresia

$$\psi_0 = \frac{6}{\pi^3}\,\operatorname{arctg}^2\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\right). \tag{26}$$

În subdomeniul de dezvoltare după variabila η, se obține

$$\psi_0 = \frac{3}{\pi^2\xi^2}\eta^2 - \frac{2}{\pi^3\xi^3}\eta^3 - \frac{2}{\pi^2\xi^4}\eta^4 + \frac{2}{\pi^2\xi^5}\eta^5 + \dots \tag{27}$$

Prin calcularea coeficienților a_n se pot obține dezvoltările în toate subdomeniile din figura 3. De exemplu, în domeniul dezvoltării după η, rezultă formula

$$\psi - \psi_0 = \pm\frac{1}{\pi}\frac{\eta^4}{\xi^2(\xi-1)^2(\xi-2)^2} + \\ + \frac{1}{5\pi^2}\frac{\left(2+\frac{3\,\mathrm{Re}}{\pi}\right)\xi + 2\left(2-\frac{3\,\mathrm{Re}}{\pi}\right)}{\xi^4(\xi-1)(\xi-2)^2}\eta^5 + \dots, \tag{28}$$

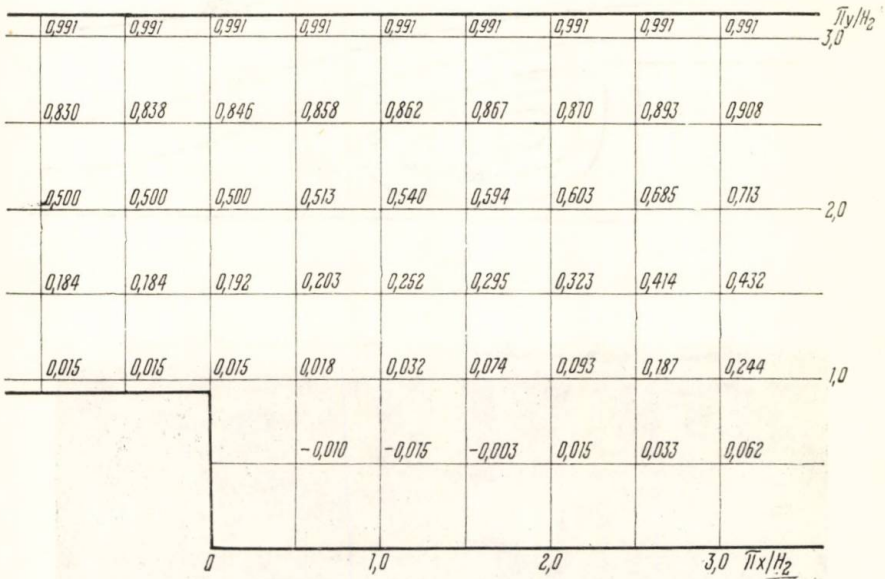


Fig. 4

unde semnul inferior corespunde domeniului valorilor negative pentru η; în domeniul dezvoltării după ξ, se obține formula

$$\psi - \psi_0 = -\frac{2}{\pi^2}\frac{2-\eta^2}{\eta^3(1+\eta^2)(4+\eta^2)}\xi^4 + \\ + \frac{1}{10\pi^2\eta^3(1+\eta^2)(4+\eta^2)}\left[\left(\frac{9\,\mathrm{Re}}{\pi} + 10\pi^2 + 52\right) + \right. \\ \left. + 2(\pi^2+6)\eta^2 + \frac{8(\pi^2+6)}{\eta^2} + \frac{24}{1+\eta^2} - \frac{96}{4+\eta^2}\right]\xi^5 + \dots \tag{29}$$

În celelalte domenii formulele au o formă mai complicată. Calculele s-au efectuat pentru Re = 50 pînă la puterea a șaptea inclusiv a dezvoltării. Valorile calculate sînt indicate în figura 4, iar în figura 5 se indică

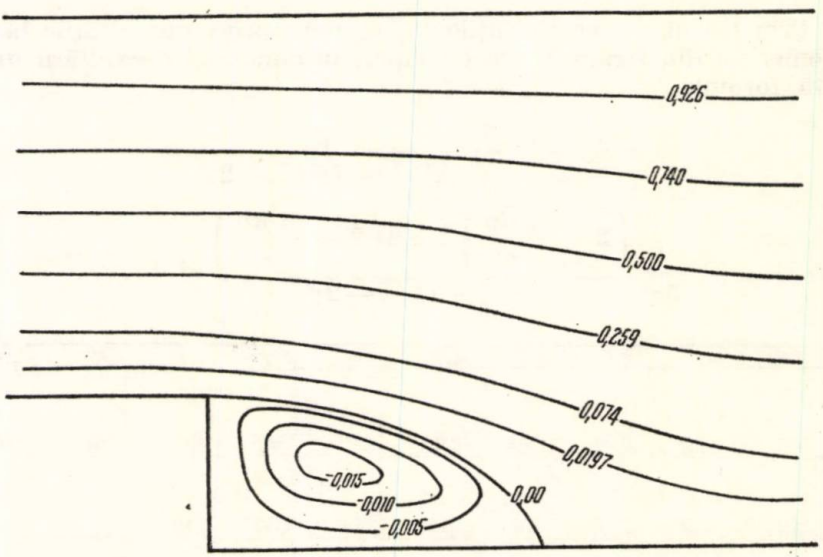


Fig. 5

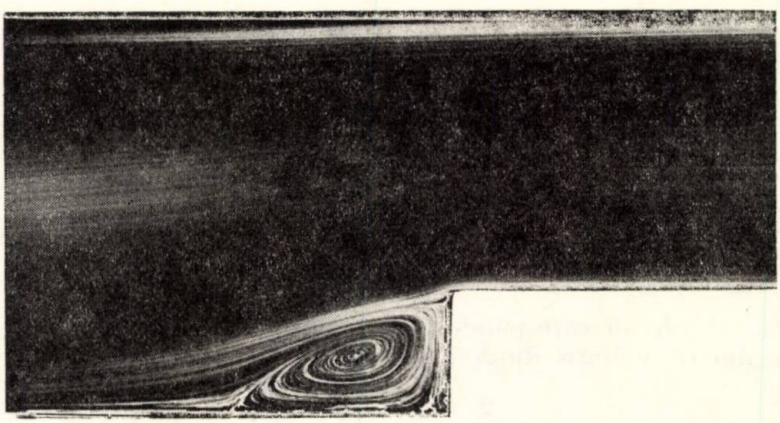


Fig. 6

spectrul calculat al liniilor de curent. În figura 6 se redă spectrul experimental al curgerii cu Re = 50. Se poate constata o bună coincidență între rezultatele teoretice și cele experimentale.

Primită la redacție la 10 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. W. F. Ames, *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Academic Press, N. Y.-London, 1965.
2. H. Goertler, *A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flows*, J. Math. Mech., **6**, *1* (1957).
3. M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, N. Y.-London, 1964.
4. I. D. Chang, *Navier-Stokes solutions at large distances from a finite body*, J. Math. Mech., **10**, p. 871–876 (1961).
5. I. Seteanu, *Mișcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu plan simplu conex nemărginit*, St. cerc. mec. apl., nr. 2 (1969).
6. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, London, Macmillan and Co. Ltd., 1960.
7. H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, vol. 2, N. Y.-Toronto-London, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1953.

MIȘCAREA DE ANTRENARE ȘI TRANSFERUL DE CĂLDURĂ PENTRU FLUIDE VÎSCOASE STRATIFICATE

de CORNELIU CRĂCIUN
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se determină repartiția de presiuni, viteze și temperaturi pentru un sistem de fluide vîscoase stratificate în mișcare de antrenare (de tip Couette), ca de exemplu între două plăci în translație relativă cu viteză uniformă V_0, respectiv V_n, și temperaturi θ_0, respectiv θ_n.

1. MIȘCAREA DE ANTRENARE

Fie un ansamblu de n fluide vîscoase, incompresibile stratificate, nemiscibile, situate deasupra unui plan orizontal. Vom considera un sistem de axe legat de planul de bază $y = 0$, care poate avea o mișcare de translație uniformă, și vom studia mișcarea relativă a fluidelor față de acest sistem de referință. Fluidul din stratul $k (k = 1, 2, \ldots, n)$ va fi limitat inferior de planul $y = h_{k-1}$ $(h_0 = 0)$ și superior de planul $y = h_k$. El va fi caracterizat prin viscozitatea μ_k și densitatea $\rho_k (\rho_k > \rho_{k+1})$.

În lipsa gradientului de presiune, mișcarea de antrenare a sistemului de fluide stratificate va fi generată fie de translația uniformă a planului de frontieră superior (perete rigid în translație), fie de un efort tangențial care acționează în lungul aceluiași plan (considerat suprafață liberă sau suprafață de contact cu un alt fluid vîscos în mișcare uniformă).

Vom alege axa Ox în sensul vitezei relative de translație a planului superior sau în sensul acțiunii efortului tangențial. Mișcarea fluidelor fiind plană, necunoscutele problemei, viteza și presiunea, nu depind de variabila z. Din ecuația de continuitate $\nabla \vec{v} = 0$ rezultă că singura componentă a vitezei, aceea după axa Ox, depinde numai de variabila y. Avem :

$$v_x = u(y), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0, \quad p = p(y).$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 585–593, BUCUREȘTI, 1969

Ecuaţiile Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil [1, p. 37],

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla \nabla \vec{v},$$

se reduc, în cazul mişcării plane de antrenare uniformă, la forma [1, p. 53]

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = 0, \tag{1}$$

$$g\rho + \frac{dp(y)}{dy} = 0, \tag{2}$$

unde g reprezintă acceleraţia gravitaţională.

Dacă se cunoaşte presiunea într-un punct, de exemplu pe frontiera superioară (perete rigid sau suprafaţă liberă) $y = h_n$, $p = p_n$, ecuaţia (2) furnizează o repartiţie hidrostatică a presiunilor. Notînd cu $p^{(k)}$ presiunea în stratul fluid k, vom avea

$$p^{(k)}(y) = p_n + g \sum_{i=k+1}^{n} \rho_i (h_i - h_{i-1}) + g\rho_k (h_k - y). \tag{3}$$

Ecuaţia (1) trebuie integrată pentru fiecare domeniu fluid $h_{k-1} \leqslant y \leqslant h_k$ cu condiţiile la limită corespunzătoare. La pereţii solizi vom impune egalitatea vitezei fluidului cu a peretelui (aderenţă), iar pe suprafeţele de contact între două fluide egalitatea vitezelor şi a eforturilor tangenţiale. Pentru exemplificare vom considera cazul unui sistem de două fluide stratificate (fig. 1).

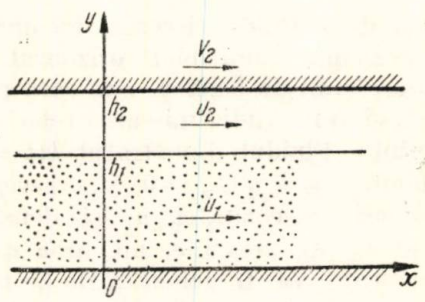


Fig. 1

2. DISTRIBUŢIA DE VITEZE

Vitezele în cele două fluide $u_1(y)$, respectiv, $u_2(y)$ trebuie să satisfacă ecuaţiile

$$\frac{d^2u_1(y)}{dy^2} = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h_1, \tag{4}$$

$$\frac{d^2u_2(y)}{dy^2} = 0, \qquad h_1 \leqslant y \leqslant h_2. \tag{5}$$

Condiţiile de aderenţă la pereţii solizi se scriu

$$u_1(y) = 0, \qquad y = 0, \tag{6}$$

$$u_2(y) = V_2, \qquad y = h_2, \tag{7}$$

iar condiţiile de contact al celor două fluide

$$u_1(y) = u_2(y), \qquad y = h_1, \tag{8}$$

$$\mu_1 \frac{\mathrm{d}u_1(y)}{\mathrm{d}y} = \mu_2 \frac{\mathrm{d}u_2(y)}{\mathrm{d}y}, \qquad y = h_1. \tag{9}$$

Soluţiile generale ale ecuaţiilor (4) şi (5) sînt

$$u_1(y) = A_1 y + B_1, \tag{10}$$

$$u_2(y) = A_2 y + B_2. \tag{11}$$

Condiţiile la limită (6) şi (7) determină constantele $B_j (j = 1, 2)$:

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = V_2 - A_2 h_2. \tag{12}$$

Condiţiile (8) şi (9) determină constantele A_j:

$$A_1 = \frac{\mu_2 V_2}{(\mu_2 - \mu_1) h_1 + \mu_1 h_2}, \qquad A_2 = \frac{\mu_1 V_2}{(\mu_2 - \mu_1) h_1 + \mu_1 h_2}. \tag{13}$$

Se observă că viscozităţile celor două fluide intervin numai prin raportul lor

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = m.$$

Folosind această mărime fără dimensiune, constantele se mai scriu

$$A_1 = \frac{m V_2}{(m-1) h_1 + h_2}, \qquad A_2 = \frac{V_2}{(m-1) h_1 + h_2}. \tag{14}$$

Cu valorile (12) şi (14) ale constantelor, vitezele în cele două fluide iau forma

$$u_1(y) = \frac{m V_2}{(m-1) h_1 + h_2} \cdot y, \tag{15}$$

$$u_2(y) = \frac{V_2}{(m-1) h_1 + h_2} (y - h_2) + V_2. \tag{16}$$

Observaţia 1. Dacă se introduc notaţiile

$$\frac{u_1}{V_2} = U_1, \quad \frac{u_2}{V_2} = U_2, \quad \frac{y}{h_2} = \eta, \quad \frac{h_1}{h_2} = H,$$

se obţin soluţiile sub formă adimensională

$$U_1(\eta) = \frac{m}{(m-1) H + 1} \eta, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant H,$$

$$U_2(\eta) = \frac{1}{(m-1) H + 1} (\eta - 1) + 1, \qquad H \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Observația a 2-a. Dacă viteza V_0 de translație a planului de bază are aceeași direcție cu a planului superior, se poate considera direct mișcarea absolută a fluidelor față de un sistem de referință fix, avînd axa Oy normală la plan. Mișcarea plană este regizată de aceleași ecuații (4) și (5) care se integrează cu condițiile la limită (7), (8), (9) și

$$u_1(y) = V_0, \qquad y = 0. \tag{6'}$$

Constantele au acum expresiile

$$B_1' = V_0, \qquad B_2' = V_2 - A_2' h_2, \tag{12'}$$

$$A_1' = \frac{\mu_2(V_2 - V_0)}{(\mu_2 - \mu_1)\, h_1 + \mu_1 h_2}, \qquad A_2' = \frac{\mu_1(V_2 - V_0)}{(\mu_2 - \mu_1)\, h_1 + \mu_1 h_2}, \tag{13'}$$

care, evident, se reduc la cele precedente pentru $V_0 = 0$. Și aceste constante depind numai de raportul viscozităților m. Vitezele se vor scrie

$$u_1'(y) = \frac{m(V_2 - V_0)}{(m-1)\, h_1 + h_2}\, y + V_0, \tag{15'}$$

$$u_2'(y) = \frac{V_2 - V_0}{(m-1)\, h_1 + h_2}\,(y - h_2) + V_2. \tag{16'}$$

Observația a 3-a. Distribuția de viteze (10), (11), respectiv (15), (16) sau (15'), (16'), este liniară în fiecare fluid. Derivata vitezei și, o dată cu ea, efortul tangențial vor fi constante în fiecare fluid :

$$\tau_1 = \mu_1 \frac{\mathrm{d}u_1(y)}{\mathrm{d}y} = \mu_1 A_1,$$

$$\tau_2 = \mu_2 \frac{\mathrm{d}u_2(y)}{\mathrm{d}y} = \mu_2 A_2.$$

Egalitatea (8) a eforturilor tangențiale pe suprafața de contact atrage egalitatea celor două constante. Astfel, efortul tangențial este același în ambele fluide și egal cu cel de la pereții solizi

$$\tau_0 = \frac{\mu_1 \mu_2 V_2}{(\mu_2 - \mu_1)\, h_1 + \mu_1 h_2}. \tag{17}$$

El depinde de viteza de deplasare a peretelui superior sau, în cazul mișcării absolute de la observația a 2-a, de viteza relativă a celor doi pereți,

$$\tau_0' = \frac{\mu_1 \mu_2 (V_2 - V_0)}{(\mu_2 - \mu_1)\, h_1 + \mu_1 h_2}. \tag{17'}$$

Observația a 4-a. Unei viteze de deplasare a peretelui solid $y = h_2$ îi corespunde, conform formulei (17), un efort tangențial τ_0 pe suprafața lui. Reciproc, la un efort tangențial τ_0 dat pe suprafața $y = h_2$ (presupusă

liberă sau de contact cu un alt fluid) corespunde o viteză de deplasare a acestei suprafeţe care poate fi privită ca solidificată. Viteza rezultă din (17)

$$V_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)\, h_1 + \mu_1 h_2}{\mu_1 \mu_2} \tau_0. \tag{18}$$

Problema antrenării sistemului de fluide stratificate de un perete în translaţie este echivalentă cu aceea a mişcării datorite unui efort tangenţial dat pe aceeaşi suprafaţă. Legătura între cele două mărimi este stabilită de formulele (17) şi (18).

Soluţia mişcării de antrenare sub acţiunea efortului tangenţial dat τ_0 se obţine fie direct prin rezolvarea problemei la limită (4)—(9), în care se înlocuieşte condiţia (7) de viteză dată pe suprafaţă cu condiţia de efort tangenţial dat

$$\mu_2 \frac{\mathrm{d}u_2(y)}{\mathrm{d}y} = \tau_0, \qquad y = h_2,$$

fie înlocuind direct în formulele (15) şi (16) viteza V_2 cu expresia ei (18) în funcţie de τ_0. Obţinem

$$u_1(y) = \frac{\tau_0}{\mu_1} y, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h_1, \tag{19}$$

$$u_2(y) = \frac{\tau_0}{\mu_2} y + \tau_0 h_1 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right), \qquad h_1 \leqslant y \leqslant h_2. \tag{20}$$

3. TRANSFERUL DE CĂLDURĂ

Fie mişcarea de antrenare a ansamblului fluid între două plăci cu temperaturi θ_0, respectiv θ_n, constante. Datorită viscozităţii, în masa fluidă în mişcare se degajă o cantitate de căldură care modifică repartiţia de temperatură faţă de starea de repaus.

Într-un fluid incompresibil în mişcare, temperatura $T(x, y, z, t)$ satisface în coordonate carteziene ortogonale ecuaţia energiei [1, p. 42],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \vec{v} \cdot \nabla (\rho c T) = \nabla(\lambda \nabla T) + M,$$

în care c reprezintă căldura specifică, λ coeficientul de conductibilitate termică, iar M funcţia de disipare:

$$M = 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Vom considera cîmpul de temperaturi permanent şi mărimile caracteristice fiecărui fluid ρ, μ, c şi λ independente de temperatură şi de

punct, deci constante în interiorul fiecărui domeniu. Dacă, în plus, ţinem seama de ipotezele referitoare la cîmpul de viteze din paragraful 1, ecuaţia energiei se reduce la

$$\rho c v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Deoarece am presupus temperatura constantă în lungul plăcilor, soluţia nu trebuie să depindă de x şi deci temperatura va fi soluţie a ecuaţiei [2, p. 285]

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(y)}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\mu}{\lambda} \left[\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}y} \right]^2. \tag{21}$$

Aici viteza $u(y)$ trebuie înlocuită cu expresia ei, obţinută ca soluţie a ecuaţiilor de mişcare. Ecuaţia (21) trebuie integrată pentru fiecare domeniu fluid $h_{k-1} \leqslant y \leqslant h_k$ cu condiţii la limită. Astfel, la pereţi temperatura fluidului trebuie să ia valorile date, iar pe suprafaţa de contact a două fluide trebuie ca temperaturile lor să fie egale şi totodată fluxurile calorice unitare să fie egale. Pentru exemplificare vom considera cazul celor două fluide vîscoase în contact, antrenate între pereţii de temperaturi θ_0, respectiv θ_2, pentru care distribuţia de viteze a fost determinată în paragraful 2.

4. DISTRIBUŢIA DE TEMPERATURI

Temperaturile $T_1(y)$ şi $T_2(y)$ în cele două fluide vor satisface ecuaţii de tipul (21). De exemplu din expresiile (10), (11) ale vitezelor se calculează derivatele

$$\frac{\mathrm{d}u_1(y)}{\mathrm{d}y} = A_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2(y)}{\mathrm{d}y} = A_2,$$

unde A_1 şi A_2 au valorile date de (14).

Vom avea deci de integrat ecuaţiile

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_1(y)}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} A_1^2, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h_1, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_2(y)}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2} A_2^2, \qquad h_1 \leqslant y \leqslant h_2, \tag{23}$$

cu condiţii de temperatură dată la pereţii solizi

$$T_1(y) = \theta_0, \qquad y = 0, \tag{24}$$

$$T_2(y) = \theta_2, \qquad y = h_2, \tag{25}$$

şi condiţii de contact

$$T_1(y) = T_2(y), \qquad y = h_1, \tag{26}$$

$$\lambda_1 \frac{\mathrm{d}T_1(y)}{\mathrm{d}y} = \lambda_2 \frac{\mathrm{d}T_2(y)}{\mathrm{d}y}, \qquad y = h_1. \tag{27}$$

Soluţiile generale ale ecuaţiilor (22), (23) se scriu

$$T_1(y) = -\frac{\mu_1 A_1^2}{2\lambda_1} y^2 + C_{11}y + C_{12}, \tag{28}$$

$$T_2(y) = -\frac{\mu_2 A_2^2}{2\lambda_2} y^2 + C_{21}y + C_{22}. \tag{29}$$

Condiţiile (24)—(27) determină constantele C_{pq}. Astfel, din (24) rezultă imediat

$$C_{12} = \theta_0. \tag{30}$$

Celelalte relaţii se scriu, ţinînd seama de (28) şi (29):

$$-\frac{\mu_2 A_2^2}{2\lambda_2} h_2^2 + C_{21}h_2 + C_{22} - \theta_2 = 0, \tag{25'}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1 A_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2 A_2^2}{\lambda_2}\right) h_1^2 + (C_{21} - C_{11})\, h_1 + C_{22} - \theta_0 = 0, \tag{26'}$$

$$\lambda_1 C_{11} - \mu_1 A_1^2 h_1 = \lambda_2 C_{21} - \mu_2 A_2^2 h_1. \tag{27'}$$

Dacă se scad (25') şi (26'), se elimină C_{22}. Din ultima relaţie se deduce

$$C_{11} = lC_{21} + \frac{1}{\lambda_1}(\mu_1 A_1^2 - \mu_2 A_2^2)\, h_1,$$

unde s-a notat cu l raportul adimensional al conductibilităţilor termice:

$$l = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Înlocuirea lui C_{11} în relaţia obţinută prin scăderea primelor două conduce la determinarea constantei C_{21}:

$$C_{21} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{(l-1)\, h_1 + h_2} + \\ + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{1}{(l-1)\, h_1 + h_2} \{[(2l-1)\, \mu_2 A_2^2 - l\mu_1 A_1^2]\, h_1^2 + \mu_2 A_2^2 h_2^2\}. \tag{31}$$

Revenind la expresia lui C_{11} avem:

$$C_{11} = \frac{l(\theta_2 - \theta_0)}{(l-1)\, h_1 + h_2} + \\ + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{l}{(l-1)\, h_1 + h_2} \{[(l-2)\, \mu_1 A_1^2 + \mu_2 A_2^2]\, h_1^2 + \mu_2 A_2^2 h_2^2 + 2\,(\mu_1 A_1^2 - \mu_2 A_2^2) h_1 h_2\}. \tag{32}$$

Din condiția (25′) obținem și pe C_{22}

$$C_{22} = \frac{(l-1)\,h_1\theta_2 + h_2\theta_0}{(l-1)\,h_1 + h_2} - \\ - \frac{1}{2\lambda_2}\,\frac{h_1 h_2}{(l-1)\,h_1 + h_2}\{[(2l-1)\,\mu_2 A_2^2 - l\mu_1 A_1^2]\,h_1 - (l-1)\,\mu_2 A_2^2 h_2\}. \tag{33}$$

Repartiția temperaturilor (28), (29) în care se introduc constantele determinate la (30), (31), (32) și (33) poate fi privită ca suprapunerea distribuțiilor de temperaturi în două cazuri-limită : a) fluidele se află în repaus între plăcile imobile ($V_2=0$) care au temperaturi diferite și b) fluidele se mișcă între plăci cu aceeași temperatură ($\theta_2 = \theta_0$).

a) Din condiția ca placa superioară să fie imobilă rezultă

$$A_1 = A_2 = 0$$

și repartiția de temperaturi este dată de formulele

$$T_1(y) = \frac{l(\theta_2-\theta_0)}{(l-1)\,h_1 + h_2}\,y + \theta_0, \tag{34}$$

$$T_2(y) = \frac{\theta_2-\theta_0}{(l-1)\,h_1 + h_2}\,(y-h_2) + \theta_2. \tag{35}$$

Cele două repartiții de temperatură se reprezintă prin două drepte de pante diferite, corespunzătoare celor două domenii fluide (fig. 2) :

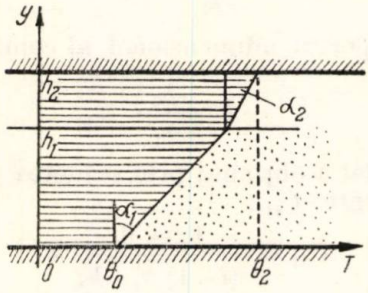


Fig. 2

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{l(\theta_2-\theta_0)}{(l-1)\,h_1 + h_2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\theta_2-\theta_0}{(l-1)\,h_1 + h_2}.$$

Se observă analogia de formă între formulele (34), (35) , pe de o parte, și formulele (15′), (16′), pe de altă parte.

b) Dacă plăcile se află la aceeaşi temperatură, distribuţia ce se obţine corespunde disipării de energie datorită viscozităţii fluidelor în mişcare de antrenare. Ea este reprezentată de arce de parabolă ce se întîlnesc în acelaşi punct pe dreapta de contact $y = h_1$.

Primită la redacţie la 19 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, Edit. Academiei, 1967.
2. H. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, Verlag G. Braun Karlsruhe, 1958.

O PROPUNERE PRIVIND LUNGIMEA DE AMESTEC DIN TEORIA LUI L. PRANDTL, PENTRU CAZUL CURGERII TURBULENTE ÎN CANALE ŞI CONDUCTE, AVÎND LA BAZĂ UN PRINCIPIU VARIAŢIONAL

de MARIA ARSENIE şi DUMITRU ARSENIE
Institutul politehnic, Timişoara

În lucrare se analizează relaţia lungimii de amestec a lui Prandtl şi se arată că, în cazul considerării relaţiilor privind tensiunile tangenţiale turbulente τ şi a lungimii de amestec ale lui Prandtl, acea distribuţie a vitezelor medii în timp care realizează un transfer al energiei de impuls minim este distribuţia logaritmică, universală în cazul unui curent în lungul unui singur perete plan.
Postulînd minimul acestui transfer şi în cazul curgerii între doi pereţi plani, se ajunge la următoarea expresie pentru lungimea de amestec :

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3h}}.$$

Această relaţie pentru lungimea de amestec permite deducerea legii universale de distribuţie a vitezei după metodica Prandtl, ca o primă aproximaţie renunţînd la ipoteza $\tau = \tau_0$ şi considerînd variaţia liniară a lui τ pe secţiune.
Analog, în cazul conductelor circulare, expresia lungimii de amestec este

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3R}}.$$

1. Teoria semiempirică a turbulenţei elaborată de L. Prandtl are la bază ideea conservării impulsului în direcţia scurgerii principale, din care motiv a şi fost denumită teoria transferului de impuls. Pe baza acestei idei s-a dedus de către L. Prandtl, pentru cazul curgerii în lungul unui perete plan, următoarea expresie pentru eforturile tangenţiale turbulente [1], [2] :

$$\tau = \rho l^2(y) \left| \frac{d\overline{v}_x}{dy} \right| \frac{d\overline{v}_x}{dy}, \tag{1}$$

în care $\overline{v}_x$ este viteza medie în timp după direcţia x, într-un punct situat la distanţa y de perete, şi l este lungimea de amestec, ce depinde de coordonata y. Este de menţionat că teoria lui Taylor, bazată pe ipoteza conser-

vării vrîtejului (rotorului vitezei) în procesul de amestec turbulent, conduce la o formulă de același tip cu (1), cu deosebirea că lungimea de amestec l se înlocuiește cu $\frac{l}{\sqrt{2}}$.

Formula (1) a fost aplicată cu succes la rezolvarea unor probleme practice din mișcarea turbulentă cu fața liberă [3] și din teoria lubrificației turbulente [4], [5]. Din aceste considerente, în cele ce urmează, relația (1) se va considera valabilă.

Pentru lungimea de amestec, Prandtl a considerat expresia

$$l(y) = \varkappa y, \tag{2}$$

în care $\varkappa \cong 0{,}40$ este o constantă adimensională ce se determină experimental. În [2] se menționează că această relație este plauzibilă, dar ea conține unele lipsuri, care l-au determinat chiar pe Prandtl să propună ulterior o altă relație pentru lungimea de amestec. Relația (2) este, în fond, o ipoteză necesară în demonstrarea legii universale de distribuție a vitezelor, ea nefiind rezultatul unei demonstrații riguroase. În această situație era logic ca expresia (2) a lungimii de amestec să nu fie acceptată unanim, să se propună și alte expresii teoretice pentru lungimea de amestec și să se efectueze numeroase cercetări experimentale în această direcție.

Chiar în ceea ce privește utilizarea relației (2) în deducerea legii universale de distribuție a vitezei, ea a necesitat introducerea ipotezei foarte simplificatoare că efortul tangențial turbulent τ este constant pe secțiune, avînd valoarea τ_0 de la perete.

În [13] se dă următoarea interpretare fizică a lungimii de amestec, care îi justitifică și denumirea : lungimea de amestec reprezintă lungimea după care microparticulele care se deplasează sub acțiunea vitezei de pulsație din centrul unei macroparticule se integrează în macroparticula vecină și iau viteza medie a acesteia ; în același sens, ea reprezintă dimensiunea medie a macroparticulelor schemei turbulente. În această lucrare lungimea de amestec are o interpretare asemănătoare, în fraza de mai sus înlocuindu-se doar cuvîntul de macroparticulă cu cuvîntul de strat, adică se presupune că macroparticulele se pot grupa în straturi ce au aceeași viteză mediată în timp $\overline{v}_x$.

Relația (2), ca și relația (1), a fost obținută de Prandtl în cazul curentului infinit în lungul unui perete plan. Presupunînd valabilitatea în acest caz, rezultă în mod firesc că, în cazul unor curenți limitați de pereți plani, eventual curbi, relația (2) a lungimii de amestec va trebui adaptată noilor condiții. Probabil, ea va fi o aproximație cu atît mai bună a fenomenului real, cu cît se cercetează valabilitatea ei într-o zonă din apropierea unui singur perete, în care deci influența acestui perete este mult mai mare decît a celorlalți.

Modificarea relației (2) conform cu cele spuse mai sus pare cu atît mai necesară cu cît secțiunea de scurgere este mai mică (cazul lubrificației).

Pentru a corecta aceste lipsuri ale relației (2) s-a și propus în [1] considerarea unei variații liniare a lui τ pe secțiunea de formă circulară (cum se procedează și în teoria lui Th. Kármàn) :

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) \tag{3}$$

și considerarea unei lungimi de amestec de forma

$$l = \varkappa y f\left(\frac{y}{R}\right), \tag{4}$$

în care $f\left(\frac{y}{R}\right) \to 1$ pentru $\frac{y}{R} \to 0$, adică în apropierea peretelui conductei.

În cazul unui canal de lățime $2h$, se consideră în [5] influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente din stratul de lubrifiant, analizîndu-se următoarele expresii :

— variație trigonometrică, $l = \frac{2\varkappa y}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2h}$, (5)

— variație parabolică, $l = \varkappa y \left(1 - \frac{y}{2h}\right)$. (6)

În [4] se mai menționează, pentru lungimea de amestec, o relație sub forma unei serii de puteri de forma

$$l = \varkappa y + \varkappa' y^2 + \ldots \tag{7}$$

Deoarece nu se dă și o metodă de deducere a coeficienților, relația (7) este practic de nefolosit.

Experimental, J. Nikuradze a găsit prin interpolare, în cazul conductelor circulare, netede și rugoase, la numere Reynolds mai mari decît 10^5 o variație parabolică după o parabolă de ordinul patru :

$$\frac{l}{R} = 0{,}14 - 0{,}08\left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0{,}06\left(1 - \frac{y}{R}\right)^4. \tag{8}$$

Pentru $\frac{y}{R}$ mic, adică în apropierea frontierei circulare din (8), rezultă relația aproximativă

$$\frac{l}{R} \cong 0{,}4\,\frac{y}{R}\left(1 - \frac{y}{R}\right). \tag{9}$$

Relațiile (2), (5), (6) și (8) au fost reprezentate grafic în figura 1, remarcîndu-se faptul că (2) este o linie frîntă, pe cînd celelalte sînt curbe netede.

În [4], [5], analizîndu-se influența pe care o are relația adoptată pentru lungimea de amestec asupra distribuției vitezei pentru o mișcare de tip Couette, se ajunge la concluzia, care este sugerată și de graficele prezentate, că influența nu este semnificativă (calculele efectuîndu-se pentru cazurile extreme ale legilor de variație liniară și parabolică).

Comparînd din figura 1 valorile obținute pentru lungimea de amestec cu diversele relații, se constată o apropiere sensibilă a lor pentru valori y_p mici, adică în apropierea peretelui. Acest lucru, care era de așteptat, avînd în vedere considerentele fizice expuse mai sus, se poate explica și matematic, căci, dezvoltînd în serie de puteri relațiile rerezentate grafic și limitîndu-se la primul termen (fapt cu atît mai acceptabil cu cît y este

mai mic), toate se reduc la relaţia (2). Pentru valori mari ale lui y, concordanţa curbelor nu mai este acceptabilă, obţinîndu-se diferenţe de pînă la 100% între valorile lungimii de amestec.

După [10], cercetările lui M. A. Velicanov pentru canale şi rîuri indică aceeaşi valoare a lui $\varkappa$ ca şi pentru conducte, adică $\varkappa = 0{,}4$.

În experienţele efectuate în canale cu rugozitate mică, Jelezniacov a obţinut pentru $\varkappa$ valoarea de 0,33 şi, prin prelucrarea unor date hidrometrice, a obţinut pentru rîuri valoarea medie $\varkappa = 0{,}54$.

G.M. Lomize, studiind rezistenţa hidraulică la curgerea sub presiune prin orificii, a obţinut pentru orificii netede $\varkappa = 0{,}415$ şi pentru orificii rugoase $\varkappa = 0{,}328$.

În urma acestor consideraţii, în [10] se trage concluzia că, cu toate că relaţia logaritmică de distribuţie a vitezei se verifică prin rezultate experimentale, problema constantelor $\varkappa$ şi $\beta = \frac{v_{max} - v_{med}}{v_x}$ rămîne încă deschisă; deocamdată se poate afirma că ele nu sînt „constante universale".

Cercetările experimentale ale lui Sevelev au dat următoarele legi de variaţie ale acestor mărimi pentru conducte:

$$\varkappa = \frac{0{,}337}{d^{0{,}08}} \; (d = \text{diametrul, în m}); \; \beta = 4{,}24 \; d^{0{,}08}.$$

Din relaţiile lui Sevelev rezultă că, în primă aproximaţie, aceste mărimi se pot considera constante, căci variaţia lor este foarte lentă.

2. În lucrare se încearcă a se elimina arbitrarul care există în alegerea expresiei lungimii de amestec, urmărindu-se a se da o metodă teoretică care să permită stabilirea expresiei lungimii de amestec, pe o bază unitară, în diversele cazuri concrete şi care să ţină cont de influenţa pereţilor secţiunii.

Într-o lucrare anterioară [6] am demonstrat că în regimul laminar stabil şi permanent, în ipoteza valabilităţii legii de frecare vîscoasă a lui Newton, repartiţia după un paraboloid de revoluţie a vitezei în secţiunea transversală a unei conducte circulare cilindrice conduce, pentru un debit dat, la pierderi de energie minime*). Obţinerea unor rezultate în cazul regimului turbulent în concordanţă cu rezultatele cunoscute, cu ajutorul aplicării unor principii variaţionale, în esenţă cu aceeaşi metodică bazată pe un calcul energetic ca în [6], ar permite o tratare matematică unitară a problemei distribuţiei vitezelor pe secţiune şi ar constitui un argument suplimentar teoriei semiempirice a turbulenţei a lui Prandtl. Este deci logic a încerca aplicarea metodicii folosite în cazul curgerilor laminare şi în cazul scurgerilor turbulente, considerînd însă mărimile mediate în timp ale acestui tip de scurgere.

Astfel de principii au mai fost utilizate în analizarea regimurilor de curgere a fluidelor, în lucrarea [9] fiind enumerate unele utilizări. Menţionez în special [7], [8], în care, pe baza unei condiţii de extrem, se deduce repartiţia de viteze în regimul turbulent, considerîndu-se drept distribuţie stabilă a fluctuaţiilor (luate de forma oscilaţiilor de instabilitate liniară) acea distribuţie care realizează maximul disipaţiei (în esenţă,

*) Ulterior s-a demonstrat acest fapt pentru cazul mai general al curgerilor unidimensionale într-o lucrare trimisă spre publicare revistei „Studii şi cercetări de mecanică aplicată".

disipație vîscoasă în straturile de lîngă perete) și considerîndu-se că energia cinetică a fluctuațiilor este luată din energia mișcării medii. În lucrarea prezentă, condiția de extrem se va pune direct asupra mărimilor medii. În relațiile ce se vor scrie pentru regimul turbulent, presupus complet dezvoltat, se lucrează cu mărimi medii în timp, mărimi ce în acest regim au o semnificație fizică bine definită, deoarece, deși există fluctuații în timp ale mărimilor caracteristice de la valorile medii, totuși s-a demonstrat [9] cu ajutorul anemometriei cu fir cald că aceste fluctuații sînt relativ mici, sub 10% față de mărimile medii. De asemenea, caracterul aleatoriu al fluctuațiilor duce la o uniformizare a lor, la lipsa unor elemente preferențiale ale fluctuațiilor și la existența unor legi care să lege mărimile în timp ale mișcării, legi verificate experimental.

Se va analiza în cele ce urmează cazul unui curent de lățime indefinită în lungul unui perete plan, cazul unui canal de lățime $2\ h$ și cazul unei conducte circulare de rază R.

Pentru scrierea energiei pierdute datorită difuziei turbulente se adoptă un model mecanic al scurgerii asemănător celui existent în mișcarea laminară, cu deosebirea că între straturile de fluid nu mai acționează eforturile tangențiale de frecare vîscoasă, ci eforturile tangențiale de frecare aparente de natură turbulentă, datorită schimbului turbulent de particule ce se produce între straturi.

Dacă între straturi acționează efortul turbulent tangențial τ, atunci forța tangențială dintre straturi datorită difuziei turbulente și aferente unei suprafețe S de frecare între straturi va fi τS. Deplasarea relativă medie în timp a două straturi de grosime dr, unul avînd viteza $\overline{v}_x$ și celălalt viteza $\overline{v}_x + \dfrac{d\overline{v}_x}{dn}\, dn$, se va calcula ca și la mișcarea laminară și va avea expresia $\dfrac{dv_x}{dn}\, dn$. Producerea de energie turbulentă va rezulta prin calcularea lucrului mecanic produs de forțele tangențiale aparente, de natură turbulentă, ce acționează între straturi în deplasările relative corespunzătoare.

Toate mărimile care se vor considera în continuare sînt mărimi medii în timp, de aceea, conform scrierii uzuale, ar trebui marcate cu o bară. Deoarece însă în toate cele ce urmează nu apar decît mărimi medii temporale, această bară care trebuie să permită distincția între valorile mediate și cele instantanee nu se va mai pune.

3. În cazul curentului de-a lungul unui singur perete plan, se formulează condiția ca mișcarea turbulentă să aibă loc cu o asemenea distribuție a vitezelor medii în timp, care să conducă la un transfer global de impuls (de tipul Prandtl) minim, adică se pune condiția ca lucrul mecanic în unitatea de timp și pe unitatea de lugime al eforturilor tangențiale turbulente să fie minim.

Rezultă, din punct de vedere matematic, problema găsirii extremalei $\overline{v}_x$ pentru funcționala

$$P(v_x) = \int_0^{\delta} \frac{dv_x}{dy}\, \tau\, dy, \tag{10}$$

în care s-a considerat deplasarea relativă a două straturi paralele de forma $\frac{dv_x}{dy} dy$ și o porțiune de curent de înălțime arbitrară δ. Modelul scurgerii în straturi paralele pentru mișcarea medie s-a adoptat deoarece chiar relația (1) s-a dedus pe baza unui astfel de model.

Se consideră, așa cum indică literatura, că, în cazul unui singur perete și pentru distanțe δ suficient de mici, $l = \varkappa y$. Pentru τ se consideră relația (1), în care se ia $\frac{dv_x}{dy} > 0$, și se obține următoarea ecuație a lui Euler pentru funcționala (10) pe care trebuie să o satisfacă funcția extremală $\overline{v}_x$:

$$\frac{d}{dy}\left[y \frac{dv_x}{dy}\right]^2 = 0. \tag{11}$$

Ecuația diferențială (10) are o soluție unică (conform teoremei de existență și unicitate Cauchy-Lipschitz) de forma

$$v_x = C_1 \ln y + C_2, \tag{12}$$

adică tocmai legea universală de distribuție a vitezei a lui Prandtl (dacă facem $C_1 = \frac{v_*}{\varkappa}$ unde v_* = viteza de frecare).

Cu ajutorul condiției lui Legendre se obține și natura extremului găsit pentru funcționala (9) : este un minim. Rezultă deci că, în cazul curgerii infinite în lungul unui perete plan, considerarea condiției de minim a transferului global de impuls, considerat pe o înălțime arbitrară a curentului, conduce la rezultatele cunoscute date de teoria lui Prandtl privind expresia tensiunilor tangențiale turbulente, a lungimii de amestec și a distribuției vitezei, ceea ce constituie o confirmare a justeței ei. De asemenea, folosirea ei elimină utilizarea altor ipoteze simplificatoare considerate în teoria lui Prandtl.

4. Folosind metodica generală de pînă acum, să vedem ce rezultate se obțin în cazul unui canal de lățime $2h$, adică în cazul unui curent limitat de doi pereți plan-paraleli. Din cauza simetriei se va considera mișcarea doar pe o jumătate de curent situat în zona valorilor $0 \leqslant y \leqslant h$.

Ipoteza lui Prandtl, $\tau = \tau_0 = \text{const}$ pe întreaga secțiune, se va elimina.

Se va considera, în schimb, variația lui τ care rezultă din interpretarea uneia din ecuațiile lui Reynolds. Neglijînd în regimul turbulent frecarea vîscoasă, ecuația lui Reynolds are forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Luînd $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$, rezultă

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right). \tag{14}$$

Această expresie va fi folosită ulterior la punctul (5) și (7) al lucrării.

Punînd condiția de minim condiționat a puterii turbulente pe unitatea de lungime a curentului, adică condiția de minim a transferului de putere de impuls pe întreaga lățime a canalului, se obține problema minimului condiționat al funcționalei

$$P(v_x) = 2\int_0^h \tau \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y \tag{15}$$

cu legătura olonomă

$$Q(v_x) = 2\int_0^h v_x\,\mathrm{d}y. \tag{16}$$

Explicitînd pe τ în funcționala (15), cu ajutorul relației (1) se obține următoarea ecuație a lui Euler:

$$\lambda + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[3\rho\, l^2(y)\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2\right] = 0. \tag{17}$$

Se observă că ecuația (17) conține ca funcții necunoscute atît lungime de amestec $l(y)$, cît și viteza v_x, de aceea ea nu poate servi la determinarea uneia din ele decît dacă se cunoaște cealaltă.

Se va presupune valabilă legea universală de distribuție a vitezelor a lui Prandtl deoarece această relație conține o foarte bună concordanță cu rezultatele experimentale:

$$\frac{v_{x\max} - v_x}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{h}. \tag{18}$$

Un rezultat corespunzător ce s-ar obține pentru $l(y)$ din (17), folosind legea universală, ar constitui, implicit, o confirmare a relației (18).

Înlocuind (18) în relația (17), după integrare se obține

$$\lambda y + 3\rho\, l^2(y)\,\frac{v_*^2}{\varkappa^2}\,\frac{1}{y^2} = C. \tag{19}$$

Rezultă următoarea expresie pentru lungimea de amestec:

$$l(y) = \varkappa y\sqrt{\frac{C - \lambda y}{3\rho\, v_*^2}}. \tag{20}$$

Expresia (20) este valabilă pentru $0 \leqslant y \leqslant h$. Pentru ca ea să se racordeze fără frîngeri în punctul $y = h$ cu simetrica ei, valabilă pe cealaltă jumătate de canal, trebuie ca $\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}y}\right)_{y=h} = 0$, de unde rezultă valoarea lui C:

$$C = \frac{3h\lambda}{2}. \tag{21}$$

Introducînd expresia lui C din (21) în relaţia (20), se obţine

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{\frac{\lambda h}{2\rho v_*^2}} \sqrt{1 - \frac{2}{3}\frac{y}{h}} . \tag{22}$$

Constanta λ se determină punînd condiţia ca pentru $y \to 0$ să obţinem tocmai relaţia (2) a lungimii de amestec, aşa cum s-a propus şi în relaţia (4), adică

$$\lambda = \frac{2\rho v_*^2}{h} . \tag{23}$$

Cu această val are a lui λ, expresia finală a lungimii de amestec va fi

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2}{3}\frac{y}{h}} . \tag{24}$$

Pentru lungimea maximă se obţine valoarea

$$l_{\max} = l(y = h) = \frac{\varkappa h}{\sqrt{3}} \cong 0{,}23\, h. \tag{25}$$

Se observă că influenţa celui de-al doilea perete conduce la reducerea lungimii maxime de la 0,40 h, dată de relaţia (2) la 0,23 h, dată de relaţia (25). Avînd în vedere rezultatele experimentale ale lui Nikuradze în cazul conductelor, la care prezenţa peretelui circular conduce la o reducere a lungimii maxime de la 0,4 R la 0,14R, rezultatul obţinut cu relaţia (24) în cazul canalelor pare foarte bun.

Reprezentarea grafică a relaţiei (24) se dă în figura 1, constatîndu-se o încadrare între curbele considerate de alţi cercetători.

Pe baza celor de mai sus se sugerează, în special în cazul distanţelor mici dintre pereţi (teoria lubrificaţiei), considerarea pentru lungimea de amestec a relaţiei (24) ca avînd un suport teoretic. Prin faptul că curba dată de (22) se încadrează între curbele extreme considerate în lucrarea [5], curbe care au dus ambele la o concordanţă destul de bună cu datele experimentale, este de presupus că şi relaţia (22) va conduce la o concordanţă bună cu rezultatele experimentale.

5. Relaţia dedusă mai sus ar trebui să permită deducerea legii de distribuţie a vitezei, adică să avem următorul ciclu închis :

distribuţia vitezei $(v_x) \Rightarrow$ lungimea de amestec $(l) \Rightarrow$ distribuţia vitezei (v_x).

Să vedem dacă acest ciclu în cazul de faţă se închide sau nu. Exprimăm în două feluri tensiunea turbulentă folosind şi relaţia (14) :

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \rho \varkappa^2 y^2 \left(1 - \frac{2}{3}\frac{y}{h}\right) \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2 . \tag{26}$$

Pentru ca ciclul să se închidă ar trebui să se considere

$$1 - \frac{y}{h} \cong 1 - \frac{2}{3}\frac{y}{h} . \tag{27}$$

Egalitatea (27) se observă că este cu atît mai adevărată cu cît y_p este mai mic și cu cît h este mai mare.

Din relația (26), în care $\tau_0 = \rho v_*^2$, rezultă :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_*}{\varkappa}\frac{1}{y}\sqrt{\frac{h-y}{h-\frac{2}{3}y}} = \frac{v_*}{\varkappa}\frac{1}{y}\sqrt{1-\frac{y}{3h-2y}}, \qquad (28)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_*}{\varkappa}\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3h-2y}}+\cdots\right).$$

Din relația (28) se observă mai bine caracterul de primă aproximație al legii universale de distribuție a vitezei, deoarece ea rezultă considerînd doar primul termen al seriei alternate și constituie o aproximație cu atît mai bună cu cît y este mai mic și cu cît h este mai mare, fiind chiar exactă pentru $h \to \infty$, adică în cazul unui singur perete plan (cazul, de altfel, pentru care ea a și fost dedusă de către L. Prandtl).

Această concluzie asupra legii deficitului de viteză este trasă și în [13], arătîndu-se că ea poate fi considerată ca valabilă într-o primă aproximație pentru curenți cu dimensiuni nu prea diferite. Se menționează că, integrînd relația (28), se obține o lege mai complicată de distribuție a vitezei, care însă își păstrează caracterul logaritmic.

6. Avînd în vedere că, în general, relațiile din cazul canalelor se rtanspun formal în cazul conductelor prin simpla schimbare a lui h cu R, să vedem la ce rezultate conduce relația (24) transpusă la conducte :

$$l(y) = \varkappa y\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{y}{R}}. \qquad (29)$$

Scriind, ca și în cazul canalului, pierderea de putere datorită tensiunilor turbulente pe unitatea de lungime a conductei ca fiind produsul dintre forța generată de aceste tensiuni și deplasarea relativă a straturilor, se obține

$$P(v_x) = \int_0^R \tau \frac{dv_x}{dr} 2\pi (R-r)\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{dv_x}{dr}(R-r)\, dr = \qquad (30)$$
$$= \iint_{\text{arc}} \tau \frac{dv_x(r)}{dr}\, dr\, dr_\perp$$

unde s-a notat $dr_\perp = (R-r)\, d\theta$, un element curbiliniu după linia izotahă (de viteză egală) circulară. În felul acesta funcționala (30) este exprimată în coordonatele curbilinii, r și $r_\perp$.

Legătura olonomă rezultată din ecuația de continuitate este

$$Q(v_x) = \int_0^R v_x \cdot 2\pi (R-r)\, dr = \iint_{\text{arc}} v_x(r)\, dr\, dr_\perp. \qquad (31)$$

Avînd în vedere invariaţia ecuaţiei lui Euler în raport cu transformările regulate de coordonate (se poate verifica uşor că transformarea de la coordonatele x, y la coordonatele r, $r_\perp$ este o transformare regulată) şi înlocuind întîi în funcţionala (30) expresia lui τ dat de (1), se va obţine următoarea ecuaţie pentru funcţionala $P(v_x) - \lambda Q(v_x)$:

$$\lambda + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[3\varrho l^2(r)\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)^2\right] = 0. \tag{32}$$

Se observă că (32) are aceeaşi formă cu (17), din care se poate obţine formal prin înlocuirea lui y prin r.

Rezultă că şi soluţiile respective (cu aceleaşi condiţii care s-au pus în (17) pentru determinarea constantelor) se vor putea obţine una din alta prin simpla schimbare a literelor, deci soluţia ecuaţiei (32) este de forma (29), în care prin y se înţelege distanţa măsurată de la perete după rază şi nu după o direcţie fixă, ca în cazul coordonatelor carteziene.

Şi în acest caz se pot face în mod analog consideraţiile privind faptul că relaţia logaritmică universală este valabilă în primă aproximaţie, obţinîndu-se o relaţie identică cu (28) (în care y se măsoară radial), gradul de aproximaţie al legii universale fiind acelaşi.

Se observă analogia perfectă care se menţine între mişcarea plană şi mişcarea într-o conductă circulară şi în regim turbulent, această analogie fiind demonstrată cu ajutorul ecuaţiilor Navier-Stokes şi în mişcarea plană.

7. CONCLUZII

Metoda minimului condiţionat al energiei turbulente se poate aplica relativ la mărimile mediate în timp ale mişcării turbulente, căci se poate arăta uşor că ecuaţia (13) a lui Reynolds sub forma (14) este echivalentă cu minimul condiţionat al energiei turbulente. Înlocuind în funcţionalele (15), respectiv pentru conducte (30), pe τ dat de (14) nu de (1) şi considerînd condiţiile de legătură (16), respectiv (31), se obţin ecuaţii Euler pentru funcţionale de tip $P(v_x) - \lambda Q(v_x)$, compatibile, care permit determinarea unor valori nenule pentru constanta λ. Deci variaţia liniară a lui τ pe secţiune dată de ecuaţia lui Reynolds este echivalentă cu postularea unei asemenea distribuţii pe secţiunea lui v_x care să facă minimă energia pierdută. Ecuaţiile obţinute conţin două funcţii necunoscute : viteza şi lungimea de amestec. Presupunînd valabilă în primă aproximaţie relaţia universală a deficitului de viteză, în lucrare se face o analiză a relaţiei lungimii de amestec. Se arată că în cazul unui curent infinit în lungul unui perete plan relaţia lui Prandtl a lungimii de amestec, legea eforturilor tangenţiale turbulente şi legea universală de repartiţie a vitezei conduc la un minim al transferului de impuls. Presupunînd valabilă această condiţie de minim şi în cazul curgerii între doi pereţi, se obţine, pentru lungimea de amestec, o relaţie în care, prin introducerea parametrului h ,s-a introdus de fapt influenţa celui de-al doilea perete de forma

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3h}}.$$

Cu ajutorul acestei relaţii se poate deduce, ca o primă aproximaţie, relaţia universală de distribuţie a vitezei, fără să mai fie necesară ipoteza $\tau = \tau_0$ pe secţiune, ci luînd în considerare şi variaţia lui pe secţiune, rezultată din ecuaţiile lui Reynolds. Aceleaşi consideraţii s-au făcut şi în cazul unei conducte circulare, ajungîndu-se la relaţia

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3R}} .$$

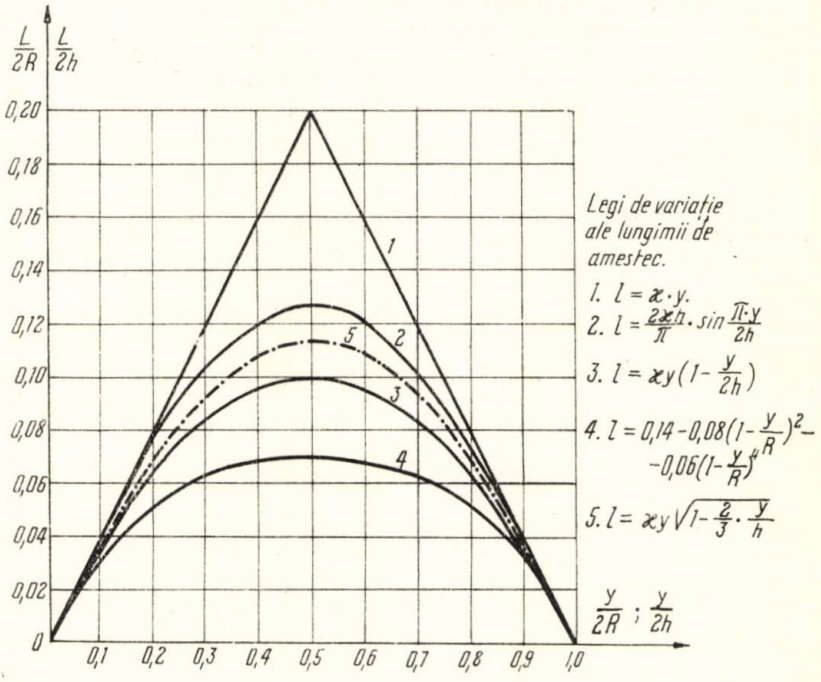


Fig. 1

Primită la redacţie la 2 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Hermann Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, Dritte Auflage, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1958.
2. Teodor Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, Bucureşti, Editura Academiei, 1967.
3. Dumitru Dumitrescu, *Contributions à l'étude des mouvement des fluides pesant à surface libre*, Revue de mécanique appliquée *I* (1956).
4. V. N. Constantinescu, *Teoria lubrificaţiei în regim turbulent*, Bucureşti, Editura Academiei, 1965.
5. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *Influenţa legii de variaţie a lungimii de amestec asupra mişcării turbulente din stratul de lubrifiant*, St. cerc. mec. apl. **11**, *5* (1960).
6. M. Arsenie, D. Arsenie, *Consideraţii variaţionale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secţiune circulară*, St. cerc. mec. apl., *4* (1968).

7. W. R. Malkus, *Discrete transmitions in turbulent convection*, Proc. Roy. Soc. A Seria A (225).
8. W. C. Reynolds, W. C. Tiderman, *Stability of turbulent channel flow with applicotion to Malkus's theory*, Journal of Fluid Mechanics, Febr. 1967.
9. Șt. N. Săvulescu, *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, București, Editura Academiei, 1968.
10. F. A. Șevelev, *Issledovanie osnovnîh ghidravliceschin zakonomernostei turbulentnogo dvijeniia v trubah*, Moscova, 1953.
11. N. Teodorescu, *Curs de ecuațiile fizicii matematice*, București, 1963.
12. A. Haimovici, *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional*, București, 1966.
13. D. Cioc, *Mecanica fluidelor*, București, 1967.
14. M. Miller, *Variationsrechnung*, Leipzig, 1959.

ASUPRA CĂDERII DE PRESIUNE LA SCURGERILE PRIN CONDUCTE ÎN REGIM TURBULENT *)

de S. GĂLETUȘE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

În lucrare se prezintă rezultatele obținute anterior privind distribuția de viteze după normala la stratul de fluid ce se scurge în regim turbulent prin conducte de secțiune circulară sau plan-paralelă. În continuare, se deduc expresiile vitezei medii pentru cele două cazuri (conducte circulare sau de secțiune plan-paralelă). Folosind aceste expresii, se obțin relațiile dintre parametrul adimensional al gradientului de presiune și numărul Reynolds, definiți în funcție de viteza medie, relații obținute sub o formă foarte convenabilă pentru aplicații ulterioare la lubrificația în regim turbulent. Din aceste relații se calculează apoi coeficienții de rezistență și se compară cu rezultate experimentale.

În cîteva lucrări anterioare s-a examinat mișcarea turbulentă a unui fluid vîscos incompresibil prin conducte circulare sau plan-paralele, utilizîndu-se ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl, pentru deducerea expresiilor profilului de viteze. Astfel, pentru a se putea lua în considerare și mișcarea laterală în studiul lubrificației turbulente tridimensionale, a fost necesară examinarea mișcării plan-paralele de tip Hagen-Poiseuille. Pentru o astfel de mișcare turbulentă, bidimensională și efectuîndu-se în straturi subțiri, ecuația lui Reynolds se scrie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho \overline{u' v'}\right) \tag{1}$$

în următorul sistem de coordonate : axa Ox în direcția scurgerii, axa Oy normală pe direcția de scurgere cu originea la peretele inferior. Componenta vitezei medii locale după direcția x a mișcării u și presiunea p sînt valori medii în timp, iar $\overline{u'v'}$ este corelația de viteze de ordinul doi, adică cvasifrecarea [1], [2] datorită turbulenței.

*) Lucrare elaborată în cadrul tezei de doctorat a autorului, conducător științific acad. E. Carafoli.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 607–613, BUCUREȘTI, 1969

Înlocuind tensiunea de frecare turbulentă cu expresia dată de teoria lui Prandtl,

$$-\rho\,\overline{u'v'} = \rho l_a^2 \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|, \tag{2}$$

ecuația (1) devine

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho l_a^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right] + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Integrînd o dată în raport cu y și folosind variabilele adimensionale

$$\overline{u} = \frac{u}{U_{\max}}, \quad \overline{y} = \frac{y}{h}, \quad \overline{l}_a = \frac{l_a}{h}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho U_{\max} h}{\mu},$$

se obține

$$\mathrm{Re}\,\overline{l}_a^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right| + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} - \frac{h^2}{\mu U_{\max}^2}\frac{\partial p}{\partial x}\overline{y} - C = 0. \tag{4}$$

Ecuația (4) a fost integrată în lucrările [3] [4], utilizîndu-se pentru lungimea de amestec o variație liniară

$$\overline{l}_a = k^* \overline{y} \tag{5}$$

și ipoteza că în apropierea pereților există un substrat laminar, în care influența termenului $\mathrm{Re}\,\overline{l}_a^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right|$ este neglijabilă, iar în restul grosimii filmului de fluid termenul $\partial \overline{u}/\partial \overline{y}$ este neglijabil în comparație cu primul. În acest mod s-au obținut expresiile pentru viteze și derivatele lor, în cele două substraturi pentru mișcarea bidimensională între plăci paralele, punîndu-se următoarele condiții la limită: $\overline{u} = 0$ pentru $\overline{y} = 0$ și $\overline{u} = 1$, $\partial \overline{u}/\partial \overline{y} = 0$ pentru $\overline{y} = 1/2$. Rezultatele sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} &= \frac{B_x}{2}(1 - 2\overline{y}), \\ \overline{u} &= \frac{B_x}{2}\overline{y}(1 - \overline{y}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

în substratul laminar $0 < \overline{y} < \overline{y}_1$ și

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} &= \sqrt{\frac{B_x}{2R}}\,\frac{\sqrt{1 - 2\overline{y}}}{\overline{y}}, \\ \overline{u} &= 1 - \sqrt{\frac{B_x}{2R}}\left[\ln\frac{1 + \sqrt{1 - 2\overline{y}}}{1 - \sqrt{1 - 2\overline{y}}} - 2\sqrt{1 - 2\overline{y}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

în substratul $\overline{y}_1 < \overline{y} < \frac{1}{2}$, unde parametrii B_x și R sînt definiți de

$$R = k^{*2}\,\mathrm{Re} \;;\; B_x = -\frac{h^2}{\mu U_{\max}}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8}$$

iar necunoscutele B_x și $\bar{y}_1$ se determină din sistemul ce se obține punînd condițiile de racordare în punctul $\bar{y}_1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_x}{2}(1-2\bar{y}_1) &= \sqrt{\frac{B_x}{2R}}\,\frac{\sqrt{1-2\bar{y}_1}}{\bar{y}_1}, \\ \frac{B_x}{2}\bar{y}_1(1-\bar{y}_1) &= 1-\sqrt{\frac{B_x}{2R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-2\bar{y}_1}}{1-\sqrt{1-2\bar{y}_1}}-2\sqrt{1-2\bar{y}_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Expresia vitezei în substratul turbulent (7) a fost dedusă și în lucrarea [5].

În același mod se obțin formule asemănătoare și pentru conducte circulare, cu deosebirea că axa Ox este luată în mijlocul conductei, iar coordonata $\bar{y}$ este înlocuită cu raza variabilă $\bar{r}$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}} &= -B_x\frac{\bar{r}}{2}, \\ \bar{u} &= \frac{B_x}{16}(1-4\bar{r}^2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

pentru substratul laminar $\bar{r}_1 < \bar{r} < 1/2$ și

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}} &= -2\sqrt{\frac{B_x}{2R}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}}}{1-2\bar{r}}, \\ \bar{u} &= 1-\sqrt{\frac{B_x}{4R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{2\bar{r}}}{1-\sqrt{2\bar{r}}}-2\sqrt{2\bar{r}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

pentru zona $0 < \bar{r} < \bar{r}_1$, iar parametrii B_x și R sînt definiți în funcție de diametru,

$$R = k^{*2}\,\mathrm{Re} = k^{*2}\frac{\rho U_{\max} d}{\mu}, \quad B_x = -\frac{d^2}{\mu U_{\max}}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Constantele B_x și $\bar{r}_1$ se determină de asemenea din sistemul ce se obține punînd condițiile de racordare în punctul $\bar{r}_1$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_x\bar{r}_1}{2} &= 2\sqrt{\frac{B_x}{2R}}\,\frac{\sqrt{\bar{r}_1}}{1-2\bar{r}_1}, \\ \frac{B_x}{16}(1-4\bar{r}_1^2) &= 1-\sqrt{\frac{B_x}{4R}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{2\bar{r}_1}}{1-\sqrt{2\bar{r}_1}}-2\sqrt{2\bar{r}_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

În lucrările [6], [7] s-au dedus relații asemănătoare și pentru cazul cînd lungimea de amestec are o variație parabolică sau trigonometrică după normala la stratul de fluid, punîndu-se în evidență faptul că legea de variație influențează puțin profilul de viteze și că această influență poate fi compensată prin modificarea valorii constantei k^*.

Mai mult decît atît, atunci cînd s-a determinat constanta k^* ca funcție de numărul Reynolds, folosindu-se pentru aceasta rezultatele experimentale (legea universală de viteze), s-a dovedit a fi mai indicată folosirea unei legi liniare de variație a lungimii de amestec [9].

Din sistemele de ecuații (6), (7), (9) se determină viteza medie definită de

$$\frac{1}{2}\,\overline{U}_{\text{med}} = \int_0^{1/2} \overline{u}\,\mathrm{d}\overline{y} \quad ; \quad \overline{U}_{\text{med}} = \frac{U_{\text{med}}}{U_{\max}}, \tag{14}$$

pentru conducte cu pereți plan-paraleli

$$\overline{U}_{\text{med}} = 1 - \frac{B_x \overline{y}_1^2}{2}\left(1 - \frac{4\overline{y}_1}{3}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{B_x}{2R}}\,(1 - 2\overline{y}_1)^{3/2}, \tag{15}$$

iar pentru conducte circulare viteza medie definită de

$$\frac{\pi}{4}\,\overline{U}_{\text{med}} = 2\pi \int_0^{1/2} \overline{u}\,\overline{r}\,d\overline{r} \tag{16}$$

se obține din sistemele de ecuații (10), (11), (13)

$$\overline{U}_{\text{med}} = 1 - \frac{B_x}{32}(1 - 4\,\overline{r}_1^2)^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\,\overline{r}_1\right)\sqrt{\frac{B_x}{4R}}\,(2\,\overline{r}_1)^{3/2}. \tag{17}$$

Aceste relații (15), (17) sînt folosite în continuare pentru calculul parametrului $\mathcal{B}_x$ și al numărului $\mathcal{R}e$ definiți în funcție de viteza medie U_{med},

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= -\frac{h^2}{\mu\, U_{\text{med}}}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{B_x}{U_{\text{med}}}, \\ \mathcal{R}e &= \frac{\rho U_{\text{med}} \cdot h}{\mu} = \text{Re}\,\overline{U}_{\text{med}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Utilizînd sistemele de ecuații (6), (7), (9), s-au determinat parametrii B_x și $\overline{y}_1$ pentru diferite valori ale numărului Reynolds modificat R pentru mișcarea plan-paralelă. Din relația (15) s-a determinat viteza medie $\overline{U}_{\text{med}}$ cu ajutorul căreia s-au calculat parametrul $\mathcal{B}_x$ și numărul Reynolds $\mathcal{R}e$ din relațiile (18). Valorile lui k^* necesare pentru trecerea de la numărul Reynolds modificat R la numărul Reynolds definit în funcție de viteza maximă au fost calculate cu relația

$$k^* = 0{,}119\ \text{Re}^{0{,}07}, \tag{19}$$

obținută în lucrarea anterioară [9].

Asemănător s-a calculat viteza medie $\overline{U}_{\text{med}}$ din relația (17) pentru conducte circulare, iar cu aceasta s-au determinat parametrul $\mathcal{B}_x$ și numărul Reynolds $\mathcal{R}e$ din expresiile (18). Rezultatele obținute în acest mod au fost trecute în tabela 1.

Valorile parametrului adimensional al gradientului de presiune $\mathcal{B}_x$ definit în funcție de viteza medie, calculate cu ajutorul sistemelor de ecuații prezentate și trecute în tabela 1 au fost reprezentate în figura 1 în funcție de numărul Reynolds, de asemenea definit cu viteza medie. Din aceste rezultate s-au dedus relații simple ce dau variația lui $\mathcal{B}_x$ cu numărul Reynolds și s-a reprezentat cu linie continuă în figura 1 această variație

$$\mathcal{B}_x = 32 + 0{,}056\ \mathcal{R}e^{0{,}84} \tag{20}$$

Tabela 1

Parametrul $\mathcal{B}_x$ și numărul Reynolds definiți în funcție de viteza medie pentru conducte circulare și plan-paralele

R	Re	B_x	$\overline{U}_{med}$	$\mathcal{R}e$	$\mathcal{B}_x$
secțiune circulară					
100	2 500	40	0,6828	1 708	58,5
270	5 660	70	0,7357	4 160	95,2
1 000	17 800	161,7	0,7875	14 000	205
10 000	139 000	830	0,8465	117 700	981
70 000	814 000	3 750	0,8760	714 000	4 280
secțiune plan-paralelă					
100	2 500	20	0,7992	2 000	25
270	5 660	35	0,8342	4 720	42
1 000	17 800	80,8	0,8670	15 420	93,3
10 000	139 000	415	0,9043	125 600	459
70 000	814 000	1 875	0,9228	751 000	2 030

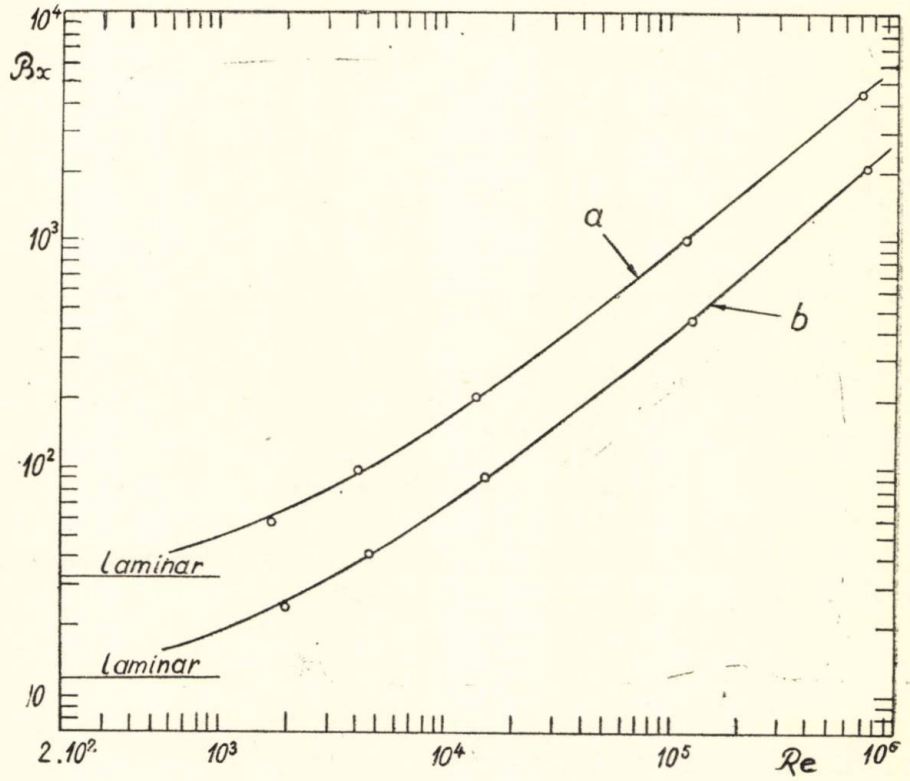


Fig. 1. — Variația parametrului adimensional al gradientului de presiune B_x în funcție de numărul Reynolds:
a — conducte circulare;
b — conducte cu pereți plan-paraleli.

pentru conducte circulare și

$$\mathcal{B}_x = 12 + 0{,}024\,\mathcal{R}e^{0.84} \tag{21}$$

pentru conducte plan-paralele.

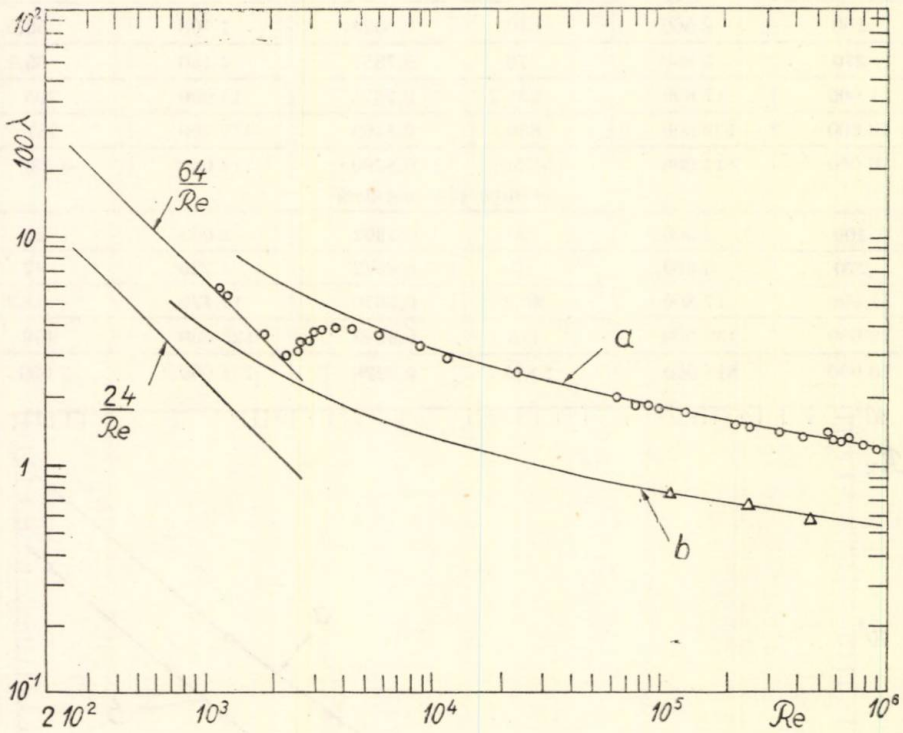


Fig. 2. — Variația coeficientului de rezistență λ în funcție de numărul Reynolds:
a — Conducte circulare;
b — Conducte cu pereți plan-paraleli,
O Nikuradse J., experimental,
Δ Geneviève Comte-Bellot, experimental.

De la expresiile (20), (21) se poate trece foarte ușor la relațiile ce dau coeficientul de pierdere de sarcină λ definit de

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{2} U_{\text{med}}^2 \frac{1}{d}\lambda, \tag{22}$$

și anume, ținînd sema de relațiile (18),

$$\lambda = 2\frac{\mathcal{B}_x}{\mathcal{R}e}. \tag{23}$$

Cu această relație (23) și cu expresiile parametrului $\mathcal{B}_x$ (20), (21) se obțin formule simple pentru coeficentul de pierdere de sarcină

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}e} + \frac{0{,}112}{\mathcal{R}e^{0{,}16}} \tag{24}$$

pentru conducte de secțiune circulară și

$$\lambda = \frac{24}{\mathcal{R}e} + \frac{0{,}048}{\mathcal{R}e^{0{,}16}} \tag{25}$$

pentru conducte de secțiune plan-paralelă.

Se remarcă din figura 2, unde au fost reprezentați coeficienții de pierdere de sarcină λ calculați cu relațiile (24), (25), o bună concordanță cu rezultatele experimentale ale lui Nikuradse pentru conducte circulare [8] și cu cele obținute de Geneviève Comte-Bellot [11] pentru conducte de secțiune plan-paralelă, pentru un domeniu destul de mare al numărului Reynolds. Se observă, de asemenea că relațiile (20) și (21) sînt relații simple ce pot fi folosite pentru studiul lubrificației turbulente, și anume la studiul mișcării laterale. Este, în sfîrșit, de remarcat faptul că formulele pentru regimul laminar se obțin imediat, anulînd în formulele regimului turbulent (20) și (21) cel de-al doilea termen, datorat tocmai caracterului turbulent al mișcării.

Primită la redacție la 11 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, vol. I, București, Editura Academiei, 1955, p. 14.
2. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, București, Editura Academiei, 1967, p. 395—443.
3. V. N. Constantinescu, *Teoria lubrificației în regim turbulent*, București, Editura Academiei, 1965, p. 145—155.
4. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra lubrificației tridimensionale în regim turbulent*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4*, 1093—1112 (1959).
5. D. Dumitrescu, *Asupra mișcării turbulente a unui fluid viscos incompresibil între două plăci paralele infinite*, Comunicările Academiei, **VIII**, *5*, 487 (1958).
6. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *Influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente din stratul de lubrifiant*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *5*, 1091—1101 (1960).
7. V. N. Constantinescu, S. Găletușe, *The study of the turbulent lubrification by using the mixing-length hypothesis with a parabolic variation across the film*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XI**, *2* (1966).
8. J. Nikuradse, *Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, Forschungen-Arch. In. Wesen, 356 (1932).
9. V. N. Constantinescu, S. Găletușe, *On the possibilities of using universal velocity laws for the study of turbulent lubrication*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XII**, *4*, (1967).
10. L. Prandtl, *The Mechanics of Viscous Fluids, Aerodynamic theory* (W. F. Durand), III (1935), p. 127—144.
11. G. Comte-Bellot, *Contribution à l'étude de la turbulence de conduite, Thèse pour obtenir le titre de docteur ès sciences* (1963), Université de Grenoble.

REPARTIȚIA SARCINILOR DATORITĂ ACȚIUNII VÎNTULUI ASUPRA CONSTRUCȚIILOR ELASTICE, LUÎND ÎN CONSIDERARE EFECTELE COMBINATE DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚĂ

de AUGUSTIN PETRE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

Se presupune viteza vîntului mai mică decît viteza critică de divergență. Pornind de la existența unei incidențe aerodinamice constructive sau de la existența unei săgeți inițiale, se arată că se produc deformații de încovoiere și răsucire, care, în general, amplifică repartiția sarcinilor aerodinamice față de cea pentru structura considerată rigidă. Calculul acestei repartiții este efectuat funcție de parametri adimensionali, pentru diferite rapoarte între viteza vîntului și cea critică de divergență. Pentru cazul în care viteza vîntului tinde către viteza de divergență, sarcinile aerodinamice tind, teoretic, spre infinit.

Structura elastică ce se ia în considerare se presupune a avea rigiditățile la încovoiere, față de cele două direcții principale ale secțiunii transversale, mult diferite. Se admite că rigiditatea la încovoiere într-un plan orizontal este mult mai mare decît cea într-un plan vertical. Structura astfel considerată se presupune a fi suficient de lungă pentru a se putea considera supusă la solicitări de încovoiere și de răsucire de ansamblu, iar ca mod de rezemare, ea se presupune în consolă sau simplu rezemată la capete. Astfel de structuri întîlnim în construcții aeronautice, la nave cu aripi subacvatice, precum și în cazul învelitorilor în consolă sau pe două reazeme de deschidere importante, cum sînt la peroane, tribune etc.

Acțiunea vîntului asupra unei asemenea structuri produce o sarcină care poate fi descompusă în două componente, una în direcția vîntului, rezistența la înaintare, iar cealaltă perpendicular pe această direcție, portanța. Dacă suprafața portantă prezintă deformații elastice, repartiția inițială a sarcinilor produse de vînt se pot modifica în mod esențial. Astfel, existența unei incidențe inițiale are ca urmare producerea unei portanțe. Portanța produce, la rîndul ei, o deformație de încovoiere și, dacă linia centrelor de presiune nu coincide cu linia elastică, se produce și o solici-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 615–629, BUCUREȘTI, 1969

tare de răsucire. Rezistența la înaintare, ca urmare a deformațiilor de încovoiere, va produce de asemenea și o solicitare de răsucire. Solicitările de răsucire vor produce o schimbare a unghiului de incidență, avînd efect direct asupra portanței. Fenomenul continuă în acest mod și, dacă viteza vîntului este mai mică decît viteza critică de divergență, este stabil, tinzînd către o anumită limită. În această situație, solicitările vor fi altele decît dacă suprafața portantă ar fi rigidă. Rezultă deci o creștere a componentei portanței ca urmare a deformațiilor produse de această componentă și de rezistența la înaintare. Același fenomen se poate amorsa și ca urmare a deformațiilor produse de greutatea proprie. Într-adevăr, greutatea proprie produce o deformație inițială de încovoiere. Ca urmare a acestei deformații, rezistența la înaintare produce o solicitare la răsucire. Deformația la răsucire produce apariția unei portanțe care are tendința de a mări deformațiile inițiale. Fenomenul continuă în condițiile menționate pînă la o anumită limită de deformație, respectiv de sarcină.

În cele ce urmează se va prezenta studiul acestei situații la limită.

Pentru simplificarea calculelor, unghiul de incidență aerodinamică, compus din cel efectiv i și cel datorită deformațiilor la răsucire φ, se va presupune suficient de mic pentru a se putea lua

$$\begin{aligned} &\sin i \approx \operatorname{tg} i = i, \\ &\sin (i + \varphi \approx \operatorname{tg} (i + \varphi) \approx i + \varphi, \\ &\cos (i + \varphi) \approx 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Ecuațiile integro-diferențiale de încovoiere și de răsucire, scrise prin intermediul funcțiilor Green, vor avea expresiile

$$\begin{aligned} EI_\xi \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2} = &- EI_\xi \int_0^v \frac{\partial^2 G_w(y,\eta)}{\partial y^2} qc(\eta) \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} [\varphi(\eta) + \\ &+ i(\eta)]\mathrm{d}\eta - EI_\xi \int_v^l \frac{\partial^2 G_w(y,\eta)}{\partial y^2} qc(\eta) \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} [\varphi(\eta) + i(\eta)]\mathrm{d}\eta - \\ &- EI_\zeta \int_0^v \frac{\partial^2 G_\zeta(y,\eta)}{\partial y^2} qc(\eta) C_x \mathrm{d}\eta - EI_\zeta \int_v^l \frac{\partial^2 G_\xi(y,\eta)}{\partial y^2} qc(\eta) C_x \mathrm{d}\eta, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} GI_d \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = &GI_d \int_0^v \frac{\partial G_\varphi(y,\eta)}{\partial y} qc(\eta) \left\{ e(\eta) \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} [\varphi(\eta) + i(\eta)] + C_x [e(y)\varphi(\eta) + \right. \\ &\left. + i(\eta) + w(\eta) - w(y)] \right\} \mathrm{d}\eta + GI_d \int_v^l \frac{\partial G_\varphi(y,\eta)}{\partial y} qc(\eta) \left\{ e(y) \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i} [\varphi(\eta) + \right. \\ &\left. + i(\eta)] + C_x [e(\eta)\varphi(\eta) + i(\eta) + w(\eta) - w(y)] \right\} \mathrm{d}\eta + \\ &+ EI_\zeta \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} \int_0^v \frac{\partial^2 G_\xi(y,\eta)}{\partial y^2} \cdot qc(\eta) C_x \mathrm{d}\eta + EI_\zeta \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} \int_v^l \frac{\partial^2 G_\xi(y,\eta)}{\partial y^2} qc(\eta) C_x \mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

În continuare se vor explicita funcțiile Green pentru diferite cazuri concrete de rezemare ale structurilor considerate.

STRUCTURI REZEMATE LA CAPETE

În sistemul de ecuații (2) se poate elimina funcția w și, după ce se înlocuiește expresia funcției Green corespunzătoare structurii considerate, acesta devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_d\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right) = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) - \frac{1}{EI_\xi}\left\{\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)qc\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,[\varphi(\eta)+\right.$$

$$\left.+\,i(\eta)]\,\mathrm{d}\eta + \int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qc\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,[\varphi(\eta)+i(\eta)]\,\mathrm{d}\eta\right\}\left[\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)qc\,C_x\mathrm{d}\eta + \right.$$

$$\left. + \int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)qc\,C_x\mathrm{d}\eta\right]. \tag{3}$$

Sub formă integrală, această ecuație pentru suprafețe portante de rigiditate aproximativ constantă se poate scrie

$$\varphi = \int_0^y (l-y)\,\frac{\eta}{l}\left\{\frac{qce}{GI_d}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) + \right.$$

$$+\,\frac{q^2c^2C_x}{GI_dEI_\xi}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\frac{\eta l-\eta^2}{2}\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{\eta}{e}\right)(\varphi+i)\mathrm{d}\bar{\eta} + \right.$$

$$\left.\left. +\int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\eta}{l}\right)(\varphi+i)\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta + \int_y^l (l-\eta)\,\frac{y}{l}\left\{\frac{qce}{GI_d}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) + \right.$$

$$+\,\frac{q^2c^2C_x}{GI_dEI_\xi}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,\frac{\eta l-\eta^2}{2}\left[\int_0^\eta \bar{\eta}\left(1-\frac{y}{l}\right)(\varphi+i)\,\mathrm{d}\bar{\eta} + \right.$$

$$\left.\left. +\int_\eta^l \eta\left(1-\frac{\bar{\eta}}{l}\right)(\varphi+i)\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\right\}\mathrm{d}\eta. \tag{4}$$

Cunoscînd coeficienții acestor ecuații, precum și valoarea și, eventual, repartiția incidenței aerodinamice inițiale, determinarea deformației la răsucire obținută prin integrarea acestor ecuații permite determinarea repartiției portanței ținînd seama de efectul deformațiilor, deoarece

$$C_z = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i). \tag{5}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Pentru suprafețele portante de secțiune variabilă, ecuația integrală (3) se va scrie, utilizînd funcția Green, sub forma

$$G_\varphi(y,\eta)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\nu}\frac{l-\eta}{l\,GI_a(\bar\eta)}\,\mathrm{d}\bar\eta, & \text{pentru } y<\eta,\\ \displaystyle-\int_0^{\nu}\frac{\eta}{l\,GI_a(\bar\eta)}\,\mathrm{d}\bar\eta+\int_0^{\eta}\frac{\mathrm{d}\bar\eta}{GI_a(\bar\eta)}, & \text{pentru } \eta<y,\end{cases}\tag{6}$$

în locul celei sub forma

$$G_\varphi(y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{(l-y)\eta}{l\,GI_a}, & \text{pentru } y<\eta,\\ \dfrac{(l-\eta)y}{l\,GI_a}, & \text{pentru } \eta<y,\end{cases}\tag{7}$$

valabilă pentru suprafețele portante de secțiune aproximativ constantă și utilizată în scrierea ecuației (3).

Soluționarea problemei se poate face ușor, pornind de la una din ecuații scrisă, de exemplu, sub formă integrală, înlocuind prin sumă semnul de integrare.

În cele ce urmează este avantajos a se efectua calculele utilizînd coeficienți adimensionali. Se vor utiliza astfel notațiile

$$\frac{qce}{GI_a}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,l^2=a,\qquad \frac{q^2c^2C_x}{GI_aEI_\xi}\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\,l^6=b,\tag{8}$$

se va schimba intervalul de definiție de la $\{0, l\}$ la $\{0, 1\}$ și ecuația se va împărți prin incidența i. Prin $\alpha=\dfrac{\varphi}{i}$ se va înțelege în continuare raportul dintre unghiul de deformație la răsucire din secțiunea considerată și incidența aerodinamică inițială de referință.

Pentru cazul suprafețelor portante, de secțiune și rigiditate aproximativ constante în anvergură, sistemul corespunzător are ecuația de ordin i de forma

$$\begin{aligned}\alpha_i=a\Bigg[&\sum_{j=1}^{i}(1-\eta_i)\eta_j\alpha_j\Delta\eta_j+\sum_{j=i+1}^{n}(1-\eta_j)\eta_j\alpha_j\Delta\eta_j+\\&+\sum_{j=1}^{i}(1-\eta_1)\eta_j\Delta\eta_j+\sum_{j=i+1}^{n}(1-\eta_j)\eta_i\Delta\eta_j\Bigg]+b\Bigg\{\sum_{j=1}^{i}\eta_j(1-\eta_i)\eta_j(1-\eta_j)\times\\&\times\Bigg[\sum_{k=1}^{j}\eta_k(1-\eta_j)(\alpha_k+1)\,\Delta\eta_k+\sum_{k=j+1}^{n}\eta_j(1-\eta_k)(\alpha_k-1)\Delta\eta_k\Bigg]\Delta\eta_j+\\&+\sum_{j=i+1}^{n}\eta_i(1-\eta_j)\eta_j(1-\eta_j)\Bigg[\sum_{k=1}^{j}\eta_k(1-\eta_j)(\alpha_k+1)\,\Delta\eta_k+\\&+\sum_{k=j+1}^{n}\eta_j(1-\eta_k)(\alpha_k+1)\,\Delta\eta_k\Bigg]\Delta\eta_j\Bigg\},\end{aligned}\tag{9}$$

respectiv

$$\alpha_1 = a\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4n^3}(\alpha_n+1)\right]+b\left\{\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\ldots+\frac{1}{4n^3}(\alpha_n+1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.$$

$$+\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_3+1)+\ldots+$$

$$\left.+\frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]+\ldots+\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]\right\}, \qquad (10)$$

$$\alpha_2 = a\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_3+1)+\ldots+\frac{3}{4n^3}(\alpha_n+1)\right]+$$

$$+b\left\{\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\ldots+\frac{1}{4n^3}(\alpha_n+1)\right]+$$

$$+\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-3}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.$$

$$+\frac{3}{2n}\frac{2n-3}{2n}(\alpha_1+1)+\frac{3}{2n}\frac{2n-5}{2n}(\alpha_3+1)+\ldots+$$

$$\left.+\frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]+\ldots+\frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]\right\},$$

$$\alpha_n = a\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\frac{3}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_2+1)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]+b\left\{\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{4n^3}(\alpha_n+1)\right]+\ldots+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_1+1)+\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{2n}\frac{1}{n}(\alpha_n+1)\right]\right\}.$$

Pentru $n = 20$ se obţine

$$\alpha_1 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\,\beta_1 + b10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}10840\,\beta_2 + 0{,}17090\,\beta_3 + 0{,}22559\,\beta_4 + 0{,}27346\,\beta_5 + 0{,}31152\,\beta_6 + 0{,}34227\,\beta_7 + 0{,}36621\,\beta_8 + 0{,}38183\,\beta_9 + 0{,}38965\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_2 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_2 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}51270\,\beta_3 + 0{,}67677\,\beta_4 + 0{,}81738\,\beta_5 + 0{,}93456\,\beta_6 + 1{,}02831\,\beta_7 + 1{,}09865\,\beta_8 + 1{,}14549\,\beta_9 + 1{,}16895\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_3 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_3 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}85450\,\beta_3 + 1{,}12795\,\beta_4 + 1{,}36230\,\beta_5 + 1{,}55760\,\beta_6 + 1{,}71385\,\beta_7 + 1{,}83105\,\beta_8 + 1{,}90915\,\beta_9 + 1{,}94825\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_4 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_4 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}85450\,\beta_3 + 1{,}57913\,\beta_4 + 1{,}90722\,\beta_5 + 2{,}18064\,\beta_6 + 2{,}39939\,\beta_7 + 2{,}56347\,\beta_8 + 2{,}67218\,\beta_9 + 2{,}72755\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_5 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_5 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}85450\,\beta_3 + 1{,}57913\,\beta_4 + 2{,}45214\,\beta_5 + 2{,}80368\,\beta_6 + 3{,}08495\,\beta_7 + 3{,}29589\,\beta_8 + 3{,}43647\,\beta_9 + 3{,}50685\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_6 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_6 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}85450\,\beta_3 + 1{,}57913\,\beta_4 + 2{,}45214\,\beta_5 + 3{,}42672\,\beta_6 + 3{,}77047\,\beta_7 + 4{,}02831\,\beta_8 + 4{,}20013\,\beta_9 + 4{,}28615\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_7 = 1{,}25 \times 10^{-3} a\beta_7 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\,\beta_1 + 0{,}32520\,\beta_2 + 0{,}85450\,\beta_3 + 1{,}57913\,\beta_4 + 2{,}45214\,\beta_5 + 3{,}42672\,\beta_6 + 4{,}45601\,\beta_7 + 4{,}76073\,\beta_8 + 4{,}96379\,\beta_9 + 5{,}06545\,\beta_{10}],$$

$$\alpha_8 = 1{,}25\times10^{-3}\, a\beta_8 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\ \beta_1 + 0{,}32520\ \beta_2 + 0{,}95450\ \beta_3 + \\ + 1{,}57913\ \beta_4 + 2{,}45214\ \beta_5 + 3{,}42672\ \beta_6 + 4{,}45610\ \beta_7 + 5{,}49315\ \beta_8 + \\ + 5{,}72745\ \beta_9 + 5{,}84475\ \beta_{10}],$$

$$\alpha_9 = 1{,}25\times10^{-3}\, a\beta_9 + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\ \beta_1 + 0{,}32520\ \beta_2 + 0{,}95450\ \beta_3 + \\ + 1{,}57914\ \beta_4 + 2{,}452214\ \beta_5 + 3{,}42672\ \beta_6 + 4{,}4560\ \beta_7 + 5{,}49315\ \beta_8 + \\ + 6{,}49111\ \beta_9 + 6{,}62405\ \beta_{10}],$$

$$\alpha_{10} = 1{,}25\times10^{-3}\, a\,\beta_{10} + b\,10^{-6}\,[0{,}038086\ \beta_1 + 0{,}32520\ \beta_2 + 0{,}95450\ \beta_3 + \\ + 1{,}57913\ \beta_4 + 2{,}45214\ \beta_5 + 3{,}42672\ \beta_6 + 4{,}45601\ \beta_7 + 5{,}49315\ \beta_8 + \\ + 6{,}49111\ \beta_9 + 7{,}40335\ \beta_{10}], \qquad (11)$$

unde

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} + 10,$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 3\alpha_7 + 3\alpha_8 + 3\alpha_9 + 3\alpha_{10} + 28,$$

$$\beta_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 + 5\alpha_5 + 5\alpha_6 + 5\alpha_7 + 5\alpha_8 + 5\alpha_9 + 5\alpha_{10} + 44,$$

$$\beta_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 7\alpha_5 + 7\alpha_6 + 7\alpha_7 + 7\alpha_8 + 7\alpha_8 + 7\alpha_{10} + 58,$$

$$\beta_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 9\alpha_6 + 9\alpha_7 + 9\alpha_8 + 9\alpha_9 + 9\alpha_{10} + 70,$$

$$\beta_6 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 11\alpha_6 + 11\alpha_7 + 11\alpha_8 + 11\alpha_9 + 11\alpha_{10} + 80$$

$$\beta_7 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 11\alpha_6 + 13\alpha_7 + 13\alpha_8 + 13\alpha_9 + 13\alpha_{10} + 88,$$

$$\beta_8 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 11\alpha_6 + 13\alpha_7 + 15\alpha_8 + 15\alpha_9 + 15\alpha_{10} + 94,$$

$$\beta_9 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 11\alpha_6 + 13\alpha_7 + 15\alpha_8 + 17\alpha_9 + 17\alpha_{10} + 98,$$

$$\beta_{10} = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 + 11\alpha_6 + 13\alpha_7 + 15\alpha_8 + 17\alpha_9 + 19\alpha_{10} + 100. \qquad (12)$$

Soluționarea acestui sistem liniar și neomogen permite determinarea repartiției unghiului de deformație în anvergură, respectiv repartiția portanței și cu ea a întregii sarcini aerodinamice.

Rezolvarea acestui sistem a fost efectuată cu ajutorul unui calculator electronic și rezultatele sînt date în tabela 1 și în figurile 1—3. Rezultatele respective reprezintă cantitatea cu care crește incidența datorită deformației, față de incidența inițială. Pentru a se obține incidența finală, se va adăuga incidenței inițiale rezultatul obținut înmulțit cu incidența inițială.

Este de observat că, cu cît viteza vîntului se apropie de viteza critică de divergență, repartiția portanței crește, tinzînd teoretic, în cazul vitezei critice de divergență, către infinit.

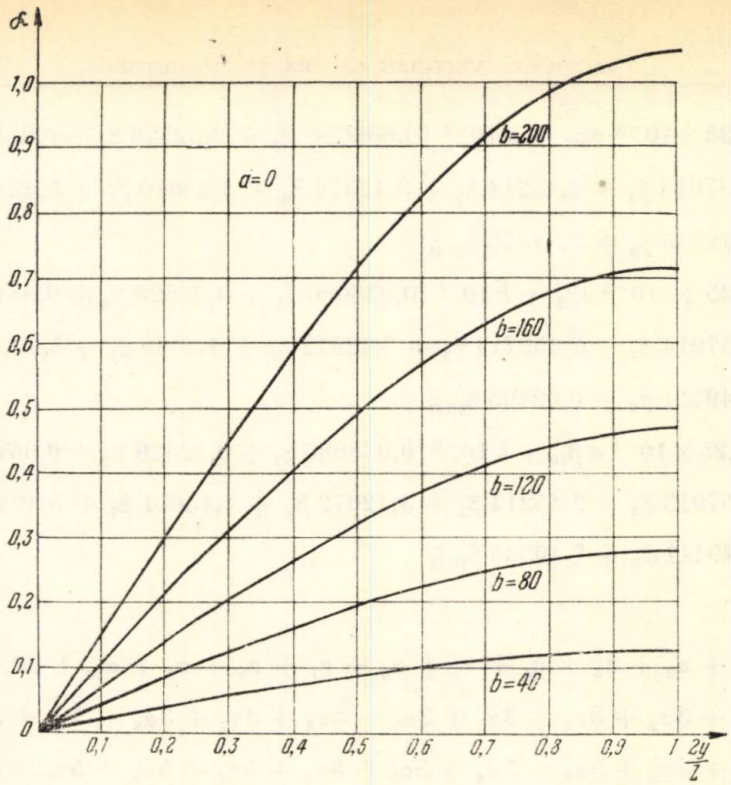

α
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=0
b=200
b=160
b=120
b=80
b=40
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1
2y/l

Fig. 1

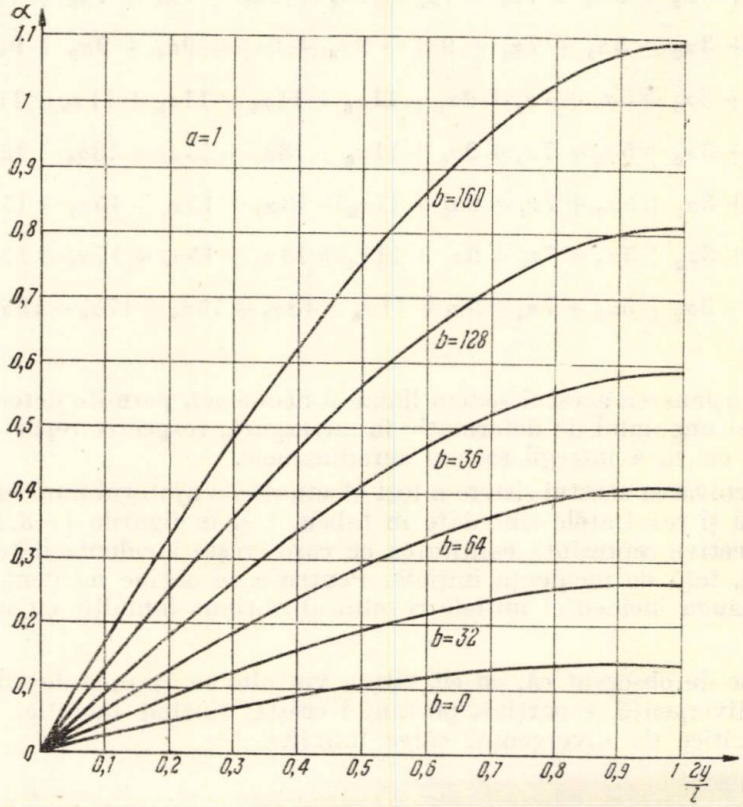

α
1.1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=1
b=160
b=128
b=36
b=64
b=32
b=0
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1
2y/l

Fig. 2

2. STRUCTURI ÎN CONSOLĂ

În cazul structurilor în consolă, ecuația diferențială de răsucire devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right) = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) - \frac{1}{EI_\xi}\times$$

$$\times\left[\int_y^l (y-\eta)\,qc\,\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i)\mathrm{d}\eta\right]\cdot\left[\int_y^l (y-\eta)\,qcC_x\,\mathrm{d}\eta\right]. \qquad (13)$$

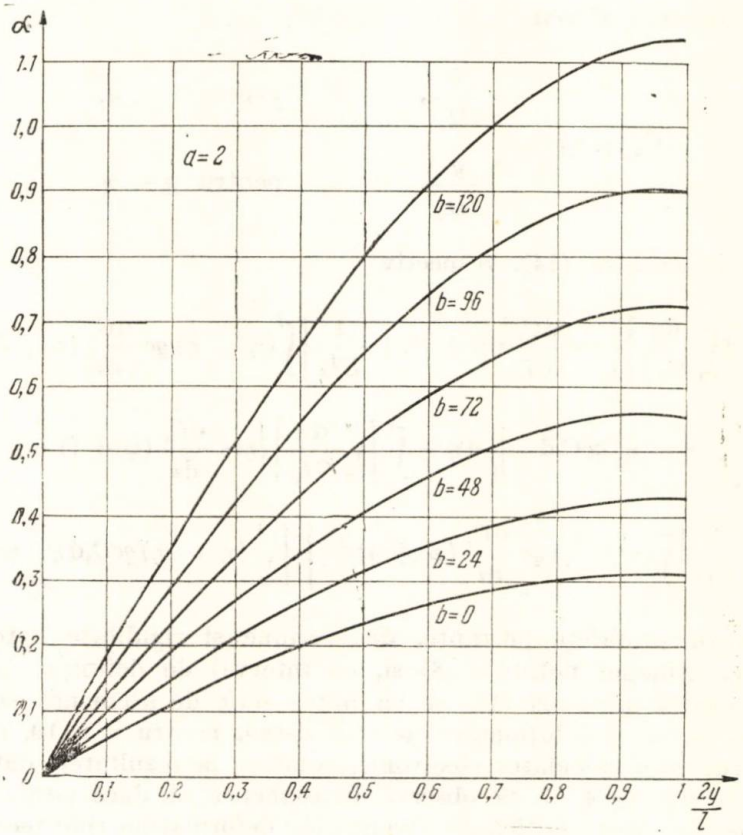


Fig. 3

Pentru suprafețele portante, de secțiune și rigiditate aproximativ constante în anvergură, această ecuație se poate scrie sub formă integrală în modul următor:

$$\varphi = \int_0^y \frac{n}{GI_d}\left[qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) + \frac{q^2c^2C_x}{EI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{(l-\eta)^2}{2}\int_\eta^l (\bar{\eta}-\eta)(\varphi+i)\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\mathrm{d}\eta +$$

$$+\int_y^l \frac{y}{GI_d}\left[qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) + \frac{q^2c^2C_x}{EI_\xi}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\frac{(1-\eta)^2}{2}\int_\eta^l (\bar{\eta}-\eta)(\varphi+i)\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right]\mathrm{d}\eta. \qquad (14)$$

Dacă structura este de secţiune variabilă, această ecuaţie integrală se va scrie, utilizînd funcţia Green, sub forma

$$G(y, \eta) = \begin{cases} \int_0^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{GI_d(\bar{\eta})}, & \text{pentru } \eta < y, \\ \int_0^{y} \frac{d\bar{\eta}}{GI_d(\bar{\eta})}, & \text{pentru } y < \eta, \end{cases} \tag{15}$$

în locul funcţiei Green

$$G_\varphi(y, \eta) = \begin{cases} \frac{l}{GI_d}, & \text{pentru } \eta < y, \\ \frac{y}{GI_d}, & \text{pentru } y < \eta \end{cases} \tag{16}$$

utilizată în ecuaţia (14), respectiv

$$\varphi = \int_0^{y}\left[\int_0^{\eta} \frac{dy}{GI_d}\right]\left\{qce\frac{dC_z}{di}(\varphi + i) + \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_\eta^{l}(\eta - \bar{\eta})\, qc\frac{dC_z}{di}(\varphi + i)d\bar{\eta}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_\eta^{l}\eta - \bar{\eta})\, qcC_z d\bar{\eta}\right]\right\}d\eta + \int_y^{l}\left[\int_0^{y}\frac{d\eta}{GI_d}\right]\left\{qce\frac{dC_z}{di}(\varphi + i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{EI_\xi}\left[\int_\eta^{l}(\eta - \bar{\eta})\, qc\frac{dC_z}{di}(\varphi + i)d\bar{\eta}\right]\cdot\left[\int_\eta^{l}(\eta - \bar{\eta})\, qcC_z d\bar{\eta}\right]\right\}d\eta. \tag{17}$$

Pentru suprafeţe portante, de secţiune şi rigiditate aproximativ constante, utilizînd notaţiile (8) şi, ca interval de definiţie, intervalul $\{0, 1\}$, ecuaţia integrală (14) se va putea scrie de asemenea sub formă de sistem liniar, şi soluţionarea acestui sistem pentru $n = 10$, efectuată cu ajutorul unui calculator electronic, conduce la rezultatele date în tabela 2 şi în figurile 4—7. Se observă de asemenea că, dacă viteza vîntului se apropie de viteza critică de divergenţă, deformaţiile tind teoretic spre infinit. Pentru a se lua în considerare efectul greutăţii proprii, notînd cu p greutatea unităţii de lungime a structurii, în toate ecuaţiile stabilite se va adăuga la portanţa $q_c\frac{dC_z}{di}\varphi$, această greutate.

Luarea în consideraţie a momentului de răsucire repartizat, produs ca urmare a efectului greutăţii proprii, se poate introduce, adăugîndu-se momentului aerodinamic acest moment. Notînd cu e_1 distanţa dintre centrul de greutate al unui tronson de lungime unitară a structurii şi centrul elastic, momentul de răsucire repartizat produs de efectul greutăţii proprii, se va scrie $m_p = pe_1$.

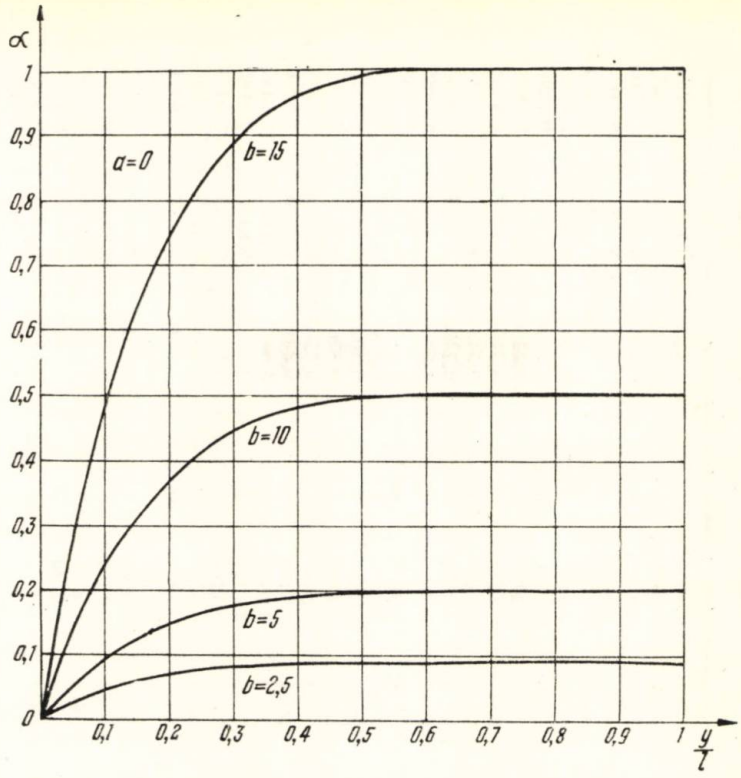

α
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=0
b=15
b=10
b=5
b=2,5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
y/l

Fig. 4

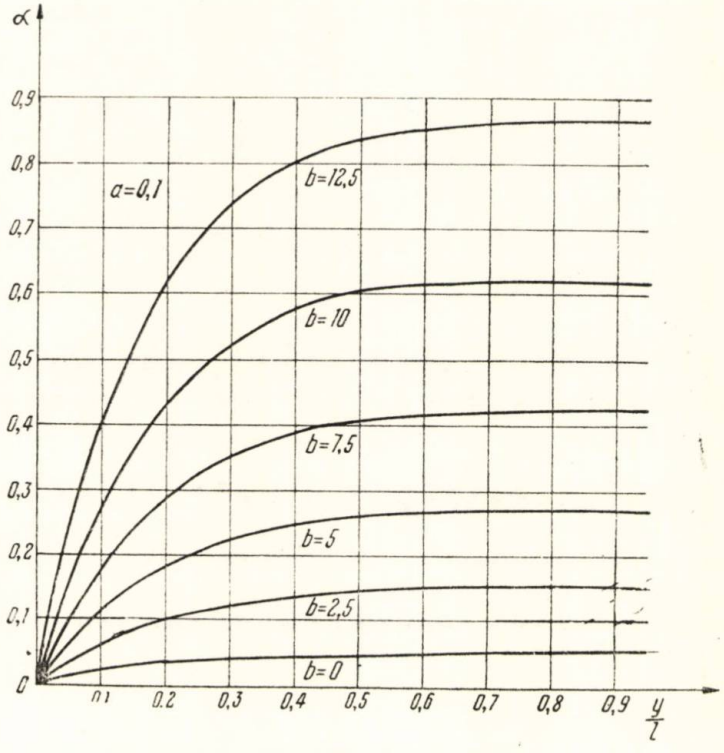

α
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=0,1
b=12,5
b=10
b=7,5
b=5
b=2,5
b=0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
y/l

Fig. 5

Tabela 1

Repartiția sarcinilor aerodinamice suplimentare, produse ca urmare a deformațiilor, pentru suprafețe portante rezemate la capete

a	b	α									
		$\frac{2y}{l}$ 0,050	0,150	0,250	0,350	0,450	0,550	0,650	0,750	0,850	0,950
0	40	0,0092	0,0275	0,0456	0,0630	0,0792	0,0938	0,1061	0,1160	0,1227	0,1262
0	80	0,0203	0,0609	0,1010	0,1396	0,1757	0,2081	0,2349	0,2572	0,2723	0,2800
p	120	0,0342	0,1025	0,1700	0,2348	0,2957	0,3502	0,2948	0,4329	0,4587	0,4716
0	160	0,0520	0,1556	0,2581	0,3566	0,4490	0,5319	0,5988	0,6575	0,6971	0,7167
0	200	0,0754	0,2259	0,3746	0,5176	0,6518	0,7724	0,8682	0,9549	1,0129	1,0414
0	300	0,1896	0,5679	0,9417	1,3021	1,6400	1,9443	2,1779	2,4041	2,5536	2,6260
1	0	0,0137	0,0385	0,0607	0,0802	0,0970	0,1113	0,1225	0,1310	0,1367	0,1395
1	32	0,0227	0,0656	0,1055	0,1421	0,1749	0,2035	0,2264	0,2446	0,2570	0,2632
1	64	0,0335	0,0978	0,1589	0,2157	0,2675	0,3132	0,3497	0,3798	0,4001	0,4103
1	96	0,0465	0,1367	0,2234	0,3047	0,3794	0,4458	0,4987	0,5433	0,5734	0,5884
1	128	0,0625	0,1847	0,3028	0,4145	0,5174	0,6094	0,6821	0,7450	0,7873	0,8083
1	160	0,0828	0,2453	0,4033	0,5532	0,6919	0,8163	0,9137	1,0000	1,0579	1,0865
1	260	0,2048	0,6108	1,0085	1,3893	1,7437	2,0637	2,3068	2,5383	2,6917	2,7663
2	0	0,0302	0,0856	0,1335	1,1779	0,2180	0,2509	0,2763	0,2959	0,3090	0,3156
2	24	0,0388	0,1112	0,1779	0,2382	0,2914	0,3378	0,3740	0,4027	0,4221	0,4318
2	48	0,0487	0,1408	0,2269	0,3057	0,3763	0,4383	0,4868	0,5263	0,5529	0,5662
2	72	0,0603	0,1754	0,2841	0,3846	0,4754	0,5558	0,6184	0,6707	0,7058	0,7234
2	96	0,0740	0,2164	0,3518	0,4780	0,5927	0,6949	0,7742	0,8417	0,8870	0,9096
2	120	0,0904	0,2656	0,4333	0,5904	0,7339	0,8623	0,9613	1,0474	1,1051	1,1337
2	220	0,2212	0,2569	1,0806	1,4834	1,8559	2,1929	2,4463	2,6835	2,8410	2,9180
3	0	0,0510	0,1451	0,2306	0,3069	0,3734	0,4311	0,4751	0,5095	0,5325	0,5441
3	8	0,0546	0,1559	0,2485	0,3315	0,4043	0,4677	0,5160	0,5543	0,5799	0,5928
3	16	0,0584	0,1673	0,2673	0,3574	0,4367	0,5062	0,5592	0,6015	0,6299	0,6441
3	24	0,0624	0,1793	0,2872	0,3848	0,4711	0,5469	0,6048	0,6513	0,6827	0,6983
3	32	0,0667	0,1921	0,3082	0,4137	0,5074	0,5899	0,6529	0,7041	0,7384	0,7557
3	40	0,0712	0,2055	0,3304	0,4444	0,5458	0,6355	0,7039	0,7599	0,7975	0,8164
3	140	0,1630	0,4798	0,7838	1,0688	1,3293	1,5644	1,7412	1,8937	2,0039	2,0559
4	0	0,0781	0,2234	0,3565	0,4761	0,5809	0,6730	0,7421	0,7969	0,8338	0,8523
4	16	0,0884	0,2543	0,4076	0,5463	0,6688	0,7773	0,8586	0,9243	0,9685	0,9907
4	32	0,1001	0,2895	0,4656	0,6261	0,7688	0,8958	0,9910	1,1691	1,1217	1,1480
4	48	1,1137	0,3298	0,5321	0,7176	0,8834	1,0317	1,1427	1,2353	1,2975	1,3286
4	64	0,1293	0,3765	0,6092	0,8236	1,0163	1,1892	1,3184	1,4278	1,5012	1,5378
4	80	0,1476	0,4312	0,6995	0,9479	1,1720	1,3739	1,5244	1,6535	1,7401	1,7833
4	180	0,4173	1,2368	2,0293	2,7779	3,4654	4,0938	4,5525	4,9783	5,2619	5,4011
5	100	0,2785	0,8193	1,3354	1,8170	2,2540	2,6526	2,9436	3,2001	3,3721	3,4575
6	60	0,3010	0,8834	1,4364	1,9493	2,4122	2,8358	3,1419	3,4058	3,5834	3,6722

Tabela 2

Repartiția sarcinilor aerodinamice suplimentare produse ca urmare a deformațiilor, pentru suprafețe portante în consolă

a	b	α									
		$\frac{y}{l}$ 0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,0	2,5	0,0269	0,0586	0,0762	0,0851	0,0892	0,0908	0,0913	0,0914	0,915	0,915
0,0	5,0	0,0592	0,1289	0,1675	0,1872	0,1967	0,1993	0,2009	0,2011	0,2011	0,2012
0,0	10,0	0,1477	0,3219	0,4184	0,4676	0,4853	0,4993	0,5019	0,5026	0,5026	0,5026
0,0	15,0	0,2949	0,6434	0,8364	0,9348	0,9799	0,9978	1,0035	1,0048	1,0049	1,0049
0,1	0,0	0,0718	0,1452	0,2285	0,3015	0,3643	0,4167	0,4587	0,4902	0,5112	0,5218
0,1	2,5	0,0341	0,0774	0,1050	0,1224	0,1336	0,1410	0,1462	0,1498	0,1521	0,1532
0,1	5,0	0,0686	0,1535	0,2044	0,2341	0,2512	0,2614	0,2677	0,2718	0,2743	0,2756
0,1	7,5	0,1105	0,2476	0,3272	0,3721	0,3966	0,4101	0,4178	0,4225	0,4254	0,4268
0,1	10,0	0,1659	0,3670	0,4833	0,5473	0,5812	06,069	0,6084	0,6140	0,6173	0,6189
0,1	12,5	0,2368	0,5225	0,6865	0,7757	0,8214	0,8450	0,8569	0,8635	0,8673	0,8692
0,25	0,0	0,0137	0,0385	0,0607	0,0802	0,0970	0,1111	0,1225	0,1310	0,1366	0,1395
0,25	2,5	0,0455	0,1088	0,1533	0,1850	0,2084	0,2258	0,2389	0,2484	0,2547	0,2578
0,25	5,0	0,0846	0,1953	0,2672	0,3140	0,3452	0,3667	0,3820	0,3928	0,3998	0,4033
0,25	7,5	0,1338	0,3043	0,4106	0,4764	0,5176	0,5443	0,5623	0,5747	0,5827	0,5866
0,25	10	0,1978	0,4459	0,5971	0,6877	0,7419	0,7752	0,7968	0,8134	0,8204	0,8250
0,5	0,0	0,0302	0,0856	0,1355	0,1797	0,2180	0,2502	0,2762	0,2958	0,3090	0,3155
0,5	1,25	0,0471	0,1264	0,1900	0,2424	0,2854	0,3205	0,3483	0,3690	0,3829	0,3899
0,5	2,5	0,0687	0,1721	0,2510	0,3123	0,3607	0,3959	0,4287	0,4508	0,4655	0,4729
0,5	3,75	0,1917	0,2237	0,3243	0,3915	0,4459	0,4877	0,5198	0,5434	0,5590	0,5669
0,5	5,0	0,1176	0,2821	0,3980	0,4811	0,5422	0,5882	0,6228	0,6481	0,6648	0,6723
0,5	6,25	0,1474	0,3490	0,4874	0,5838	0,6527	0,7033	0,7408	0,7680	0,7860	0,7950

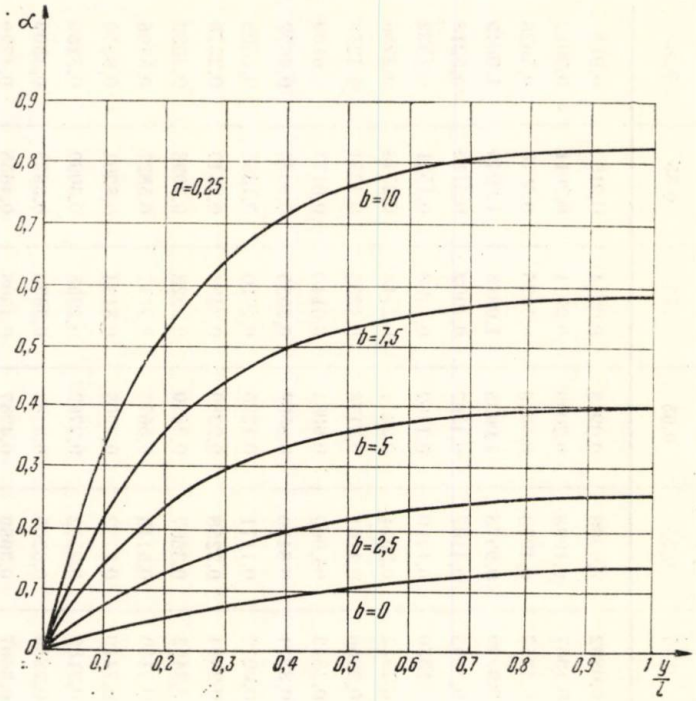

α
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=0,25
b=10
b=7,5
b=5
b=2,5
b=0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
y/l

Fig. 6

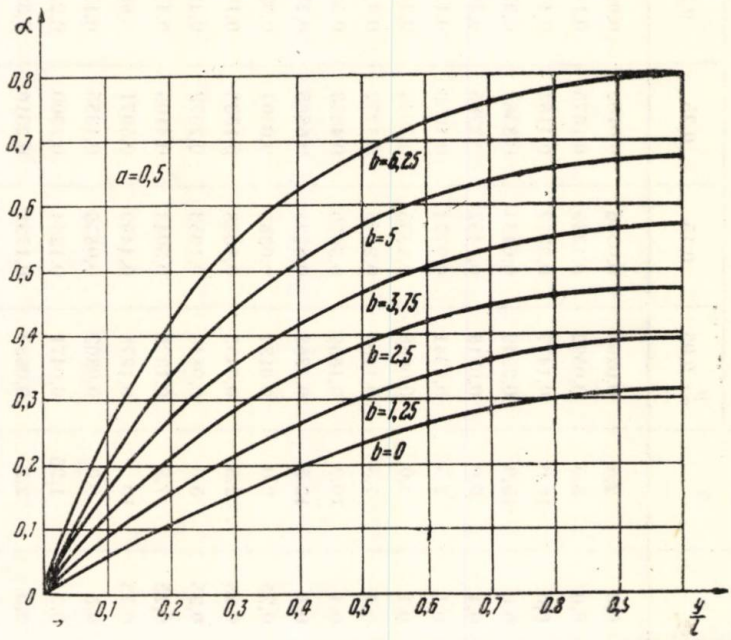

α
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
a=0,5
b=6,25
b=5
b=3,75
b=2,5
b=1,25
b=0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
y/l

Fig. 7

Luînd în considerație deci efectele greutății proprii, ecuația diferențială de răsucire, pentru suprafețe portante rezemate la capete, se va scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_a\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right) = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) - pe_1 -$$

$$-\left\{\frac{1}{EI_\xi}\left\{\int_0^y \eta\left(1-\frac{y}{l}\right)\left[qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi-i)+P\right]\mathrm{d}\eta + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_y^l y\left(1-\frac{\eta}{l}\right)\left[qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i)+P\right]\mathrm{d}\eta\right\}\left[\int_0^y -\eta\left(1-\frac{y}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\eta + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_y^l y\left(1-\frac{y}{l}\right)qcC_x\,\mathrm{d}\eta\right]\right\}, \tag{18}$$

iar pentru suprafețe portante în consolă rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(GI_a\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right) = -qce\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i) - pe_1 - \frac{1}{EI_\xi}\times$$

$$\times\left\{\int_y^l (y-\eta)\left[qc\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}(\varphi+i)+p\right]\mathrm{d}\eta\right\}\left[\int_y^l (y-\eta)\,qcC_x\,\mathrm{d}\eta\right]. \tag{19}$$

Trecerea acestei ecuații sub formă de ecuație integrală se va face în același mod, prin utilizarea funcțiilor Green corespunzătoare. Trecînd de la ecuația integrală la sistem liniar, soluționarea problemei se poate face foarte ușor pentru orice situație prin utilizarea unui calculator electronic sau prin metode iterative, obținîndu-se în acest mod repartiția completă a tuturor sarcinilor, luînd în considerație deci și efectul datorită deformațiilor.

Se observă că, dacă se admite neglijarea momentului de răsucire repartizat, produs de efectul greutății proprii m_p, rezultatele prezentate în diagrame și în tabele rămîn valabile. Aici însă semnificația variabilei α este

$$\alpha = \frac{qc}{p}\frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}i}\varphi. \tag{20}$$

În ordonata figurilor se obține astfel creșterea sarcinilor aerodinamice datorite deformațiilor, funcție de sarcinile datorite greutății proprii luate ca unitate.

Este de remarcat faptul că, dacă suprafața portantă nedeformată nu prezintă o incidență inițială, fenomenul aeroelastic poate fi amorsat de deformațiile de încovoiere datorite greutății proprii.

Primită la redacție la 10 decembrie, 1968

APLICAREA ECUAȚIILOR CU DIFERENȚE FINITE LA CALCULUL REȚELELOR SPAȚIALE PLANARE PĂTRATE*)

de MIRCEA SOARE
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

Rețelele spațiale planare sînt structuri reticulate la care nodurile sînt dispuse în două plane paralele și formează un sistem indeformabil. Ceea ce le caracterizează în principal este distribuția discretă a nodurilor.
În studiu se examinează cel mai simplu tip de rețea avînd ochiuri pătrate și fețe identice, decalate între ele cu o jumătate de interval.
Ca metode de calcul sînt examinate metoda forțelor și metoda deformațiilor, bazate pe aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite.
Prin metoda forțelor se detaliază cazul încovoierii cilindrice, iar prin metoda deformațiilor se stabilește soluția analitică cu ajutorul sumelor duble trigonometrice, valabilă pentru rezemarea articulată în toate nodurile situate pe un contur dreptunghiular.

1. INTRODUCERE. GEOMETRIA STRUCTURII

Avantajele structurilor spațiale sînt unanim recunoscute și ultimii ani au cunoscut realizări dintre cele mai remarcabile.

Din marea varietate de tipuri de structuri, cele reticulate au găsit o largă aplicare în domenii dintre cele mai variate [4], ca :

— *acoperișuri* pentru laboratoare, școli, expoziții, hale industriale, restaurante, săli de sport, stadioane, auditorii și amfiteatre, hangare, băi publice, spitale, cabane etc. ;

— *pereți portanți* ;

— *turnuri* de transmisie, de răcire, antene de radio și televiziune ;

— *structuri speciale* în cadrul expozițiilor etc.

---

*) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **14**, (1969), (în limba franceză).

Comunicare la sesiunea științifică jubiliară a Inst. politehnic din Cluj, 11 octombrie 1968.

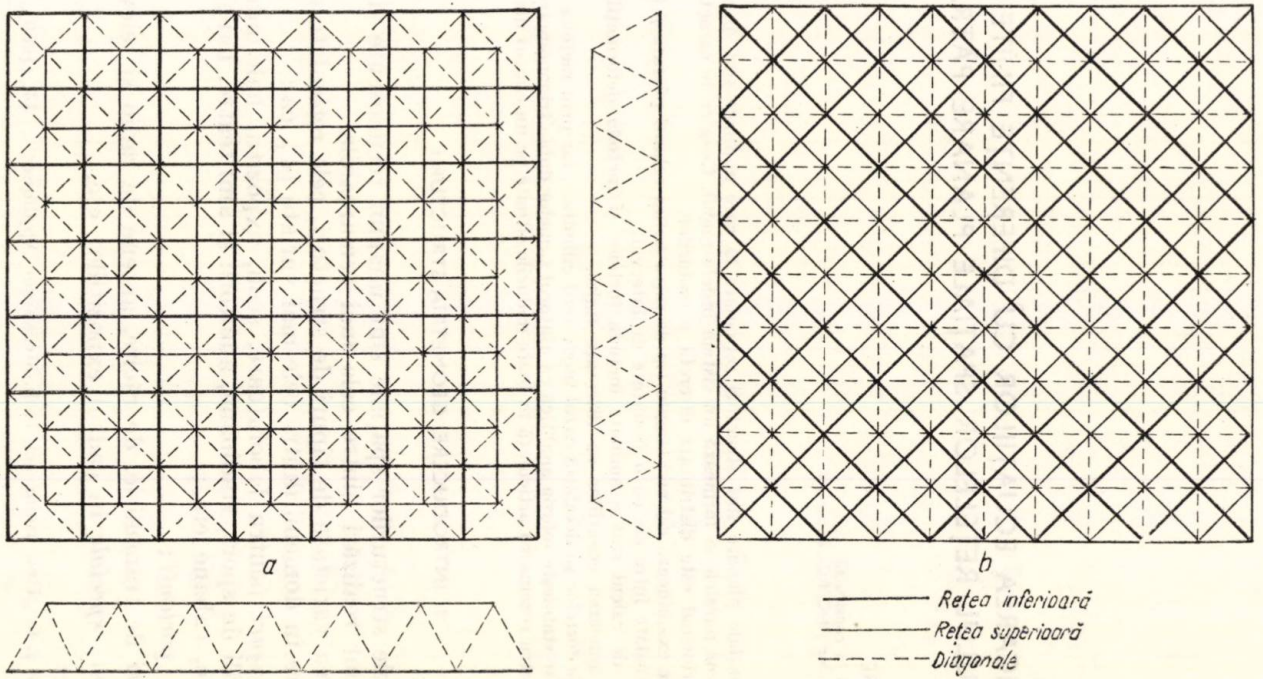


Fig. 1. — Rețea spațială planară pătrată simplă : *a*) barele celor două fețe dispuse paralel cu conturul dreptunghiular ; *b*) barele celor două fețe orientate la 45° față de contur.

În cadrul studiului de față, ne vom ocupa de un tip special de structuri spațiale servind în practică la realizarea de acoperișuri, și anume de rețelele spațiale planare.

Prin *rețea spațială planară* vom înțelege o structură reticulată la care barele sînt dispuse în două fețe plane paralele, legate între ele cu diagonale și alcătuind un sistem indeformabil. Ceea ce caracterizează în principal o asemenea structură este *caracterul de regularitate a conformării ochiurilor* (distribuția discretă a nodurilor).

După forma ochiurilor din cele două fețe și după modul de dispunere a diagonalelor, este posibilă o mare varietate de rețele planare; se disting, de exemplu, rețele planare pătrate simple sau diagonale, triunghiulare, hexagonale etc. [1].

Forma conturului de acoperit în plan poate fi la rîndul ei variată și, de multe ori, poate fi un factor determinant la alegerea tipului de rețea (a formei ochiurilor).

Pentru conturul dreptunghiular și pătrat sau pentru forme mai complicate care pot fi subîmpărțite în dreptunghiuri și pătrate, forma pătrată a ochiurilor apare ca cea mai indicată.

În cele ce urmează, ne vom ocupa de un asemenea tip de *rețea spațială*, denumită *planară pătrată simplă*, la care cele două fețe sînt subîmpărțite în pătrate, avînd laturile paralele, astfel încît nodurile unei fețe corespund pe verticală cu centrele pătratelor celeilalte fețe.

Față de laturile de contur, barele din cele două fețe pot fi dispuse paralel cu acestea (fig. 1*a*) sau orientate la 45° (fig. 1*b*).

Legătura barelor la un nod se presupune că se face prin articulații sferice ideale.

Notațiile sînt precizate în text acolo unde apar pentru prima oară și sînt prezentate în anexa 1.

Dacă se notează cu

l — pasul rețelei, adică latura ochiurilor pătrate (lungimea unei bare din cele două fețe);

h — înălțimea de construcție a rețelei spațiale (distanța dintre cele două fețe paralele);

l_d — lungimea diagonalei;

γ — unghiul pe care diagonala îl face cu planul orizontal, între elementele geometrice precedente există relațiile

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{h\sqrt{2}}{l}, \qquad l_d = \frac{l}{\sqrt{2}\cos\gamma} = \frac{h}{\sin\gamma}. \tag{1.1}$$

2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU. ÎNCOVOIEREA CILINDRICĂ

Se raportează rețeaua adoptată la un sistem de axe de coordonate carteziene alegînd originea într-unul din colțurile feței inferioare. Numerotarea nodurilor se face cu doi indici, m, n, din care primul va preciza variația în sensul axei Ox, iar al doilea variația în sensul axei Oy. În fața

superioară, notarea se va face în mod convenţional, cu m', n', în care (fig. 2)

$$m' = m + \frac{1}{2}, \qquad n' = n + \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Vom avea, aşadar,

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p,$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

p şi q reprezentînd numărul de intervale pe fiecare direcţie.

Ne vom preocupa, în continuare, de barele care concură la două noduri vecine m, n şi m', n'.

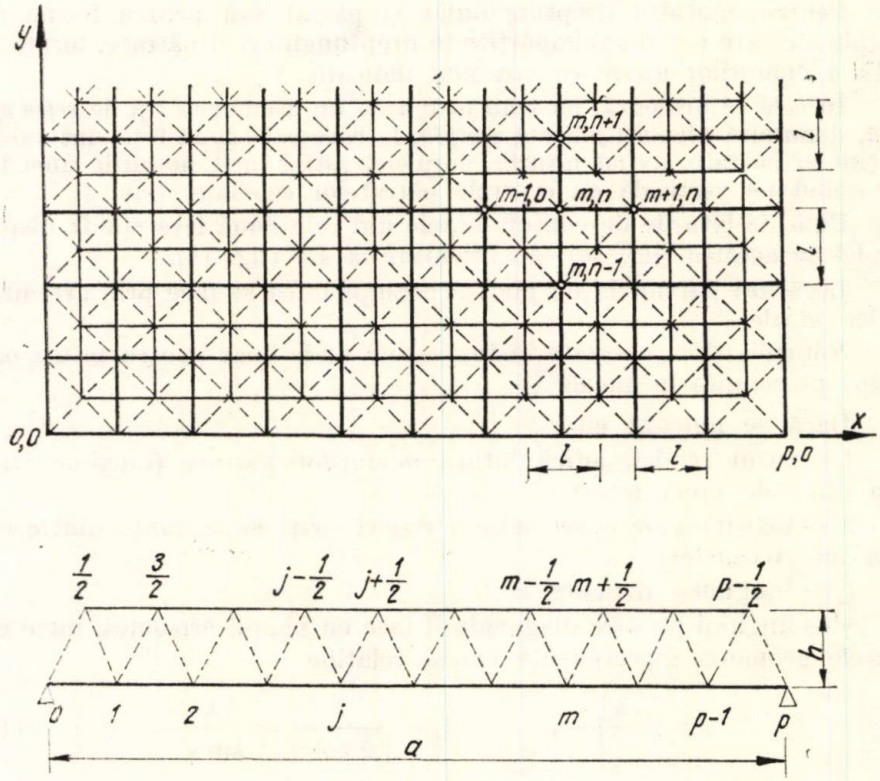


Fig. 2. — Numerotarea nodurilor.

Pentru simplificarea scrierii se notează eforturile în bare cu $S_1 - S_4$, $I_1 - I_4$, $D_1 - D_7$; semnul pozitiv reprezintă eforturi de întindere (fig. 3). Încărcarea exterioară se presupune concentrată la noduri, avînd componentele F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz}.

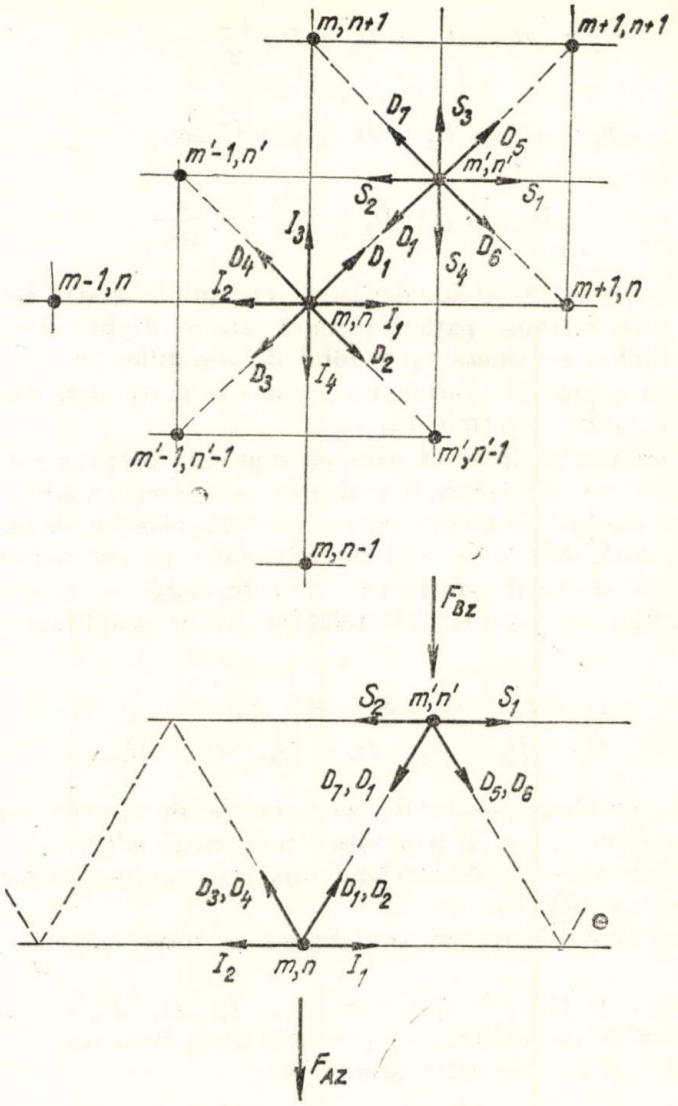


Fig. 3. — Eforturile din barele care concură în nodurile m, n și m', n'.

Exprimînd condițiile de echilibru, se obțin următoarele ecuații:

$$I_1 - I_2 + (D_1 + D_2 - D_3 - D_4)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma + F_{Ax} = 0,$$

$$I_3 - I_4 + (D_1 - D_2 - D_3 + D_4)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma + F_{Ay} = 0, \qquad (2.2a)$$

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = \frac{F_{Az}}{\sin\gamma};$$

$$S_1 - S_2 + (D_5 + D_6 - D_1 - D_7)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma + F_{Bx} = 0,$$

$$S_3 - S_4 + (D_5 - D_6 - D_1 + D_7)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma + F_{By} = 0, \qquad (2.2b)$$

$$D_1 + D_5 + D_6 + D_7 = + \frac{F_{Bz}}{\sin\gamma}.$$

Numărul necunoscutelor depăşeşte cu mult numărul ecuaţiilor statice, astfel încît reţeaua spaţială planară este multiplu static nedeterminată şi va trebui considerat şi studiul deformaţiilor.

Ne vom ocupa, în continuare, de un caz particular, cînd starea de eforturi este static determinată.

Vom presupune, în acest scop, că suprafaţa dreptunghiulară acoperită în plan are una din laturi, b, mult mai mare decît cealaltă, a. Se poate admite, *prin analogie* cu încovoierea cilindrică a plăcilor plane, că reţeaua spaţială are lungimea infinită şi lucrează doar pe deschiderea mică, a.

Deoarece starea de eforturi (şi de deformaţii) va fi aceeaşi pentru orice y (multiplu de pasul reţelei), relaţiile (2.2) se simplifică datorită faptului că

$$I_3 = I_4 = S_3 = S_4 = 0\,; \quad F_{Ay} = F_{By} = 0,$$
$$D_1 = D_2 = D_7, \quad D_3 = D_4, \quad D_5 = D_6.$$

Pentru precizarea nodurilor va fi nevoie de cîte un singur indice, şi anume $m = 0, 1, 2, \ldots, p$ în faţa inferioară şi m' în faţa superioară. În vederea introducerii diferenţelor finite, vom adopta noi notaţii pentru eforturi, reprezentate în figura 4.

Pentru simplificare, ne vom limita la forţe exterioare verticale, P_{Am} şi P_{Bm}.

La nodul m concură eforturile I_{m-1}, I_m, D_m, D'_m şi forţa verticală P_{Am}. Din motive de simetrie, se pot scrie doar două ecuaţii de proiecţii (pe axa x-ilor şi pe verticală), şi anume:

$$I_m - I_{m-1} + 2(D_m - D'_m)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma = 0,$$

$$-2(D_m - D'_m)\sin\gamma + P_{Am} = 0.$$

Analog, pentru modul m' se scriu următoarele ecuaţii de echilibru:

$$S_m - S_{m-1} + 2(D'_{m+1} - D_m)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\gamma = 0,$$

$$+2(D_m + D'_{m+1})\sin\gamma + P_{Bm} = 0.$$

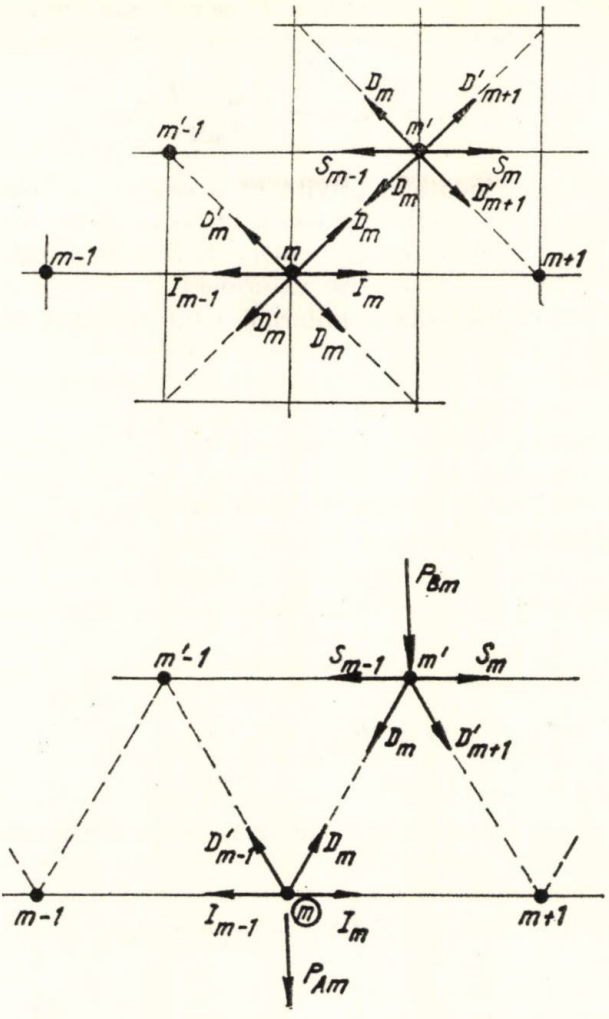


Fig. 4. — Notarea nodurilor și a eforturilor în cazul încovoierii cilindrice.

După unele grupări convenabile de termeni, relațiile precedente se scriu sub forma :

$$D'_{m+1} + D_m = -\frac{P_{Bm}}{2 \sin \gamma}, \tag{2.3a}$$

$$D'_m + D_m = +\frac{P_{Am}}{2 \sin \gamma}; \tag{2.3b}$$

$$I_m - I_{m-1} = -(D_m - D'_m)\sqrt{2} \cos \gamma, \tag{2.4a}$$

$$S_m - S_{m-1} = +(D_m - D'_{m+1})\sqrt{2} \cos \gamma. \tag{2.4b}$$

Relațiile (2.3) și (2.4) sînt suficiente pentru determinarea eforturilor necunoscute. Din (2.3a) și (2.3b) se deduce, prin scădere,

$$D'_{m+1} - D'_m = -\frac{P_{Am} + P_{Bm}}{2 \sin \gamma}. \tag{2.5}$$

Relația obținută poate fi privită ca o *ecuație cu diferențe finite* de ordinul întîi, liniară, cu coeficienți constanți și cu parte dreaptă. Soluția generală constă din soluția ecuației omogene, la care se adaugă o soluție particulară, funcție de încărcarea exterioară.

Limitîndu-ne la încărcarea uniformă a tuturor nodurilor ($P_{Am} = P_A$, $P_{Bm} = P_B$), soluția ecuației (2.5) se scrie

$$D'_m = -\frac{P_A + B_B}{2 \sin \gamma} m + C_1, \tag{2.6}$$

în care C_1 reprezintă o constantă de integrare.

De aici rezultă imediat

$$D'_{m+1} = -\frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma}(m + 1) + C_1,$$

iar din (2.3) se deduce

$$D_m = \frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma} m + \frac{P_A}{2 \sin \gamma} - C_1. \tag{2.7}$$

Ducînd soluțiile (2.6) și (2.7) în (2.4), rezultă alte două ecuații cu diferențe finite :

$$I_m - I_{m-1} = -\sqrt{2}\,\frac{P_A + P_B}{\operatorname{tg} \gamma} m + 2\sqrt{2}\, C_1 \cos \gamma - \frac{P_A}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma},$$

$$S_m - S_{m-1} = +\sqrt{2}\,\frac{P_A + P_B}{\operatorname{tg} \gamma} m - 2\sqrt{2}\, C_1 \cos \gamma + \frac{2P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma},$$

cu soluțiile generale

$$I_m = C_2 + \left(2\sqrt{2}\, C_1 \cos \gamma - \frac{2P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma}\right) m - \frac{P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} m^2, \tag{2.8}$$

$$S_m = C_3 - \left(2\sqrt{2}\, C_1 \cos \gamma - \frac{3P_A + 2P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma}\right) m + \frac{P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} m^2 \tag{2.9}$$

unde C_2 și C_3 reprezintă două noi constante de integrare.

Să presupunem că rezemarea se face la fața inferioară prin reazeme simple. Pentru determinarea celor trei constante de integrare, vom sta-

bili, în prealabil, din relațiile (2.6)—(2.9), valorile eforturilor în barele marginale. Pentru $m = 0$, se deduce

$$D_1' = C_1 - \frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma},$$

$$D_0 = \frac{P_A}{2 \sin \gamma} - C_1, \tag{2.10}$$

$$I_0 = C_2,$$

$$S_0 = C_3.$$

Dacă se notează cu p numărul de intervale din talpa inferioară (nodurile de reazem fiind 0 și p), reacțiunea are valoarea

$$V_0 = \frac{1}{2} [(P_A + P_B) p - P_A].$$

Aplicînd metoda izolării nodurilor 0 și 0', rezultă (fig. 5):

$$D_0 = -\frac{V_0}{2 \sin \gamma}; \quad I_0 = -D_0 \sqrt{2} \cos \gamma = +\frac{V_0}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma},$$

$$D_1' = -\frac{P_B}{2 \sin \gamma} - D_0 = \frac{V_0 - P_B}{2 \sin \gamma},$$

$$S_0 = (D_0 - D_1') \sqrt{2} \cos \gamma = -\frac{2V_0 - P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma}.$$

Din compararea cu valorile (2.10), rezultă:

$$C_1 = \frac{(P_A + P_B) p}{4 \sin \gamma} + \frac{P_A}{4 \sin \gamma},$$

$$C_2 = \frac{(P_A + P_B) p}{2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} - \frac{P_A}{2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma},$$

$$C_3 = -\frac{(P_A + P_B)(p - 1)}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma}.$$

Introducînd valorile obținute în expresiile (2.6)—(2.9) se obține, în final,

$$D_m' = \frac{P_A}{4 \sin \gamma} + \frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma} \left(\frac{p}{2} - m \right), \tag{2.11a}$$

$$D_m = \frac{P_A}{4 \sin \gamma} - \frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma} \left(\frac{p}{2} - m \right), \tag{2.11b}$$

$$I_m = \frac{P_A + P_B}{2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} p - \frac{P_A}{2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} + \frac{P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} (p - 1) m - \frac{P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} m^2, \tag{2.11c}$$

$$S_m = -(m + 1)(p - m - 1) \frac{P_A + P_B}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma}. \tag{2.11d}$$

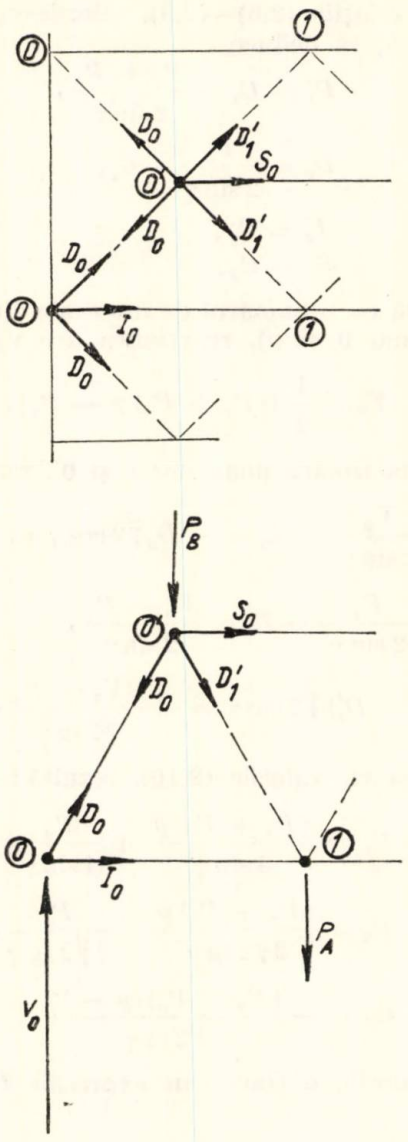


Fig. 5. — Echilibrul nodurilor 0 și 0′.

Valorile maxime ale eforturilor sînt următoarele:

$$D_0 = D_p' = \frac{P_A}{4 \sin \gamma} - \frac{P_A + P_B}{2 \sin \gamma} \frac{p}{2} = -\frac{V_0}{2 \sin \gamma},$$

$$I_{\frac{p}{2}-1} = I_p = -\frac{P_A}{2\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} + \frac{P_A + P_B}{4\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma} p^2, \qquad \text{pentru } p = \text{par},$$

$$I_{\frac{p-1}{2}} = -\frac{P_A}{2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma} + \frac{P_A + P_B}{4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma}(p^2+1), \qquad \text{pentru } p = \text{impar},$$

$$S_{\frac{p}{2}-1} = -\frac{P_A + P_B}{4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma}p^2, \qquad \text{pentru } p = \text{par},$$

$$S_{\frac{p-3}{2}} = S_{\frac{p-1}{2}} = -\frac{P_A + P_B}{4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma}(p^2-1), \qquad \text{pentru } p = \text{impar}.$$

Se observă că expresiile eforturilor sînt independente de secțiunea barelor, datorită faptului că sistemul este static determinat.

În cazuî cînd sarcinile nodale variază după o anumită lege, soluția omogenă rămîne neschimbată, urmînd a se căuta soluția particulară corespunzătoare.

Dacă sistemul este static nedeterminat exterior, constantele de integrare C_1, C_2, C_3 vor fi determinate din condiții marginale, după prealabila asociere a expresiilor deformațiilor. Acestea vor fi determinate la paragraful 4, după studierea cazului general.

3. RELAȚIILE GENERALE ÎN METODA DEFORMAȚIILOR

Vom începe prin a studia cazul general în metoda deformațiilor [6].

Fie două puncte, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$, reprezentînd capetele unei bare oarecare; lungimea segmentului $\overline{P_1P_2}$ este

$$\overline{P_1P_2} = l = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

iar cosinusurile directoare ale dreptei P_1P_2 sînt

$$\cos\gamma_x = \frac{x_2-x_1}{l}, \quad \cos\gamma_y = \frac{y_2-y_1}{l}, \quad \cos\gamma_z = \frac{z_2-z_1}{l}$$

(γ_x, γ_y, γ_z sînt, respectiv, unghiurile pe care suportul dreptei le face cu axele de coordonate). Semnul cosinusurilor este dat de semnul numărătorului respectiv.

Vom presupune, mai departe, că bara P_1P_2 suferă o deformație axială, ajungînd în poziția $P_1'P_2'$ (fig. 6).

În baza principiului suprapunerii efectelor, vom considera inițial că doar nodul P_1 se deplasează în P_1', nodul P_2 rămînînd fix.

Fie u_1, v_1, w_1 componentele deplasării nodului P_1 după direcțiile axelor x, y, z; ele sînt considerate pozitive atunci cînd se produc în sensul crescător al coordonatelor.

Proiectînd vectorul deplasare pe dreapta P_1P_2, rezultă *scurtarea barei*

$$\Delta_1 = \overline{P_1P_1'} = u_1\cos\gamma_x + v_1\cos\gamma_y + w_1\cos\gamma_z.$$

Vom defini rigiditatea axială a barei P_1P_2 prin raportul

$$k = \frac{EA}{l}$$

(forța necesară pentru a produce o deformație axială egală cu unitatea)

Convenind să considerăm negative eforturile de compresiune ce apar ca urmare a deplasării nodului P_1, rezultă următorul efort axial în bara P_1P_2:

$$N_1 = -k\Delta_1 = -k(u_1 \cos\gamma_x + v_1 \cos\gamma_y + w_1 \cos\gamma_z).$$

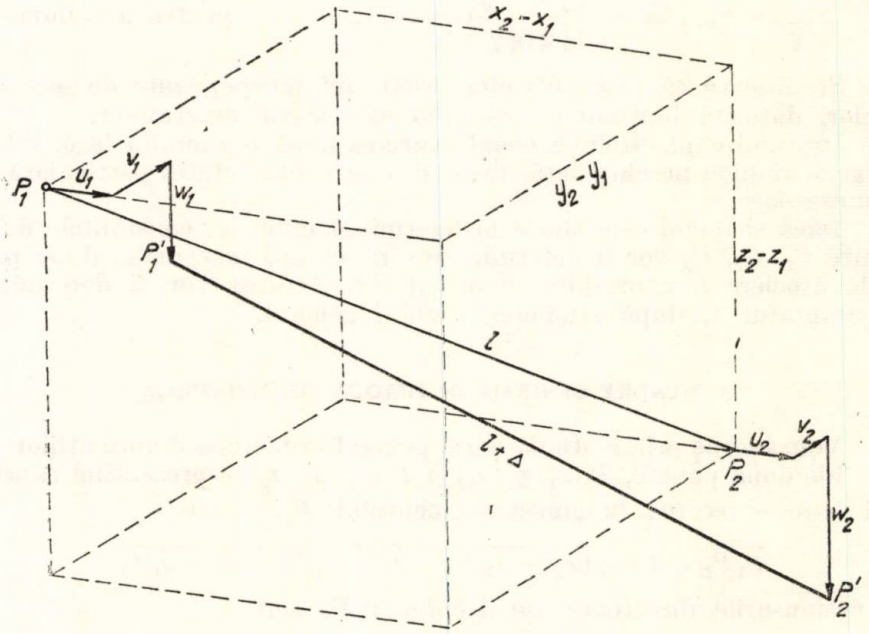


Fig. 6. — Deplasările nodurilor P_1 și P_2.

Proiecțiile acestui efort pe axele de coordonate se deduc imediat:

$$X_1 = N_1 \cos\gamma_x; \quad Y_1 = N_1 \cos\gamma_y, \quad Z_1 = N_1 \cos\gamma_z.$$

Mai departe, vom considera că nodul P_1 rămîne fix, iar nodul P_2 se deplasează în P'_2. Componentele deplasării vor fi u_2, v_2, w_2. Se observă ușor că, de data aceasta, bara este supusă la întindere și se poate scrie direct

$$N_2 = +k\Delta_2 = +k(u_2 \cos\gamma_x + v_2 \cos\gamma_y + w_2 \cos\gamma_z)$$

și relații similare pentru X_2, Y_2, Z_2.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, avem:

$$N_{12} = k[(u_2 - u_1)\cos\gamma_x + (v_2 - v_1)\cos\gamma_y + (w_2 - w_1)\cos\gamma_z], \tag{3.1}$$

$$X_{12} = k[(u_2 - u_1)\cos^2\gamma_x + (v_2 - v_1)\cos\gamma_x \cos\gamma_y + (w_2 - w_1)\cos\gamma_x \cos\gamma_z],$$

$$Y_{12} = k[(u_2 - u_1)\cos\gamma_y \cos\gamma_x + (v_2 - v_1)\cos^2\gamma_y + (w_2 - w_1)\cos\gamma_y \cos\gamma_z], \tag{3.2}$$

$$Z_{12} = k[(u_2 - u_1)\cos\gamma_z \cos\gamma_x + (v_2 - v_1)\cos\gamma_z \cos\gamma_y + (w_2 - w_1)\cos^2\gamma_z].$$

Dacă în nodul P_1 concură mai multe bare 1—2, 1—3, ...,1 — n și este aplicată o forță exterioară de componente F_x, F_y, F_z, atunci condițiile de echilibru ale nodului P_1 se exprimă sub forma

$$\sum_{i=2}^{n} X_{1-i} + F_x = 0\,; \quad \sum_{i=2}^{n} Y_{1-i} + F_y = 0\,; \quad \sum_{i=2}^{n} Z_{1-i} + F_z = 0\,.$$

Componentele X, Y, Z sînt *pozitive* cînd *trag de nod*, iar componentele încărcării, cînd sînt dirijate spre x, y, z, crescătoare.

Introducînd în condițiile de echilibru expresiile găsite pentru componentele eforturilor în funcție de deplasări și grupînd convenabil termenii, se obține

$$u_1 \Sigma k_i \cos^2 \gamma_{xi} + v_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{xi} \cos \gamma_{yi} + w_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{xi} \cos \gamma_{zi} - \Sigma u_i k_i \cos^2 \gamma_{xi} -$$
$$- \Sigma v_i k_i \cos \gamma_{xi} \cos \gamma_{yi} - \Sigma w_i k_i \cos \gamma_{xi} \cos \gamma_{zi} + F_x = 0, \qquad (3.3a)$$

$$u_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{yi} \cos \gamma_{xi} + v_1 \Sigma k_i \cos^2 \gamma_{yi} + w_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{yi} \cos \gamma_{zi} -$$
$$- \Sigma u_i k_i \cos \gamma_{yi} \cos \gamma_{xi} - \Sigma v_i k_i \cos^2 \gamma_{yi} - \Sigma w_i k_i \cos \gamma_{yi} \cos \gamma_{zi} + F_y = 0, \qquad (3.3b)$$

$$u_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{zi} \cos \gamma_{xi} + v_1 \Sigma k_i \cos \gamma_{zi} \cos \gamma_{yi} + w_1 \Sigma k_i \cos^2 \gamma_{zi} -$$
$$- \Sigma u_i k_i \cos \gamma_{zi} \cos \gamma_{xi} - \Sigma v_i k_i \cos \gamma_{zi} \cos \gamma_{yi} - \Sigma w_i k_i \cos^2 \gamma_{zi} + F_z = 0, \qquad (3.3c)$$
$$i = 2, 3, \ldots n.$$

Dacă se scrie sistemul (3.3) pentru toate nodurile rețelei și se ține seama de condițiile de rezemare, rezultă un sistem de ecuații canonice care rezolvă problema după principiile cunoscute ale staticii construcțiilor.

Vom presupune că barele din fiecare față sînt identice, avînd rigiditățile axiale k_s, respectiv, k_i, și, analog, diagonalele au rigiditatea k_d.

Din examinarea rețelei spațiale planare pătrate simple considerate, rezultă că se disting doar două tipuri de noduri, și anume unul în fața inferioară (A) și celălalt din fața superioară (B) [3].

Față de sistemul de axe adoptat, nodurile curente le vom nota $A_{x,y}$, respectiv $B_{x,y}$, iar nodurile vecine $A_{x-1,y}$, $A_{x+1,y}$, $A_{x,y-1}$, $A_{x,y+1}$ etc. conform notațiilor din figura 7*).

Barele care concură la cele două noduri și cosinusurile directoare corespunzătoare au fost trecute în tabela 1.

Observînd că la fiecare nod concură cîte patru bare ale unei aceleiași fețe și patru diagonale, ecuațiile de echilibru (3.3) se simplifică în mod considerabil. Să scriem, de exemplu, ecuația $\Sigma X_A = 0$.

În această ecuație intervin eforturile din barele $A_{x,y} - A_{x-1,y}$; $A_{x,y} - A_{x+1,y}$; $A_{x,y} - B_{x,y}$; $A_{x,y} - B_{x-1,y}$; $A_{x,y} - B_{x-1,y-1}$; $A_{x,y} - B_{x,y-1}$.

*) Pentru a ține seama de decalajul de o jumătate de interval a nodurilor tip B față de cele de tip A, ar fi fost mai corectă notarea $B_{x+1/2,y+1/2}$, etc; am preferat notația din text din motive de simplitate a scrierii. Acest decalaj apare însă explicit în soluție (vezi §6).

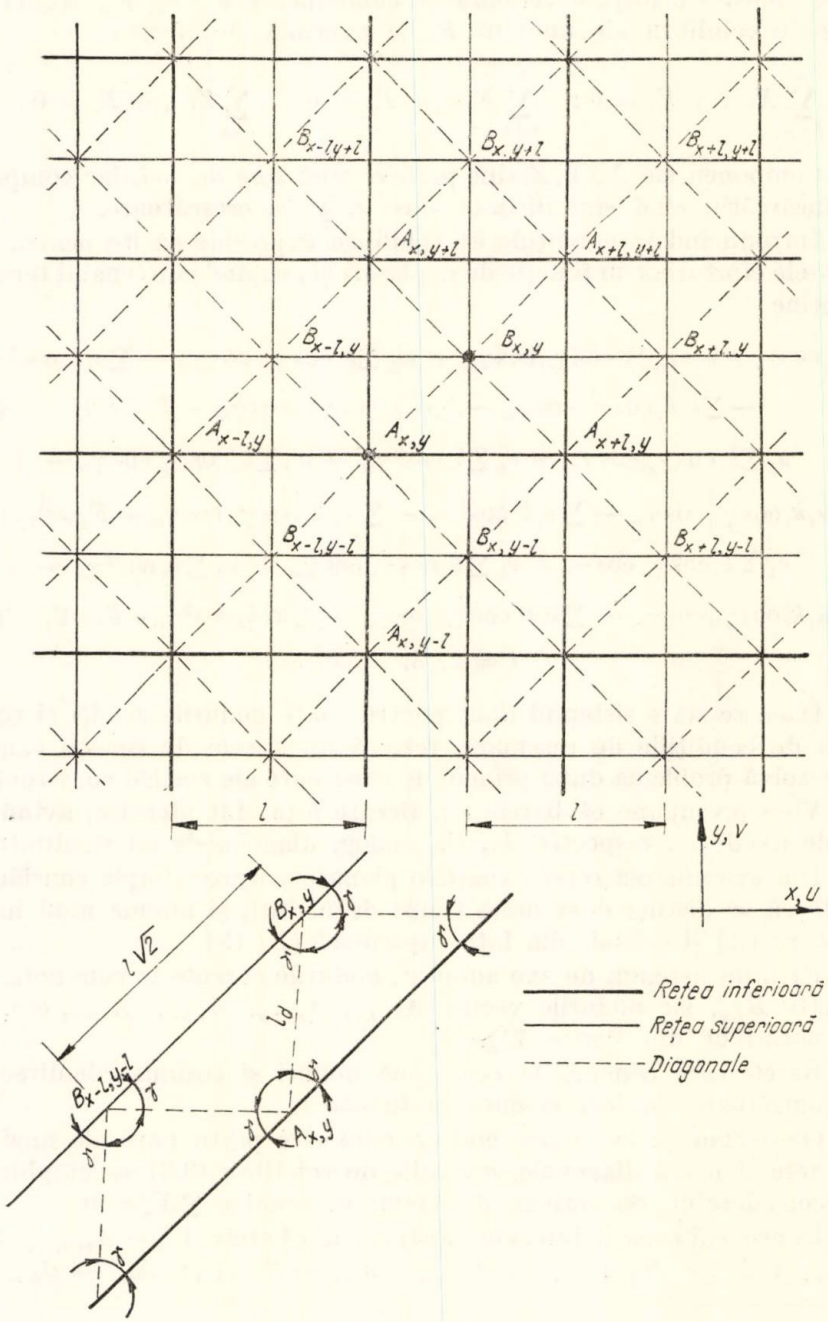


Fig. 7. — Nodurile tip $A_{x,y}$ și $B_{x,y}$ și nodurile învecinate.

Tabela 1

Bara	$\cos\gamma_x$	$\cos\gamma_y$	$\cos\gamma_z$
$A_{x,y} - B_{x+l,y}$	$+1$	0	0
$A_{x,y} - A_{x-l,y}$	-1	0	0
$A_{x,y} - A_{x,y+l}$	0	$+1$	0
$A_{x,y} - A_{x,y-l}$	0	-1	0
$A_{x,y} - B_{x,y}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - B_{x-l,y}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - B_{x-l,y+l}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - B_{x,y-l}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\sin\gamma$
$B_{x,y} - B_{x+l,y}$	$+1$	0	0
$B_{x,y} - B_{x-l,y}$	-1	0	0
$B_{x,y} - B_{x,y+l}$	0	$+1$	0
$B_{x,y} - B_{x,y-l}$	0	-1	0
$B_{x,y} - A_{x+l,y+l}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\sin\gamma$
$B_{x,y} - A_{x,y+l}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\sin\gamma$
$B_{x,y} - A_{x,y}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\sin\gamma$
$B_{x,y} - A_{x+l,y}$	$+\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}$	$+\sin\gamma$

Proiecțiile acestor eforturi pe axa x-ilor sînt (respectiv, în ordinea enumerării lor)*)

$$k_i(u^A_{x-1,y} - u^A_{x,y}),$$

$$k_i(u^A_{x+1,y} - u^A_{x,y}),$$

$$k_d\left[(u^B_{x,y} - u^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} + (v^B_{x,y} - v^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} - (w^B_{x,y} - w^A_{x,y})\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sqrt{2}}\right],$$

$$k_d\left[(u^B_{x-1,y} - u^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} - (v^B_{x-1,y} - v^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} + (w^B_{x-1,y} - w^A_{x,y})\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sqrt{2}}\right],$$

$$k_d\left[(u^B_{x-1,y-1} - u^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} + (v^B_{x-1,y-1} - v^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + (w^B_{x-1,y-1} - w^A_{x,y})\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sqrt{2}}\right],$$

$$k_d\left[(u^B_{x,y-1} - u^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} - (v^B_{x,y-1} - v^A_{x,y})\frac{\cos^2\gamma}{2} - (w^B_{x,y-1} - w^A_{x,y})\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sqrt{2}}\right], \tag{3.4}$$

Însumînd termenii precedenți și ținînd seama și de componenta F_{Ax} a încărcării exterioare, ecuația de proiecții se scrie:

$$k_i(u^A_{x+1,y} - 2u^A_{x,y} + u^A_{x-1,y}) - 2k_d\,u^A_{x,y}\cos^2\gamma + \frac{1}{2}k_d\cos^2\gamma(u^B_{x,y} + u^B_{x-1,y} +$$

$$+ u^B_{x-1,y-1} + u^B_{x,y-1}) + \frac{1}{2}k_d\cos^2\gamma(v^B_{x,y} - v^B_{x-1,y} + v^B_{x-1,y-1} - v^B_{x,y-1}) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}k_d\sin\gamma\cos\gamma(w^B_{x,y} - w^B_{x-1,y} - w^B_{x-1,y-1} + w^B_{x,y-1}) + F_{Ax} = 0.$$

Dacă se împarte mai departe cu $\frac{1}{2}k_d\cos^2\gamma$ și se notează

$$\psi_i = \frac{2k_i}{k_d\cos^2\gamma} \tag{3.5a}$$

și, analog,

$$\psi_s = \frac{2k_s}{k_d\cos^2\gamma}, \tag{3.5b}$$

relația precedentă se scrie:

$$[\psi_i(u^A_{x+1,y} - 2u^A_{x,y} + u^A_{x-1,y}) - 4u^A_{x,y}] + (u^B_{x,y} + u^B_{x-1,y} + u^B_{x-1,y-1} + u^B_{x,y-1}) +$$

$$+ (v^B_{x,y} - v^B_{x-1,y} + v^B_{x-1,y-1} - v^B_{x,y-1}) - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma(w^B_{x,y} - w^B_{x-1,y} - w^B_{x-1,y-1} +$$

$$+ w^B_{x,y-1}) = -\frac{2F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma}. \tag{3.6a}$$

*) Indicii A și B sînt puși sus pentru simplificarea scrierii.

Prin schimbarea indicilor x și y între ei rezultă ecuația $\sum Y_A = 0$, iar prin permutarea indicilor A și B, respectiv i și s între ei, rezultă ecuațiile $\sum X_B = 0$ și $\sum Y_B = 0$.

Pe o cale similară se obțin celelalte două ecuații de proiecții pe verticală; dintre acestea, vom reda ecuația relativă la nodul A :

$$(u^B_{x,y} - u^B_{x-1,y} + u^B_{x,y-1} - u^B_{x-1,y-1}) + (v^B_{x,y} + v^B_{x-1,y} - v^B_{x,y-1} - v^B_{x-1,y-1}) +$$

$$+ \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,[4w^A_{x,y} - (w^B_{x,y} + w^B_{x-1,y} + w^B_{x,y-1} + w^B_{x-1,y-1})] = -\frac{\sqrt{2}F_{Az}}{k_d \sin\gamma\cos\gamma}. \tag{3.6b}$$

Ecuațiile precedente mai pot fi încă simplificate prin notațiile

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\, w^A = \overline{w}^A; \qquad \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\, w^B = \overline{w}^B, \tag{3.7a}$$

$$\frac{2F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma} = \mathcal{F}_{Ax}; \qquad \frac{2F_{Ay}}{k_d\cos^2\gamma} = \mathcal{F}_{Ay},$$

$$\frac{2F_{Bx}}{k_d\cos^2\gamma} = \mathcal{F}_{Bx}; \qquad \frac{2F_{By}}{k_d\cos^2\gamma} = \mathcal{F}_{By}, \tag{3.7b}$$

$$\frac{\sqrt{2}F_{Az}}{k_d\sin\gamma\cos\gamma} = \mathcal{F}_{Az}; \qquad \frac{\sqrt{2}F_{Bz}}{k_d\sin\gamma\cos\gamma} = \mathcal{F}_{Bz}. \tag{3.7c}$$

Termenii $\mathcal{F}$ reprezintă, din punct de vedere dimensional, niște deformații liniare. Prin substituția (3.7a), matricea necunoscutelor nu mai depinde explicit de înclinarea γ, ci doar numai prin intermediul coeficienților ψ_i și ψ_s.

Înainte de abordarea cazului general, ne vom opri la studiul deformațiilor în cazul încovoierii cilindrice.

4. DEFORMAȚIILE REȚELEI PLANARE LUCRÎND LA ÎNCOVOIERE CILINDRICĂ

În paragraful al doilea am stabilit expresiile generale ale eforturilor și am particularizat apoi constantele de integrare pentru cazul static determinat al încovoierii cilindrice.

Odată cunoscute eforturile, deplasările pot fi obținute din relațiile de elasticitate. Vom începe cu deplasările orizontale u_A și u_B.

A doua relație (3.4) poate fi scrisă cu notațiile din § 2 :

$$I_m = k_i\,(u_{A,m+1} - u_{A,m})$$

sau încă

$$u_{A,m+1} - u_{A,m} = \frac{I_m}{k_i}, \tag{4.1}$$

în care I_m este dat de relația (2.8) sau (2.11c).

Pentru $k_i = \text{const}$ și încărcare uniformă, se poate obține imediat soluția generală a ecuației cu diferențe finite (3.8), plecînd de la relația

(2.8). Pentru simplificare, ne vom limita la cazul static determinat, cînd este încărcată doar fața inferioară ($P_B = 0$).

Din (2.11c) se deduce

$$I_m = \frac{P_A}{2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma}[p - 1 + 2(p-1)\,m - 2m^2],$$

iar soluția corespunzătoare a ecuației (4.1) se scrie

$$u_{A,m} = \frac{P_A}{6\sqrt{2}\,k_t\,\mathrm{tg}\,\gamma}(C_4 - m + 3pm^2 - 2m^3), \tag{4.2}$$

în care C_4 reprezintă o nouă constantă de integrare.

Obișnuit se consideră un șir de reazeme articulate, iar celălalt șir simplu rezemate, adică permițînd deplasări orizontale.

Vom obține expresii mai simple dacă vom admite că deplasările u au o variație antisimetrică în raport cu planul median ($x = a/2$); prin aceasta, starea de eforturi nu este influențată.

Punînd condiția $u_{A,m} = 0$, pentru $m = p/2$, din (4.2) rezultă

$$C_4 = -\frac{1}{2}(p^3 - p),$$

astfel încît expresia finală a deplasărilor $u_{A,m}$ se scrie

$$u_{A,m} = -\frac{P_A}{12\sqrt{2}\,k_t\,\mathrm{tg}\,\gamma}(4m^3 - 6pm^2 + 2m + p^3 - p). \tag{4.3}$$

Pe o cale absolut asemănătoare se poate stabili

$$S_m = k_s(u_{B,m+1} - u_{B,m})$$

sau încă

$$u_{B,m+1} + u_{B,m} = \frac{S_m}{k_s}. \tag{4.4}$$

Ținînd seama de (2.11d), în care luăm $P_B = 0$, soluția ecuației (4.4) se scrie

$$u_{B,m} = \frac{P_A}{6\sqrt{2}\,k_s\,\mathrm{tg}\,\gamma}[C_5 - (3p - 1)\,m - 3(p-1)\,m^2 + 2m^3],$$

în care C_5 reprezintă o altă constantă de integrare.

Din condiția de antisimetrie $u_{B,m} = 0$, pentru $m = \frac{p-1}{2}$, rezultă

$$C_5 = \frac{1}{2}(p^3 - p)$$

și expresia finală a deplasărilor $u_{B,m}$ este

$$u_{B,m} = \frac{P_A}{12\sqrt{2}k_s\,\mathrm{tg}\,\gamma}[4m^3 - 6(p-1)\,m^2 - 2(3p-1)\,m + p^3 - p]. \tag{4.5}$$

Deplasările v_A și v_B fiind nule, rezultă că și eforturile în barele paralel cu axa y-ilor vor fi nule, conform celor stabilite la § 2.

Pentru determinarea deplasărilor w_A și w_B se utilizează expresiile eforturilor în diagonalele D_m și D'_{m+1}. Aplicînd relația (3.1) și ținînd seama de valorile cosinusurilor directoare din tabela 1, rezultă

$$D_m = k_d \sin\gamma \left(\frac{u_{B,m} - u_{A,m}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma} + w_{A,m} - w_{B,m} \right), \tag{4.6a}$$

$$D'_{m+1} = k_d \sin\gamma \left(\frac{u_{A,m+1} - u_{B,m}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma} + w_{A,m+1} - w_{B,m} \right). \tag{4.6b}$$

Prin scădere, membru cu membru, săgețile $w_{B,m}$ se elimină, rămînînd ecuația cu diferențe finite

$$w_{A,m+1} - w_{A,m} = \frac{2u_{B,m} - u_{A,m+1} - u_{A,m}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma} + \frac{D'_{m+1} - D_m}{k_d \sin\gamma}. \tag{4.7}$$

Membrul din dreapta al relației precedente poate fi evaluat fără dificultate, însă are o expresie complicată în cazul cînd cele două rigidități k_s și k_i sînt diferite între ele. Ne vom fixa mai departe, la cazul cînd $k_s = k_i = k$. Atunci (4.7) devine

$$w_{A,m+1} - w_{A,m} = \frac{P_A}{24\,k\operatorname{tg}^2\gamma} [16m^3 - 24(p-1)m^2 - 4(6p-5)m + 4p^3 - 10p + 6] + \frac{P_A}{2k_d \sin^2\gamma}(p - 1 - 2m) =$$

$$= \frac{P_A}{24\,k\operatorname{tg}^2\gamma} [16m^3 - 24(p-1)m^2 - 4(6p - 5 + 3\psi)m + 4p^3 - 10p + 6 + 6\psi(p-1)].$$

Soluția generală se scrie

$$w_{A,m} = \frac{P_A}{24\,k\operatorname{tg}^2\gamma} [4m^4 - 8pm^3 - 2(3\psi - 1)m^2 + (4p^3 - 2p + 6\psi p)m + C_6].$$

Din condiția $w_{A,m} = 0$, pentru $m = 0$, rezultă imediat $C_6 = 0$; o a doua condiție de rezemare $w_{A,m} = 0$, pentru $m = p$, este de asemenea satisfăcută de relația

$$w_{A,m} = \frac{P_A}{24\,k\operatorname{tg}^2\gamma} [4m^4 - 8pm^3 - 2(3\psi - 1)m^2 + (4p^3 - 2p + 6\psi p)m]. \tag{4.8}$$

Săgețile $w_{B,m}$ rezultă direct din relația (4.6a)

$$w_{B,m} = w_{A,m} + \frac{u_{B,m} - u_{A,m}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma} - \frac{D_m}{k_d \sin\gamma}$$

şi se scriu

$$w_{B,m} = \frac{P_A}{24\,k\,\mathrm{tg}^2\gamma}\{4m^4 - 8(p-1)m^3 - (12p - 8 + 6\psi)m^2 + [4p^3 - \\ - 8p + 4 + 6\psi(p-1)]m + 2p^3 - 2p + 3\psi(p-1)\}. \qquad (4.9)$$

Expresia (4.9) satisface de asemenea condiţia de simetrie faţă de mijlocul deschiderii.

Problema mai poate fi rezolvată şi abordînd ecuaţiile generale ale metodei deformaţiilor, aşa cum se arată la paragraful 6.

5. INTRODUCEREA DIFERENŢELOR FINITE ÎN CAZUL GENERAL

Să examinăm mai atent una din ecuaţiile generale de echilibru, de exemplu ecuaţia (3.6a). Ea conţine deplasarea $u^A_{x,y}$ din *nodul considerat* şi deplasările din *nodurile vecine.*

O deplasare oarecare, de exemplu u_A, poate fi considerată ca o funcţie (pe care urmează să o determinăm) şi care ia valori doar într-un număr de puncte discrete, adică în nodurile (de tip A) ale reţelei. Cu alte cuvinte, deplasările u în toate nodurile de tip A pot fi exprimate cu ajutorul unei relaţii generale pe care urmează să o determinăm. Deci, dacă vom cunoaşte pe $u^A_{x,y}$(deplasarea u în nodul curent $A_{x,y}$), deplasările în nodurile vecine vor putea fi deduse prin operaţii matematice simple, constînd din înlocuirea valorilor coordonatelor unui punct cu cele ale altui punct.

De exemplu, vom putea scrie simbolic

$$u^A_{x,y} = u_A;\ u^A_{x+l,y} = E_x u_A;\quad u^A_{x-l,y} = E_x^{-1} u_A, \\ u^A_{x,y+l} = E_y u_A;\quad u^A_{x,y-l} = E_y^{-1} u_A;\ u^A_{x+l,y+l} = E_x E_y u_A \quad \text{etc.} \qquad (5.1)$$

Operatorii E sînt denumiţi *operatori cu diferenţe finite* şi se bucură de proprietatea că se poate opera cu ei aşa cum se operează cu nişte coeficienţi constanţi. De exemplu, se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} &1 + E_x + E_y + E_x E_y = (1 + E_x)(1 + E_y), \\ &E_x E_x^{-1} = 1, \quad E_x E_x = E_x^2 \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

Ţinînd seama de notaţiile precedente, ecuaţia (3.6a) se va putea scrie

$$[\psi_i(E_x u_A - 2u_A + E_x^{-1} u_A) - 4u_A] + (u_B + E_x^{-1} u_B + E_y^{-1} u_B + \\ + E_x^{-1} E_y^{-1} u_B) + (v_B - E_x^{-1} v_B - E_y^{-1} v_B + E_x^{-1} E_y^{-1} v_B) - \\ - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,(w_B - E_x^{-1} w_B + E_y^{-1} w_B - E_x^{-1} E_y^{-1} w_B) = -\mathcal{F}_{Ax},$$

sau, ţinînd seama de notaţiile (3.7a) şi dînd în factor comun fiecare necunoscută distinctă,

$$[\psi_i(E_x - 2 + E_x^{-1}) - 4]u_A + (1 + E_x^{-1})(1 + E_y^{-1})u_B + \\ + (1 + E_x^{-1})(1 - E_y^{-1})v_B - (1 - E_x^{-1})(1 + E_y^{-1})w_B = -\mathcal{F}_{Ax}.$$

Pe aceeaşi cale pot fi scrise şi celelalte cinci ecuaţii de echilibru. Ele constituie un *sistem de şase ecuaţii cu diferenţe finite, parţiale,* a cărui matrice a fost redată în tabela 2.

Tabela 2

u_A	u_B	v_A	v_B	$\overline{w}_A$	$\overline{w}_B$	= Termen liber
$\psi_i\,(E_x - 2 + E_x^{-1}) - 4$	$(1+E_x^{-1})\,(1+E_y^{-1})$	·	$(1-E_x^{-1})(1-E_y^{-1})$	·	$-(1-E^{-1})(1+E^{-1})$	$-\mathcal{F}_{Ax}$
$(1+E_x)\,(1+E_y)$	$\psi_s\,(E_x-2+E_x^{-1})-4$	$(1-E_x)\,(1-E_y)$	·	$-(1-E_x)(1+E_y)$	·	$-\mathcal{F}_{Bx}$
·	$(1-E_x^{-1})\,(1-E_y^{-1})$	$\psi_i(E_y-2+E_y^{-1})-4$	$(1+E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	·	$-(1+E_x^{-1})(1-E_y^{-1})$	$-\mathcal{F}_{Ay}$
$(1-E_x)\,(1-E_y)$	·	$(1+E_x)\,(1+E_y)$	$\psi_s(E_y-2+E_y^{-1})-4$	$-(1+E_x)(1-E_y)$	·	$-\mathcal{F}_{By}$
·	$(1-E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	·	$(1+E_x^{-1})\,(1-E_y^{-1})$	$+4$	$-(1+E_x^{-1})(1+E_y^{-1})$	$-\mathcal{F}_{Az}$
$(1-E_x)\,(1+E_y)$	·	$(1+E_x)\,(1-E_y)$	·	$-(1+E_x)(1+E_y)$	$+4$	$-\mathcal{F}_{Bz}$

Odată determinate deplasările necunoscute u_A, v_A, w_A și u_B, v_B, w_B, eforturile se obțin prin aplicarea relațiilor de tipul (3.1) și prin particularizarea cosinusurilor directoare conform tabelei 1.

În continuare, se va căuta o soluție generală a sistemului de ecuații cu diferențe finite, în cazul conturului dreptunghiular.

6. SOLUȚIA PRIN SUME DUBLE TRIGONOMETRICE

Dacă rețeaua spațială planară are un contur dreptunghiular și reazemă în fiecare nod de contur, este posibilă obținerea unei soluții analitice cu ajutorul sumelor duble trigonometrice.

Vom presupune și de data aceasta că rezemarea se face în nodurile feței inferioare, alegînd originea axelor x, y, z într-unul din colțurile acestei fețe.

Se notează (fig. 2):

p, q — numărul de intervale în direcțiile x și y;
m, n — coordonatele unui nod considerat;
j, k — coordonatele unui nod curent.

O soluție generală care satisface sistemul de ecuații din tabela 2, pentru condițiile de simplă rezemare, se poate scrie sub forma:

$$
\begin{aligned}
u_{A,m,n} &= \sum_j \sum_k U_{A,j,k} \cos \frac{jm\pi}{p} \sin \frac{kn\pi}{q}, \\
v_{A,m,n} &= \sum_j \sum_k V_{A,j,k} \sin \frac{jm\pi}{p} \cos \frac{kn\pi}{q}, \\
w_{A,m,n} &= \sum_j \sum_k W_{A,j,k} \sin \frac{jm\pi}{p} \sin \frac{kn\pi}{q};
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{B,m,n} &= \sum_j \sum_k U_{B,j,k} \cos \frac{(2m+1)j\pi}{2p} \sin \frac{(2n+1)k\pi}{2q}, \\
v_{B,m,n} &= \sum_j \sum_k V_{B,j,k} \sin \frac{(2m+1)j\pi}{2p} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2q}, \\
w_{B,m,n} &= \sum_j \sum_k W_{B,j,k} \sin \frac{(2m+1)j\pi}{2p} \sin \frac{(2n+1)k\pi}{2q}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Soluția (6.1), (6.2) presupune că și sarcinile nodale pot fi exprimate tot sub forma unei sume duble trigonometrice, de exemplu în cazul încărcărilor verticale (3.7 c):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{Az,m,n} &= \sum_j \sum_k \mathcal{F}_{A,j,k} \sin \frac{jm\pi}{p} \sin \frac{kn\pi}{q}, \\
\mathcal{F}_{Bz,m,n} &= \sum_j \sum_k \mathcal{F}_{B,j,k} \sin \frac{(2m+1)j\pi}{2p} \sin \frac{(2n+1)k\pi}{2q}.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Modul de exprimare a unei încărcări sub formă de sumă simplă sau dublă trigonometrică este detaliat în anexa 2. În particular, pentru sarcini egale la toate nodurile, avem

$$\mathcal{F}_{A,j,k} = \frac{4\mathcal{F}_{Az}}{pq} \operatorname{cotg} \frac{j\pi}{2p} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2q},$$

$$\mathcal{F}_{B,j,k} = \frac{4\mathcal{F}_{Bz}}{pq} \frac{1}{\sin \frac{j\pi}{2p} \sin \frac{k\pi}{2q}}, \tag{6.4}$$

$$(j, k = 1, 3, 5, \ldots)$$

Diferențele finite care trebuie introduse în sistemul din tabela 2 se evaluează după cum urmează:

$$(1 + E_x) \cos \frac{jm\pi}{p} = \cos \frac{jm\pi}{p} + \cos \frac{j(m+1)\pi}{p} =$$

$$= +2 \cos \frac{j\pi}{2p} \cos \frac{(2m+1)j\pi}{2p},$$

$$(1 - E_x^{-1}) \sin \frac{(2m+1)j\pi}{2p} = -2 \sin \frac{j\pi}{2p} \cos \frac{jm\pi}{2p},$$

$$(E_x - 2 + E_x^{-1}) \cos \frac{jm\pi}{p} = -4 \sin^2 \frac{j\pi}{2p} \cos \frac{jm\pi}{2p}$$

și alte relații similare.

Introducînd toate aceste expresii în tabela 2 și simplificînd cu liniile trigonometrice care conțin pe m și n, se obține un *sistem de ecuații liniare* care determină necunoscutele $U_{A,j,k}, \ldots W_{B,j,k}$. Matricea sistemului este redată în tabela 3.

În cazul cînd barele din cele două fețe sînt identice ($A_s = A_i$, deci $k_s = k_i$ și $\psi_s = \psi_i = \psi$), rezultă unele simplificări ale sistemului de ecuații din tabela 3, acesta putînd fi descompus în două sisteme a cîte trei ecuații fiecare (tabelele 4 și 5).

Noile necunoscute sînt semisuma, respectiv semidiferența necunoscutelor inițiale, adică

$$\frac{1}{2}(U_A + U_B), \quad \frac{1}{2}(U_A - U_A) \text{ etc.}$$

Eforturile în bare se determină cel mai simplu cu ajutorul formulelor (3.1) și (3.2), deși pot fi exprimate și ele cu ajutorul sumelor duble trigonometrice.

Numărul termenilor sumelor duble fiind de ordinul zecilor (sau chiar sutelor), problema obținerii valorilor numerice se pretează foarte bine programării la un calculator electronic de capacitate medie.

Tabela 3

$U_{A,j,k}$	$U_{B,j,k}$	$V_{A,j,k}$	$V_{B,j,k}$	$W_{A,j,k}$	$W_{B,j,k}$	= Termen liber
$-\left(1+\psi_i \sin^2\frac{j\pi}{2p}\right)$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\sin\frac{j\pi}{2q}\sin\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{Ax,j,k}$
$+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1+\psi_s \sin^2\frac{j\pi}{2p}\right)$	$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	.	$+\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{Bx,j,k}$
.	$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1+\psi_i \sin^2\frac{k\pi}{2q}\right)$	$+\cos\frac{j\pi}{2q}\cos\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{Ay,j,k}$
$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	.	$+\cos\frac{j\pi}{2q}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1+\psi_s \sin^2\frac{k\pi}{2q}\right)$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{By,j,k}$
.	$+\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	.	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	-1	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$+\frac{1}{4}\mathcal{F}_{Az,j,k}$
$-\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	.	$-\cos\frac{j\pi}{2q}\sin\frac{k\pi}{2q}$	.	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	-1	$+\frac{1}{4}\mathcal{F}_{Bz,j,k}$

Tabela 4

$\frac{1}{2}(U_{A,j,k} + U_{B,j,k})$	$\frac{1}{2}(V_{A,j,k} + V_{B,j,k})$	$\frac{1}{2}(W_{A,j,k} - W_{B,j,k})$	= Termen liber
$-\left(1-\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}+\psi\sin^2\frac{j\pi}{2p}\right)$	$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$+\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$-\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Az,j,k}+\mathcal{F}_{Bx,j,k})$
$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1-\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}+\psi\sin^2\frac{k\pi}{2q}\right)$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Ay,j,k}+\mathcal{F}_{By,j,k})$
$+\sin\frac{j\pi}{2q}\cos\frac{k\pi}{2p}$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}\right)$	$-\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Az,j,k}-\mathcal{F}_{Bz,j,k})$

Tabela 5

$\frac{1}{2}(U_{A,j,k} - U_{B,j,k})$	$\frac{1}{2}(V_{A,j,k} - V_{B,j,k})$	$\frac{1}{2}(W_{A,j,k} + W_{B,j,k})$	= Termen liber
$+\left(1+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}+\psi\sin^2\frac{j\pi}{2p}\right)$	$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$+\sin\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}$	$\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Ax,j,k}-\mathcal{F}_{Bx,j,k})$
$-\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$+\left(1+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}+\psi\sin^2\frac{k\pi}{2q}\right)$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Ay,j,k}-\mathcal{F}_{By,j,k})$
$+\sin\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$+\cos\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{k\pi}{2q}$	$-\left(1+\cos\frac{j\pi}{2p}\cos\frac{k\pi}{2q}\right)$	$\frac{1}{8}((\mathcal{F}_{Az,j,k}-\mathcal{F}_{Bz,j,k})$

7. CAZUL PARTICULAR AL ÎNCOVOIERII CILINDRICE. EXEMPLU DE CALCUL

Soluția obținută la paragrafele 2 și 4 pentru cazul încovoierii cilindrice poate fi regăsită ușor prin particularizarea cazului general.

Starea de eforturi și de deformații fiind independentă de y, rezultă

$$E_y = E_y^{-1} = 1.$$

În sistemul de ecuații cu diferențe finite din tabela 2, ecuațiile $\sum Y_A = 0$ și $\sum Y_B = 0$ se reduc la $v_A = v_B = 0$ și în realitate rămîne un sistem de patru ecuații cu diferențe finite *obișnuite*; matricea acestui sistem este redată în tabela 6.

Tabela 6

u_A	u_B	w_A	w_B	= Termen liber
$\psi_i(E_x - 2 + E_x^{-1}) - 4$	$2(1 + E_x^{-1})$	·	$-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma(1 - E_x^{-1})$	$-\mathcal{F}_{Ax}$
$2(1 + E_x)$	$\psi_e(E_x - 2 + E_x^{-1}) - 4$	$-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma(1 - E_x)$	·	$-\mathcal{F}_{Bx}$
·	$2(1 - E_x^{-1})$	$+4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma$	$-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma(1 + E_x^{-1})$	$-\mathcal{F}_{Az}$
$2(1 - E_x)$	·	$-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma(1 + E_x)$	$+4\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\gamma$	$-\mathcal{F}_{Bz}$

Prin analogie cu soluția indicată la paragraful precedent, se va putea căuta o soluție cu ajutorul sumelor simple trigonometrice. Va fi mai avantajos însă, ținînd seama de structura soluției obținute la paragrafele 2 și 4, să căutăm direct o soluție prin polinoame.

Limitîndu-ne la cazul studiat anterior ($P_B = 0$ și $k_e = k_i = k$), soluția pentru deplasările necunoscute va fi de forma

$$\begin{aligned}
u_{A,m} &= \frac{P_A}{12\sqrt{2}\,k\,\mathrm{tg}\,\gamma}(A_0 + A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3),\\
u_{B,m} &= \frac{P_A}{12\sqrt{2}\,k\,\mathrm{tg}\,\gamma}(B_0 + B_1 m + B_2 m^2 + B_3 m^3),\\
w_{A,m} &= \frac{P_A}{24\,k\,\mathrm{tg}^2\gamma}(C_0 + C_1 m + C_2 m^2 + C_3 m^3 + C_4 m^4),\\
w_{B,m} &= \frac{P_A}{24\,k\,\mathrm{tg}^2\gamma}(D_0 + D_1 m + D_2 m^2 + D_3 m^3 + D_4 m^4),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

în care coeficienții A_i, B_i, C_i, D_i sînt adimensionali.

Determinarea acestor coeficienți se face exprimînd că relațiile (6.1) satisfac ecuațiile cu diferențe finite (tabela 6), condițiile de simetrie, respectiv, antisimetrie ale deplasărilor și condițiile marginale pentru deplasări și eforturi.

Urmînd această cale, se regăsesc expresiile (4.3), (4.5), (4.8) și (4.9).

★

Procedînd asemănător, se pot stabili expresiile eforturilor și deformațiilor produse de sarcinile P_B. Rezultatele sînt trecute în anexa 3.

★

Vom aplica rezultatele precedente într-un exemplu de calcul, alegînd următoarele date numerice:

— număr de intervale, $p = 15$;
— înălțimea structurii, $h = l = a/15$;
— secțiunile barelor, $A_s = A_i = A$, $A_d = A/3$.

Cu ajutorul relațiilor (1.1) și (3.5) se deduce imediat

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{2} \qquad (\gamma = 54°44'08''),$$

$$l_d = \sqrt{\frac{3}{2}}\, l \approx 1{,}22474\ l,$$

$$\psi_s = \psi_i = \psi = 9\sqrt{6} \approx 22{,}04541.$$

Din aplicarea directă a formulelor stabilite la paragraful 4 rezultă următoarele expresii pentru eforturi și deplasări:

$$D'_m = + \sqrt{\frac{3}{2}}\,(4 - 0{,}5m)\,P_A,$$

$$D_m = - \sqrt{\frac{3}{2}}\,(3{,}5 - 0{,}5m)\,P_A,$$

$$I_m = (3{,}5 + 7m - 0{,}5m^2)\,P_A,$$

$$S_m = -(7 + 6{,}5m - 0{,}5m^2)P_A;$$

$$u_{A,m} = -\left(140 + \frac{1}{12}\,m - 3{,}75\,m^2 + \frac{1}{6}\,m^3\right)\frac{P_A}{k},$$

$$u_{B,m} = \left(140 - \frac{11}{3}\,m - 3{,}5m^2 + \frac{1}{6}\,m^3\right)\frac{P_A}{k},$$

$$w_{A,m} = \left(321{,}96014\,m - 2{,}71401\,m^2 - 2{,}5m^3 + \frac{1}{12}\,m^4\right)\frac{P_A}{k},$$

$$w_{B,m} = \left(159{,}28973 + 317{,}41280\,m - 6{,}33901\,m^2 - \frac{7}{3}\,m^3 + \frac{1}{12}\,m^4\right)\frac{P_A}{k}.$$

Variațiile eforturilor în bare și ale deplasărilor sînt redate în figura 8.

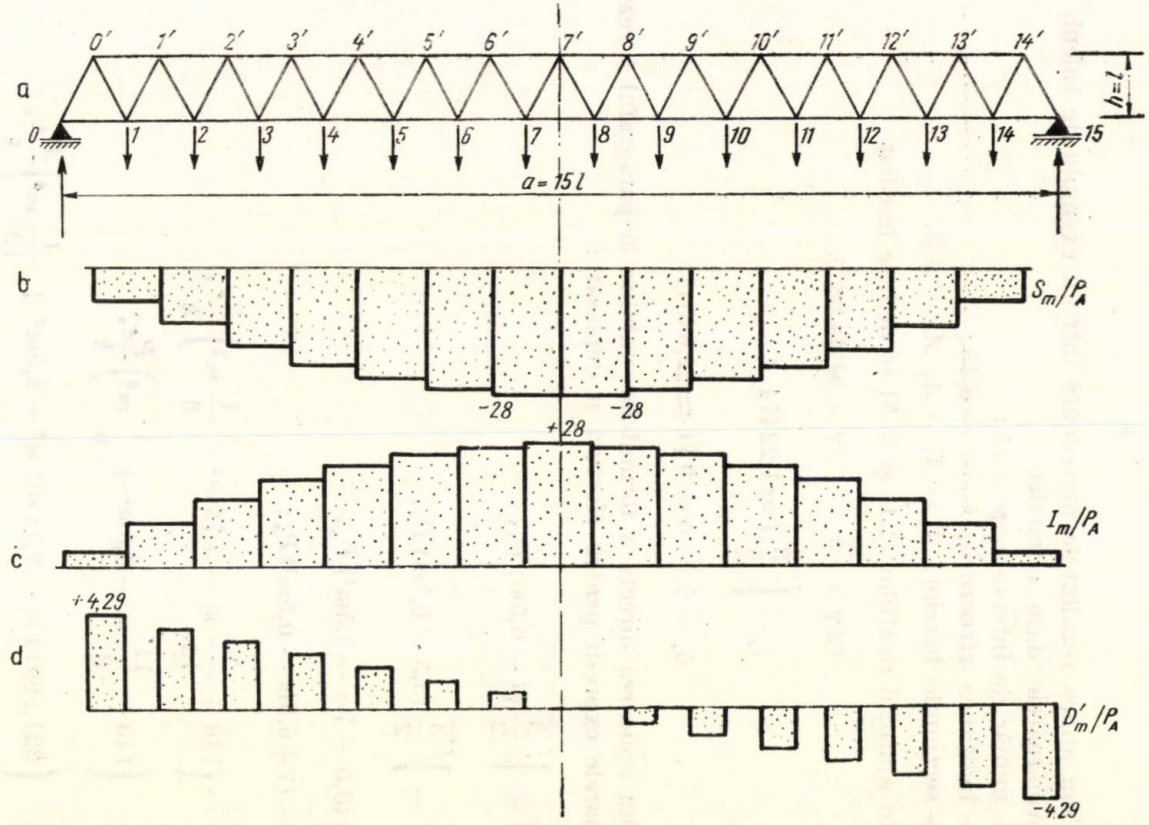
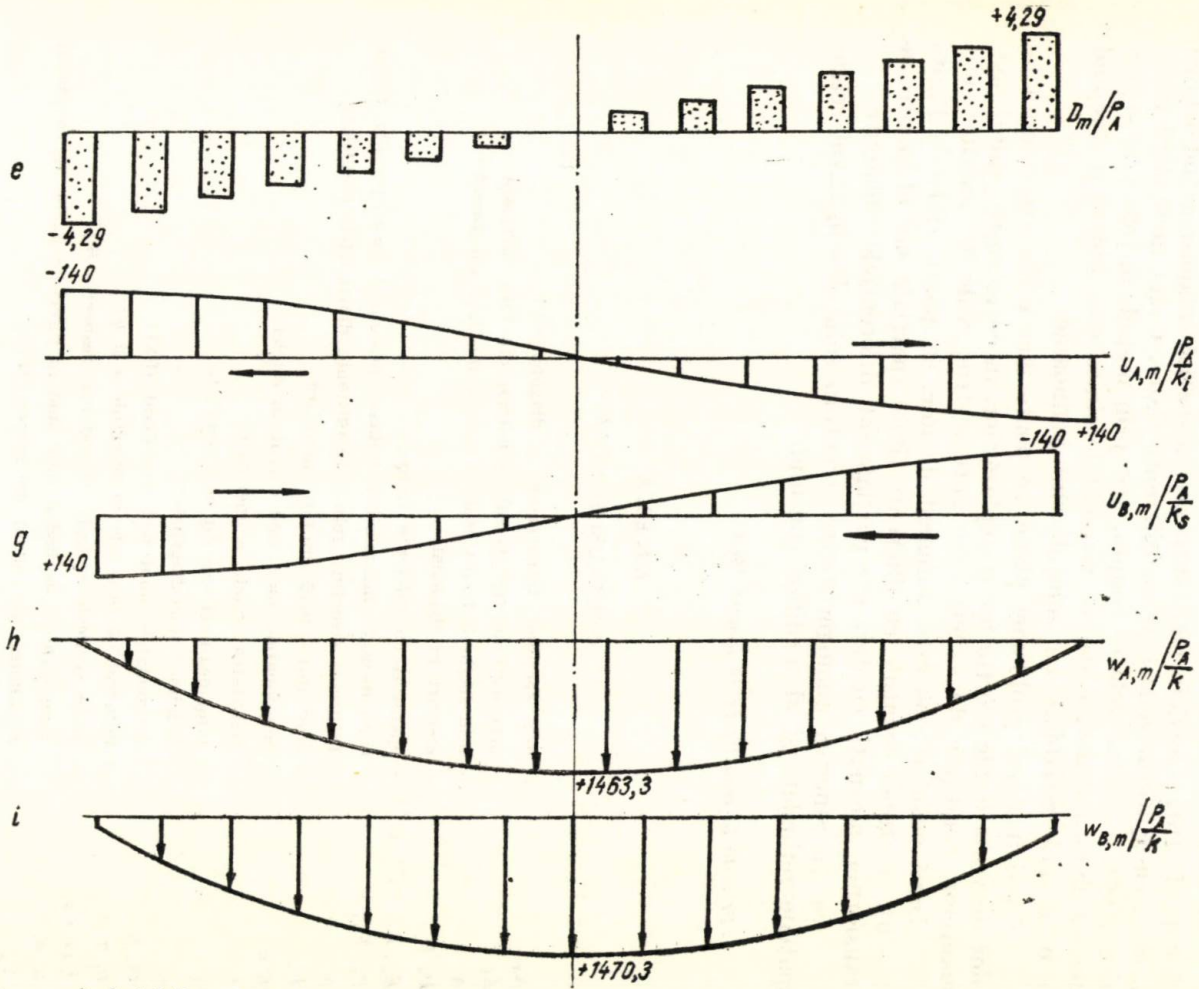


Fig. 8. — Variaţia eforturilor şi a deplasărilor : *a*) geometria structurii ; *b*) efortul S_m ; *c*) efortul I_m ; *d*) efortul D'_m ;



e) efortul D_m; *f*) deplasarea $u_{A,m}$; *g*) deplasarea $u_{B,m}$; *h*) deplasarea $w_{A,m}$; *i*) deplasarea $w_{B,m}$

8. ÎNCHEIERE

În cadrul studiului de față s-a indicat posibilitatea determinării stării de eforturi și de deformații într-o rețea spațială planară avînd ochiuri pătrate, cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe finite. Cazul încovoierii cilindrice poate fi studiat relativ simplu, atît prin metoda forțelor, cît și prin metoda deformațiilor, deoarece diferențele finite sînt obișnuite (depind de o singură variabilă), iar soluțiile sînt polinoame.

Ca și în cazul problemei plane, se poate face o discuție asupra legilor de variație ale eforturilor și deplasărilor, în ce privește gradul polinoamelor, condițiile de simetrie și antisimetrie, valorile maxime etc.

Dacă pasul rețelei este suficient de mic, se poate trece la limită ($l \to 0$), și atunci ecuațiile cu diferențe finite (parțiale sau obișnuite) se transformă în ecuații cu derivate parțiale sau diferențiale obișnuite.

Se va remarca analogia dintre structura soluțiilor în cazul rețelei spațiale reticulate și al mediilor continui.

Primită la redacție la 10 august 1968

ANEXA 1

SIMBOLURI ȘI NOTAȚII

A_d — aria secțiunii transversale a diagonalelor;

A_i — aria secțiunii transversale a barelor din fața inferioară;

A_s — aria secțiunii transversale a barelor din fața superioară;

D, D' — eforturi în diagonale;

E_x, E_y, E_x^{-1}, E_y^{-1} — operatori cu diferențe finite;

F_x, F_y, F_z — componentele încărcării exterioare, presupusă concentrată la noduri;

h — înălțimea structurii reticulate (distanța dintre fețele paralele);

I — efort într-o bară din fața inferioară;

j, k — coordonatele unui nod curent al rețelei;

k — rigiditatea axială a unei bare;

l — lungimea unei bare din cele două fețe;

l_d — lungimea unei diagonale;

m, n — coordonatele unui nod considerat (fix);

p, q — numărul de intervale în direcțiile x și y;

P_A, P_B — forțe verticale aplicate în nodul A, respectiv B;

u, v, w — componentele deplasării unui nod în direcțiile axelor de coordonate;

V_0 — reacțiunea din nodul de reazem O;

$$\psi_i = \frac{2k_i}{k_d \cos^2 \gamma}, \quad \psi_s = \frac{2k_s}{k_d \cos^2 \gamma};$$

γ — unghiul pe care diagonalele îl fac cu planul orizontal.

ANEXA 2

EXPRIMAREA SĂRCINILOR NODALE SUB FORMA DE SUME TRIGONOMETRICE SIMPLE ȘI DUBLE

Fie un segment de dreaptă împărțit în p intervale egale, definite prin nodurile 0, 1, 2, ..., $p-1$, p. La fiecare nod intermediar este aplicată cîte o sarcină nodală P_1, P_2, ..., P_{p-1}, a cărei natură depinde de problema considerată (fig. 1*A*).

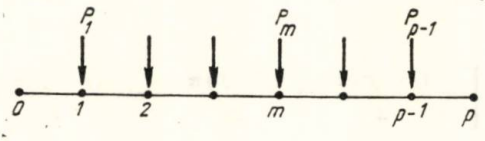


Fig. 1 A

Ne propunem să arătăm că o sarcină oarecare P_m poate fi exprimată analitic, sub forma unei sume trigonometrice

$$P_m = \overline{P}_1 \sin \frac{m\pi}{p} + \overline{P}_2 \sin \frac{2m\pi}{p} + \ldots + \overline{P}_j \sin \frac{jm\pi}{p} + \ldots + \overline{P}_{p-1} \sin \frac{(p-1)m\pi}{p},$$

în care coeficienții $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... se exprimă, la rîndul lor, sub forma

$$\overline{P}_j = \frac{2}{p}\left(P_1 \sin \frac{j\pi}{p} + P_2 \sin \frac{2j\pi}{p} + \ldots + P_m \sin \frac{mj\pi}{p} + \ldots + P_{p-1} \sin \frac{(p-1)j\pi}{p}\right).$$

Cele două expresii de mai sus se pot scrie condensat

$$P_m = \sum_{j=1}^{p-1} \overline{P}_j \sin \frac{jm\pi}{p}, \tag{1a}$$

$$\overline{P}_j = \frac{2}{p} \sum_{j=1}^{p-1} P_m \sin \frac{jm\pi}{p}. \tag{1b}$$

Dacă s-ar scrie dezvoltat relația (1a), pentru $m = 1, 2, \ldots, p-1$, s-ar obține un sistem de $(p-1)$ ecuații cu tot atîtea necunoscute $\overline{P}$, termenii liberi fiind sarcinile nodale P.

Așa cum arată relația (1b), rădăcinile se pot pune sub formă explicită. Pentru obținerea lui P_j, vom înmulți toți termenii fiecărei ecuații cu coeficientul lui $\overline{P}_j$ din ecuația respectivă, apoi se va face suma tuturor relațiilor, membru cu membru. În acest fel va rezulta

$$\overline{P}_j \sum_{m=1}^{p-1} \sin^2 \frac{jm}{p} + \sum_{j'=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{p-1} \overline{P}_{j'} \sin \frac{jm\pi}{p} \sin \frac{j'm\pi}{p} = \sum_{m=1}^{p-1} P_m \sin \frac{jm\pi}{p} \tag{2}$$

$$(j' \neq j).$$

Sumele simple se evaluează după relații cunoscute

$$\sum_{m=1}^{p-1} \sin^2 \frac{jm\pi}{p} = \frac{p}{2}.$$

Vom arăta mai departe că

$$S = \sum_{m=1}^{p-1} \sin \frac{jm\pi}{p} \sin \frac{j'm\pi}{p} = 0.$$

Transformînd produsul în diferență, avem succesiv,

$$S=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\left[\cos\frac{(j-j')\,m\pi}{p}-\cos\frac{(j+j')\,m\pi}{p}\right]=$$

$$=\frac{\cos\dfrac{(j-j')\pi}{2}\sin\dfrac{(p-1)(j-j')\pi}{2p}}{2\sin\dfrac{(j-j')\pi}{2p}}-\frac{\cos\dfrac{(j+j')\pi}{2}\sin\dfrac{(p-1)(j+j')\pi}{2p}}{2\sin\dfrac{(j+j')\pi}{2p}}=$$

$$=\frac{\cos\dfrac{(j-j')\pi}{2}}{2\sin\dfrac{(j-j')\pi}{2p}}\left[\sin\frac{(j-j')\pi}{2}\cos\frac{(j-j')\pi}{2p}-\cos\frac{(j-j')\pi}{2}\sin\frac{(j-j')\pi}{2p}\right]-$$

$$-\frac{\cos\dfrac{(j+j')\pi}{2}}{2\sin\dfrac{(j+j')\pi}{2p}}\left[\sin\frac{(j+j')\pi}{2}\cos\frac{(j+j')\pi}{2p}-\cos\frac{(j+j')\pi}{2}\sin\frac{(j+j')\pi}{2p}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos(j+j')\pi-\cos(j-j')\pi\right]=-\frac{1}{2}\sin\pi j\sin\pi j'=0.$$

În felul acesta, relația (2) se reduce la

$$\frac{p}{2}\,\overline{P}_j=\sum_{m=1}^{p-1}P_m\sin\frac{jm\pi}{p},$$

din care rezultă imediat (1b).

★

În cazul unui contur dreptunghiular, relațiile (1) se extind cu ușurință, făcînd produsele a două sume

$$P_{m,n}=\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{q-1}\overline{P}_{j,k}\sin\frac{jm\pi}{p}\sin\frac{kn\pi}{q}, \tag{3a}$$

în care

$$\overline{P}_{j,k}=\frac{1}{pq}\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{q-1}P_{m,n}\sin\frac{jm\pi}{p}\sin\frac{kn\pi}{q}. \tag{3b}$$

În cele ce urmează se dau două particularizări ale sumelor simple trigonometrice.

1. *Sarcini nodale egale* (fig. 2*A*)

$$P_m=\frac{1}{p}\,P\sum_j\operatorname{cotg}\frac{j\pi}{2p}\sin\frac{jm\pi}{p},$$

$$\overline{P}_j=\frac{1}{p}\,P\operatorname{cotg}\frac{j\pi}{2p}\qquad(j=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p-1).$$

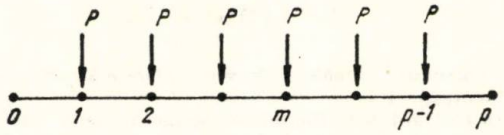


Fig. 2 A

2. *O sarcină nodală în nodul j'* (fig. 3A)

$$P_m = \frac{2}{p} P \sum_j \sin \frac{jj' \pi}{p} \sin \frac{jm \pi}{p},$$

$$\overline{P}_j = \frac{2}{p} P \sin \frac{jj' \pi}{p} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, p-1).$$

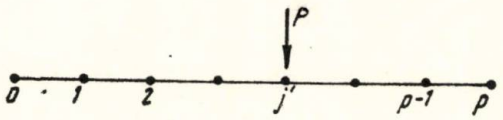


Fig. 3 A

ANEXA 3

EFORTURILE ȘI DEPLASĂRILE PRODUSE DE SARCINI P_B APLICATE LA NODURILE FEȚEI SUPERIOARE

$$D'_m = + \frac{P_B}{2 \sin \gamma} \left(\frac{p}{2} - m \right),$$

$$D_m = - \frac{P_B}{2 \sin \gamma} \left(\frac{p}{2} - m \right),$$

$$I_m = \frac{P_B}{2\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\,\gamma} [-2m^2 + 2(p-1)m + p],$$

$$S_m = \frac{P_B}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma} [m^2 - (p-2)m - p + 1],$$

$$u_{A,m} = \frac{P_B}{12\sqrt{2}\,k\,\mathrm{tg}\,\gamma} (-4m^3 + 6pm^2 + 4m - p^3 - 2p),$$

$$u_{B,m} = \frac{P_B}{12\sqrt{2}\,k\,\mathrm{tg}\,\gamma} [4m^3 - 6(p-1)m^2 - 2(3p-1)m + p^3 - p],$$

$$w_{A,m} = \frac{P_B}{24\,k\,\mathrm{tg}^2\,\gamma} [4m^4 - 8pm^3 - 2(3\psi + 2)m^2 + (4p^3 + 4p + 6\psi p)m],$$

$$w_{B,m} = \frac{P_B}{24\,k\,\mathrm{tg}^2\,\gamma} \{4m^4 - 8(p-1)m^3 - 2(6p - 1 + 3\psi)m^2 + [4p^3 - 2p - 2 + 6\psi(p-1)]m + 2p^3 + p + 3\psi p\}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Gheorghiu, V. Dragomir, *Probleme de reprezentare a structurilor constructive*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
2. H. Kitamura, *Structuri din bare* (în limba japoneză), sept. 1966.
3. J. D. Renton, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates.* In : *Space Structures* (edited by R. M. Davies), Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh, 1967, p. 19—32.
4. M. Soare, *Conferinţa internaţională pentru structuri spaţiale, Londra, 1966*, Revista construcţiilor, **21**, *10—11*, 597—601 (1967).
5. — *Probleme moderne în construcţii : structurile spaţiale*, Revista construcţiilor, **20**, *11*, 561—568 (1968).
6. Ping-Chun Wang, *Numerical and matrix methods in structural mechanics with applications to computers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1966.

CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA STRUCTURILOR SPAȚIALE

de ION MUNTEANU și IOSIF STURZ
Institutul politehnic, Timișoara

Lucrarea prezintă în mod unitar și sub formă matriceală problemele calculului structurilor spațiale de rezistență și soluționarea generală prin cele două metode. Se dau relații de calcul pentru centrul elastic al forțelor plane și spațiale și se demonstrează posibilitatea rezolvării problemei în metoda deplasărilor prin împărțirea în submatrice.

1. Structurile de rezistență spațiale formate din bare drepte sau curbe, general nedeterminate, se pot rezolva prin două metode distincte, ca urmare a dualității forță-deplasare (respectiv efort-deformație).

Condiția scrisă matematic pentru oricare din metode are forma canonică

$$C_i = \sum_{j=1}^{p} k_{ij} \cdot N_j + L_{i,0} = 0, \; i = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

sau matriceală

$$\{C\} = [k]\,\{N\} + \{L\} = 0, \tag{1'}$$

unde

$\{C\}$ este matricea coloană a caracteristicii condiționate (matricea condiției);
$\{L\}$ — matricea coloană a termenilor din încărcare;
$\{N\}$ — matricea coloană a necunoscutelor problemei;
$[k]$ — matricea pătrată a invarianților structurii.

Soluția problemei este

$$\{N\} = -\,[k]^{-1}\,\{L\}. \tag{2}$$

Dacă condiția C se scrie asupra deplasărilor (în anumite puncte aceste deplasări, din motive de continuitate, sînt nule), se obține metoda forțelor (în varianta forțelor virtuale a principiului lucrului mecanic virtual condițiile scrise exprimă, din punct de vedere geometric, compatibilitatea poziției deformate reale), ceea ce conduce la

$$\{\Delta_i\} = [\delta_{ij}]\,\{X_j\} + \{\Delta_{i0}\} = 0, \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 665–675, BUCUREȘTI, 1969

unde

$\{\Delta_i\}$ este matricea deplasărilor elastice punctuale totale produse pe direcţiile forţelor de legătură în exces, X_i;
$\{\Delta_{i,0}\}$ — matricea deformaţiilor din încărcare P;
$\{X_j\}$ — matricea forţelor hiperstatice;
$[\delta_{ij}]$ — matricea flexibilităţii structurii, termenul δ_{ij} fiind unul din cele n^2 elemente ale acestei matrice ($i, j = 1, \ldots, n$).

Cînd condiţia C se scrie asupra forţelor (în anumite puncte, din motive de echilibru static, aceste forţe sînt nule), se obţine metoda deplasărilor (în varianta deplasărilor virtuale a principiului lucrului mecanic virtual condiţiile scrise exprimă, din punct de vedere static, echilibrul sistemului de forţe real), ceea ce conduce la

$$\{X_i\} = [x_{ij}]\,\{\Delta_j\} + \{X_{i,0}\} = 0, \tag{4}$$

unde

$\{X_i\}$ este matricea forţelor totale produse pe direcţiile deplasărilor nodale independente;
$\{X_{i,0}\}$ — matricea forţelor din încărcarea P;
$\{\Delta_j\}$ — matricea deplasărilor nodale independente (hipergeometrice);
$[x_{ij}]$ — matricea rigidităţii structurii ($i, j = 1, \ldots, d$).

Caracteristicile generalizate Δ, respectiv X şi P, vor fi deplasări liniare sau unghiulare, respectiv forţe propriu-zise sau momente.

Dacă în ecuaţia matriceală (1′) condiţiile scrise sînt concomitent de hiperstaticitate şi de hipergeometricitate, adică de compatibilitate a deformatei reale, respectiv de echilibru al sistemului de forţe dat, se obţine metoda mixtă; această exprimare poate aduce uneori avantaje în calcul.

1.1. Numărul de parametri generalizaţi p ($p = n$ sau d), ce definesc o structură general nedeterminată, depinde de aceasta prin modul cum sînt legate barele între ele şi faţă de teren. Pentru o structură în spaţiu formată din bare drepte,

$$n = l + r - 6c, \tag{5}$$

iar în ipoteza considerării deformării barelor ca urmare atît a deplasărilor unghiulare, cît şi a celor liniare

$$d = 6n_u + 3n_l, \tag{6}$$

unde

l este numărul legăturilor simple între structură şi teren;
r — numărul de legături simple între cele c corpuri ce formează structura;
n_u — numărul de noduri rigide ale structurii;
n_l — numărul de noduri articulate ale structurii.

În mod obişnuit se neglijează deformaţiile liniare ale barelor şi deci

$$d = 6n_u + 3n_l - c.$$

1.2. În baza principiului suprapunerii efectelor, pornind de la ideea că sistemul real format din structură și încărcare ($S - P_r$) se comportă identic cu sistemul de calcul format din structura de bază, încărcare și necunoscutele generalizate ($S^0 - P_r, N_j$), rezultă că, în mod corespunzător, în metoda forțelor sistemul este format din structura izostatică (sau parțial hiperstatică) S^0 și din acțiunile P_r și X_j, iar în metoda deplasărilor sistemul este format din structura multi-hiperstatică, dar izogeometrică $\mathcal{S}^0$, și din acțiunile P_r și Δ_j. Calculul termenilor δ_{ij}, $\Delta_{i,0}$, respectiv x_{ij} și $X_{i,0}$, se va conduce deci pe aceste structuri de calcul S^0, $\mathcal{S}^0$, structuri cu rezolvare cunoscută.

1.3. Cu caracter de definiție, presupunînd că $n = d$ și cu condiția ca matricele $[\delta]$ și $[x]$ să fie nesingulare, se poate scrie că

$$[\delta]\,[x] = 1 = U,$$

de unde

$$[\delta] = [x]^{-1}; \quad [x] = [\delta]^{-1}, \tag{7}$$

ceea ce din punct de vedere fizic revine a spune că flexibilitatea este inversa rigidității, și reciproc.

2. Sistemul de ecuații (3), corespunzător metodei forțelor, în general, se impune a fi rezolvat global. Aceasta conduce la soluții de forma (2), ceea ce, în cazul obișnuit al structurilor spațiale, impune folosirea mașinilor de calcul.

Reducerea la forma diagonală a acestei matrice (3) echivalează cu transferarea sistemului de forțe de legătură X_i într-un centru elastic al structurii, față de care

$$\delta^*_{ij} = 0 \ (i \neq j; \ i, j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

În general, pentru o structură de n ori nedeterminată static, se vor obține mai multe astfel de centre elastice, al căror număr de coordonate este dat de numărul de condiții de tip (8) ce se vor putea scrie și care este

$$c_e = (n^2 - n)/2.$$

În general, matricea flexibilității structurii nu va fi completă, deoarece forța de legătură $\overline{X}_i = 1$ nu va produce eforturi după toate axele după care apar eforturi din acțiunea $\overline{X}_j = 1$, respectiv pentru că forțele de legătură plane se separă de cele spațiale (parțial sau total). Vor putea rezulta astfel două tipuri de centre elastice : unul pentru sarcinile elastice plane, C_p, și unul pentru cele spațiale, C_s.

Cu satisfacerea condițiilor $\delta_{ij} = 0$, matricea flexibilității devine de tip diagonală și soluțiile sînt de forma

$$X_i = -\Delta_{i,0}/\delta_{ii} \ (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

2.1. Pentru cazul particular al structurilor spațiale formate dintr-o bară frîntă sau curbă într-un plan și încărcate oricum, un număr de invarianți δ sînt identici nuli. Dacă, pentru o astfel de structură dublu încastrată, forțele de legătură $X_1, \ldots, X_6$ se aleg conform figurii 1, eforturile din acțiunile $\overline{X}_j = 1$ sînt cele din tabela 1 (matricea eforturilor unitare suplimentare)

Tabela 1

		Acțiunea : forță unitate					
		$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$	$\overline{X}_4$	$\overline{X}_5$	$\overline{X}_6$
Efectul :	1	m_{11}	m_{12}	m_{13}	0	0	0
efortul	2	0	0	0	m_{24}	m_{25}	m_{26}
e_{aj}	3	0	0	0	m_{34}	m_{35}	m_{36}
după axa	1	0	0	0	0	0	t_{16}
$a =$	2	t_{21}	t_{22}	0	0	0	0
	3	n_{31}	n_{32}	0	0	0	0

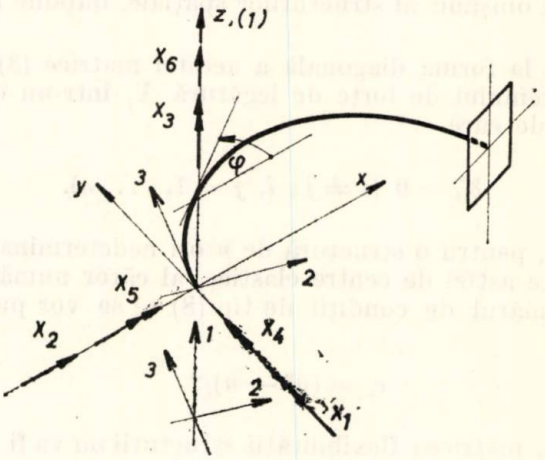


Fig. 1

Cu relația

$$\delta_{ij} = (\overline{X}_i \quad \overline{X}_j) = \sum_{a=1}^{2} \int_0^s \frac{m_{ai} m_{aj}}{EI_a} \, ds + \int_0^s \frac{m_{3i} m_{3j}}{GI_3} \, ds +$$

$$+ \sum_{a=1}^{2} \int_0^s \varkappa_a \frac{t_{ai} t_{aj}}{GA} \, ds + \int_0^s \frac{n_{3i} n_{3j}}{EA} \, ds, \tag{10}$$

se obțin termenii din matricea flexibilității

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

în care se constată separarea sistemului de forțe de legătură suplimentare din plan, de cel din spațiu.

Pentru centrul elastic plan, Cp, folosind relația (10), punînd condiția (8), unde $i, j = 1, 2, 3$, considerînd sistemul de forțe X_i mutat în centrul elastic și acționînd ca în figura 2, rezultă relațiile (12), (13), (14), valabile pentru orice sistem plan (bară curbă, bară frîntă):

$$\delta_{13} = \int_0^s [(x_p - x)\cos\alpha_p + (y_p - y)\sin\alpha_p]\frac{ds}{EI_1} = 0, \tag{12}$$

$$\delta_{23} = \int_0^s [(x_p - x)\sin\alpha_p - (y_p - y)\cos\alpha_p]\frac{ds}{EI_1} = 0, \tag{13}$$

$$\delta_{12} = \int_0^s \{[(x_p - x)^2 - (y_p - y)^2]\sin\alpha_p\cos\alpha_p +$$

$$+ (x_p - x)(y_p - y)(\sin^2\alpha_p - \cos^2\alpha_p)\}\frac{ds}{EI_1} +$$

$$+ \int_0^s \varkappa_2 [-\sin(\alpha_p + 90 - \varphi)\cos(\alpha_p + 90 - \varphi)]\frac{ds}{GA} +$$

$$+ \int_0^s \cos(\alpha_p + 90 - \varphi)\sin(\alpha_p + 90 - \varphi)\frac{ds}{EA} = 0. \tag{14}$$

În particular, considerînd că sistemul de forțe X_i este mutat în centrul elastic și acționează după axe paralele cu x și y, rezultă:

$$\delta_{13} = \int_0^s (x_p - x)\frac{ds}{EI_1} = 0, \tag{15}$$

$$\delta_{23} = -\int_0^s (y_p - y)\frac{ds}{EI_1} = 0, \tag{16}$$

de unde

$$x_p = \int_0^s x\frac{ds}{EI_1}\Big/\int_0^s \frac{ds}{EI_1}, \tag{17}$$

$$y_p = \int_0^s y\frac{ds}{EI_1}\Big/\int_0^s \frac{ds}{EI_1}, \tag{18}$$

respectiv, din (14),

$$\operatorname{tg} 2\alpha_p = \frac{2\int_0^s (x_p - x)(y_p - y)\,\frac{ds}{EI_1}}{\int_0^s (y_p - y)^2\,\frac{ds}{EI_1} - \int_0^s (x_p - x)^2\,\frac{ds}{EI_1}}. \tag{19}$$

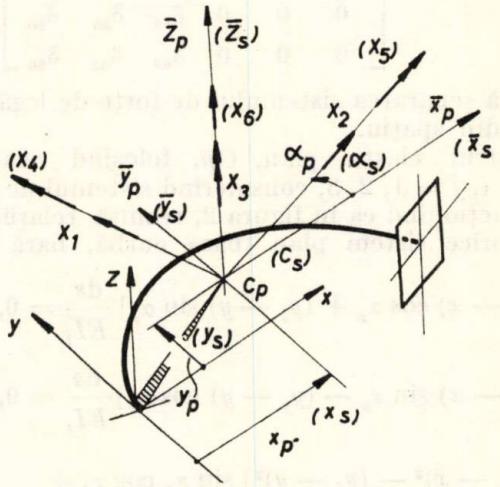


Fig. 2

Se observă că relaţia (19) consideră numai deformaţiile din încovoiere, în comparaţie cu relaţia (14), care consideră şi pe cele din forţe tăietoare şi axiale. De altfel, un calcul numeric arată că la barele curbe în arc de cerc, cu $I = \text{const}$ (şi avînd $\frac{I_1}{I_2} \simeq 10$; $\frac{I_1}{I_3} \simeq 10$; $\frac{I_1}{A} \simeq 1\ \text{m}^2$; $\frac{E}{G} = 2{,}6$), din valoarea δ_{11} circa 92 ... 96% provine din influenţa momentului încovoietor, circa 5...3% din influenţa forţei tăietoare şi circa 3...1% din influenţa forţei axiale.

În mod similar, cu relaţia (10), coordonatele x_s, y_s, α_s ale centrului elastic spaţial, C_s, rezultă din aceeaşi condiţie (8), unde $i, j = 4, 5, 6$, adică din

$$\delta_{45} = \int_0^s -\cos(\varphi - \alpha_s)\sin(\varphi - \alpha_s)\,\frac{ds}{EI_2} + \int_0^s \sin(\varphi - \alpha_s)\cos(\varphi - \alpha_s)\,\frac{ds}{GI_3} = 0, \tag{20}$$

$$\delta_{46} = \int_0^s [-(x_s - x)\cos\varphi - (y_s - y)\sin\varphi][-\cos(\varphi - \alpha_s)]\,\frac{ds}{EI_2} + \int_0^s [(x_s - x)\sin\varphi - (y_s - y)\cos\varphi][\sin(\varphi - \alpha_s)]\,\frac{ds}{GI_3} = 0, \tag{21}$$

$$\delta_{56} = \int_0^s [-(x_s - x)\cos\varphi - (y_s - y)\sin\varphi][\sin(\varphi - \alpha_s)]\frac{ds}{EI_2} +$$

$$+ \int_0^s [(x_s - x)\sin\varphi - (y_s - y)\cos\varphi][\cos(\varphi - \alpha_s)]\frac{ds}{GI_3} = 0. \quad (22)$$

Din (20) se obține

$$\operatorname{tg}\alpha_{s\,(1,2)} = -A \pm \sqrt{A^2 + 4B^2}/2B, \quad (23)$$

unde $A = \int\left(2\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right)\left(\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{GI_3}\right)dx,$

$$B = -\int \sin\varphi\left(\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{GI_3}\right)dx$$

și unde $\alpha^0_{s1} + 90° = \alpha^0_{s2}$.

Considerînd $\overline{X}_4 = 1$ aplicat în centrul C_s și dirijat după o axă paralelă cu y, se obține

$$\delta_{45} = \int_0^s -\cos\varphi\sin(\varphi - \alpha_s)\frac{ds}{EI_2} + \int_0^s \sin\varphi\cos(\varphi - \alpha_s)\frac{ds}{GI_3} = 0, \quad (24)$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha_s = \frac{\int_0^l \sin\varphi\left(\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{GI_3}\right)dx}{\int_0^l \cos\varphi\left(\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{GI_3}\right)dx + \int_0^l \frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{GI_3}dx}. \quad (25)$$

Din (21) și (22) rezultă celelalte două coordonate ale centrului elastic C_s, (x_s și y_s).

Aceste expresii (20, 21, 22) sînt valabile pentru orice sistem plan de bare, cu un singur contur, încărcat spațial.

2.2. Deoarece centrul elastic este o caracteristică elastică-geometrică a structurii, un invariant, rezultă că coordonatele lui se pot determina și pe o altă structură izostatică decît cea din figura 1. Astfel, pentru arcul de cerc simetric, structura izostatică formată din două console simetrice permite obținerea rezultatelor cu mai multă ușurință (fig. 3).

Pentru arcul de cerc și pentru secțiunea avînd $I = \text{const.}$, se vor obține relațiile:

— pentru centrul plan, C_p, al forțelor de legătură X_j ($j = 1, 2, 3$):

$$x_p = r\sin\alpha,$$

$$y_p = r(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)/\alpha = c_1 \cdot r,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_p = 0; \quad (26)$$

— pentru centrul elastic al forţelor de legătură spaţiale $X_j (j = 4, 5, 6)$, din motive de simetrie, rezultă:

$$\delta_{46} = 0 \text{ deci şi } x_s = r \sin \alpha, \tag{27}$$

$$\delta_{45} = 0 \text{ şi deci } \operatorname{tg} \alpha_s = 0, \tag{28}$$

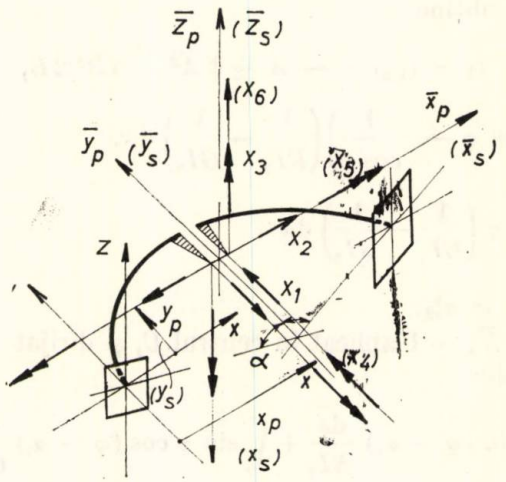


Fig. 3

iar din relaţia

$$\delta_{56} = \int_0^s (r \cos \alpha + y_s) \sin^2 \varphi \frac{ds}{EI_2} +$$

$$+ \int_0^s [r - (r \cos \alpha + y_s) \cos \varphi] (-\cos \varphi) \frac{ds}{GI_3} = 0 \tag{29}$$

rezultă

$$y_s = r \frac{\cos \alpha \left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha\right) \frac{1}{EI_2} + \left[\sin \alpha - \cos \alpha \left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha\right)\right] \frac{1}{GI_3}}{-\left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha\right) \frac{1}{EI_2} + \left(\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha\right) \frac{1}{GI_3}} =$$

$$= r \frac{c_2/EI_2 + c_3/GI_3}{-c_4/EI_2 + c_5/GI_3}. \tag{30}$$

În diagrama din figura 4 sînt reprezentaţi coeficienţii $c_1 \ldots c_5$ şi funcţia $\sin \alpha$.

În cazul $EI_2 = GI_3$, expresia (30) trece în (26b), adică $y_s = y_p$.

3. Sistemul de ecuații (4) corespunzător metodei deplasărilor poate fi scris sub forma

$$\begin{bmatrix} x_{uu} & \vdots & x_{ul} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{lu} & \vdots & x_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \cdots \\ \Delta_l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{u,0} \\ \cdots \\ X_{l,0} \end{Bmatrix} = 0, \tag{4'}$$

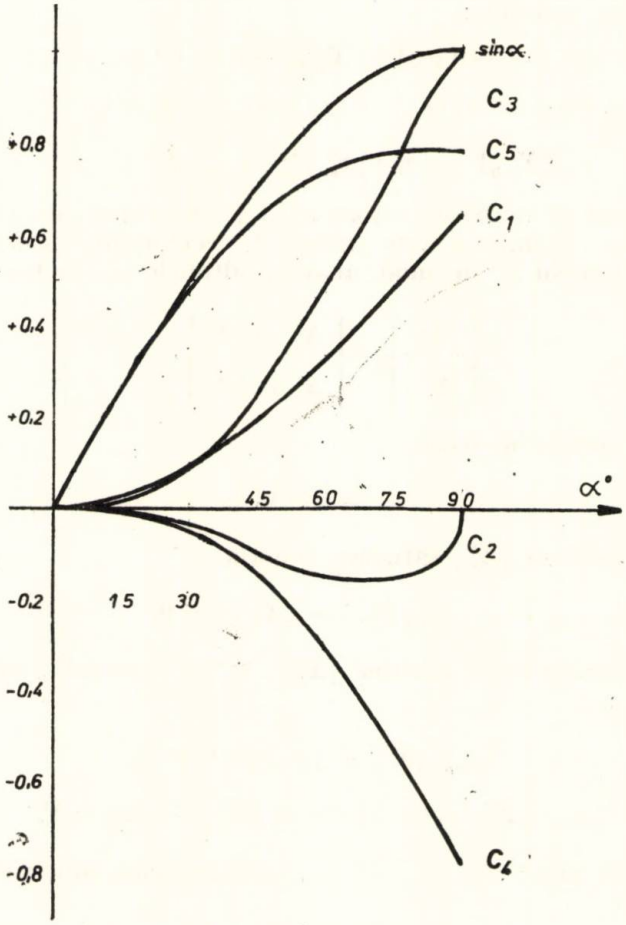


Fig. 4

unde

$[x_{ul}]$ este submatricea momentelor din acțiunile deplasărilor liniare unitare ale nodurilor;

$[x_{uu}]$ — submatricea momentelor din acțiunile deplasărilor unghiulare unitare ale nodurilor

și unde

$$d = d_u + d_l, \tag{6'}$$

indicii u și l arătînd că deplasarea este unghiulară sau liniară.

Știind că din condițiile fizice ale problemei un astfel de sistem matematic este unic determinat, presupunînd că ordinea de notare a necunoscutelor și de scriere a sistemului este aceea care permite ca matricele $[x_{uu}]$, $[x_{tt}]$ și

$$([x_{tt}] - [x_{tu}]\,[x_{uu}]^{-1}\,[x_{ut}]) \tag{31}$$

să fie nesingulare, se poate trece la rezolvarea prin împărțire în submatrice.

Se obțin soluțiile:

$$\{\Delta_u\} = -\,[x_{uu}]^{-1}\,\{X_{u.0}\} - [x_{uu}]^{-1}\,[x_{ut}]\,\{\Delta_t\}, \tag{32}$$

$$\{\Delta_t\} = -\,([x_{tt}] - [x_{tu}]\,[x_{uu}]^{-1}\,[x_{ut}])^{-1} \times$$

$$\times\,(\{X_{t.0}\} - [x_{tu}]\,[x_{uu}]^{-1}\,\{X_{u.0}\}). \tag{33}$$

Observînd că matricea coloană $\{\Delta_u\}$ este sumă de două matrice coloană, aceasta permite a scrie primele d_u necunoscute desfăcute în sume de cîte doi termeni și, în mod analog, ultimele d_t necunoscute. Deci:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta_u\\ \cdots\\ \Delta_t\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\Delta_u^{\mathrm{I}} + \Delta_u^{\mathrm{II}}\\ \cdots\cdots\\ \Delta_t^{\mathrm{I}} + \Delta_t^{\mathrm{II}}\end{array}\right\}, \tag{34}$$

în care, din condițiile fizice,

$$\{\Delta_t^{\mathrm{I}}\} = 0. \tag{35}$$

Dacă matricea $\{\Delta_u^{\mathrm{I}}\}$ satisface ecuația

$$[x_{uu}]\,\{\Delta_u^{\mathrm{I}}\} + \{X_{u.0}\} = 0, \tag{36}$$

rămîne ca celelalte două matrice $\{\Delta_u^{\mathrm{II}}\}$ și $\{\Delta_t^{\mathrm{II}}\}$ să satisfacă următoarele două ecuații:

$$[x_{uu}]\,\{\Delta_u^{\mathrm{II}}\} + [x_{ut}]\,\{\Delta_t^{\mathrm{II}}\} = 0, \tag{37}$$

$$[x_{tu}]\,\{\Delta_u^{\mathrm{II}}\} + [x_{tt}]\,\{\Delta_t^{\mathrm{II}}\} = \{X_{t.0}\} - [x_{tu}]\,\{\Delta_u^{\mathrm{I}}\}. \tag{38}$$

Știind că matricele $[x_{uu}]$ și $[x_{tt}]$ sînt matrice simetrice, rezultă că

$$[x_{ut}] = [x_{tu}]_t \tag{39}$$

și, pentru că sînt de tip Iacobi, soluționarea ecuației (4) poate lua forme variate. Astfel, deoarece asupra elementelor de la nivelul unei linii din matrice $[x_{uu}]$ (ca și din matricea $([x_{tt}] - [x_{tu}]\,[x_{uu}]^{-1}\,[x_{ut}])$), se poate scrie

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_{ji}| < |x_{jj}|, \tag{40}$$

soluționarea ecuației se poate face prin aproximații succesive.

4. În concluzie, la rezolvarea structurilor spațiale nedeterminate prin oricare metodă, datorită numărului mare de necunoscute este necesară utilizarea mașinilor specializate de calcul. Pentru reducerea volumului de lucru, în metoda forțelor se va utiliza sistemul $(S^0 - P_r, X_j)$ pe baza centrelor elastice C_p și C_s, ale căror coordonate au fost determinate. În metoda deplasărilor prin forma și componența particulară a matricei rigidității, reducerea volumului de calcul se poate face soluționînd ecuația prin aproximații succesive și în forme variate. Astfel, se va putea lucra cu necunoscutele Δ_j sau cu forțele generalizate ce le corespund, iterînd valorile lor integrale sau corecțiile aduse lor, pe baza a doua sau a unei singure scheme de calcul.

Primită la redacție la 14 iunie 1968.

BIBLIOGRAFIE

1. I. P. Procofiev, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, O.P.E.D., 1951.
2. Darkov-Kuznețov, *Statika soorujenii*, Moscova, GTYJ, 1951.
3. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București. Edit. tehnică. 1959.
4. Al. Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1965.
5. K. Hirschfeld, *Baustatik*, Berlin—New York, Springer-Verlag, 1965.

VIBRAȚIILE TRANSVERSALE FORȚATE ALE GRINZILOR FINITE, REZEMATE PE FUNDAȚIE DEFORMABILĂ AMORTIZANTĂ

de MIRCEA RADEȘ
Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

Se prezintă o metodă de calcul al răspunsului staționar al grinzilor finite, rezemate pe un mediu deformabil disipant, solicitate de forțe transversale sau de momente concentrate.
Mediul de rezemare este schematizat printr-un model de fundație deformabilă Winkler, definit de un „modul complex al fundației"; care permite considerarea unui factor de amortizare independent de frecvență.
Se compară curbele răspunsului grinzii elastice și al grinzii considerate rigidă, arătînd utilitatea aplicării metodei la frecvențe ridicate.

1. INTRODUCERE

Încovoierea statică a grinzilor rezemate pe fundație elastică este o problemă clasică (vezi articolele de sinteză [1]—[3]). Abordarea acesteia s-a făcut, în general, prin includerea reacțiunii fundației în ecuația diferențială coerspunzătoare a grinzii. Deoarece interesează răspunsul fundației la suprafața de contact cu grinda și nu tensiunile sau deformațiile în interiorul mediului de rezemare, problema a fost redusă la găsirea unei expresii matematice simple, care să descrie cu precizie cît mai mare răspunsul la solicitare al suprafeței fundației.

Pentru a descrie cît mai bine comportarea reală a mediilor de rezemare, Freudenthal și Lorsch [4], Kerr [1] și alți autori [5]—[9] au introdus modele de fundații viscoelastice liniare în calculul cvasistatic al grinzilor și plăcilor așezate pe medii deformabile în timp; de asemenea, s-au dezvoltat modele de fundații elastoplastice [2].

În ceea ce privește dinamica grinzilor rezemate pe o fundație deformabilă, interesează trei categorii de probleme: răspunsul la o sarcină mobilă, răspunsul tranzitoriu la o sarcină dependentă de timp și răspunsul staționar la o sarcină sinusoidală. Mai mulți cercetători [10]—[13] au folosit ipoteza lui Winkler la studiul răspunsului dinamic al grinzii rezemate pe teren elastic și solicitate de o sarcină mobilă, iar Noppmann

ST. CERC. MEC. APL., TOM, 28, NR. 3, P. 677—696 BUCUREȘTI, 1969

[14] a folosit-o la studiul şocului transversal asupra grinzilor rezemate elastic. Kenney [15], Achenbach şi Sun [16] au studiat răspunsul la sarcină mobilă al grinzilor pe fundaţie cu amortizare vîscoasă liniară, corespunzătoare unui model Kelvin-Voigt, apoi Achenbach şi Sun [17] au introdus în fundaţia Winkler elemente corespunzătoare modelului de corp standard liniar.

Lucrarea de faţă se referă la a treia categorie de probleme, mai puţin abordată în literatură. Se studiază vibraţiile transversale forţate, în regim staţionar (răspunsul la frecvenţă), ale grinzilor finite, rezemate pe o fundaţie deformabilă amortizantă, introducînd un „modul complex al fundaţiei" (coeficient de tasare complex) care include atît proprietăţile elastice (partea reală), cît şi pe cele disipative (partea imaginară) ale fundaţiei, fără vreo referire la un anumit model reologic. Se pot considera astfel proprietăţi disipative independente de frecvenţă (aşa-numita „amortizare de tip solid"), constatate experimental la multe materiale de fundaţie.

Problema este privită din punctul de vedere al aprecierii eficacităţii unui izolator de vibraţii, realizat ca strat amortizant continuu şi aproximat printr-o fundaţie deformabilă amortizantă, aşezat sub o structură a cărei elasticitate nu poate fi neglijată. Se dă o metodă efectivă de calcul al răspunsului la frecvenţă al unei grinzi rezemate pe o astfel de fundaţie continuă (sistem cu parametri distribuiţi). Din comparaţia curbei de răspuns cu cea ridicată pentru sistemul considerat cu parametri concentraţi şi cu un singur grad de libertate (grinda rigidă) se stabileşte utilitatea şi limitele de aplicabilitate ale metodei.

2. MODULUL COMPLEX AL FUNDAŢIEI

Cea mai simplă reprezentare a unei fundaţii elastice continue a fost dată de Winkler (1867), care a presupus că, în fiecare punct, presiunea de răspuns p a fundaţiei este proporţională cu tasarea v:

$$p = k \cdot v, \tag{1}$$

k fiind *modulul fundaţiei* sau *coeficientul de tasare*. Modelul de fundaţie corespunzător constă dintr-o serie de arcuri verticale, paralele şi independente, avînd aceeaşi constantă elastică k (vezi tabela 1, rîndul 1).

În cazul fundaţiilor viscoelastice liniare, relaţia (1) devine:

$$\left(\sum_{i=0}^{m} A_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) p = \left(\sum_{i=0}^{n} B_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) v, \tag{2}$$

adică o relaţie diferenţială liniară, conţinînd şi derivatele în raport cu timpul ale presiunii fundaţiei p şi ale tasării v (A_i, B_i sînt coeficienţi constanţi, funcţie de material). Modelul mecanic corespunzător constă dintr-o serie de elemente viscoelastice (arcuri şi amortizoare legate în serie şi paralel) paralele şi independente (vezi tabela 1)

În regim armonic

$$p = p_0 e^{j\omega t}, \tag{3}$$

unde $j = \sqrt{-1}$, ω — pulsația solicitării, t — timpul. La fel

$$v = v_0 e^{j(\omega t - \varphi)}, \tag{4}$$

adică tasarea este defazată cu un unghi φ în urma presiunii.

Înlocuind (3) și (4) în (2) deoarece $\frac{\partial^i}{\partial t^i} = (j\omega)^i$, rezultă o ecuație algebrică

$$\left[\sum_{i=0}^{m} A_i (j\omega)^i\right] p = \left[\sum_{i=0}^{n} B_i (j\omega)^i\right] v \tag{5}$$

sau

$$p = k^* v, \tag{6}$$

în care

$$k^* = \frac{B_0 + j\omega B_1 + \ldots + (j\omega)^n B_n}{A_0 + j\omega A_1 + \ldots + (j\omega)^m A_m} = \frac{b_1(\omega) + jb_2(\omega)}{a_1(\omega) + ja_2(\omega)} = k_1(\omega) + jk_2(\omega) \tag{7}$$

poate fi numit *modulul complex al fundației* sau *coeficient de tasare complex*. Expresiile acestei mărimi — pentru cîteva modele de fundații viscoelastice liniare Winkler — sînt date în tabela 1.

La fel ca și constantele „elastice" complexe [18] și ca „modulele de elasticitate" complexe [19], modulul complex al fundației (7) se poate scrie sub forma

$$k^* = k(1 + j\delta). \tag{8}$$

Partea reală k se poate numi *coeficient de tasare dinamic* sau *modulul dinamic al fundației*, fiind un coeficient de proporționalitate între presiunea exercitată asupra fundației și componenta tasării în fază cu aceasta $\left(\text{măsurate în momentul cînd tasarea dinamică este nulă, } k = \frac{p_0 \cos\varphi}{v_0}\right)$; el caracterizează proprietățile de elasticitate ale fundației, capacitatea acesteia de a înmagazina energie. Raportul $\delta = \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2}{k_1}$, între partea imaginară și cea reală a modulului complex al fundației, se numește *factor de amortizare al fundației* și caracterizează proprietățile disipative ale acesteia.

Eliminînd timpul între (3) și (4), relația obținută este ecuația unei elipse, care denotă existența *histerezisului dinamic* al materialelor viscoelastice liniare. La acestea, k și δ sînt în general funcții de frecvență și temperatură. Cunoscînd aceste dependențe, $k = k(\omega, T)$ și $\delta = \delta(\omega, T)$, calculele se fac folosind, pentru fiecare valoare a pulsației excitatoare, valorile k și δ corespunzătoare, deci constante, fără a face nici o presupunere „apriori" asupra unui anumit model reologic. Mai mult, experiențele au arătat că, într-un domeniu foarte larg de frecvențe și pentru multe materiale de fundație, k și δ sînt consante, existînd deci o „amortizare de tip solid" [20]. Introducerea modulului complex al fundației (8) permite astfel considerarea în calcule a unor proprietăți disipative indepen-

dente de frecvenţa solicitării, în timp ce, pînă în prezent, lucrările în acest domeniu au tratat cu precădere cazul amortizării vîscoase liniare (proporţională cu frecvenţa).

Modul de exprimare (8) poate fi extins şi altor materiale şi terenuri de fundaţie, pentru valori reduse ale tasării. Aşa cum este definit, coeficientul de tasare complex descrie comportarea fundaţiei numai în regim staţionar, fiind deci util numai în calcule de vibraţii forţate, cu excitaţie armonică (răspunsul staţionar). În plus, la frecvenţe $\omega \to 0$ trebuie ca $\delta \to 0$ [18].

3. VIBRAŢIILE TRANSVERSALE FORŢATE ALE GRINZII REZEMATE PE FUNDAŢIE DEFORMABILĂ

3.1. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie o grindă de secţiune constantă şi lungime finită, rezemată pe toată lungimea pe o fundaţie deformabilă. Ne propunem să studiem vibraţiile forţate în regim staţionar ale grinzii, sub acţiunea unor forţe sau momente concentrate, avînd o lege de variaţie în timp armonică (vezi tabela 2), în următoarele ipoteze:

a) Grinda corespunde teoriei Bernoulli-Euler [se neglijează inerţia la rotaţie şi efectul forţei tăietoare; se consideră lungimea grinzii mare în comparaţie cu dimensiunile secţiunii transversale, iar săgeţile suficient de mici, astfel ca $\frac{dv}{dx} \ll 1$ şi ca relaţia (6) să fie aplicabilă]. În plus se ţine seama de amortizarea internă din materialul grinzii, considerînd un modul complex [19]:

$$E^* = E(1 + j\eta), \tag{9}$$

unde E este modulul de elasticitate dinamic al materialului grinzii, iar η-factorul de amortizare corespunzător.

b) Fundaţia este de tip Winkler, însă definită prin modulul complex (8). Modelul ales are două dezavantaje esenţiale: 1. nu transmite sarcina (arcurile fiind independente, tasarea suprafeţei nu se produce şi în afara punctelor de aplicare directă a sarcinii); 2. nu consideră masa fundaţiei, care în probleme dinamice poate avea o influenţă considerabilă.

Se va considera deci fundaţia continuă, dar finită (adică avînd aceeaşi suprafaţă în plan ca şi grinda) şi straturi izolante suficient de subţiri, astfel încît, la valorile mici ale greutăţii specifice a materialelor plastice, masa fundaţiei să poată fi neglijată.

c) În ceea ce priveşte condiţiile de contact între grindă şi fundaţie, 1. se va considera o legătură bilaterală; aceasta exclude posibilitatea ridicării grinzii de pe fundaţie şi existenţa unui spaţiu iniţial între acestea. Deplasările verticale ale grinzii şi ale suprafeţei fundaţiei sînt aceleaşi pe tot domeniul de contact. Această ipoteză corespunde chiar unei legături unilaterale, în care presiunea statică (în repaus) este suficient de mare ca, la materiale gvînd k de valori medii, săgeata statică să fie considerabil mai mare decît cea pur dinamică; 2. se vor neglija deplasările orizontale (lunecările) în zona de contact şi amortizarea structurală legată de acestea.

3.2. ECUAȚIA DE MIȘCARE ȘI SOLUȚIA GENERALĂ

Abordarea problemei se va face în maniera folosită în cazul fundațiilor elastice, și anume prin includerea reacțiunii fundației în ecuația diferențială corespunzătoare a grinzii. Pentru porțiunile de grindă unde nu sînt aplicate sarcini, ecuația de mișcare se scrie sub forma

$$E^* I \frac{\partial y^4}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^* y = 0, \tag{10}$$

unde y este săgeata grinzii, în secțiunea de abscisă x;

I — momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii;

m — masa pe unitatea de lungime a grinzii.

Cu notațiile (8) și (9), ecuația (10) se scrie

$$EI(1 + \mathrm{j}\eta) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k(1 + \mathrm{j}\delta) y = 0. \tag{10a}$$

În general $\delta > \eta$. Dacă $\delta = \eta = 0$, ecuația (10a) se reduce la cea care corespunde cazului elastic [21]. Pentru $k = 0$, ecuația (10) descrie vibrațiile grinzii cu amortizare internă [19]. Dacă E^* și k^* sînt independente de x, soluția ecuației (10) are aceeași formă cu soluția problemei elastice. Aceasta permite o rezolvare *formală* identică, folosind calculul în mărimi complexe, ceea ce simplifică apreciabil rezolvarea. De altfel, se știe că soluția formală a problemelor viscoelastice se obține folosind principiul de corespondență Alfrey-Lee [22]. Pentru o excitație armonică staționară, soluția problemei viscoelastice se obține din cea a problemei elastice corespondente, prin simpla înlocuire a modulelor sau constantelor de elasticitate prin module complexe, care sînt, în general, funcții de frecvență [23].

Admițînd o soluție staționară, în care să apară legea de variație în timp a forței sau a momentului excitator, de forma

$$y(x, t) = v(x) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{11}$$

în care $v(x)$ este o amplitudine complexă, ecuația (10) devine

$$E^* I \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} - (m\omega^2 - k^*) v = 0. \tag{12}$$

Dacă se notează

$$\mu^4 = \frac{m\omega^2 - k^*}{E^* I}, \tag{13}$$

soluția generală a ecuației (12) are forma

$$v(x) = A U_1(\mu x) + B U_2(\mu x) + C U_3(\mu x) + D U_4(\mu x), \tag{14}$$

în care $U_1, \ldots, U_4$ sînt funcțiile lui Rayleigh [24], însă de argument complex :

$$U_1(\zeta) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\zeta + \cos\zeta); \qquad U_3(\zeta) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\zeta - \cos\zeta),$$
$$U_2(\zeta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\zeta + \sin\zeta); \qquad U_4(\zeta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\zeta - \sin\zeta), \tag{15}$$

iar A, B, C, D — constante de integrare, funcție de condițiile particulare de încărcare și de rezemare ale grinzii.

Dacă se notează

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$
$$n = \frac{\omega}{\omega_0}, \tag{16}$$

relația (13) se poate scrie

$$\mu^4 = \frac{k}{EI}\,\frac{(n^2 - 1) - j\delta}{1 + j\eta}. \tag{17}$$

În continuare, se va trata cazul mai frecvent întîlnit — al grinzii cu capete libere, solicitată printr-o forță sau un moment concentrat, cu variație armonică în timp.

3.3. GRINDA CU CAPETE LIBERE, SOLICITATĂ DE O FORȚĂ ARMONICĂ

Se consideră grinda din figura 1, solicitată de forța $F = F_0 e^{j\omega t}$ în secțiunea O. Alegînd pentru fiecare interval un sistem de axe ca în figură

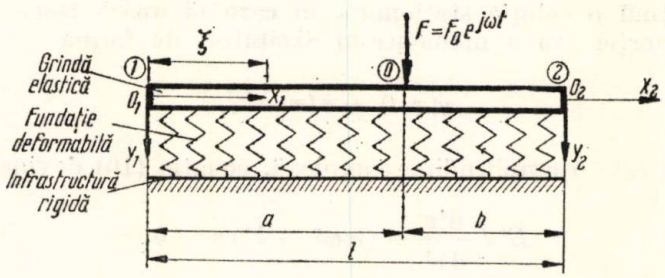


Fig. 1

și notînd cu indicii 1 și 2 mărimile de pe intervalul $\overline{10}$, respectiv $\overline{02}$, expresia săgeții într-o secțiune oarecare este dată de relațiile

$$(\overline{10}) \quad v_1(x_1) = A_1 U_1(\mu x_1) + B_1 U_2(\mu x_1) + C_1 U_3(\mu x_1) + D_1 U_4(\mu x_1), \tag{18}$$
$$(\overline{02}) \quad v_2(x_2) = A_2 U_1(\mu x_2) + B_2 U_2(\mu x_2) + C_2 U_3(\mu x_2) + D_2 U_4(\mu x_2), \tag{19}$$

în care constantele $A_1, \ldots, D_1, A_2, \ldots, D_2$ se determină din condițiile la limită în punctele 1 și 2 din condițiile de continuitate în O.

La extremitățile grinzii, momentul încovoietor și forța tăietoare sînt nule, de unde rezultă $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = 0$, și (18), (19) devin

$$v_1(x_1) = A_1 U_1(\mu x_1) + B_1 U_2(\mu x_1), \tag{18a}$$

$$v_2(x_2) = A_2 U_1(\mu x_2) + B_2 U_2(\mu x_2). \tag{19a}$$

Condițiile de continuitate în punctul de aplicație a forței F se scriu

$$\begin{gathered}(v_1)_{x_1=a} = (v_2)_{x_2=-b}\,; \quad (v_1')_{x_1=a} = (v_2')_{x_2=-b}\,; \\ (v_1'')_{x_1=a} = (v_2'')_{x_2=-b}\,; \quad -E^* I (v_1''')_{x_1=a} - F_0 = -E^* I (v_2''')_{x_2=-b}\end{gathered} \tag{20}$$

sau, înlocuind (18a) și (19a),

$$\begin{aligned}A_1 U_1(\mu a) + B_1 U_2(\mu a) &= A_2 U_1(\mu b) - B_2 U_2(\mu b), \\ A_1 U_4(\mu a) + B_1 U_1(\mu a) &= -A_2 U_4(\mu b) + B_2 U_1(\mu b), \\ A_1 U_3(\mu a) + B_1 U_4(\mu a) &= A_2 U_3(\mu b) - B_2 U_4(\mu b), \\ A_1 U_2(\mu a) + B_1 U_3(\mu a) &= -A_2 U_2(\mu b) + B_2 U_3(\mu b) - \frac{F_0}{E^* I \mu^3}.\end{aligned} \tag{21}$$

Pentru a determina săgeta în dreptul punctului de aplicație a forței se atașează condițiilor (21) relația

$$v_0 = A_1 U_1(\mu a) + B_1 U_2(\mu a). \tag{22}$$

Condiția de compatibilitate a sistemului format de relațiile (21) și (22) — soluția nebanală — conduce la anularea determinantului

$$\begin{vmatrix} U_1(\mu a) & U_2(\mu a) & -U_1(\mu b) & U_2(\mu b) & 0 \\ U_4(\mu a) & U_1(\mu a) & U_4(\mu b) & -U_1(\mu b) & 0 \\ U_3(\mu a) & U_4(\mu a) & -U_3(\mu b) & U_4(\mu b) & 0 \\ U_2(\mu a) & U_3(\mu a) & U_2(\mu b) & -U_3(\mu b) & -\dfrac{F_0}{E^* I \mu^3} \\ U_1(\mu a) & U_2(\mu a) & 0 & 0 & v_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Rezultă

$$v_0 = \frac{F_0}{kl} \cdot \frac{\mu a + \mu b}{1 - n^2 + j\delta} \times$$

$$\times \frac{V_4(\mu b)[1 + V_1(\mu a)] + V_4(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]}{2V_3(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2[V_4(\mu b)\,V_2(\mu a) + V_4(\mu a)\,V_2(\mu b)] + \frac{1}{2}[1 - V_1(\mu a)\,V_1(\mu b)]}, \tag{24}$$

în care $V_1, \ldots, V_4$ sînt funcţiile Krîlov [25]:

$$V_1(\zeta) = \operatorname{ch}\zeta\cos\zeta; \qquad V_3(\zeta) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\zeta\sin\zeta,$$

$$V_2(\zeta) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\zeta\sin\zeta + \operatorname{sh}\zeta\cos\zeta), \tag{25}$$

$$V_4(\zeta) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\zeta\sin\zeta - \operatorname{sh}\zeta\cos\zeta).$$

În acelaşi mod se poate obţine expresia săgeţii într-o secţiune oarecare (fig. 1). Pentru calculul săgeţilor de pe intervalul $\overline{10}$ $(0 < \xi < a)$, se ataşează relaţiilor (21) expresia (18a), în care $x_1 = \xi$, şi din condiţia de compatibilitate a sistemului astfel format rezultă

$$v = v_0 \frac{\Phi_1 U_1(\mu x_1) - \Phi_2 U_2(\mu x_2)}{V_4(\mu b)\,[1 + V_1(\mu a)] + V_4(\mu a)\,[1 + V_1(\mu b)]}, \tag{26}$$

în care v_0 este dat de (24), iar

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= U_2(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2U_1(\mu a)\,V_4(\mu b) - \frac{1}{2}U_4(\mu a)\,[1 + V_1(\mu b)],\\ \Phi_2 &= U_1(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2U_4(\mu a)\,V_4(\mu b) - \frac{1}{2}U_3(\mu a)\,[1 + V_1(\mu b)].\end{aligned} \tag{27}$$

La calculul săgeţilor de pe intervalul $\overline{02}$ $(a < \xi < b)$, se ataşează la (21) relaţia (19a), în care $x_2 = l - \xi$, şi se conduce calculul la fel.

În tabela 2 sînt date relaţiile pentru calculul săgeţii şi al plantei fibrei medii deformate, în cazul grinzii cu capete libere, solicitată printr-o forţă sau un moment încovoietor, avînd o variaţie armonică.

Dacă $\delta = \eta = 0$, μ este o mărime reală, $E^* = E$ şi relaţiile stabilite sînt soluţii ale problemei vibraţiilor grinzii elastice, pe mediu elastic.

Considerînd amortizarea $(\delta \neq \eta \neq 0)$, μ este o mărime complexă. Relaţia (17) se poate scrie

$$\mu = \alpha - \mathrm{j}\beta, \tag{28}$$

în care

$$\alpha = \frac{k}{EI}\,\frac{(n^2 - 1) - \delta\eta}{1 + \eta^2}, \tag{29}$$

$$\beta = \frac{k}{EI}\,\frac{(n^2 - 1)\,\eta + \delta}{1 + \eta^2} \tag{30}$$

şi atunci se poate nota

$$\mu = r + \mathrm{j}s, \tag{31}$$

în care

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \alpha)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \alpha)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

și

$$\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Înlocuind μ conform (31) în (22) și exprimînd funcțiile V_i de argument complex prin formulele de dezvoltare în parte reală și parte imaginară

$$\begin{aligned}
V_1(\bar{r}+j\bar{s}) &= V_1(\bar{r})\,V_1(\bar{s}) + 4V_3(\bar{r})\,V_3(\bar{s}) + j[2V_2(\bar{r})\,V_4(\bar{s}) - 2V_2(\bar{s})\,V_4(\bar{r})],\\
V_2(\bar{r}+j\bar{s}) &= V_2(\bar{r})\,V_1(\bar{s}) + 4V_4(\bar{r})\,V_3(\bar{s}) + j[4V_3(\bar{r})\,V_4(\bar{s}) + V_1(\bar{r})\,V_2(\bar{s})],\\
V_3(\bar{r}+j\bar{s}) &= V_3(\bar{r})\,V_1(\bar{s}) - V_1(\bar{r})\,V_3(\bar{s}) + j\,[V_2(\bar{r})\,V_2(\bar{s}) + 4V_4(\bar{r})\,V_4(\bar{s})],\\
V_4(\bar{r}+j\bar{s}) &= V_4(\bar{r})\,V_1(\bar{s}) - V_2(\bar{r})\,V_3(\bar{s}) + j\,[V_3(\bar{r})\,V_2(\bar{s}) - V_1(\bar{r})\,V_4(\bar{s})],
\end{aligned} \tag{34}$$

se ajunge la o expresie de forma

$$v_0 = \varkappa \frac{\mathfrak{M} + j\mathfrak{N}}{\mathcal{P} + j\mathcal{R}}, \tag{35}$$

în care $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ sînt mărimi reale, iar

$$\varkappa = \frac{F_0}{kl}. \tag{36}$$

Din relația (35) rezultă

$$\left|\frac{v_0}{\varkappa}\right| = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{\mathcal{P}^2 + \mathcal{R}^2}}, \tag{37}$$

formulă cu ajutorul căreia se poate calcula v_0 pentru orice valoare a pulsației excitatoare. Analog, folosind relațiile din tabela 2, se pot calcula deformațiile în orice secțiune a grinzilor solicitate prin forțe sau momente concentrate. Metoda se poate extinde la calculul momentelor încovoietoare și al forțelor tăietoare și apoi al eforturilor unitare dinamice. În cele ce urmează, metodica prezentată se va aplica unui caz particular de încărcare.

3.4. GRINDA SOLICITATĂ DE O FORȚĂ $F = F_0 e^{j\omega t}$ APLICATĂ LA MIJLOCUL DESCHIDERII

Cînd forța F este aplicată la mijlocul deschiderii grinzii, înlocuind $a = b$ în (24), se obține

$$v_0 = \varkappa \frac{\bar{\mu}[1 + V_1(\bar{\mu})]}{(1 - n^2 + j\delta)\,2V_2(\bar{\mu})}, \tag{38}$$

unde $\bar{\mu} = \mu a$ și $\varkappa = \dfrac{F_0}{2ka}$.

Dacă $\delta = \eta = 0$, se obţine soluţia pentru fundaţie elastică. Atunci

$$\bar{\mu}^4 = \frac{ka^4}{EI}(n^2 - 1).$$

Pentru pulsaţii $\omega > \omega_0$, $n > 1$, $\mu^4 > 0$ şi v_0 se calculează cu (38), în care μ are valori reale.

La $\omega = \omega_0$, $n = 1$, $\mu^4 = 0$, se oţine pulsaţia de rezonanţă de corp rigid. Celelalte valori ale pulsaţiilor de rezonanţă se obţin prin anularea numitorului relaţiei (38). $V_2(\bar{\mu}) = 0$, adică $\operatorname{tg}\bar{\mu} + \operatorname{th}\bar{\mu} = 0$, ale cărei soluţii sînt : $\bar{\mu}_0 = 0$; $\bar{\mu}_1 = 2{,}365$; $\bar{\mu}_2 = 5{,}497$; $\bar{\mu}_i = (4i - 1)\frac{\pi}{4}$.

Pentru pulsaţii $\omega < \omega_0$, $n < 1$, $\mu^4 < 0$, se face substituţia $\mu^4 = -4\nu^4$, adică

$$\bar{\mu} = (1 + j)\bar{\nu}, \tag{39}$$

unde $\bar{\nu} = \nu a$, iar relaţia (38) devine

$$v_0 = \varkappa \frac{\bar{\nu}[1 + U_1(2\bar{\nu})]}{(1 - n^2 + j\delta)\, U_2(2\bar{\nu})}. \tag{40}$$

Într-o secţiune oarecare $x = \xi$ $(0 < \xi < a)$, expresia săgeţii este

$$v(x) = v_0 \frac{4V_4(\bar{\nu})\, V_2(\nu x) + V_1(\bar{\nu})\, V_1(\nu x)}{4V_4(\bar{\nu})\, V_2(\bar{\nu}) + V^2(\bar{\nu})}. \tag{41}$$

Dacă $\omega = 0$, $n = 0$, $\mu_0^4 = -\frac{k}{EI} = \alpha_0$, $\nu_0^4 = \frac{k}{4EI}$, $\bar{\nu}_0 = \sqrt[4]{\frac{ka^4}{4EI}}$, iar din relaţia (40) se poate calcula săgeata v_{st} la mijlocul deschiderii datorită forţei F_0 aplicată static (se consideră $\delta = 0$ la $n = 0$)

$$v_{st} = \varkappa \frac{\bar{\nu}_0[1 + U_1(2\bar{\nu}_0)]}{U_2(2\bar{\nu}_0)}. \tag{42}$$

Din (38) şi din (42) rezultă

$$\frac{v_0}{v_{st}} = \Omega \frac{\bar{\mu}[1 + V_1(\bar{\mu})]}{(1 - n^2 + j\delta)\, 2V_2(\bar{\mu})}, \tag{43}$$

unde

$$\Omega = \frac{U_2(2\bar{\nu}_0)}{\bar{\nu}_0[1 + U_1(2\bar{\nu}_0)]}. \tag{44}$$

Considerînd acum amortizarea $(\delta \neq \eta \neq 0)$ pe baza relaţiei (31)

$$\frac{v_0}{v_{st}} = \frac{\Omega}{1 - n^2 + j\delta} \frac{(\bar{r} + j\bar{s})[1 + V_1(\bar{r} + j\bar{s})]}{2V_2(\bar{r} + j\bar{s})}, \tag{45}$$

unde $\bar{r} = ra$ şi $\bar{s} = sa$.

Prin dezvoltarea funcțiilor V_i conform (34), prin desfacerea parantezelor și prin gruparea termenilor, relația (45) se aduce la forma

$$\frac{v_0}{v_{st}} = \frac{\Omega}{1 - n^2 + j\delta} \frac{M + jN}{P + jR}, \tag{46}$$

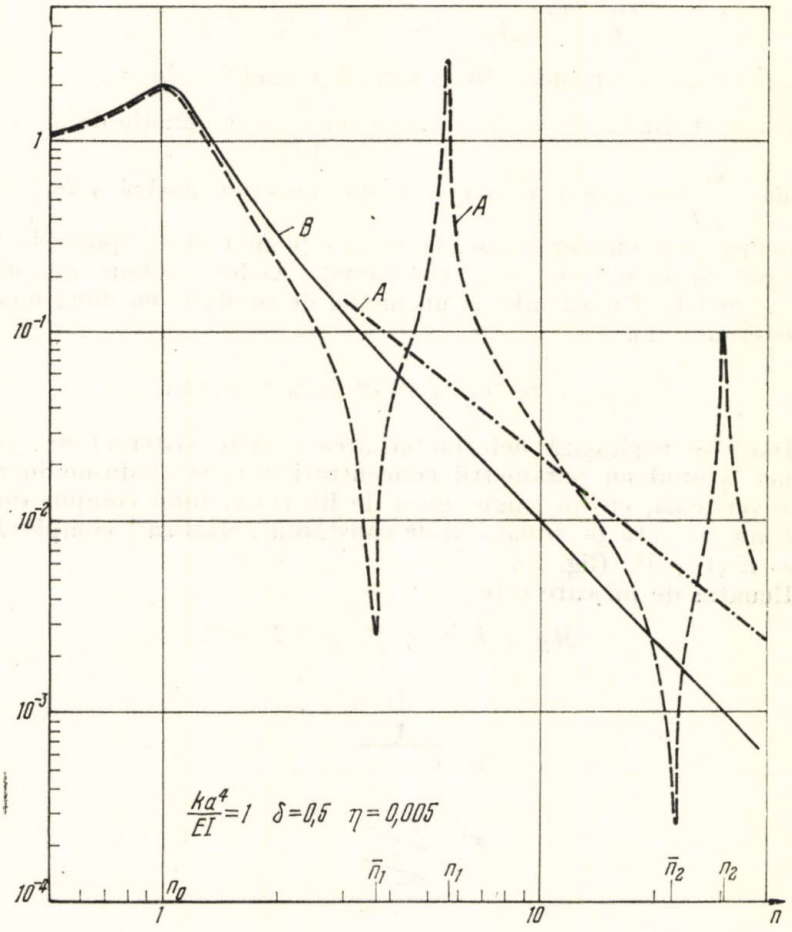


Fig. 2

în care

$$\begin{aligned} M &= \bar{r} W_1 - 2\,\bar{s}\, W_2, \\ N &= 2\,\bar{r}\, W_2 + \bar{s}\, W_1, \\ P &= 2\, V_2(\bar{r}) V_1(\bar{s}) + 8\, V_4(\bar{r})\, V_3(\bar{s}), \\ R &= 8\, V_3(\bar{r})\, V_4(\bar{s}) + 2\, V_1(\bar{r})\, V_2(\bar{s}), \end{aligned} \tag{47}$$

unde

$$W_1 = V_1(\bar{r})\, V_1(\bar{s}) + 4\, V_3(\bar{r})\, V_3(\bar{s}) + 1,$$
$$W_2 = V_2(\bar{r})\, V_4(\bar{s}) - V_4(\bar{r})\, V_2(\bar{s}). \tag{48}$$

Modul acestei mărimi este

$$\left|\frac{v_0}{v_{st}}\right| = \frac{\Omega}{\sqrt{(1-n^2)+\delta^2}} \sqrt{\frac{M^2+N^2}{P^2+R^2}} \tag{49}$$

şi reprezintă *factorul de amplificare* sau *răspunsul la mişcare.*

Curba A din figura 2 dă variaţia lui $\left|\frac{v_0}{v_{st}}\right|$ în funcţie de n, în cazul particular $\frac{ka^4}{EI} = 1$, $\delta = 0{,}5$, $\eta = 0{,}005$. Trasarea curbei a fost limitată la domeniul frecvenţelor joase; la frecvenţe mai mari, ipotezele în care se rezolvă problema nu mai corespund. Astfel, trebuie adoptate un model de grindă Timoshenko şi un model de fundaţie cu două module — tip Pasternak [1].

3.5. VIBRAŢIA DE CORP RIGID A GRINZII

Dacă se neglijează deformabilitatea grinzii, sistemul din figura 1 se reduce la unul cu parametrii concentraţi şi, interesîndu-ne doar vibraţiile pe verticală, cu un singur grad de libertate, fiind compus din masa $M = 2\,ma$, aşezată pe izolatorul de constantă „elastică" complexă $K^* = 2k^*a = K(1 + j\delta)$ (fig. 3).

Ecuaţia de mişcare este

$$M\ddot{y} + K(1 + j\delta)\, y = F_0\, e^{j\omega t}. \tag{50}$$

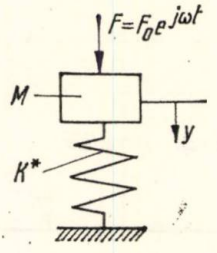


Fig. 3

Alegînd o soluţie staţionară $y = ve^{j\omega t}$ şi notînd $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $n = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\varkappa = \frac{F_0}{K} = \frac{F_0}{2\,ka} = v_{st}$, rezultă:

$$\frac{v}{v_{st}} = \frac{1}{1 - n^2 + j\delta}, \tag{51}$$

$$\left|\frac{v}{v_{st}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)^2 + \delta^2}}, \tag{52}$$

mărime reprezentată grafic în figura 2 prin curba B, pentru $\delta = 0{,}5$.

Dacă $\delta = 0$,

$$\left(\frac{v}{v_{st}}\right)_R = \frac{1}{1 - n^2}. \tag{53}$$

3.6. IMPEDANȚA MECANICĂ COMPLEXĂ

În punctul de aplicație a forței, impedanța mecanică este

$$Z_0 = \frac{\text{forță}}{\text{viteză}} = \frac{F_0\, e^{j\omega t}}{j\omega\, v_0\, e^{j\omega t}} = \frac{F_0}{j\,\omega\, v_0} = -\frac{E^* I\, \mu^3}{j\omega}\,\frac{4\, V_2(\bar{\mu})}{1 + V_1(\bar{\mu})}. \tag{54}$$

Pentru grinda rigidă, pe fundație elastică, impedanța mecanică este

$$Z_R = \left(j\ \omega\ m + \frac{k}{j\,\omega}\right) 2\, a = \frac{-m\omega^2 + k}{j\,\omega}\, 2\, a. \tag{55}$$

Pentru grinda deformabilă, pe fundație deforamabilă amortizantă, impedanța normată în punctul de aplicație a forței este

$$\frac{Z_0}{Z_R} = \left(1 + j\frac{\delta}{1 - n^2}\right)\frac{2\, V_2(\bar{\mu})}{\bar{\mu}\,[1 + V_1(\bar{\mu})]}, \tag{56}$$

care, conform relațiilor (45 — 48), se poate scrie

$$\frac{Z_0}{Z_R} = \left(1 + j\frac{\delta}{1 - n^2}\right)\frac{P + jR}{M + jN}. \tag{57}$$

Modulul acestei mărimi este

$$\left|\frac{Z_0}{Z_R}\right| = \frac{\sqrt{(1 - n^2) + \delta^2}}{1 - n^2}\sqrt{\frac{P^2 + R^2}{M^2 + N^2}}, \tag{58}$$

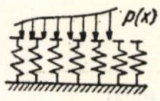
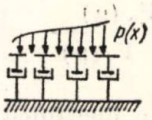
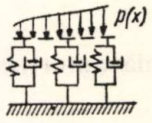
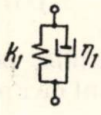
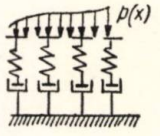
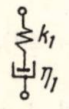
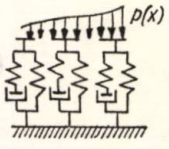
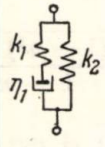
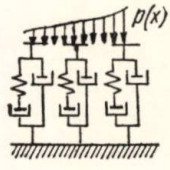
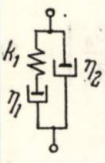
care, pe baza relațiilor (49) și (53), devine

$$\left|\frac{Z_0}{Z_R}\right| = \Omega\,\frac{\left(\frac{v}{v_{st}}\right)_R}{\left|\frac{v_0}{v_{st}}\right|}, \tag{59}$$

caracterizînd răspunsul dinamic al grinzii.

Tabela

Modele de fundații visco-

Modelul fundației continue	Autor	Modelul reologic corespunzător		Relația dintre
		Denumirea	Schema	generală
	Win-kler [10]	Hooke (elastic)		$p = k_1 V$
	[1]	Newton (viscos)		$p = \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} V$
	[4] [15] [16]	Kelvin--Voigt		$p = \left(k_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) V$
	[4]	Maxwell		$\left(1 + \frac{\eta_1}{k_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) p = \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} V$
	[4] [17]	Zener „standard liniar"		$\left(1 + \frac{\eta_1}{k_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) p = \left(k_2 + \eta_2 \frac{k_1 + k_2}{k_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) V$
		Cu trei elemente (viscos)		$\left(1 + \frac{\eta_1}{k_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) p = \left[\frac{\eta_1 \eta_2}{k_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\eta_1 + \eta_2) \frac{\partial}{\partial t}\right] v$

1

elastice liniare Winkler

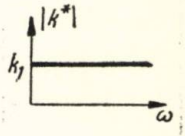
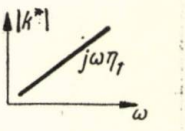
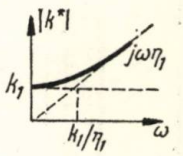
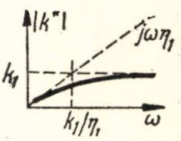
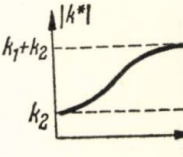
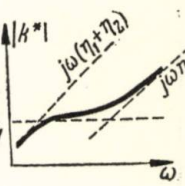
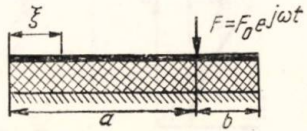
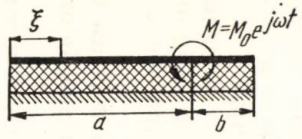
presiune și tasare $p = F(V)$	Modulul complex al fundației k^*		Dependența de pulsație a lui $\lvert k^* \rvert$
în regim armonic	Expresia corespunzătoare modelului reologic	Expresia generală	
$p = k_1 V$	k_1	$\frac{B_0}{A_0}$	
$p = \mathrm{j}\,\omega\, k_1 V$	$\mathrm{j}\,\omega\,\eta_1$	$\frac{\mathrm{j}\,\omega\, B_1}{A_0}$	
$p = (k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1) V$	$k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1$	$\frac{B_0 + \mathrm{j}\,\omega\, B_1}{A_0}$	
$k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1) p = \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1 k_1 \mathrm{V}$	$\frac{\mathrm{j}\,\omega\,\eta_1 k_1}{k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1}$	$\frac{\mathrm{j}\,\omega\, B_1}{A_0 + \mathrm{j}\,\omega\, A_1}$	
$(k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1) p =$ $= [k_1 k_2 + \mathrm{j}\omega\eta_1(k_1 + k_2)] V$	$\frac{k_1 k_2 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1 (k_1 + k_2)}{k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1}$	$\frac{B_0 + \mathrm{j}\,\omega\, B_1}{A_0 + \mathrm{j}\,\omega\, A_1}$	
$(k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1) p =$ $= [-\omega^2 \eta_1 \eta_2 + \mathrm{j}\,\omega\, k_1 (\eta_1 + \eta_2)] V$	$\frac{-\omega^2 \eta_1 \eta_2 + \mathrm{j}\omega k_1 (\eta_1 + \eta_2)}{k_1 + \mathrm{j}\,\omega\,\eta_1}$	$\frac{\mathrm{j}\omega B_1 - \omega^2 B_2}{A_0 + \mathrm{j}\,\omega\, A_1}$	

Tabela 2



	$a \neq b$	$a = b$
$\xi = a$	Săgeata $v_0 = -\frac{F_0}{E^* I\,\mu^3}\,\frac{V_4(\mu b)[1 + V_1(\mu a)] + V_4(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]}{\Lambda}$	$v_0 = -\frac{F_0}{E^* I\,\mu^3}\,\frac{1 + V_1(\mu a)}{4V_2(\mu a)}$
	Panta $\varphi_0 = -\frac{F_0}{E^* I\,\mu^2}\,\frac{\frac{1}{2}V_3(\mu a)[1 + V_1(\mu b)] - \frac{1}{2}V_3(\mu b)[1 + V_1(\mu a)]}{\Lambda}$	0
	$\Lambda = 2V_3(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2[V_4(\mu b)V_2(\mu a) + V_4(\mu a)V_2(\mu b)] + \frac{1}{2}[1 - V_1(\mu a)V_1(\mu b)]$	
$0 < \xi < a$	Săgeata $v = v_0\,\frac{\Phi_1 V_1(\mu x) - \Phi_2 U_2(\mu x)}{V_4(\mu b)[1 + V_1(\mu a)] + V_4(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]}$	$v = v_0\,\frac{U_1(\mu a)U_1(\mu x) - U_4(\mu a)U_2(\mu x)}{\frac{1}{2}[1 + V_1(\mu a)]}$
	Panta $\varphi = \varphi_0\,\frac{\Phi_1 U_4(\mu x) - \Phi_2 U_1(\mu x)}{\frac{1}{2}V_3(\mu a)[1 + V_1(\mu b) - \frac{1}{2}V_3(\mu b)[1 + V_1(\mu a)]}$	$\varphi = \frac{F_0}{E^* I \mu^2}\,\frac{U_4(\mu a)\,U_1(\mu x) - U_1(\mu a)U_4(\mu x)}{2V_2(\mu a)}$
	$\Phi_1 = U_2(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2U_1(\mu a)\,V_4(\mu b) - \frac{1}{2}U_4(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]$	
	$\Phi_2 = U_1(\mu a)\,V_3(\mu b) + 2U_4(\mu a)\,V_4(\mu b) - \frac{1}{2}U_3(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]$	



	$a \neq b$	$a = b$
$\xi = a$	Săgeata $v_0 = -\frac{M_0}{E^* I \mu^2} \frac{\frac{1}{2} V_3(\mu a)[1 + V_1(\mu b)] - \frac{1}{2} V_3(\mu b)[1 + V_1(\mu a)]}{\Lambda}$	0
	Panta $\varphi_0 = -\frac{M_0}{E^* I \mu} \frac{\frac{1}{2} V_2(\mu b)[1 + V_1(\mu a)] + \frac{1}{2} V_2(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]}{\Lambda}$	$\varphi_0 = -\frac{M_0}{E^* I \mu} \frac{1 + V_1(\mu a)}{8 V_4(\mu a)}$
	$\Lambda = 2 V_3(\mu a) V_3(\mu b) + 2 [V_4(\mu b) V_2(\mu a) + V_4(\mu a) V_2(\mu b)] + \frac{1}{2} [1 - V_1(\mu a) V_1(\mu b)]$	
$0 < \xi < a$	Săgeata $v = v_0 \frac{\psi_2 U_2(\mu x) - \psi_1 U_1(\mu x)}{\frac{1}{2} V_3(\mu a)[1 + V_1(\mu b)] - \frac{1}{2} V_3(\mu b)[1 + V_1(\mu a)]}$	$v = -\frac{M_0}{R^* I \mu^2} \frac{U_1(\mu a) U_2(\mu x) - U_2(\mu a)(U_1(\mu x)}{4 V_4(\mu a)}$
	Panta $\varphi = \varphi_0 \frac{\psi_2 U_1(\mu x) - \psi_1 U_4(\mu x)}{\frac{1}{2} V_2(\mu b)[1 + V_1(\mu a) + \frac{1}{2} V_2(\mu a)[1 + V_1(\mu b)]}$	$\varphi = -\frac{M_0}{E^* I \mu} \frac{U_1(\mu a) U_1(\mu x) - U_2(\mu a) U_4(\mu x)}{4 V_4(\mu a)}$
	$\psi_1 = U_2(\mu a) V_2(\mu b) + U_1(\mu a) V_3(\mu b) + U_3(\mu a) \frac{1}{2} [1 + V_1(\mu b)]$ $\psi_2 = U_1(\mu a) V_2(\mu b) + U_4(\mu a) V_3(\mu b) + U_2(\mu a) \frac{1}{2} [(1 + V_1(\mu b)]$	

4. CONCLUZII

Din analiza relațiilor (28) — (33) și din compararea curbelor din figura 2, rezultă următoarele concluzii:

1. Dacă $\delta = \text{const.}$ și $\eta = \text{const.}$ (cazul majorității materialelor izolante):

a — La frecvențe $n < 1$ ($\omega < \omega_0$), elasticitatea grinzii nu influențează sensibil răspunsul, iar η poate fi neglijat. Sistemul real poate fi aproximat printr-unul cu parmetri concentrați și cu un singur grad de libertate (fig. 3), iar factorul de amplificare calculat cu relația (52).

b — Cu creșterea frecvenței excitatoare, influența lui η crește, iar a lui δ scade (în special în vecinătatea frecvențelor de rezonanță).

c — La frecvențe $n > 1$, alura curbelor A și B din figura 2 diferă considerabil. Elasticitatea grinzii nu mai poate fi neglijată. În timp ce răspunsul sistemului cu parametri concentrați (curba B) scade continuu și constant, răspunsul sistemului real (fig. 1) cu parametri distribuiți prezintă o serie de maxime (la frecvențele de rezonanță n_1, n_2,...) și de minime (la frecvențele unde sistemul se comportă ca un amortizor dinamic $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$,...). Curba A, a „răspunsului mediu" al sistemului deformabil, apare deasupra curbei B, de unde rezultă că, la frecvențe mari, eficacitatea amortizării este mai mică pentru grinda deformabilă decît pentru cea considerată rigidă, fapt care în practică nu mai poate fi neglijat.

d — În general, la frecvențe $1 < n < \overline{n}_1$ ($\omega_0 < \omega < \overline{\omega}_1$), corespunzînd cu domeniul probabil de lucru al unui astfel de sistem, η și δ au o influență comparabilă, iar factorul de amplificare trebuie calculat după metoda expusă în lucrare.

e — La frecvențe $n > \overline{n}_1$ ($\omega < \overline{\omega}_1$), amortizarea fundației δ poate fi neglijată, iar factorul de amplificare trebuie calculat pentru grinda deformabilă ($\eta \neq 0$) pe fundație elastică.

2. În cazul materialelor la care δ este funcție de frecvență, factorul de amplificare se calculează pentru fiecare n (deci ω), considerînd valoarea corespunzătoare a lui δ; astfel, alura curbei răspunsului la mișcare va depinde de legea $\delta = \delta(\omega)$. La fel se procedează atunci cînd și k variază cu frecvența.

În general, orice sistem de izolare a vibrațiilor trebuie să asigure:

a — o pulsație de rezonanță ω_0 mică și ω_1 mare (se poate obține folosind un material de fundație cu k convenabil de mic și o grindă cu rigiditate la încovoiere EI mare),

b — un factor de amplificare redus la rezonanță (se realizează cu materiale avînd δ și η de valori mari) și

c — o descreștere rapidă a factorului de amplificare, la creșterea pulsației peste cea de rezonanță (depinde de dependența de frecvență a mărimilor k, δ, E și η).

Pentru fiecare dintre materialele de care se dispune, se trasează curba răspunsului la frecvență al sistemului (curba A, fig. 2) și, pe baza criteriilor enumerate mai sus, se alege materialul care oferă — în condițiile date — izolarea cea mai eficace.

În orice caz, în domeniul $1 < n < \overline{n}_1$, comportarea grinzii deformabile (A) este mai avantajoasă decît a grinzii rigide (B), prima avînd un factor

de amplificare mai mic la $n=1$ și o descreștere mai rapidă a ceaestuia la frecvențe $n > 1$.

Din analiza relației (30) rezultă că, în general, la frecvențe $n \cong \cong \sqrt{\frac{\delta+\eta}{\eta}}$, influența lui δ și η este aceeași și că trebuie considerați amîndoi în calcule. Pentru $n < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\delta}{\eta}}$ se poate neglija η, iar pentru $n > 3\sqrt{\frac{\delta}{\eta}}$ se poate neglija δ.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Kerr A. D., *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, **31**, Series E, *3*, p. 491 (1964).
2. Ишкова А. Г., Коренев Б. Г., *Изгиб пластинок на упругом и упругопластическом основании*. Труды II-го всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (1964), Обзорные доклады, Выпуск 3, Москва, Изд. „Наука", 1966, стр. 157.
3. Mikkola M., Ylinen A., *Effect of Shearing Force on the Deflection of a Beam of Finite Length on an Elastic Foundation*, Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engn. Building Construction Series, No. *23*, Helsinki, 1964.
4. Freudenthal A., Lorsch H., *The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation*, Proc. ASCE, **83**, *EM 1* (1957).
5. Ceradini G., *Contributo alla teoria della trave di fondazione poggiante su suolo elastico-viscoso*, Cemento, *3* (1959).
6. Pister K. S., Williams M. L., *Bending of Plates on a Viscoelastic Foundation*, Proc. ASCE, **86**, *EM 5*, p. 31–44 (1960).
7. Reissner E., A *Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation*, Journal of Applied Mechanics, **25**, *1*, p. 144 (1958).
8. Hoskin B.C., Lee E. H., *Flexible Surfaces on Viscoelastic Subgrade*, *Journal* Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, **85**, *4* (1959).
9. Ржаницын А. Р., *Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени*, Москва, 1949.
10. Hovey B.K., *Beitrag zur Dynamik des geraden Eisenbahngleises*, Dissertation, Göttingen, 1933.
11. Ludwig K., *Die Verformung eines beiderseits unbegrenzten elastisch gebetteten Gleises durch Lasten mit konstanter Horizontal-geschwindigkeit*, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., p. 650 (1938).
12. Mathews P. M., *Vibrations of a Beam on Elastic Foundation*, *Zeitschrift* für Angewandte Mathematik und Mechanik, Akademie Verlag, Berlin, **38**, April, p. 105 (1958).
13. Ponomariov S. D. și col., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. 1, București, Editura tehnică, 1960, p. 637 vol. 3, p. 351.
14. Hoppmann II W. H., *Impact of a Mass on a Damped, Elastically Supported Beam*, Journal of Applied Mechanics, vol. **15**, Trans. ASME, **70**, p. 125 (1948).
15. Kenney J. T., *Steady-State Vibrations of Beam of Elastic Foundation for Moving Load*, Journal of Applied Mechanics, **21**, decembrie, p. 359 (1954).
16. Achenbach J. D., Chin-teh Sun, *Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam*, International Journal of Solids and Structures, vol. **1**, p. 353 (1965).
17. Achenbach J. D., Chin-teh Sun, *Dynamic Response of Beam on Viscoelastic Subgrade*, Journal Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, vol. **91**, nr. *EM 5*, oct., 1965.

18. Bishop R. D., E., *The Treatment of Damping Forces in Vibration Theory*, Journal of Royal Aeronautical Society, **59**, *539* (1955).
19. Snowdon J. C., *Representation of the mechanical Damping Possessed by Rubberlike Materials and Structures*, Journal of Acoust. Soc. Amer., **35**, *6*, p. 821 (1963).
20. Snowdon J. C., *The Choice of Resilient Materials for Anti-Vibration Mountings*, British Journal of Applied Physics, **9**, *12*, p. 461 (1958).
21. Снитко Н. К., *Динамика сооружений*, Госстройиздат, Киев. 1960.
22. Lee E. H., *Stress Analysis in Viscoelastic Bodies*, Quart. Applied Matem, vol. 13, July (1955).
23. Berry D. S., *Stress Propagation in Viscoelastic Bodies*, Journal Mech. Phys. Solids, vol. 6, p. 177 (1958).
24. Klotter K., *Technische Schwingungslehre*, Band, **2**, Springer Verlag, Berlin-Göttingen, 1960, p. 437.
25. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г., *Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование*, Изд. Машиностроение, Москва, 1965.

CALCULUL SIMPLIFICAT AL CONLUCRĂRII SPAȚIALE A DIAFRAGMELOR CU MAI MULTE ȘIRURI DE GOLURI

de EINAR KEINTZEL
D.S.A.P.C., Brașov

Calculul diafragmelor cu mai multe șiruri de goluri prin metoda Albigès-Goulet este echivalent cu un calcul de cadru prin distorsiuni. La calculul simplificat al conlucrării spațiale a diafragmelor cu mai multe șiruri de goluri apar însă particularități față de cazul cadrelor obișnuite, din cauza rigidității mari a stîlpilor. Lucrarea tratează considerarea în calcul a acestor particularități, reducînd fiecare diafragmă cu mai multe șiruri de goluri la o structură formată din două bare fictive, obligate să se deformeze împreună, dintre care una se deformează numai prin încovoiere, iar cealaltă numai prin forfecare-lunecare.
Relațiile deduse se aplică la structuri simetrice, la care nu apare fenomenul de torsiune generală a construcției.

După cum se arată în [1], calculul diafragmelor cu goluri la sarcini orizontale prin metoda Albigès-Goulet [2] sau prin una dintre metodele asemănătoare cu aceasta [3], [4], [11], [12] este echivalent cu un calcul prin distorsiuni, folosind un cadru înlocuitor, redus la un singur stîlp și cîte o riglă la nivelul fiecărui etaj, calcul în care se introduce pentru rigiditatea unei rigle, cu notațiile din [8, p. 307],

$$i_r = \frac{I_b}{2a}\left(\frac{c}{a}\right)^2, \tag{1}$$

ținînd astfel cont de faptul că, în cazul diafragmelor, influența lățimii stîlpilor asupra rigidității riglelor nu se mai poate neglija. În cazul diafragmelor cu un singur șir de goluri, metoda Albigès-Goulet ia în considerare și influența deformațiilor axiale ale stîlpilor, neglijînd acest efect în cazul diafragmelor cu mai multe șiruri de goluri. De asemenea se neglijează influența deformațiilor de forfecare — lunecare ale stîlpilor.

Astfel, singura deosebire între calculul unei diafragme cu mai multe șiruri de goluri prin metoda Albigès-Goulet și calculul unui cadru obișnuit constă în faptul că, în cazul diafragmei, raportul între rigiditatea stîlpilor și rigiditatea riglelor este mult mai mare decît în cazul cadrului. În cele ce urmează se va cerceta influența acestei deosebiri asupra modului

în care se poate face un calcul simplificat al conlucrării spațiale a diafragmelor cu mai multe șiruri de goluri.

S-a arătat în [9] că calculul spațial al unei construcții în cadre se poate face în mod simplificat, repartizînd sarcinile orizontale la cadre în raportul unor caracteristici de rigiditate, calculate în mod aproximativ pentru nivelul curent al unui cadru etajat, admițînd că unghiurile de distorsiune a trei noduri consecutive ale cadrului înlocuitor au valori identice. Deoarece pentru secțiunea de încastrare a stîlpilor în fundație această ipoteză nu este adevărată nici cu aproximație, în această secțiune se poate produce o perturbare importantă a modului de repartizare a sarcinilor orizontale, stabilit pentru nivelul curent, perturbare ce se propagă în lungul stîlpului (vezi exemplul de calcul) după o lege exponențială. După cum se va arăta mai jos, atenuarea acestei perturbări depinde de raportul dintre rigiditatea grinzilor și a stîlpului cadrului înlocuitor. În cazul cadrelor obișnuite, influența încastrării stîlpilor în fundație se atenuează foarte repede, astfel încît se pot introduce într-un calcul simplificat pentru toate nivelurile intermediare caracteristicile de rigiditate din [9], iar pentru primul nivel o caracteristică de rigiditate stabilită în mod analog în [10]. În cazul unor stîlpi foarte rigizi în raport cu riglele, caz ce corespunde diafragmelor cu goluri, această influență poate să se atenueze însă destul de lent, făcînd necesar un calcul care să urmărească atenuarea ei pe mai multe niveluri. În continuare se arată cum se poate efectua un asemenea calcul mai general în mod simplificat.

Calculul se va conduce pe un cadru înlocuitor, iar momentele concentrate, reprezentînd acțiunea riglelor asupra stîlpului, se vor înlocui conform figurii 1, similar ca în [6], [7], cu un cuplu de moment $m\,(x)$, repar-

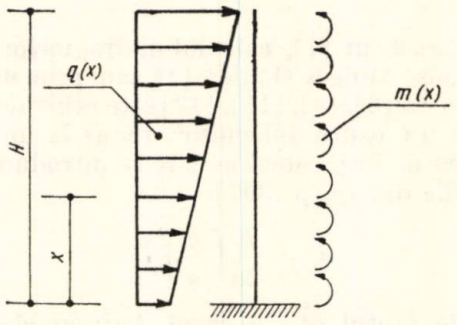


Fig. 1

tizat continuu pe înălțimea h a etajului și legat de deformata cadrului $y(x)$ prin relația

$$m = \frac{12\,Ei_r}{h}\,y'. \tag{2}$$

Notînd cu $M(x)$ și $Q(x)$ momentul încovoietor și forța tăietoare în stîlp, există relația de echivalență

$$M(x) = \int_x^H Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_x^H m(u)\,\mathrm{d}u.$$

Derivînd această relație de două ori și introducînd relația (2) și relațiile

$$Q' = -q,$$

$$y'' = \frac{M}{EI}, \tag{3}$$

se obține ecuația diferențială

$$M'' - \frac{12\, i_r}{hI} M = q. \tag{4}$$

Considerăm acum două bare încastrate la un capăt și libere la celălalt capăt, obligate să se deformeze împreună, dintre care una, avînd rigiditatea EI, se deformează numai prin moment, iar cealaltă, avînd rigiditatea AG, se deformează numai prin forță tăietoare [13]. Încărcînd și acest sistem de bare cu sarcina $q(x)$, prima bară va prelua $q_1(x)$, iar cea de-a doua bară $q_2(x)$, între $q_1(x)$ și $q_2(x)$ existînd relația

$$q_1(x) + q_2(x) = q(x). \tag{5}$$

Dacă prima bară este solicitată de momentul M și de forța tăietoare $Q_1 = M'$, iar cea de-a doua bară de forța tăietoare Q_2, există relațiile

$$M'' = q_1, \tag{6}$$

$$\frac{Q_2}{AG} = y'. \tag{7}$$

Derivînd relația (7) și introducînd relațiile (3), se obține

$$-\frac{AG}{EI} M = q_2. \tag{8}$$

Adunînd relațiile (6) și (8) și ținînd cont de (5), rezultă

$$M'' - \frac{AG}{EI} M = q. \tag{9}$$

Comparînd relația (4) cu relația (9), se constată că un cadru înlocuitor se poate considera ca fiind format din două bare fictive, obligate să se deformeze împreună, dintre care una, avînd rigiditatea EI, se deformează numai prin încovoiere, iar cealaltă, avînd rigiditatea

$$AG = \frac{12\, Ei_r}{h},$$

se deformează numai prin forfecare-lunecare.

La calculul conlucrării spațiale a mai multor cadre înlocuitoare se poate deci proceda în modul următor:

Se stabilesc rigiditățile barelor fictive în care se poate descompune fiecare cadru înlocuitor. Se adună rigiditățile barelor fictive ce se deformează prin moment și rigiditățile barelor fictive ce se deformează prin

forță tăietoare, reducînd astfel toată structura la două bare fictive. Se stabilește repartizarea forțelor orizontale la cele două bare fictive, rezolvînd ecuația diferențială (9). Se repartizează forțele tăietoare, corespunzînd fiecăreia dintre cele două bare fictive, la barele fictive componente, corespunzînd cadrelor înlocuitoare considerate. Se adună forțele tăietoare obținute pentru cele două bare fictive în care s-a descompus cadrul înlocuitor și se obține forța tăietoare ce solicită cadrul înlocuitor respectiv.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (9) notăm

$$r^2 = \frac{AG}{EI} = \frac{12_r}{hI} \tag{10}$$

și considerăm că sarcinile orizontale sînt repartizate după relația liniară

$$q(x) = ax + b, \tag{11}$$

forța tăietoare totală la baza construcției avînd valoarea Q_0. Soluția ecuației (9) va fi atunci

$$M = C_1 \operatorname{sh} rx + C_2 \operatorname{ch} rx + \frac{ax + b}{r^2}. \tag{12}$$

Punînd condițiile la limită $M(H) = 0$ și $m(0) = 0$, adică $M'(0) = Q_0$, se obține

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{r}\left(Q_0 - \frac{a}{r^2}\right), \\ C_2 &= -\frac{aH + b}{r^2 \operatorname{ch} rH} - C_1 \operatorname{th} rH. \end{aligned} \tag{13}$$

Forțele tăietoare $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ sînt

$$Q_1(x) = M'(x) = r\,(C_1 \operatorname{ch} rx + C_2 \operatorname{sh} rx) + \frac{a}{r^2}, \tag{14}$$

$$Q_2(x) = Q(x) - M'(x). \tag{15}$$

Comparînd relațiile (2) și (7), se constată că

$$m(x) = Q_2(x). \tag{16}$$

Din rezolvarea ecuației (9) se obțin ca atare în mod direct atît momentele și forțele tăietoare în stîlpii cadrelor înlocuitoare cît și momentele în riglele acestora.

EXEMPLU DE CALCUL

O construcție multietajată este rigidizată în sens longitudinal prin trei diafragme din beton armat : una centrală (diafragma I din figura 2) și două laterale (diafragmele II din figura 2). Înălțimea unui nivel este $h = 3$ m, înălțimea buiandrugilor peste goluri este 0,50 m. Se calculează repartizarea unei forțe concentrate $Q_0 =$ 1,0t la cele trei diafragme.

Considerînd pentru simplitate grosimea diafragmei egală cu unitatea, se obţine pentru diafragma I, folosind relaţia (1),

$$I = \frac{1}{12}(2 \times 3{,}0^3 + 3 \times 4{,}0^3) = 20{,}500 \text{ m}^4,$$

$$I_b = \frac{0{,}5^3}{12} = 0{,}0104 \text{ m}^4,$$

$$i_r = 2 \times \frac{0{,}0104}{1{,}00}\left[\left(\frac{4{,}5}{1{,}0}\right)^2 + \left(\frac{5{,}0}{1{,}0}\right)^2\right] = 0{,}940 \text{ m}^3.$$

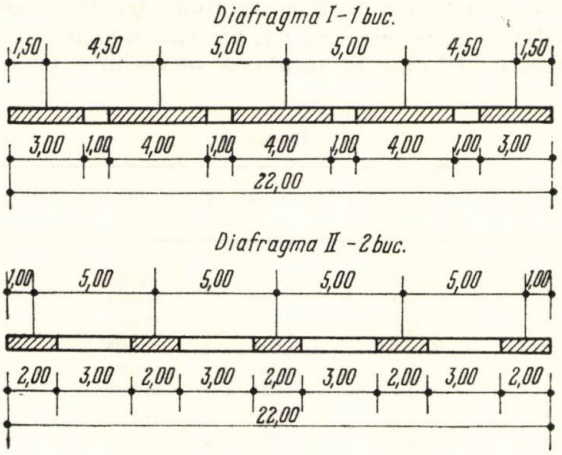


Fig. 2

În mod identic se obţine pentru diafragma II

$$I = \frac{5}{12} \times 2{,}0^3 = 3{,}328 \text{ m}^4,$$

$$i_r = 4 \times \frac{0{,}0104}{3{,}00} \times \left(\frac{5{,}0}{3{,}0}\right)^2 = 0{,}038 \text{ m}^3.$$

Pentru structura în ansamblu vom avea deci

$$I = 20{,}500 + 2 \times 3{,}328 = 27{,}156 \text{ m}^4,$$

$$i_r = 0{,}940 + 2 \times 0{,}038 = 1{,}016 \text{ m}^3.$$

După cum se arată în [3], [5], în cazul diafragmelor din beton armat se poate ţine cont de influenţa fisurării mai puternice a buiandrugilor, reducînd rigiditatea acestora prin înmulţire cu 0,25. Introducînd şi această precizare, se obţine (relaţia 10)

$$r = \sqrt{\frac{12 \times 1{,}016 \times 0{,}25}{3{,}0 \times 27{,}156}} = 0{,}194 \text{ m}^{-1}.$$

Avînd în relaţia (11) $a = b = 0$, $Q_0 = 1{,}0$ şi $\mathrm{th}rH = 1$, rezultă $C_1 = 1/r$, $C_2 = -C_1$

$$M'(x) = \mathrm{ch}rx - \mathrm{sh}r\,x = \mathrm{e}^{-rx} = \mathrm{e}^{-0{,}194x}.$$

Forţa tăietoare preluată de diafragma I va fi, ca atare,

$$Q_{\mathrm{I}} = \frac{20{,}500}{27{,}156} M' + \frac{0{,}940}{1{,}016}(1 - M'),$$

iar forţa tăietoare preluată de diafragmele II va fi

$$Q_{\mathrm{II}} = 1 - Q_{\mathrm{I}}.$$

În tabela 1 s-au trecut forţele tăietoare Q_{I}, Q_{II}, calculate la diferite niveluri ale construcţiei. Se observă că, din cauza rigidităţii mari a stîlpilor, influenţa încastrării stîlpilor în fundaţie se resimte pe o porţiune destul de mare.

Tabela 1

x	M'	$1 - M'$	Q_{I}	Q_{II}
0,0	1,000	0,000	0,756	0,244
3,0	0,559	0,441	0,834	0,166
6,0	0,312	0,688	0,883	0,117
9,0	0,174	0,826	0,908	0,092
12,0	0,097	0,903	0,921	0,079
15,0	0,054	0,946	0,929	0,071
18,0	0,030	0,970	0,935	0,065
21,0	0,017	0,983	0,936	0,064
24,0	0,009	0,991	0,938	0,062
27,0	0,005	0,995	0,939	0,061
30,0	0,003	0,997	0,940	0,060
33,0	0,000	1,000	0,940	0,060
36,0	.	.	.	.
39,0	.	.	.	.

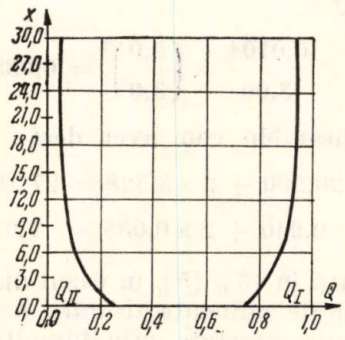


Fig. 3

În figura 3 s-a reprezentat repartizarea forţei tăietoare $Q = 1$ la cele două tipuri de diafragme.

BIBLIOGRAFIE

1. AGENT R., *Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigès-Goulet este un calcul de diafragmă sau un calcul de cadru etajat?*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *6* (1965).
2. ALBIGÈS M., GOULET J., *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, *5* (1960).
3. ARCAN M., *O metodă de calcul al diafragmelor cu un şir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
4. BECK H., *Ein Beitrag zur Berücksichtigung der Dehnungscerformungen bei Rahmen mit schlanken und gedrungenen Konstruktionsgliedern*, Die Bautechnik, *5* (1959).
5. BRÎNZAN I., *Unele cercetări experimentale privind realizarea îmbinărilor la diafragmele antiseismice ale clădirilor din panouri mari*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *11* (1962).
6. CSONKA P., *Beitrag zur Berechnung waagerecht belasteter Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik, *7* (1962).
7. CSONKA P., *Procedeu simplificat pentru calculul cadrelor etajate la încărcări date de vînt*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *1* (1966).
8. HANGAN M., *Construcţii de beton armat*, Bucureşti, 1963.
9. KEINTZEL E., *Determinarea aproximativă a forţelor seismice şi a altor acţiuni dinamice la cadre multietajate*, St. cerc. mec. apl., *3* (1965).
10. KEINTZEL E., *Calculul static de ordinul II şi stabilitatea cadrelor etajate cu zidărie de umplutură*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *2* (1966).
11. MATEESCU D., ANASTASESCU D., GĂDEANU L., *Calculul timpanelor rigide cu un şir de goluri*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *2* (1962).
12. ROSMAN R., *Beitrag zur statischen Berechnung waagerecht belasteter Querwände bei Hochbauten*, Der Bauingenieur, *4* (1960); *1* (1962).
13. ROSMAN R., *Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von waagerecht belasteten Wänden und Stockwerkrahmen bei Hochbauten*, Beton- und Stahlbetonbau, *2* (1963).

DEFORMAȚIA LOCALĂ, DE CONTACT ELASTIC LINIAR, LA ROȚILE DINȚATE

de N. BOICU
Comitetul de Stat al Apelor

Lucrarea studiază aspecte actuale ale construcției și exploatării angrenajelor lămurind unul din factorii care contribuie la preluarea șocurilor și a altor efecte dinamice. De asemenea, studiind fenomenele care au loc în stratul superficial al dinților, oferă elemente pentru cunoașterea comportării superficiale a materialelor dinților roților dințate.

Dinții roților dințate aflați în angrenare sub sarcină suferă deformații elastice, care, împreună cu deformațiile corpurilor roților și ale celorlalte organe prin care se transmit fluxurile de forțe, contribuie la preluarea șocurilor și a celorlalte efecte dinamice. Deplasările punctelor din zona de contact se pot exprima ca o sumă a deplasării întregii zone de contact, reprezentată prin deplasarea totală a unui punct de referință și deplasarea relativă a celorlalte puncte ale zonei în raport cu punctul de referință.

În lucrarea de față vom lua în considerare presiunea de contact ca formă de interacțiune a dinților și deplasarea punctelor suprafețelor aflate în contact, pe direcția normală drept consecință.

De asemenea, studiul se va referi la cazul contactului elastic liniar al roților dințate. Prin aceasta, vom înțelege cazul acelor angrenaje la care contactul fără sarcină se produce în lungul unei linii, iar sub sarcină, în lungul unei fîșii dispuse de o parte și de alta a liniei de contact fără sarcină.

În prima parte a lucrării se face o analiză a expresiilor deplasării normale la suprafața de contact elastic liniar obținute în teoria elasticității, arătîndu-se că fenomenele de deformație plană și stare plană de tensiuni — fenomene caracteristice porțiunii medii și, respectiv, marginale ale dinților — conduc la valori aproape egale ale deformațiilor. Aceasta face posibilă aplicarea în studiul danturilor de lungimi finite a relațiilor stabilite în cadrul teoriei elasticității pentru problema de contact elastic liniar. Tot în această parte a lucrării se propun expresii ale tensiunilor utilizabile pentru studiul fenomenelor de obosire superficială a materialelor dinților.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 705–723, BUCUREȘTI, 1969

În a doua parte a lucrării se deduc, într-un mod original, relațiile de calcul care permit stabilirea întinderii transversale a fișiei de contact, presiunii de contact și deplasării punctelor suprafeței de contact în raport cu una din marginile fișiei, aleasă ca punct de referință. Soluția originală este obținută prin rezolvarea ecuației integrale de tipul Fredholm cu nucleu logaritmic a problemei de contact elastic liniar, prin reducerea la integrare de tipul Glauert.

Aplicațiile numerice făcute în ultima parte a lucrării ilustrează ordinul de mărime al deformațiilor locale, precum și influența asimetriei flancurilor asupra fenomenului de deformare elastică locală.

La contactul elastic liniar al roților dințate, întinderea transversală a fișiei de contact este de ordinul de mărime al zecilor sau sutelor de microni. Datorită acestei particularități, se poate scrie că deplasarea elastică a unui punct al zonei de contact este o simplă însumare a efectelor presiunii distribuite de-a latul fișiei.

Pentru exprimarea deplasării elastice se folosește soluția dată de Boussinesq pentru acțiunea unei forțe concentrate asupra semiplanului elastic. Această problemă, larg cunoscută, în teoria elasticității, permite exprimarea tensiunilor σ_r', σ_θ' și $\tau_{r\theta}'$, precum și a deplasărilor u' și v' ale punctului curent al semiplanului în funcție de forța concentrată N (fig. 1) și de coordonatele punctului prin relațiile:

$$\sigma_r' = -\frac{2N}{\pi E}\frac{\sin\theta}{r}; \qquad \sigma_\theta' = \tau_{r\theta}' = 0,$$

$$u' = -\frac{2N}{\pi E}\ln r \sin\theta + \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, \tag{1}$$

$$v' = -\frac{2N}{\pi E}\ln r\cos\theta - \left(\alpha + \frac{2\mu N}{\pi E}\right)\sin\theta + \beta\cos\theta + \gamma r.$$

Pe fața $y' = 0$ a semiplanului, deplasările v' devin

$$v' = -\frac{2N}{\pi E}\ln r\cos(\theta_{y=0}) + C\cos(\theta_{y=0}) + \gamma r. \tag{2}$$

În exprimarea deplasărilor apar trei constante de integrare, care corespund cu două translații și o rotație ale semiplanului — mișcările de rigid — și care nu afectează starea de tensiuni elastice. Aceste constante se determină din condițiile de legătură.

Aplicînd observația cu privire la însumarea efectelor, permisă în virtutea dimensiunilor foarte mici ale zonei $a-b$ de distribuție a presiunii de contact (fig. 2), tensiunile și deplasările dintr-un punct suficient de apropiat de aria de interacțiune a flancurilor devin mai întîi:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{r_0} &= \Delta\sigma_r\cos^2(\theta-\theta_0),\\
\Delta\sigma_{\theta_0} &= \Delta\sigma_r\sin^2(\theta-\theta_0),\\
\Delta\tau_{r\theta_0} &= -\Delta\sigma_r\sin(\theta-\theta_0)\cos(\theta-\theta_0),\\
\Delta u_0' &= \Delta u'\cos(\theta-\theta_0) - \Delta v'\sin(\theta-\theta_0),\\
\Delta v_0' &= \Delta u'\sin(\theta-\theta_0) + \Delta v'\cos(\theta-\theta_0).
\end{aligned} \tag{3}$$

Formele (3) provin din trasformarea tensorului tensiunilor și a vectorului deplasărilor din sistemul de coordonate cu centrul în punctul de abscisă t (fig. 2) în sistemul de referință ales, cu originea în punctul de contact fără sarcină.

Apoi, prin trecere la limită, $(\delta t \to 0)$, și integrare între limitele a și b, din relțiile (3) și (1), punînd $\Delta\, \sigma_r = N = p(t)\, dt$, se obține

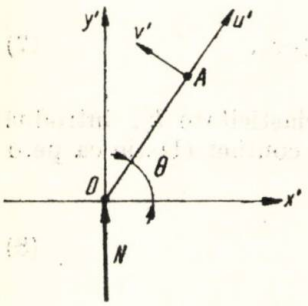


Fig. 1

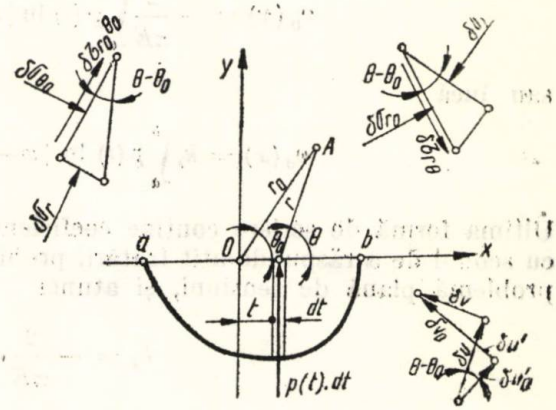


Fig. 2

$$\sigma_{r_0} = \int_a^b \left[-\frac{2p(t)}{\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos^2(\theta - \theta_0) \right] dt,$$

$$\sigma_{\theta_0} = \int_a^b \left[-\frac{2p(t)}{\pi} \frac{\sin\theta}{r} \sin^2(\theta - \theta_0) \right] dt, \qquad (4)$$

$$\tau_{r\theta_0} = \int_a^b \left[\frac{2p(t)}{\pi} \frac{\sin\theta}{r} \sin(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0) \right] dt.$$

Expresiile (4) ale tensiunilor pot fi folosite pentru studiul fenomenului de oboseală superficială.

În mod asemănător, plecînd de la relațiile (2), scriind $\Delta v' = \Delta v_0$, trecînd la limită și integrînd, se obține, în final, expresia deplasărilor v_0 ale punctelor de pe limita semiplanului:

$$v_0(x) = \int_a^b \left[-\frac{2p(t)}{\pi E} \ln|x - t| \right] dt + V_0 \cos(\theta_{y=0}) + \gamma_0 |x - t|, \qquad (5)$$

expresie în care translațiile și rotațiile în jurul punctelor susccesive de pe segmentul $a-b$ au fost înlocuite printr-o translație și o rotație în jurul originii sistemului de coordonate.

Prezența rotației cu unghiul γ_0 permite tratarea contactului elastic cu moment și forță rezultantă aplicată în punctul de contact fără sarcină sau numai cu forță rezultantă în acest punct, momentul fiind nul. Considerăm cazul prezenței momentului — și, implicit, al abaterii forței rezultante a distribuției de presiuni față de punctul de contact fără sarcină —, întrucît dinții și corpurile roților dințate au o rigiditate care face ca rotirea

relativă a dinţilor aflaţi în angrenare să fie impiedicată. În această situaţie se poate scrie $\gamma_0 = 0$. Dacă se renunţă şi la convenţia semnelor pentru deplasarea v, care urmează să aibă sensul pozitiv identic cu sensul negativ al axei oy (fig. 2) rezultă, pentru deplasarea pe direcţia normală la suprafaţa de contact, expresia

$$v_0(x) = -\frac{2}{\pi E}\int_a^b p(t) \ln|x-t|\, dt + v_0 \tag{6}$$

sau încă

$$v_0(x) = k_e \int_a^b p(t) \ln|x-t|\, dt + v_0. \tag{7}$$

Ultima formă de scriere conţine coeficientul de elasticitate k_e, introdus cu scopul de a răspunde atît tratării problemei de contact elastic ca pe o problemă plană de tensiuni, şi atunci

$$k_e = -\frac{2}{\pi E}, \tag{8}$$

cît şi ca pe o stare plană de deformaţii, şi atunci

$$k_e = -\frac{2(1-\mu^2)}{\pi E}. \tag{9}$$

Se constată că variaţia coeficientului de elasticitate k_e între cele două cazuri extreme este, pentru oţeluri şi alte materiale din care se confecţionează roţile dinţate, mai mică decît 10%. Cele două cazuri — starea plană de tensiuni şi starea plană de deformaţii — se potrivesc fiecare într-o mai bună măsură porţiunii marginale, respectiv centrale a dintelui. Această observaţie este aplicabilă şi relaţiilor (4) ale tensiunilor.

Translaţia v_0 a zonei pe direcţia normală la suprafaţa de contact are semnificaţia deplasării întregii zone de contact ca urmare a deformaţiei elastice a întregului corp al dintelui şi al roţii.

Alegînd extremitatea a a fîşiei de contact ca punct de referinţă, se poate scrie

$$v(x) = v(a) + v_i(x), \tag{10}$$

unde prin $v_i(x)$ înţelegem deplasarea locală de contact elastic.

Din relaţia (7) se găseşte deplasarea punctului $x = a$ exprimată prin

$$v(a) = k_e \int_a^b p(t) \ln|a-t|\, dt, \tag{11}$$

care, împreună cu (10), dă, pentru deplasarea locală $v_i(x)$, expresia

$$v_i(x) = v(x) - v(a) = k_e \int_a^b p(t) \ln\left|\frac{x-t}{a-t}\right| \tag{12}$$

În problemele de contact elastic, deplasarea elastică se determină din condiția de compatibilitate a deplasărilor, folosind relația (12). Două flancuri aflate în contact fără sarcină se atinge pe o linie — respectiv, în secțiune transversală, într-un punct — ca în figura (3). Sistemul de coordonate se alege cu originea în punctul de contact fără sarcină, cu axele orientate după tangenta, respectiv după normala comune flancurilor.

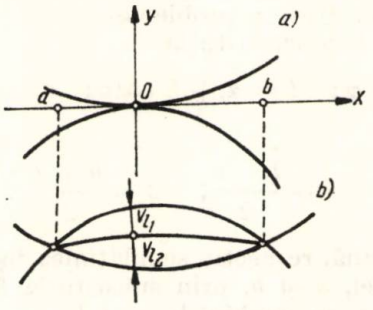


Fig. 3

După apariția forței de interacțiune, cele două flancuri se deformează împreună, rezultînd o suprafață cilindrică de contact a cărei generatoare este ca în figura 3*b*. Peutru a ajunge la starea deformată, fiecare flanc se deplasează pe propria direcție normală cu mărimile v_{t_1}, respectiv v_{t_2} suma deplasărilor locale fiind, din cauza impenetrabilității materialelor celor două roți, egală cu suma ordonatelor relative în raport cu punctul de referință $x = a$:

$$v_{t_1} = v_{t_2} = y_1(a) + y_2(a) - y_1(x) - y_2(x). \tag{13}$$

Membrul doi al egalității (13) este determinat de forma flancurilor nedeformate (evolvente, arce de cerc etc.) și de extremitățile a și b ale zonei de contact. Acestea două din urmă depind atît de mărimea forței de apăsare, cît și de coeficienții de elasticitate (formulele 8, respectiv 9) ai materialelor din care sînt confecționați dinții. Presupunînd că mărimile a și b sînt cunoscute, cu formulele (12) și (13) se obțin deplasările locale ale celor două flancuri

$$v_{t_{1,2}} = k_{e_{1,2}} \int_a^b p(t) \ln \left| \frac{x-t}{a-t} \right| dt,$$

care, prin însumare și utilizînd relația (13), duce la

$$\int_a^b p(t) \ln \left| \frac{x-t}{a-t} \right| dt = \frac{y_1(a) + y_2(a) - y_1(x) - y_2(x)}{k_{e_1} + k_{e_2}}.$$

Astfel în final se găsește

$$v_{t_{1,2}} = \frac{k_{e_{1,2}}}{k_{e_{1,2}} + k_{e_2}} [y_1(a) - y_1(x) + y_2(a) - y_2(x)]. \tag{14}$$

Pentru a cunoaşte complet deplasările locale, mai este necesară determinarea limitelor fişiei de contact a şi b. Acestea se stabilesc însă pe baza relaţiei dintre presiuni şi deplasări, care pînă acum este scrisă ca o ecuaţie integrală, în forma (12).

Relaţia dintre presiunea de contact şi deplasarea locală se stabileşte prin rezolvarea ecuaţiei integrale (12). În scopul evidenţierii celor două relaţii care permit determinarea limitelor fişiei de contact a şi b, vom folosi o cale proprie de rezolvare a problemei.

În relaţia (12) se face substituţia

$$x = \alpha + \beta \cos \varphi; \quad t = \alpha + \beta \cos\theta; \quad dt = -\beta \sin\theta \, d\theta, \tag{15}$$

în care

$$\alpha = \frac{b-a}{2}; \quad \beta = \frac{b+a}{2} \tag{16}$$

reprezintă abscisa mediană, respectiv semilăţimea fişiei de contact.

Extremităţile zonei, a şi b, prin substituţia făcută, corespund valorilor π, respectiv 0 pentru unghiurile φ şi θ.

În acest fel, deplasarea locală (12) devine

$$v_1(\varphi) = \beta k_e \int_0^{\pi} p(\theta) \sin\theta \ln \left| \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right| d\theta. \tag{17}$$

În cazul contactului a două flancuri cu suprafeţe continue şi netede pe intreg intervalul $a-b$ şi pe marginile acestuia, presiunea este nulă la extremităţile fişiei de contact, astfel încît poate fi reprezentată în cazul cel mai general printr-o serie Fourier de forma

$$p(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\theta. \tag{18}$$

Serie (18), anulîndu-se pentru valorile 0 şi π ale lui θ, îndeplineşte condiţia arătată pe marginile a şi b ale fişiei de contact. Se mai reţine faptul că seria (18), fiind dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii continue şi netede pe întreg intervalul $a-b$, este absolut convergentă. Această proprietate permite să se dezvolte calculul succesiv, plecînd de la formulele (17) şi (18):

$$v_1(\varphi) = \frac{\beta k_e}{2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right| d\theta + 2C_1 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \ln \left| \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right| d\theta \right\} =$$

$$= \frac{\beta k_e}{2} [C_1 I_0 + C_2 I_1 + (C_{n+1} - C_{n-1}) I_n], \tag{19}$$

unde coeficienţii C_n ai seriei Fourier sînt daţi de relaţiile binecunoscute:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\theta) \sin_n \theta \, d\theta, \tag{20}$$

iar prin I_n s-au notat integrale improprii cu singularități logaritmice:

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos n\theta \ln \left| \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right| d\theta. \tag{21}$$

Aceste integrale trebuie calculate în sensul valorii principale.
Vom începe prin a calcula integrala de ordinul zero

$$I_0 = \int_0^{\pi} \ln \left| \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right| d\theta = I_{01} + I_{02}, \tag{22}$$

unde s-a notat

$$I_{01} = \int_0^{\pi} \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \, d\theta; \quad I_{02} = -\int_0^{\pi} \ln |1 - \cos \theta| \, d\theta. \tag{23}$$

Integrala I_{02} se găsește în tabele și este:

$$I_{02} = -\int_0^{\pi} \ln |1 - \cos \theta| \, d\theta = \pi \ln 2. \tag{24}$$

Aceeași valoare se va obține și din particularizarea soluției care se va stabili în cele ce urmează pentru integrala I_{01}.
În sensul valorii principale, integrala I_{01} este

$$I_{01} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{\varphi - \varepsilon} \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \, d\theta + \int_{\varphi + \varepsilon}^{\pi} \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \, d\theta. \right. \tag{25}$$

Efectuînd integrarea prin părți, se scrie succesiv

$$du = d\theta; \quad v = \ln |\cos \varphi - \cos \theta|$$

și

$$I_{01} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\theta \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \Big|_0^{\varphi - \varepsilon} + \theta \ln |\cos \varphi - \cos \theta| \Big|_{\varphi + \varepsilon}^{\pi} -$$

$$- \int_0^{\varphi - \varepsilon} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} - \int_{\varphi + \varepsilon}^{\pi} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (\varphi - \varepsilon) \ln |\cos (\varphi - \varepsilon) - \cos \varphi| - (\varphi + \varepsilon) \times \right.$$

$$\times \ln |\cos (\varphi + \varepsilon) - \cos \varphi| + \pi \ln |1 + \cos \varphi| -$$

$$\left. - \int_0^{\varphi - \varepsilon} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} - \int_{\varphi + \varepsilon}^{\pi} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (\varphi - \varepsilon) \ln 2 \sin \left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \frac{\varepsilon}{2} - \right.$$

$$- (\varphi + \varepsilon) \ln 2 \sin \left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin \frac{\varepsilon}{2} + \pi \ln |1 + \cos \varphi| -$$

$$\left. - \int_0^{\varphi - \varepsilon} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} - \int_{\varphi + \varepsilon}^{\pi} \frac{\theta \sin \theta \, d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}, \right.$$

care, după trecerea la limită, devine

$$I_{01} = \pi \ln|1 + \cos\varphi| + I'_{01}. \tag{26}$$

Prin I'_{01} se înțelege

$$I'_{01} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\theta \sin\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\theta \sin\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}\right]. \tag{27}$$

Pentru calculul integralei I'_{01}, vom dezvolta funcția $\theta \sin\theta$ în serie Fourier

$$\theta \sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta,$$

unde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta \sin\theta \cos n\theta\, d\theta \quad \text{și} \quad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \theta \sin\theta\, d\theta.$$

După calculul coeficienților, se găsește în final dezvoltarea în serie absolut convergentă:

$$\theta \sin\theta = 1 - \frac{\cos\theta}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{n^2 - 1}. \tag{28}$$

Substituind expresia (28) în (27) obținem

$$I'_{01} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\left[\int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}\right] -$$

$$\left. - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}\left[\int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}\right]\right\}, \tag{29}$$

În ultima expresie sînt ușor de recunoscut valorile principale ale integralelor improprii de tipul Glauert

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\varphi - \cos\theta} = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}, \quad J_0 = 0. \tag{30}$$

În acest fel, integrala I'_{01} devine

$$I'_{01} = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\sin\varphi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\varphi}{n^2 - 1}. \tag{31}$$

Ultima expresie o vom restrînge, observînd că

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin n\varphi = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} \sin n\varphi - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sin n\varphi. \tag{32}$$

Notînd

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} \sin n\varphi = Im \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{in\varphi}}{n-1} =$$

$$= Im\, e^{i\varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i(n-1)\varphi}}{(n-1)} = Im\, e^{i\varphi} \ln(1 - e^{i\varphi}) \tag{33}$$

$$S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \sin n\varphi = Im \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{in\varphi} =$$

$$= Im\, e^{-i\varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i(n+1)\varphi}}{(n+1)} = Im\, e^{-i\varphi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i(n+1)\varphi}}{n+1} - \right.$$

$$\left. - e^{i\varphi} + \frac{e^{2i\varphi}}{2} \right] = Im\, e^{-i\varphi} \left[\ln(1 + e^{i\varphi}) - e^{i\varphi} + \frac{e^{2i\varphi}}{2} \right],$$

se obține

$$S = \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{2} S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin n\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} Im \left[(e^{i\varphi}\varphi - e^{-i\varphi}) \ln(1 + e^{i\varphi}) + 1 - \frac{e^{i\varphi}}{2} \right].$$

Dar

$$1 + me^{i\varphi} = \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin\varphi^2}\, e^{i \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}} =$$

$$= \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, e^{i \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

astfel încît

$$S = \sin\varphi \ln 2\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin n\varphi}{4} = \sin\varphi \left[\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{4} \right]. \tag{34}$$

integrala I'_{01} (formula 31) devine deci:

$$I'_{01} = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\sin\varphi} \sin\varphi \left[\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{4} \right] = -2\pi \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right). \tag{35}$$

Din expresiile (35) și (26) rezultă:

$$I_{01} = \pi \ln(1 + \cos\varphi) - 2\pi \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -\pi \ln 2. \tag{36}$$

În acest fel, integrala I_0 (formula 22) devine

$$I_0 = -\pi \ln 2 + \pi \ln 2 = 0, \tag{37}$$

adică este nulă în intervalul $a - b$ și pe marginile acestuia.

Integrala de ordinul n se calculează tot prin reducere la integralele de tipul Glauert. Se scrie

$$I_n = I_{n_1} - I_{n_2}; \quad I_{n_1} = \int_0^\pi \cos n\,\theta \ln|\cos\theta - \cos\theta\varphi|\,d\theta$$
$$I_{n_2} = \int_0^\pi \cos n\theta \ln|1 - \cos\theta|\,d\theta. \tag{38}$$

Prima integrală, în sensul valorii principale, este

$$I_{n_1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\pi-\varepsilon} \cos n\theta \ln|\cos\theta - \cos\varphi|\,d\theta + \right.$$
$$\left. + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \cos n\theta \ln|\cos\theta - \cos\varphi|\,d\theta\right].$$

Efectuînd o integrare prin părți,

$$dv = \cos n\theta\,d\theta; \qquad v = \frac{\sin n\theta}{n},$$
$$u = \ln|\cos\theta - \cos\varphi|; \qquad du = -\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta - \cos\varphi},$$

se obține succesiv:

$$I_{n_1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\sin n\theta}{n}\ln|\cos\theta - \cos\varphi|\Big|_0^{\varphi-\varepsilon} + \frac{\sin n\theta}{n}\ln|\cos\theta - \cos\varphi|\Big|_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\varphi-\varepsilon}\frac{\sin n\theta}{n}\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \cos\varphi}\,d\theta + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin n\theta}{n}\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \cos\varphi}\,d\theta\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\sin(\varphi-\varepsilon)n}{n}\ln|\cos(\varphi-\varepsilon) - \cos\varphi| - \frac{\sin n(\varphi+\varepsilon)'}{n}\times\right.$$
$$\times \ln|\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi| + \int_0^{\varphi-\varepsilon}\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{2n(\cos\theta - \cos\varphi)}\,d\theta +$$
$$\left. + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{2n(\cos\theta - \cos\varphi)}\,d\theta\right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\sin n\varphi}{n}\ln\left|\frac{\cos(\varphi-\varepsilon) - \cos\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi}\right| - n\varepsilon\cos n\varphi\times\right.$$
$$\times\ln|\cos^2(\varphi-\varepsilon) - \cos^2\varphi| + \frac{1}{2n}\left[\int_0^{\varphi-\varepsilon}\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi}\,d\theta + \right.$$
$$\left.\left. + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi}\,d\theta\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2n} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta + \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta - \int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta \right].$$

În ultima expresie se recunosc din nou valorile principale ale integralelor Glauert notat la (33), deci

$$I_{n_1} = \frac{1}{2} [J_{n-1} - J_{n+1}] =$$

$$= \frac{\pi}{2n \sin\varphi} [\sin(n-1)\varphi - \sin(n+1)\varphi] = -\frac{\pi}{n} \cos n\varphi. \tag{40}$$

Valoarea integralei I_{n_2} se obține prin particularizare din I_{n_1}:

$$I_{n_2} = I_{n_1}(0) = -\frac{\pi}{n}, \tag{41}$$

astfel încît se ajunge în final la

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos n\theta \ln \left| \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right| d\theta = \frac{\pi}{n}(1 - \cos n\varphi). \tag{42}$$

În acest fel, expresia deplasării locale (20), cu valorile găsite pentru integralele I_0 și I_n, devine

$$v_{1,2}(\varphi) = \frac{\pi\beta k_{e_{1,2}}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n+1} - C_{n-1}) \frac{1 - \cos n\varphi}{n}. \tag{43}$$

Cu această formulă se poate stabili dependența dintre coeficienții seriei Fourier (18) a presiunii de contact și coeficienții seriei Fourier a deplasării de contact, pe care o notăm în forma

$$v_{1,2}(\varphi) = \frac{\pi\beta k_{e_{1,2}}}{2(k_{e_1} + k_{e_2})} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\varphi. \tag{44}$$

Din (43) și (44) rezultă

$$B_0 = (k_{e_1} + k_{e_2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{n}; \quad B_n = \frac{C_{n-1} - C_{n+1}}{n} (k_{e_1} + k_{e_2}). \tag{45}$$

Relațiile (45) permit calculul deplasării locale de contact elastic în ipoteza că se cunoaște distribuția de presiuni.

În practică nu se cunoaște distribuția de presiuni, ci, de obicei, punctul de contact fără sarcină (originea sistemului de coordonate din figura 3), forma flancurilor nedeformate în jurul punctului de contact fără sarcină (funcțiile y_1 și y_2 din ecuațiile 14) și mărimea forței de contact P. În această situație ea poate exprima deplasarea $v_1(\varphi)$ plecînd de la expresia ei (14), în forma seriei Fourier (44), coeficienții B_n fiind dați

în funcţie de limitele necunoscute a şi b ale zonei de contact, aşa cum rezultă din relaţiile de transformare (15) şi (16). Expresiile coeficienţilor B_n în funcţie de mărimile a şi b, respectiv α şi β, sînt algebric neliniare. Astfel, într-o formă particulară de reprezentare a ecuaţiilor flancurilor în jurul punctului de contact fără sarcină printr-un trinom de puteri ale variabilei x

$$y_1(x) + y_2(x) = A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4, \tag{46}$$

cu schimbarea de variabilă (15)

$$x = \alpha + \beta \cos \varphi,$$

se obţine

$$\begin{aligned} y_1(\varphi) + y_2(\varphi) = &\left[A_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + A_2\left(\alpha^3 + \frac{3\alpha\beta^2}{2}\right) + \right. \\ &\left. + A_3\left(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + 3\frac{\beta^4}{8}\right)\right] + \\ &+ \left[2\alpha\beta A_1 + \left(3\alpha^2\beta + \frac{3\beta^3}{4}\right)A_2 + (4\alpha^3\beta + 3\alpha\beta^3)A_3\right]\cos\varphi + \\ &+ \left[A_1\frac{\beta^2}{2} + \frac{3\alpha\beta^2}{2}A_2 + \left(3\alpha^2\beta^2 + \frac{\beta^4}{2}\right)A_3\right]\cos 2\varphi + \\ &+ \left(\frac{\beta^3}{4}A_2 + \alpha\beta^3 A_3\right)\cos 3\varphi + \frac{\beta^4}{8}A_3 \cos 4\varphi. \end{aligned} \tag{47}$$

Din (47), (44) şi (14) rezultă în final coeficienţii :

$$\begin{aligned} \frac{\pi\beta}{2}B_0 &= y_1(a) + y_2(a) - A_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) - A_2\left(\alpha^3 + \frac{3\alpha\beta^2}{2}\right) - \\ &\quad - A_3\left(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \frac{3\beta^4}{8}\right), \\ \frac{\pi\beta}{2}B_1 &= -2\alpha\beta A_1 - \left(3\alpha^2\beta + \frac{3\beta^2}{4}\right)A_2 - (4\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^3)A_3, \\ \frac{\pi\beta}{2}B_2 &= -A_1\frac{\beta^2}{2} - \frac{3\alpha\beta^2}{2}A_2 - \left(3\alpha^2\beta^2 + \frac{\beta^4}{4}\right)A_3, \\ \frac{\pi\beta}{2}B_3 &= -\frac{\beta^3}{4}A_2 - \alpha\beta^3 A_3, \\ \frac{\pi\beta}{2}B_4 &= -\frac{\beta^4}{8}A_3. \end{aligned} \tag{48}$$

Reprezentarea ecuaţiilor flancurilor printr-o sumă finită de monoame în variabila x de obicei este suficient de reprezentativă pentru forma reală

a acestora din zona de contact, întrucît întinderea acestei zone este foarte mică.

Prin particularizări, din ecuațiile (46) și (47), se obțin relații de calcul de mare interes practic, după cum se va vedea în aplicațiile din ultima parte a lucrării.

Punînd condiția: $A_2 = A_3 = 0$, din motive de simetrie, rezultă că abscisa mediană a zonei de contact este în originea sistemului de coordonate din figura (3) și deci $\alpha = 0$. În acest caz, ecuația (46) se reduce la

$$y_1(x) + y_2(x) = A_1 x^2, \tag{49}$$

ecuația (47) devine

$$y_1(\varphi) + y_2(\varphi) = A_1 \cdot \frac{\beta^2}{2} + A_1 \frac{\beta^2}{2} \cdot \cos 2\varphi, \tag{50}$$

iar coeficienții seriei deplasării locale, B_n, sînt:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi\beta}{2} B_0 = y_1(a) + y_2(a) - A_1 \frac{\beta^2}{2}, \\ &\frac{\pi\beta}{2} B_2 = -A_1 \frac{\beta^2}{2}; \qquad B_1 = B_3 = B_4 = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Plecînd de la relațiile (51), se obțin binecunoscutele formule ale lui Hertz pentru presiunea de contact elastic și pentru întinderea zonei de contact.

Dacă se pune condiția $A_3 = 0$, ecuația (46) devine

$$y_1(x) + y_2(x) = A_1 x^2 + A_2 x^3, \tag{52}$$

ecuația (47) se reduce la

$$y_1(\varphi) + y_2(\varphi) = \left[A_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + A_2\left(\alpha^3 + \frac{3\alpha\beta^2}{2}\right)\right] + \left[2\alpha\beta A_1 + \right.$$

$$\left. + \left(3\alpha^2\beta + \frac{3\beta^3}{4}\right) A_2 \right] \cos\varphi + \left(A_1 \frac{\beta^2}{2} + \frac{3\alpha\beta^2}{2} A_2\right) \cos^2\varphi + \frac{\beta^3}{4} A_3 \cos 3\varphi, \tag{53}$$

iar coeficienții seriei deplasării locale, B_n, sînt:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi\beta}{2} B_0 = y_1(a) + y_2(a) - A_1\left(\alpha^2 + \frac{\beta^3}{2}\right) - A_2\left(\alpha^3 + \frac{3\alpha\beta^2}{2}\right), \\ &\frac{\pi\beta}{2} B_1 = -2\alpha\beta A_1 - \left(3\alpha^2\beta + \frac{3\beta^3}{4}\right) A_2, \\ &\frac{\pi\beta}{2} B_2 = -A_1 \frac{\beta^2}{2} - \frac{3\alpha\beta^2}{2} A_2, \\ &\frac{\pi\beta}{2} B_3 = -\frac{\beta^3}{4} A_2, \quad B_4 = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Relaţiile (52), (53) şi (54) permit studiul contactului elastic care prezintă asimetrie în jurul punctului de contact fără sarcină şi care, în cazul general, duc la distribuţii de presiuni asimetrice şi la întinderi neegale ale fişiei de contact în jurul punctului de contact fără sarcină.

Prin condiţia $A_2 = 0$, rezultă din nou flancuri simetrice în jurul punctului de contact fără sarcină şi deci $\alpha = 0$. Ecuaţia (46) devine

$$y_1(x) + y_2(x) = A_1 x^2 + A_3 x^4, \tag{55}$$

ecuaţia (47) se transcrie în forma

$$y_1(\varphi) + y_2(\varphi) = \left(A_1 \frac{\beta^2}{2} + A_3 \frac{3\beta^4}{8}\right) + \left(A_1 \frac{\beta^2}{2} + A_3 \frac{\beta^4}{2}\right) \cos 2\varphi + \\ + A_3 \frac{\beta^4}{8} \cos 4\varphi, \tag{56}$$

iar coeficienţii B_n ai seriei deplasării locale sînt :

$$\frac{\pi\beta}{2} B_0 = y_1(a) + y_2(a) - A_1 \frac{\beta^2}{2} - A_3 \frac{3\beta^4}{8},$$

$$\frac{\pi\beta}{2} B_2 = - A_1 \frac{\beta^2}{2} - A_3 \frac{\beta^4}{2}, \tag{57}$$

$$\frac{\pi\beta}{2} B_4 = - A_3 \frac{\beta^4}{8}; \quad B_1 = B_3 = 0.$$

În acest al doilea caz, ale cărui particularizări au fost prezentate în relaţiile (46)—(57), se pune problema determinării limitelor a şi b ale fişiei de contact, respectiv ale abscisei mediane α şi ale semilăţimii β, şi apoi a coeficienţilor B_n şi C_q ai seriilor Fourier ale deplasării locale şi presiunii.

Pentru aceasta, se rezolvă sistemul infinit (45), exprimînd coeficienţii C_q în funcţie de coeficienţii B_n. La rezolvarea sistemului infinit (45) se utilizează observaţia că termenul de ordinul n al seriei deplasării locale îi corespunde termenul de ordinul $n - 1$ al seriei presiunii de contact, aşa cum rezultă din expresia (20) a deplasării locale şi din expresia (40) a integralei I_n. Cu această observaţie se găseşte

$$C_q = \frac{1}{k_{l_1} + k_{l_2}} \sum_{m=q,\, q+2,\, \ldots}^{\infty} (m+1)\, B_{m+1} \tag{58}$$

împreună cu condiţia

$$\sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)\, B_{2p+1} = 0, \tag{59}$$

care este o consecinţă a faptului că termenul C_0 din seria (18) a presiuni de contact este nul (presiunea la extremităţile zonei de contact este nulă).

Se mai reţine relaţia

$$C_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\theta) \sin\theta \, d\theta, \tag{60}$$

care, ținînd seama de relația de transformare (15), devine

$$C_1 = \frac{2}{\pi\beta}\int_a^b p(x)\cdot dx = -\frac{2P}{\beta\pi}. \tag{61}$$

Prin P, după cum am mai spus, se înțelege forța de apăsare a flancurilor.

Din relația (61) și relația (58) scrisă pentru $q = 1$, se ajunge la condiția

$$\frac{1}{k_{e_1} + k_{e_2}} \sum_{p=1}^{\infty} 2p \cdot B_{2p} = -\frac{2P}{\pi\beta}. \tag{62}$$

Ecuațiile (59) și (62), împreună cu expresiile coeficienților B_n de tipul celor date în cazurile particulare analizate în cuprinsul relațiilor (48), (51), (54) și (57), permit determinarea limitelor a și b ale fișiei de contact, respectiv ale mărimilor α și β.

Se constată că forța rezultantă a distribuției de presiuni în general nu este aplicată în punctul de contact fără sarcină. Notînd prin ξ abscisa necunoscută a punctului de aplicare a forței rezultante, se poate scrie, folosind aceeași relație de transformare (15), că momentul forței P în raport cu originea sistemului de coordonate din figura (3) este

$$M = P.\xi = \int_a^b p(x)\cdot x\cdot dx = -\beta\int_0^\pi p(\theta)\,(\alpha + \beta\cos\theta)\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\alpha\beta\int_0^\pi p(\theta)\sin\theta\,d\theta - \frac{\beta^2}{2}\int_0^\pi p(\theta)\sin 2\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{\pi\alpha\beta}{2}C_1 - \frac{\pi\beta^2}{4}C_2 = P\cdot\alpha - \frac{\pi\beta^2}{2}C_2,$$

de unde rezultă

$$\xi = \alpha - \frac{\pi\beta^2}{4}C_2. \tag{63}$$

În cazul distribuției simetrice de presiuni, abscisa mediană a fișiei de contact este nulă ($\alpha = 0$), iar coeficienții pari ai seriei (18) a presiuni sînt de asemenea nuli (în particular, și C_2 este nul), astfel încît rezultă că forța rezultantă P este aplicată în punctul de contact fără sarcină — din relația (63) se găsește $\xi = 0$.

Revenind la cazurile particulare analizate în partea de lucrare corespunzătoare formulelor (46)—(57), vom scrie ecuațiile (59) și (62) pentru determinarea parametrilor geometrici α și β în fiecare caz analizat.

Ecuațiile (59) și (62), împreună cu expresiile (48) ale coeficienților B_n, permit scrierea unui sistem algebric neliniar de două ecuații pentru determinarea mărimilor α și β:

$$\beta^2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{2\alpha A_1 + 3\alpha^2 A_2 + 4\alpha^3 A_3}{A_2 + 4\alpha A_3},$$
$$3A_3\beta^4 + (2A_1 + 6\alpha A_2 + 12\alpha^2 A_3)\beta^2 - 2P(k_{e_1} + k_{e_2}) = 0. \tag{64}$$

Determinînd α şi β din aceste ecuaţii, cu expresiile (48) se calculează coeficienţii B_n, cu formula (44) se calculează deplasarea locală, cu formula (58) se calculează coeficienţii C_n, iar cu expresia (18) se calculează funcţia de distribuţie a presiunii de contact.

Aceleaşi ecuaţii (59) şi (62), împreună cu expresiile (51) ale coeficienţilor B_n, duc la valorile

$$\alpha = 0\,;\quad \beta = \sqrt{\frac{P(k_{e_1} + k_{e_2})}{A_1}} \tag{65}$$

şi la deplasarea locală şi presiunea de contact

$$v_{l_{1,2}} = \frac{k_{e1.2}}{k_{e_1} + k_{e_2}} A_1 \left[\frac{P(k_{e_1} + k_{e_2})}{A_1} - x^2\right],$$
$$p(x) = -\frac{2A_1}{\pi(k_{e_1} + k_{e_2})} \sqrt{\frac{P(k_{e_1} + k_{e_2})}{A_1} - x^2}\,. \tag{66}$$

În expresia (65) a semilăţimii fişiei de contact β şi (66) a distribuţiei de presiuni, se recunosc formulele lui Hertz.

Expresiile (54) ale coeficienţilor B_n, împreună cu ecuaţiile (59) şi (62), dau ecuaţiile algebrice de gradul doi, respectiv trei, de forma

$$\beta^2 = -\frac{4\alpha A_1 + 6\alpha^2 A_2}{3A_2},$$
$$9\alpha^3 A_2 + 9\alpha^2 A_1 A_2 + 2\alpha A_1^2 + \frac{3}{2} P(k_{e_1} + k_{e_2}) A_2 = 0. \tag{67}$$

Aceasta este un alt caz în care se pot da expresii analitice pentru parametrii α şi β, prin rezolvarea ecuaţiei de gradul trei în α.

Deplasarea locală şi presiunea de contact capătă forma:

$$v_{l_{1,2}}(x) = \frac{k_{e_{1,2}}}{k_{e_1} + k_{e_2}} \{A_1 [(\alpha - \beta)^2 - x^2] + A_2 [(\alpha - \beta)^3 - x^3],$$
$$p(x) = -\frac{\sqrt{\beta^2 - (x - \alpha)^2}}{\pi(k_{e_1} + k_{e_2})} [2A_1 + 3\alpha A_2 + 3A_2 x]. \tag{68}$$

Ultimul caz analizat, expresiile (57) ale coeficienţilor B_n), cu ecuaţiile (59) şi (62), dau pentru α şi β soluţiile

$$\alpha = 0\,;\quad \beta = \sqrt{\frac{A_1}{3A_3} + \sqrt{\frac{A_1^2}{9A_3^2} + \frac{2P(k_{e_1} + k_{e_2})}{3A_3}}}\,. \tag{69}$$

Deplasarea locală şi presiunea de contact devin:

$$v_{l_{1,2}}(x) = \frac{k_{e_{1,2}}}{k_{e_1} + k_{e_2}} [A_1(\beta^2 - x^2) + A_3(\beta^4 - x^4)],$$
$$p(x) = \frac{\sqrt{\beta^2 - x^2}}{\pi(k_{e_1} + k_{e_2})} (2A_1 + 2A_3\beta^2 + 4A_3 x^2). \tag{70}$$

Vom exemplifica modul de aplicare și vom trage concluzii care se impun în două cazuri, cele mai frecvent întîlnite în practică : flancul arc de cerc și flancul evolventic.

În cazul danturilor cu profil arc de cerc, fenomenul de contact prezintă simetria în jurul punctului de contact fără sarcină. Ecuația profilului arc de cerc în jurul punctului de contact fără sarcină, limitîndu-ne la primii trei termeni ai seriei Mac-Laurin (figura 4) capătă forma :

$$y_1 + y_2 = \frac{x^2}{R} + \frac{x^4}{4R^3} + \frac{x^6}{8R^5} =$$

$$= \left(\frac{\beta^2}{2R} + \frac{3\beta^4}{32\,R^3} + \frac{5\beta^6}{128\,R^5}\right) + \left(\frac{\beta^2}{2R} + \frac{\beta^4}{8R^3} + \right. \tag{71}$$

$$\left. + \frac{15\,\beta^6}{256\,R^5}\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{\beta^4}{32\,R^3} + \frac{3\beta^6}{128\,R^5}\cos 4\varphi + \frac{\beta^6}{256\,R^5}\cos 6\varphi\right.$$

Se constată din formula (71) că numai pentru valori mici ale razelor de curbură a flancurilor este cazul a se folosi monoamele de grad superior. Uzual, primul termen al ecuației este suficient pentru studiul contactului elastic. Aceasta corespunde cu utilizarea ecuațiilor lui Hertz. În cazul razelor de curbură mici, considerarea celui de-al doilea termen al ecuației (71) este suficientă. Soluția este dată de ecuațiile (69) și (70). Pentru studiul danturii cu flanc evolventic se pot folosi relațiile (65)—(68). Pe cea

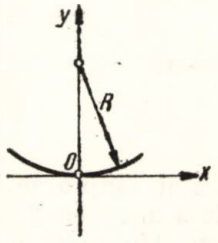


Fig. 4

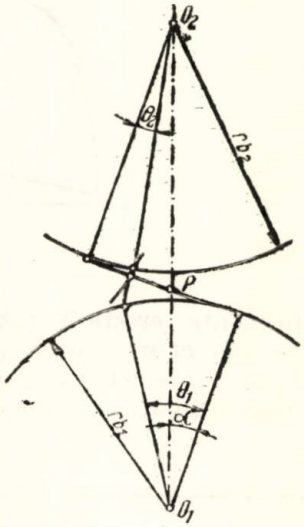


Fig. 5

mai mare porțiune a liniei de angrenare relațiile lui Hertz sînt reprezentative. În vecinătatea punctului K_1 de pe cercul de bază asimetria flancului se face simțită. Pînă la o anumită distanță se pot folosi relațiile (67) și (68). Apropierea mai mare de punctul K_1 comportă considerarea unui număr mai mare de termeni în ecuația flancului. Rezolvarea prin calcul a problemei comportă metode aproximative, grafice etc.

Primii doi coeficienți ai seriei de puteri a ecuațiilor flancurilor sînt dați de expresiile :

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1 r_{b_1}} \pm \frac{1}{\theta_2 r_{b_2}}\right); \quad A_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\theta_1^3 r_{b_1}^2} \mp \frac{1}{\theta_2^3 r_{b_2}^2}\right), \tag{72}$$

în care θ_1, θ_2, r_{b_1} și r_{b_2} au semnificațiile care decurg din figura 5.
În cazul angrenării a două roți cu profil evolventic, cu numerele de dinți $z_1 = 17$ și $z_2 = 86$ corespunzătoare raportului de transmisie standardizat $i_{1,2} = 5$, cu modulul $m = 5$ mm și unghiul de angrenare standardizat $\alpha = 20°$, pentru oțeluri ($E = 2{,}1.10^4$ kgf./mm^2), cu valoarea forței de contact $P = 21$ kgf/mm, în punctul de contact P' de pe linia de angrenare corespunzător valorii $\theta_1 = 0{,}05$ rad., se obțin cu formulele (72), (67) și (68) presiunea de contact și deplasarea locală date de ecuațiile :

$$p(\varphi) = -83{,}286 \sin\varphi - 18{,}332 \sin 2\varphi,$$

$$v_1(\varphi) = 6.10^{-5}(6{,}840 + 2{,}328 \cos\varphi - 5{,}289 \cos 2\varphi - 0{,}777 \cos 3\varphi),$$

$$x_{\mu m} = -15{,}5 + 76{,}4 \cos\varphi.$$

Tabela 1 conține valorile presiunii și ale deplasării locale pe cuprinsul zonei de contact. Pentru vizualizarea asimetriei contactului, în figura (6) sînt reprezentate aceste două funcții.

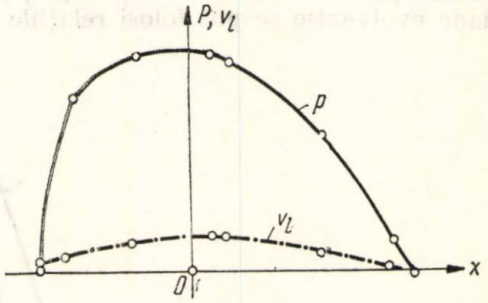


Fig. 6

Influența creșterii razei de curbură a flancului asupra întinderii zonei de contact și poziției medii a acesteia este redată în tabela 2, în care primul punct este cel analizat anterior, iar ultimul este chiar polul angrenării. β_n este semilățimea zonei , dată de formula lui Hertz

Tabela 1

φ	0°	30°	60°	79°6′	90°	120°	150°	180°
$x_{\mu m}$	60,9	50,7	22,8	−10,3	−15,5	−53,7	−81,6	−91,9
p kgf/mm^2	0	73,4	88,0	88,6	83,3	56,3	9,9	0
v_1 μm	0,19	0,37	0,68	0,76	0,73	0,45	0,13	0

Tabela 2

$\theta_{1\ rad}$	0,05	0,10	0,36397
$\beta_{\mu m}$	76,4	99,1	175,0
$\beta_{s\ \mu m}$	70,3	98,4	175,0
$\alpha_{\mu m}$	−15,5	−6,0	0

Se constată că deplasarea locală de contact elastic este foarte mică. În consecință, ea are o influență mică asupra fenomenelor dinamice. Nu se propune neglijarea influenței acestei deformații asupra deformației totale a dinților. Rezultă însă concluzia că între săgeată și deformație dependența este cvasiliniară, termenul neliniar — deformația locală — fiind mic în raport cu săgeta elastică totală.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Bezuhov, *Teoria elasticității și plasticității*, ediția I, București, Edit. tehnică, 1957, p.236—244 și 154—164.
2. E. Carafoli, *Aerodinamica*, București, Edit. tehnică, 1951, p. 145—146.
3. G. A. Galin, *Kontaktnie zadaci teorii uprugosti*, Gos. izdat. tehn. teor. lit., Moscova, 1953.
4. G. Hart, *Deformațiile elastice ale dinților drepți ai roților frontale*, Strojirenstvi, Praga, *3* (1963).
5. G. Kalandia, *Ob odnom priamom metode reșenia uravneniia teorii krila*, Matematiceskii sbornik, 1957, **42**, *2*, 249—272.
6. G. Manea, *Organe de mașini*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1958.
7. Ia. G. Popov, *Nekotorie svoistva klassiceskih mnogocilenov i ih primenenie k kontaktntm* Zadaciam, Prikl. matem. meh. 1953, **XXVII**, *5*, 821—832.
8. G. Schlaf, *Beitrag zu Steigerung der Trägfähigheit und Laufruhe geradverzahnter Stirnräder durch Profilrücknahme*, Dresda, Maschinenbautechnik, *11* (1962).
9. I. I. Staerman, *Kontaktnie zadaci teorii uprugosti*, Gostehizdat, Moscova, 1949.
10. V. L. Ustinenco, *Influența unor factori asupra tensiunilor de încovoiere în dinții roților dințate*, Vestnic Mașinostroenie, *11* (1962).
11. G. Manea, N. Boicu, I. Voica, *Deformațiile locale sub efectul presiunii în problema ungerii hidrodinamice*, St. cerc. mec. apl., *2* (1968).
12. N. Boicu, *Calculul forțelor care acționează în plăcile plane asamblate în puncte*, St. cerc. mec. apl. *1* (1968).
13. — *Influența asimetriei flancului asupra contactului elasticic al roților dințate*, St. cerc. mec. apl. *2* (1966).

CONTRIBUȚII LA DINAMICA VIBRAȚIILOR SUPAPELOR DE PRESIUNE DIN CIRCUITELE HIDRAULICE DE ACȚIONARE ALE MAȘINILOR-UNELTE

de ANDREI ALBU și EUGEN PAY
Institutul politehnic, Cluj

Studiind cercetările și soluțiile propuse de o serie de specialiști [1]—[5] etc., se constată o îmbunătățire continuă a construcției supapelor de presiune utilizate în circuitele mașinilor-unelte, însă, fără a se ține seama de influența sistemului de acționare (pulsația debitului și presiunii pompelor hidraulice), rezultatele obținute nu sînt cele optime.
În cadrul acestei lucrări se tratează dinamica vibrațiilor unor supape de presiune, avînd în vedere și influența vibrațiilor generate de sursa de acționare. Pe baza relațiilor obținute se pot determina (într-un sistem de acționare dat) parametrii geometrici și dimensionali ai supapelor de presiune, care lucrează fără zgomot, cu vibrații foarte reduse, practic neglijabile.
Supapele de presiune, utilizate sub forma supapelor de siguranță, de deversare, de reținere, de succesiune etc., intră în componența majorității circuitelor hidraulice de acționare ale mașinilor-unelte.

Fenomenul cel mai frecvent, care are o influență perturbatoare accentuată asupra circuitelor hidraulice de acționare, este vibrația acestor supape. De comportarea supapelor de presiune, de modul lor de reglare și de exploatare depinde, în mare măsură, funcționarea întregului circuit hidraulic.

Determinarea corectă, în faza de proiectare, a caracteristicilor tehnice ale acestor supape este o necesitate imperioasă.

Arcul și celelalte organe mobile ale supapelor, împreună cu lichidul din circuit, pot forma un sistem oscilant ale cărui oscilații, acționînd asupra întregului sistem de lucru, influențează calitatea pieselor prelucrate.

Supapele pot avea : oscilații forțate — întreținute de pulsația debitului pompei și de variația sarcinii motorului hidraulic — sau oscilații amortizate.

În cele ce urmează, se tratează metoda formulării unei ecuații diferențiale care definește mișcarea supapei în funcție de sistemul de acționare (pompa hidraulică) și de caracteristicile supapei, avînd la bază rezultatele

obținute [1], [7] la urmărirea trecerii statice a lichidului prin supapă și considerînd și unele efecte dinamice din curgerea nepermanentă [6].

În funcționarea lor, supapele de presiune (fig. 1) se află la așezarea pe sediu sub acțiunea forței de precomprimare a resortului P_0, determinată

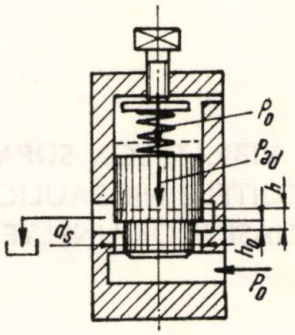


Fig. 1. — Schema de principiu a supapei de presiune.

cu relația

$$P_0 = p_0 \frac{\pi d_s^2}{4}, \tag{1}$$

n care

p_0 este presiunea limitată în circuit;

d_s — diametrul scaunului supapei,

și într-o poziție oarecare, sub acțiunea forței ascensionale P_a datorită curentului staționar, exprimată prin relația:

$$P_a = P_0 + G' + k.h, \tag{2}$$

unde

G' este greutatea supapei, a arcului și a pieselor intermediare, cufundate în lichidul de lucru;

$k \cdot h$ — forța de comprimare suplimentară a resortului;

k — constanta arcului;

h — înălțimea de ridicare a supapei.

În cazul curentului nestaționar, în urma presiunii dinamice a lichidului (cuprins între porțiunea de intrare și de ieșire a deschiderii supapei) și a forței de inerție a masei supapei, apare forța ascensională dinamică P_{a_d} de forma

$$P_{a_d} = \frac{G}{g} \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} + P_0 + G' + kh = P_0 + G' + kh + A_s p_i, \tag{3}$$

în care

G este greutatea supapei în vid;

g — accelerația gravitațională;

A_s — aria activă a supapei;

p_i — gradientul de presiune datorat forțelor de inerție.

Considerînd că oscilațiile supapei în jurul ridicării ei medii, h_0, sînt suficient de mici, vom presupune, pentru a liniariza ecuația, că debitul Q ce se scurge prin fanta supapei este direct proporțional cu diferența de

presiune de pe cele două fețe ale discului supapei, deci direct proporțional cu forța P_{a_d}. În această ipoteză, ecuația diferențială a mișcării *) devine

$$\frac{G}{g}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} + kh = k_1 Q - (P_0 + G'). \tag{4}$$

Considerînd că acționarea sistemului hidraulic are loc cu o pompă cu roți dințate care refulează un debit de lichid pulsatoriu, analiza dinamicii vibrațiilor se face ținînd cont de debitul instantaneu al pompei, exprimat prin relația

$$Q_{\text{inst}} = Q_{\min} + (Q_{\max} - Q_{\min}) \sin \varphi, \tag{5}$$

în care

$Q_{\min}$, $Q_{\max}$ este debitul minim, respectiv maxim al pompei;

φ — unghiul de poziție a danturii roților dințate, avînd valoarea $0 \ldots \frac{2\pi}{z}$.

Pentru valorile-limită $\varphi = 0$ și $\varphi = \frac{2\pi}{z}$ rezultă [8] debitul minim

$$Q_{\min} = b\omega\,(r_e^2 - r_r^2 - r_b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha), \tag{6}$$

iar pentru $\varphi = \frac{\pi}{z}$ rezultă debitul maxim

$$Q_{\max} = b\omega\left[r_e^2 - r_r^2 - r_b^2\left(\frac{\pi}{z} - \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right]. \tag{7}$$

Înlocuind în (5) relațiile (6) și (7) se obține

$$Q_{\text{inst}} = b\omega\,(r_e^2 - r_r^2 - r_b^2 \operatorname{tg}^2\alpha) + b\omega\, r_b^2\left[\operatorname{tg}^2 \alpha - \left(\frac{\pi}{z} - \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right]\sin \varphi, \tag{8}$$

unde

r_e este raza exterioară a roții dințate;

r_r — raza cercului de rostogolire;

r_b — raza cercului de bază;

b — lățimea roții dințate;

ω — viteza unghiulară;

α — unghiul de angrenare.

Debitul de lichid refulat de pompă, la trecerea prin fanta supapei, este modificat datorită valorii cantității de lichid rezultată din dislocarea produsă de mișcarea supapei, deci

$$Q = Q_{\text{inst}} - A_s \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\beta, \tag{9}$$

în care β este un coeficient de debit în funcție de forma supapei.

*) Vom observa, cu această ocazie, că ecuația completă a mișcării supapei automate a fost stabilită pentru prima dată în lucrarea [6], unde, din cauza neliniarității și a coeficienților variabili, s-a utilizat soluționarea ei numerică în condițiile la limită specifice pompelor cu piston.

Ecuația diferențială generală a mișcării supapei prin înlocuirea expresiei (9) în (4) ia forma :

$$\frac{G}{g}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} + A_s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\beta k_1 + k\cdot h = k_1 b\omega\,(r_e^2 - r_r^2 - r_b^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha) + \\ + k_1 b\omega\, r_b^2\left[\mathrm{tg}^2\,\alpha\left(\frac{\pi}{z} - \mathrm{tg}\alpha\right)^2\right]\sin\varphi - (P_0 + G'). \tag{10}$$

Notînd cu

$$2n = \frac{A_s\, g\beta\, k_1}{G},$$

$$m^2 = \frac{kg}{G},$$

$$A = \frac{k_1 b\omega\, g}{G}(r_e^2 - r_r^2 - r_b^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha) - \frac{g}{G}(P_0 + G'),$$

$$B = \frac{k_1 b\omega\, r_b^2\, g}{G}\left[\mathrm{tg}^2\,\alpha - \left(\frac{\pi}{z} - \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\right],$$

$$\omega t = \varphi,$$

ecuația (10) se poate scrie

$$\frac{d^2h}{\mathrm{d}t^2} + 2n\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + m^2 h = A + B\sin\omega t. \tag{11}$$

Ecuația caracteristică a ecuației omogene are forma $r^2 + 2nr + m^2 = 0$, a cărei soluție este

$$r_{1,2} = -n + \sqrt{n^2 - m^2}.$$

Pentru cazurile :

a) cînd $n^2 - m^2 = 0$, soluția are forma

$$H = \mathrm{e}^{-nt}(C_1 + C_2 t); \tag{12}$$

b) cînd $n^2 - m^2 < 0$, soluția are forma

$$H = \mathrm{e}^{-nt}(C_1 \sin m_1 t + C_2 \cos m_1 t), \tag{13}$$

unde $m_1 = \sqrt{m^2 - n^2}$;

c) cînd $n^2 - m^2 > 0$, soluția are forma

$$H = \mathrm{e}^{-nt}(C_1\,\mathrm{e}^{\delta t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\delta t}), \tag{14}$$

unde $\delta = \sqrt{n^2 - m^2}$.

Soluția particulară a ecuației (11) se compune din două părți, corespunzătoare celor doi termeni ai membrului doi, și anume :

$$h_1 = C$$

și

$$h_2 = C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t, \quad \text{în cazul cînd} \quad -n \pm \sqrt{n^2 - m^2} \neq i\omega.$$

Vom remarca, cu această ocazie, că s-a exclus cazul $-n \pm \sqrt{n^2 - m^2} = i\omega$, deoarece n este totdeauna real și diferit de zero.

Punînd condiția ca soluția particulară să verifice identic ecuația (11), vom determina constantele ei

$$C = \frac{A}{m^2}; \qquad C_3 = \frac{(m^2 - \omega^2) B}{(m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2},$$

$$C_4 = \frac{-2n \omega B}{(m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}$$

și atunci vom avea

$$h_1 = \frac{A}{m^2},$$

$$h_2 = \frac{(m^2 - \omega^2) B \sin \omega t}{(m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} - \frac{2n\omega B \cos \omega t}{(m^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}.$$

În consecință, soluția generală a ecuației neomogene (11), pentru cele trei cazuri, este de forma:

$$a) \qquad h = e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + h_1 + h_2, \tag{15}$$

$$b) \qquad h = e^{-nt} (C_1 \sin m_1 t + C_2 \cos m_1 t) + h_1 + h_2, \tag{16}$$

$$c) \qquad h = e^{-nt} (C_1 e^{\delta t} + C_2 e^{-\delta t}) + h_1 + h_2. \tag{17}$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se pot determina [2] punînd următoarele condiții inițiale:

$$t = 0; \quad h = h_0; \quad \frac{dh}{dt} = 0.$$

Odată constantele C_1 și C_2 determinate și soluția obținută, putem cunoaște în fiecare moment viteza supapei $v = \frac{dh}{dt}$ și accelerația ei $a = \frac{d^2h}{dt^2}$.

În concluzie, relațiile (15), (16) și (17) caracterizează în cele trei cazuri, a), b) și c), mișcarea oscilatorie a supapelor din sistemele hidraulice de acționare a mașinilor-unelte, ținînd seama, în afara parametrilor lor constructivi și funcționali, și de influența sursei de acționare. În acest fel, problema importantă a reducerii parțiale sau totale a vibrațiilor din aceste circuite, cercetată de noi și cu altă ocazie [9], capătă un nou aspect chiar de la proiectare.

Primită la redacție la 2 Martie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. V. M. Siniţki, *Despre dinamica supapelor de acţionare a pompelor hidraulice*, I.D.T., Buletinul construcţiilor de maşini 1, (1960).
2. E. Botez, *Acţionarea hidraulică a maşinilor -unelte*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1955.
3. C.R. Himmler, *La commande hydraulique*, Paris, Dunod, 1960.
4. A. Dürr, O. Wachter, *Hydraulische Antriebe und Druckmittelsteuerungen an Werkzeugmaschinen*, München, C. Hanser Verlag, 1955.
5. O. Szittya, *Biztonsági es tulfolyoszelepek vizsgálata*, Gép, nr. 2, 1961.
6. M. Cazacu, V. Nistreanu, *Mişcarea supapelor automate ale unei pompe cu piston acţionată prin bielă manivelă*, Comunicările conferinţei de maşini hidraulice din sept. 1964, Timişoara, vol. III, p. 183.
7. V. I. Zaiţev, *Issledovanie rabotî, klapanov porşnevîh nasosov*, Dissertaţiia, Moskva, 1954.
8. A. Oprean ş.a. *Sistemele hidrostatice ale maşinilor-unelte şi preselor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
9. A. Albu, ş. a. *Studiul dinamicii inversării motorului hidraulic rectiliniu în funcţie de sistemul de acţionare*, Buletinul ştiinţific, *8* (1965), Institutul politehnic Cluj.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA MECANISMELOR PE BAZA ALGORITMULUI DE FORMARE A CURBELOR DE ÎNFĂȘURARE LINIARĂ

de N. ORLANDEA
Institutul politehnic, Cluj

În lucrare autorul a introdus coordonatele omogene tangențiale rezultînd din relațiile valabile chiar și pentru dreptele care trec prin originea axelor considerate. În concluzie se arată că orice curbă plană poate fi înfășurată cu mecanisme de ordinul II.
În continuare se dă o metodă bazată pe un sistem de mecanisme cu două grade de mobilitate și, ca aplicare practică, se prezintă un dispozitiv pentru rectificări de profiluri.

1) Se consideră un mecanism desmodrom cu k grade de mobilitate (fig. 1).

Parametrii cunoscuți, funcții de timp, care determină poziția mecanismului la un moment dat sînt coordonatele generalizate $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\ldots$, $q_k(t)$.

Fie legate invariabil de elementul n al mecanismului dreapta (D) și sistemul x_nAy_n.

Ecuația dreptei (D) în sistemul x_nAy_n va fi

$$y_n = x_n \operatorname{tg} \gamma + d. \tag{1}$$

În continuare se va scrie ecuația aceleiași drepte în sistemul fix xOy. Pentru aceasta va trebui determinată poziția elementului n. Cele trei funcții care-i determină poziția sa la un moment dat sînt:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ y_A &= y_A(q_1, q_2, \ldots, q_k) \end{aligned} \tag{2}$$

și

$$\varphi_n = \varphi_n(q_1, q_2, \ldots q_k). \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 731–745, BUCUREȘTI, 1969

Relaţiile de trecere de la sistemul x_nAy_n la xOy sînt :

$$\begin{aligned} x_n &= (x - x_A)\cos\psi_n + (y - y_A)\sin\psi_n, \\ y_n &= (y - y_A)\cos\psi_n - (x - x_A)\sin\psi_n. \end{aligned} \tag{4}$$

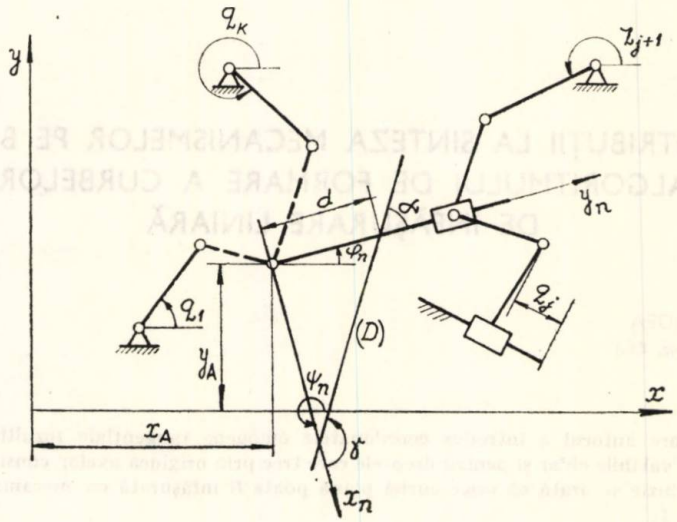


Fig. 1

Din figura 1 rezultă că $\psi_n = \varphi_n + \dfrac{3\pi}{2}$, prin urmare ecuaţiile (4) devin :

$$\begin{aligned} x_n &= (x - x_A)\sin\varphi_n - (y - y_A)\cos\varphi_n, \\ y_n &= (x - x_A)\cos\varphi_n + (y - y_A)\sin\varphi_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Prin înlocuirea formulelor (5) în (1) se obţine ecuaţia dreptei (D) în sistemul fix xOy

$$(x - x_A)M - (y - y_A)N + d = 0, \tag{6}$$

unde

$$N = \cos\varphi_n \operatorname{tg}\gamma + \sin\varphi_n \quad \text{şi} \quad M = \sin\varphi_n \operatorname{tg}\gamma - \cos\varphi_n. \tag{7}$$

În cele ce urmează se vor elabora ecuaţiile înfăşurătorii în coordonate tangenţiale.

Ecuaţia (6) se mai poate scrie

$$Mx - Ny + Ny_A - Mx_A + d = 0. \tag{8}$$

Notînd

$$Ny_A = Mx_A + d = P, \tag{9}$$

ecuaţia (8) devine

$$Mx - Ny + P = 0. \tag{10}$$

Introducînd coordonatele omogene x_1, x_2, x_3 și coordonatele omogene tangențiale ξ_1, ξ_2, ξ_3, relația (10) va fi :

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0, \tag{11}$$

unde

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{M}{P} \quad \text{și} \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = -\frac{N}{P}. \tag{12}$$

Ținînd seama de valorile lui M, N și P, date de relațiile (7) și (9), se obține :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sin \varphi_n \operatorname{tg} \gamma - \cos \varphi_n, \\ \xi_2 &= -\cos \varphi_n \operatorname{tg} \gamma + \sin \varphi_n, \end{aligned} \tag{13}$$

$\xi_3 = y_A (\cos \varphi_n \operatorname{tg} \gamma + \sin \varphi_n) - x_A (\sin \varphi_n \operatorname{tg} \gamma - \cos \varphi_n) + d$
sau, după o serie de simplificări,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\cos (\varphi_n + \gamma)}{\cos \gamma}, \\ \xi_2 &= -\frac{\sin (\varphi_n + \gamma)}{\cos \gamma}, \\ \xi_3 &= \frac{y_A \sin (\varphi_n + \gamma) + x_A \cos (\varphi_n + \gamma) + d \cos \gamma}{\cos \gamma}. \end{aligned} \tag{14}$$

În tabela 1 s-au dat cîteva exemple de formare a curbelor de înfășurare liniară, în coordonate tangențiale, la diferite tipuri de mecanisme cu două grade de mobilitate.

Din punct de vedere practic, problema are sens în felul următor fiind dată o curbă

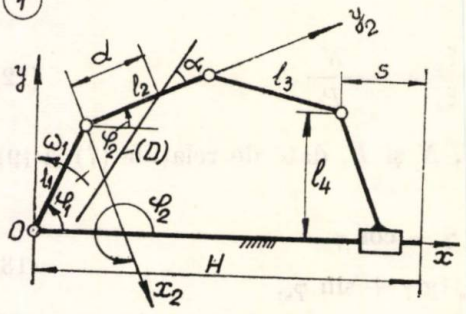
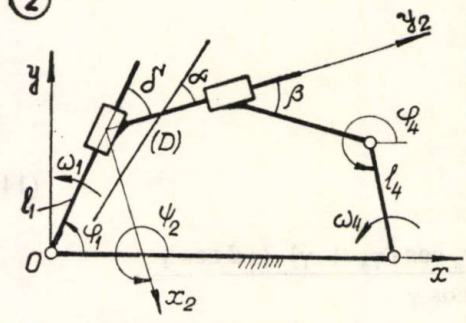
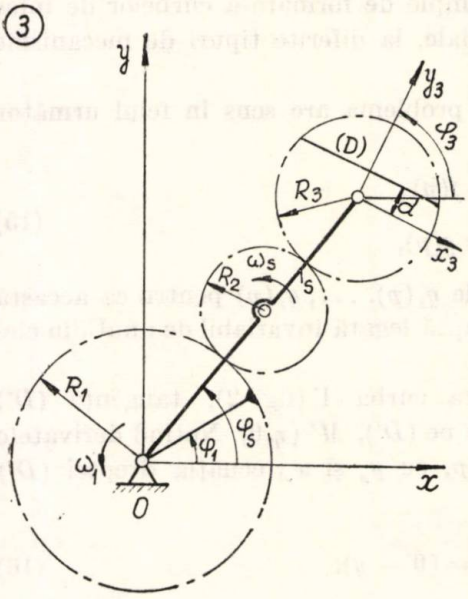
$$\begin{aligned} y &= f(p); \\ x &= g(p), \end{aligned} \tag{15}$$

să se determine care sînt coordonatele $q_1(p), \ldots, q_k(p)$ pentru ca această curbă să poată fi înfășurată de o dreaptă legată invariabil de unul din elementele unui mecanism.

Pentru aceasta se va considera curba Γ (fig. 2), tangența (D') în punctul $M(x, y)$ și un punct curent pe (D'), $M'(\eta, \theta)$. Notînd derivatele lui y și x în raport cu parametrul p, cu y_p și x_p, ecuația dreptei (D') va fi

$$(\eta - x) \frac{y_p}{x_p} = (\theta - y). \tag{16}$$

Tabela 1

Schiţa mecanismului	Coordonatele omogene ale curbelor de formare liniară
① 	$\xi_1 = -\sin(\varphi_2 + \alpha)$ $\xi_2 = \cos(\varphi_2 + \alpha)$ $\xi_3 = l_1 \sin[\alpha + (\varphi_2 - \varphi_1)] + d\sin\alpha$
② 	$\xi_1 = -\sin[\varphi_1 + (\alpha - \delta)]$ $\xi_2 = \cos[\varphi_1 + (\alpha - \delta)]$ $\xi_3 = l_1 \sin(\alpha - \delta) + d\sin\alpha$
③ 	$\xi_1 = \cos\{[\varphi_s(i^s_{13} - 1) + \varphi_1]/i^s_{13}\}$ $\xi_2 = -\sin\{[\varphi_s(i^s_{13} - 1) + \varphi_1]/i^s_{13}\}$ $\xi_3 = (R_1 + 2R_2 + R_3)\cos[i^s_{13}(\varphi_1 + \varphi_s)] + d_2.$

Introducînd coordonatele omogene x_1, x_2, x_3 și coordonatele omogene plükeriene ξ'_1, ξ'_2 și ξ'_3, ecuația dreptei se poate scrie

$$\xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \xi'_3 x_3 = 0, \tag{17}$$

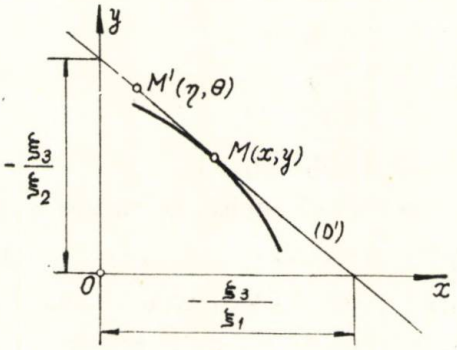


Fig. 2

unde

$$\frac{x_1}{x_3} = \eta, \quad \frac{x_2}{x_3} = \theta \tag{18}$$

și

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= y_p, \\ \xi'_2 &= -x_p, \\ \xi'_3 &= yx_p - xy_p. \end{aligned} \tag{19}$$

Pentru ca cele două familii de drepte, (14) și (19), că coincidă, trebuie ca

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{\xi'_1}{\xi'_3} \quad \text{și} \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\xi'_2}{\xi'_3}. \tag{20}$$

Înlocuind (19) și (14) în relația (20), rezultă :

$$\begin{aligned} \frac{-\cos(\varphi_n + \gamma)}{y_A \sin(\varphi_n + \gamma) + x_A \cos(\varphi_n + \gamma) + d\cos\gamma} &= \frac{y_p}{yx_p - xy_p}, \\ \frac{-\sin(\varphi_n + \gamma)}{y_A \sin(\varphi_n + \gamma) + x_A \cos(\varphi_n + \gamma) + d\cos\gamma} &= -\frac{x_p}{yx_p - xy_p}. \end{aligned} \tag{21}$$

Luînd în considerare relațiile (2) și (3), ecuațiile (21) se pot scrie sub forma generală :

$$\begin{aligned} F_1(q_1, \ldots, q_k, p) &= 0, \\ F_2(q_1, \ldots, q_k, p) &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Din relațiile (22) rezultă că, pentru a înfășura o curbă Γ cu ajutorul unui mecanism plan format din lanțuri cinematice complexe, se pot adopta, arbitrar, sau calcula, din condiții de optimizare, $k-2$ parametri, dacă

vor fi îndeplinite anumite restricţii impuse de teorema de existenţă a funcţiilor implicite [22].

Fie coordonatele generalizate care se vor determina în funcţie de p, q_j şi q_{j+1}. În acest caz trebuie îndeplinită următoarea condiţie :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_j} & \frac{\partial F_1}{\partial q_{j+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_j} & \frac{\partial F_2}{\partial q_{j+1}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

Dacă relaţia (23) este îndeplinită, se va putea scrie :

$$\begin{aligned} q_j &= f_1(q_1, \ldots q_{j-1}, q_{j+2}, \ldots, q_k, p), \\ q_{j+1} &= f_2(q_1, \ldots q_{j-1}, q_{j+2}, \ldots, q_k, p). \end{aligned} \tag{24}$$

În consecinţă, atît din (24), cît şi din relaţia (22), rezultă că, pentru a putea înfăşura o curbă plană în modul arătat în această lucrare, sînt suficiente mecanismele cu două grade de mobilitate, respectiv $k = 1, 2$. Cele mai simple mecanisme cu două grade de mobilitate se formează cu ajutorul grupelor structurale care au ordinul II (clasificarea Assur).

Pentru aceste tipuri de mecanisme, formulele (22), (23) şi (24) se particularizează :

$$\begin{aligned} F_1(q_1, q_2, p) &= 0, \\ F_2(q_1, q_2, p) &= 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{26}$$

şi

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(p), \\ q_2 &= f_2(p). \end{aligned} \tag{27}$$

Dacă condiţiile (26) nu sînt îndeplinite, în ipoteza că razele de curbură ale porţiunii de curbă considerate au acelaşi semn, rezultă că mecanismul adoptat nu a fost bine dimensionat, punîndu-se astfel probleme de sinteză a mecanismelor cu mai multe grade de mobilitate.

În cele ce urmează se propune o sinteză a mecanismelor cu două grade de mobilitate în aşa fel încît restricţia (26) să fie în permanenţă îndeplinită. Considerînd un sistem de axe de coordonate xOy (fig. 3) şi ţinînd seama şi de ecuaţia (16), ecuaţia dreptei (D'') perpendiculară pe (D'), ce trece prin origine, va fi

$$\theta = -\frac{x_p}{y_p}\eta. \tag{28}$$

Intersectînd dreapta (D') cu (D'') și explicitînd pe θ și η, se obține

$$\eta = \frac{(y_p x - y x_p) y_p}{y_p^2 + x_p^2}, \qquad \theta = \frac{(x_p y - y_p x) x_p}{y_p^2 + x_p^2} \tag{29}$$

sau, ținînd seama de relațiile (19), se va scrie

$$\eta = \frac{\xi_3' \xi_1'}{\xi_1'^2 + \xi_2'^2}, \quad \theta = \frac{\xi_3' \xi_2'}{\xi_1'^2 + \xi_2'^2}. \tag{30}$$

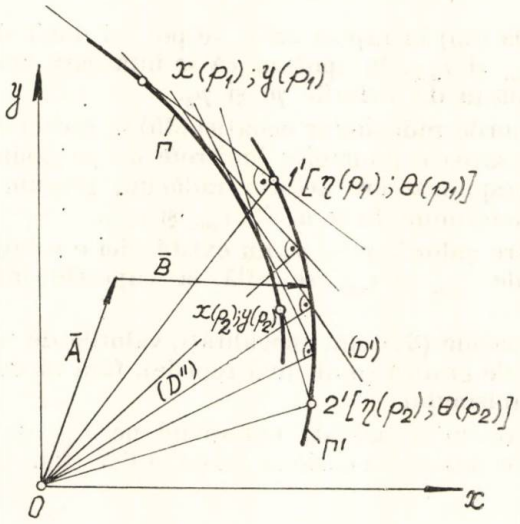


Fig. 3

Formulele (30) reprezintă ecuația podarei curbei Γ în raport cu polul 0.

Considerînd curba Γ' dată de ecuațiile (30) (fig. 3), se știe că ea poate fi descrisă cu ajutorul a doi vectori, $\overline{A}$ și $\overline{B}$ de lungime constantă, dacă modulele lor au anumite valori (vîrful vectorului $\overline{B}$ să se afle în permanență pe curbă).

Din figura 3 se poate scrie :

$$A + B \geqslant r_{\max} \quad \text{și} \quad A - B \leqslant r_{\min}. \tag{31}$$

De aici se obține

$$B \geqslant \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} \quad \text{și} \quad r_{\max} - B \leqslant A \leqslant B + r_{\min}. \tag{32}$$

Pentru a fi posibilă această dimensionare trebue găsite valorile $r_{\max}$ și $r_{\min}$.

Determinînd funcţia

$$r(p) = \sqrt{\eta^2 + \theta^2} \tag{33}$$

şi derivînd-o în raport cu p, rezultă

$$\frac{dr}{dp} = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \left(\eta \frac{d\eta}{dp} + \theta \frac{d\theta}{dp} \right). \tag{34}$$

Punînd condiţia de minim

$$\frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \left(\eta \frac{d\eta}{dp} + \theta \frac{d\theta}{dp} \right) = 0, \tag{35}$$

şi rezolvînd relaţia (35) în raport cu p, se pot ivi două situaţii pentru determinarea lui r_{max} şi r_{min}, în ipoteza că se înfăşoară doar o porţiune din curba dată delimitată de valorile p_1 şi p_2.

a) Dacă valorile rădăcinilor ecuaţiei (35) se încadrează între valorile p_1 şi p_2, corespunzătoare punctelor limitrofe de pe podară, se calculează valorile lui r corespunzătoare acestor rădăcini, precum şi valorile lui r pentru p_1 şi p_2, determinîndu-se astfel r_{min} şi r_{max}.

b) Dacă între valorile p_1 şi p_2 nu există nici o soluţie a ecuaţiei (35), rezultă că valorile r_{max} şi r_{min} se află la capetele intervalului de pe podară.

Deoarece relaţiile (32) sînt inegalităţi, valorile de mai sus pot fi determinate şi pe cale grafică (mult mai repede), fără să influenţeze precizia funcţionării mecanismului.

Pe baza calculului arătat, cunoscînd pe r_{max} şi r_{min} cu ajutorul formulelor (32), se poate dimensiona diada OMN (fig. 4*a*)

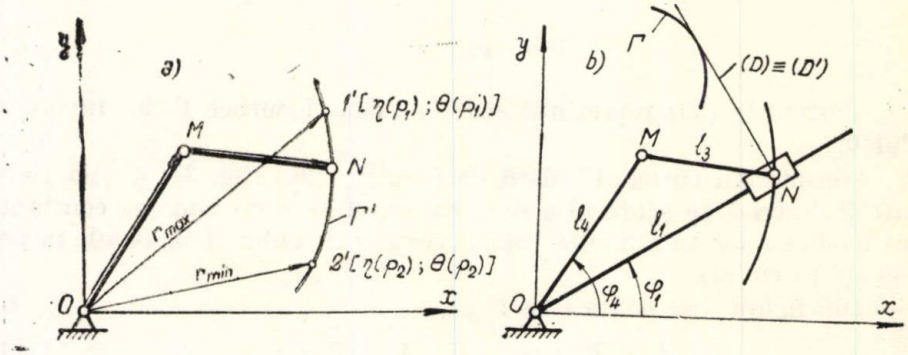


Fig. 4

Introducînd în N o cuplă prismatică, al cărei ghidaj corespunde cu direcţia lui $r(p)$, sudînd de ea dreapta (D) perpendiculară pe r, rezultă mecanismul din figura 4*b*, capabil să asigure ca dreapta (D) să înfăşoare arcul de pe curba Γ, dacă se determină legile de mişcare $q_2' = \varphi_1(p)$ şi $q_1 = \varphi_4(p)$. Acest lucru se face cu ajutorul formulelor (21) particularizate pentru mecanismul considerat.

Astfel, ținînd seama de faptul că pentru mecanismul dimensionat ca mai sus

$$\gamma = \pi, \quad d = 0 \text{ și } l_1 = r,$$

relațiile (21) devin :

$$\begin{aligned} -\frac{\cos \varphi_1}{l_1} &= \frac{y_p}{yx_p - xy_p}, \\ \frac{\sin \varphi_1}{l_1} &= -\frac{x_p}{yx_p - xy_p}. \end{aligned} \tag{36}$$

Ecuațiilor (36) li se mai poate ataşa expresia

$$l_1^2 - 2\, l_4 l_1 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) + (l_4^2 - l_3^2) = 0. \tag{37}$$

Cu ajutorul sistemului format din ecuațiile (36) și (37) se pot determina funcțiile $\varphi_1(p)$ și $\varphi_4(p)$.

După rezolvare se obține :

$$q_1 = \varphi_4(p) = \arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2)(y_p^2 + x_p^2) + (yx_p - xy_p)^2}{2\, l_4 (\sqrt{y_p^2 + x_p^2})\,(yx_p - xy_p)} - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{x_p}{y_p}\right),$$

$$q_2' = \varphi_1(p) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_p}{y_p}\right),$$

sau, ținînd seama de relațiile (19), rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_4(p) &= \arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2)(\xi_1'^2 + \xi_2'^2) + \xi_3'^2}{2\, l_4 \xi_3' \sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2}}, \\ \varphi_1(p) &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_2'}{\xi_1}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

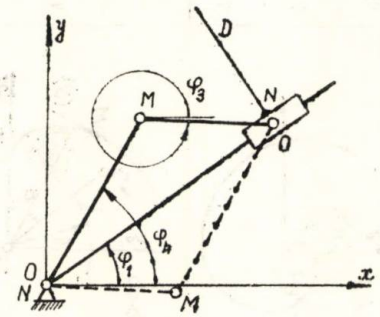
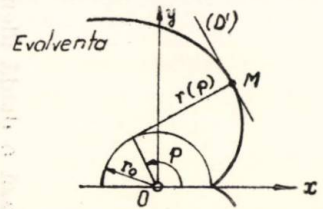
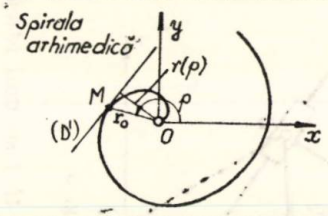
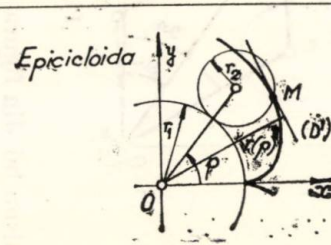
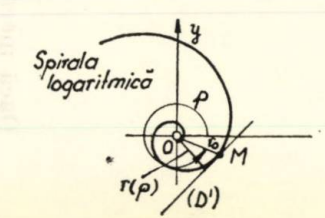


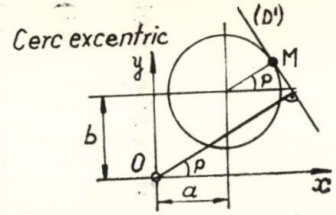
Fig. 5

Dacă mecanismului din figura 4*b* i se mai atașează o diadă identică cu diada OMN în așa fel ca l_3 să devină un element articulat la batiu, iar l_4 în N ca în figura 5, cele două coordonate generalizate, care vor determina poziția mecanismului, vor fi

$$q_1 = \varphi_4(p) \text{ și } q_2 = \varphi_3(p). \tag{39}$$

Tabela 2

Nr. crt.	Curba		Coordonatele (funcții de p)
1.		$q_1 = \varphi_4(p)$	$\frac{\pi}{2} + \frac{(l_3^2 - l_4^2 - r_0^2 p^2}{2 l_4 r_0 p} + p$
		$q_2' = \varphi_1(p)$	$\frac{\pi}{2} + p$
		$q_2 = \varphi_3(p)$	$\frac{\pi}{2} + \frac{(l_4^2 - l_3^2) - r_0^2 p^2}{2 l_3 r_0 p} + p$
2.		$q_1 = \varphi_4(p)$	$\arccos \frac{(l_3^2 - l_4^2)(1 + p^2) + a^2 p^4}{2 l_4 a \sqrt{1 + p^2} \cdot p^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{p \sin p - \cos p}{p \cos p + \sin p}$
		$q_2' = \varphi_1(p)$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{p \sin p - \cos p}{p \cos p + \sin p}$
		$q_2 = \varphi_3(p)$	$\arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2)(1 + p^2) + a^2 p^4}{2 l_3 a \sqrt{1 + p^2} \cdot p^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{p \sin p - \cos p}{p \cos p + \sin p}$
3.		$q_1 = \varphi_4(p)$	$\arccos \frac{(l_3^2 - l_4^2) - (r_1 + 2r_2) \sin^2 \frac{r_1}{r_2} p}{l_4 (r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2) \sin \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{p}{2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\left(p + \frac{r_1}{r_2} p\right) - \sin p}{\cos p - \cos\left(p - \frac{r_1}{r_2} p\right)}$
		$q_2' = \varphi_1(p)$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\left(p + \frac{r_1}{r_2} p\right) - \sin p}{\cos p - \cos\left(p - \frac{r_1}{r_2} p\right)}$
		$q_2 = \varphi_3(p)$	$\arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2) - (r_1 + 2r_2) \sin^2 \frac{r_1}{r_2} p}{l_4 (r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2) \sin \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{p}{2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\left(p + \frac{r_1}{r_2} p\right) - \sin p}{\cos p - \cos\left(p - \frac{r_1}{r_2} p\right)}$
4.		$q_1 = \varphi_4(p)$	$\arccos \frac{(l_3^2 - l_4^2)(m^2 + 1) - a^2 e^{2mp}}{2 l_4 a e^{mp} \sqrt{m^2 + 1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin p - m \cos p}{\cos p + m \sin p}$
		$q_2' = \varphi_1(p)$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin p - m \cos p}{\cos p + m \sin p}$
		$q_2 = \varphi_3(p)$	$\arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2(m^2 + 1) - a^2 e^{2mp}}{2 l_3 a e^{mp} \sqrt{m^2 + 1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin p - m \cos p}{\cos p + m \sin p}$

5.		$q_1 = \varphi_4(p)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_3^2 - l_4^2) - (b\sin p + a\cos p + r)^2}{2l_4(b\sin p + a\cos p + r)} + \dfrac{\pi}{2} + p$
		$q_2' = \varphi_1(p)$	$\dfrac{\pi}{2} + p$
		$q_2 = \varphi_3(p)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_4^2 - l_3^2) + (b\sin p + a\cos p + r)^2}{2l_4(b\sin p + a\cos p + r)} + \dfrac{\pi}{2} + p$
6.	Legea de variație a spațiului dată de camă — parabolică	$q_1 = \varphi_4(p_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_4^2 - l_3^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{2h}{p'^2}\cdot p_1^2}{2l_4\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{2h}{p'^2}\cdot p_1^2\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$
		$q_2' = \varphi_1(p_1)$	$\dfrac{\pi}{2} - p_1$
		$q_2 = \varphi_3(p_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_3^2 - l_4^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{2h}{p'^2}\cdot p_1^2}{2l_3\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{2h}{p'^2}\cdot p_1^2\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$
7.	Legea de variație a spațiului dată de camă — sinusoidală înclinată	$q_1 = \varphi_4(q_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_4^2 - l_3^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + h\left(\frac{p_1}{p'} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{p_1}{p'}\right)}{2l_4\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + h\left(\frac{p_1}{p'} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{p_1}{p'}\right)\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$
		$q_2' = \varphi_1(p_1)$	$\dfrac{\pi}{2} - p_1$
		$q_2 = \varphi_3(p_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_3^2 - l_4^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + h\left(\frac{p_1}{p'} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{p_1}{p'}\right)}{2l_3\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + h\left(\frac{p_1}{p'} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{p_1}{p'}\right)\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$
8.	Legea de variație a spațiului dată de camă — cosinusoidală	$q_1 = \varphi_4(p_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_4^2 - l_3^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{p'}p_1\right)}{2l_4\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{p'}p_1\right)\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$
		$q_2' = \varphi_1(p_1)$	$\dfrac{\pi}{2} - p_1$
		$q_2 = \varphi_3(p_1)$	$\text{arc cos}\ \dfrac{(l_3^2 - l_4^2) + (R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{p'}p_1\right)}{2l_3\left[(R_0 + a\cos p_1 + b\sin p_1) + \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{p'}p_1\right)\right]} + \left(\dfrac{\pi}{2} - p_1\right)$

Aceste coordonate se pot calcula de asemenea cu ajutorul sistemului format din ecuațiile (36) și (37).

Astfel, ținînd seama de relațiile (19), rezultă:

$$q_1 = \varphi_4(p) = \arccos \frac{(l_4^2 - l_3^2)\ (\xi_1'^2 + \xi_2'^2) + \xi_3'^2}{2l_4\xi_3' \sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_2'}{\xi_1'}\right),$$
$$q_2 = \varphi_3(p) = \arccos \frac{(l_3^2 - l_4^2)\ (\xi_1'^2 + \xi_2'^2) + \xi_3'^2}{2l_3\xi_3' \sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_2'}{\xi_1'}\right). \tag{40}$$

Prin urmare, pentru diferite curbe date analitic, se pot calcula funcțiile $\varphi_1(p)$, $\varphi_4(p)$ și $\varphi_3(p)$. În tabela 2 s-au dedus coordonatele generalizate q_1, q_2' și q_2 pentru cele mai uzuale curbe tehnice.

O importanță foarte mare o prezintă cunoașterea acestor funcții în ipoteza că dreapata (D) înfășoară profilul unor came cu disc plan. Deoarece aceste came au în unele cazuri gabarite mici, pentru generarea lor se va utiliza polul O', căruia îi corespunde podara Γ'', ca în figura 6.

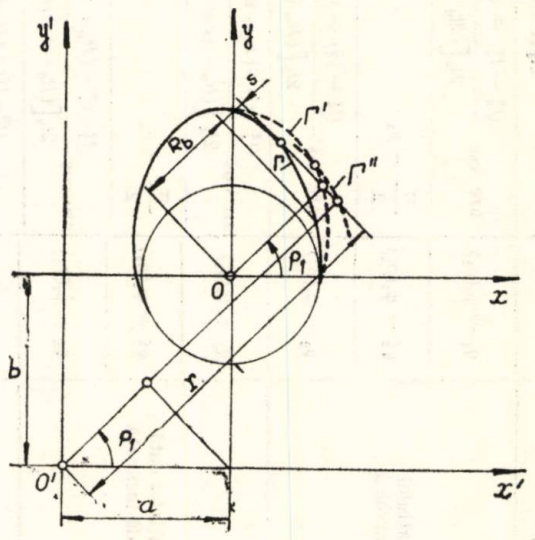


Fig. 6

După cum reiese din figură, ecuațiile parametrice ale curbei sînt

$$x = (R_0 + s + a\cos P_1 \text{ e } b\sin p_1)\cos p_1,$$
$$y = (R_0 + s + a\cos p_1 + b\sin p_1)\sin p_1, \tag{41}$$

unde a și b sînt constante care se pot adopta practic, R_0 este raza cercului de bază, s este legea de variație a spațiului și $p = p_1$.

Notînd pe

$$R_0 + s + a\cos p_1 + b\sin p_1 = B, \tag{42}$$

ecuația dreptei D' devine

$$-(\eta - B\cos p_1)\frac{1}{\operatorname{tg} p_1} = \theta - B\sin p_1 \tag{43}$$

sau, după calcule,

$$\eta\cos p_1 + \theta\sin p_1 - B = 0. \tag{44}$$

De aici se pot scrie coordonatele omogene tangențiale :

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \cos p_1, \\ \xi_2' &= \sin p_1, \\ \xi_3' &= -B. \end{aligned} \tag{45}$$

Luînd în considerare relațiile (42), (45), (40) și (38), în tabela 2 s-au determinat funcțiile $q_1 = \varphi_4(p)$; $q'_2 = \varphi_1(p)$ și $q_2 = \varphi_3(p)$ pentru trei legi de variație a spațiului : parabolică, sinusoidală și cosinusoidală.

2) Aplicarea teoriei prezentate pentru construcția mașinilor de rectificat sau prelucrat suprafețe cilindrice și elicoidale după profiluri care respectă condițiile deja arătate este posibilă, la ora actuală numai prin introducerea unor motoare electrice pas cu pas.

Frecvența impulsurilor primite de aceste motoare pe baza unui program trebuie să fie proporțională cu φ_1 și φ_4 sau φ_4 și φ_3, date de formulele (38) sau (40) în funcție de varianta mecanismului adoptat.

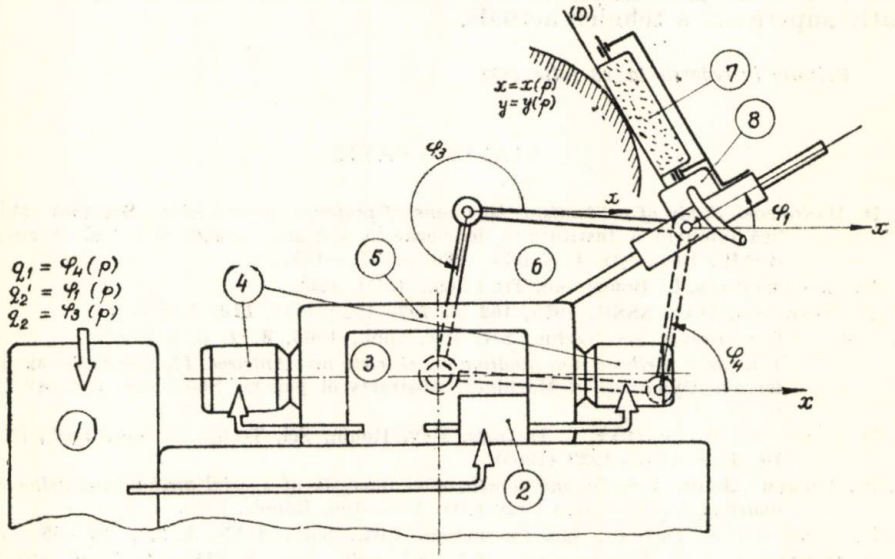


Fig. 7

Pentru edificare s-a conceput schema de principiu a unei mașini de rectificat (fig. 7).

Funcționarea unei astfel de mașini decurge în felul următor : relațiile (38) și (40), transcrise într-un limbaj codificat, fie ALGOL sau Fortran, se introduc într-o mașină electronică cifrică de calcul (1), (fig. 7), care

calculează pentru seria de valori adoptate ale lui p valorile lui φ_1, φ_4 și φ_3, pe care apoi le transformă în impulsuri. Aceste impulsuri, fie că se înscriu pe bandă perforată sau magnetică și după aceea se introduc în dispozitivul (2), fie că se introduc direct de la mașina de calcul, ajungînd la dispozitivul de amplificare (3). Mai departe, semnalele sînt trimise la cele două motoare pas cu pas (4), care le transformă în rotații finite. Motoarele (4) acționează cîte un angrenaj melcat duplex, pentru scoaterea jocurilor, ca în [21], montate în reductorul (5). Roțile melcate vor acționa elementele motoare ale mecanismului (6), iar piatra (8), acționată de turbina (7), va înfășura profilul (9).

Dînd mișcări convenabile piesei, se pot obține suprafețe cilindrice și elicoidale.

Datorită reducției (5), eroarea care apare ca urmare a acționării discrete a motoarelor electrice este sub 10^{-4} mm pentru rapoarte de transmitere uzuale a angrenajelor melcate.

Descrierea părților componente ale schemei prezentate va constitui obiectul unor alte lucrări.

Rentabilitatea mașinilor-unelte cu comandă cifrică este bună, după cum se știe, atît în cazul seriilor mici, datorită elasticității programului, cît și în cazul seriilor mari, datorită automatizării procesului de fabricație.

În ambele cazuri însă, se mărește precizia și se respectă forma complicată a pieselor prelucrate, ceea ce concordă cu dezvoltarea rapidă și calitativ superioară a tehnicii actuale.

Primită la redacție la 26 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Study of mechanisms by means of projective co-ordinates.* Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București, 4—7 iulie 1960, p. 371—372.
2. Ia. L. Geronimus, L. Borisenko, Trud Sem. TMM, 1962.
3. D. Mangeron, DAN SSSR, 1955, **102**, *5*, 797—798; 1957, **112**, *1*, 27—28.
4. — Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., 1963, **8**, *1*, p. 5—17.
5. — *Eine neue Methode zum Studium der Getriebe und Antriebe. II.* Czechoslovak Conference Dynamics of Machines, Abstracts of papers, Smolenice, October 1961, p. 57—59.
6. D. Mangeron, R. Chaléat, C. Drăgan, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. appl., (1965). **10**, *5*, p. 1187—1233 (1965).
7. Jr. Uicker John, *Velocity and accceleration analysis of special mechanisms using* 4×4 *matrices*, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1963.
8. D. Mangeron, C. Drăgan, Izv. na matem. Inst., Sofia, BAN, *4*, *2*, p. 57—65 (1960).
9. D. Mangeron, S. N. Kozhevnikov, Bul. Inst. polit. Iași, **X(XIV)**, *1—2*, p. 243—254 (1964).
10. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Braier, Bul. Inst. polit. Iași, **II(VI)**, *1—2*, p. 29—30 (1965).
11. Chr. Pelecudi, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. appl., **10**, *2*, p. 379—419 (1965).
12. M. E. Chace, ASME Publ., 64 — Mech — 23, 8 p.
13. F. L. Litvin, *New methods in gear-wheel theory*, Conférence de Mécanique, Academy Romania Socialist Republic, Résumés des travaux, București, 1965, p. 95—99.
14. J. S. Beggs, Bul. Inst. Polit. Iași, **VI(V)**, 3—4, p. 315—322 (1960).

15. I. I. Artobolevski, *Teoria lineino-oghibaiușcih șatunnîh krivîh*, Trudî III soveșcianiia po osnovnîm problemam teorii maşin i mehanizmov, Moskva, 1963.
16. I. I. Artobolevski, DAN SSSR, *2* (1961).
17. Gh. Munteanu, N. Orlandea, A. Orănescu, E. Orănescu, Gh. Deliu, I. Goia, B. Bălan, *Linear enveloping curves belonging to plane mechanisms with more motive elements ecuations formation algorithm using the tangential method and applications*, Bul. ştiinţific al Inst. polit. Iaşi, seria nouă, **XII (XVI)**, Fasc. 3—4.
18. R. Bogdan, Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., **9**, *4*, p. 851—868, (1964).
19. D. Mangeron, R. Bogdan, Bul. Inst. polit. Iaşi, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 471—478 (1958).
20. D. Tutunaru, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor. Mecanisme cu came*, Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
21. D. Maros ş.a., *Angrenaje melcate*. Bucureşti, Editura tehnică, 1966.
22. M. Roşculeţ, *Analiza matematică*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1964.

UZAREA ÎN CONDIȚIILE ALUNECĂRII SACADATE

de DAN PAVELESCU și BORIS DIMITROV
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Se continuă studiile din lucrarea [1] privind influența mișcării sacadate (stick-slipului și vibrațiilor) asupra uzării suprafețelor metalice și se arată modul în care — în condiții de mișcare sacadată — (stick-slip sau vibrații) principalii parametri ai frecării influențează intensitatea de uzare, comparativ cu frecarea de alunecare în care intermitențele sînt atenuate.

Deși fenomenului de stick-slip și în general mișcării sacadate i se acordă o atenție deosebită, lucrările publicate în ultimii ani [2]—[19] se concentrează numai asupra implicațiilor de natură vibratorie, care, de exemplu în cazul mașinilor-unelte, limitează precizia de prelucrare. Se constată că nu este abordat celălalt aspect important, și anume durabilitatea cuplei de frecare, modul în care prezența mișcării sacadate influențează uzarea. Unii autori sînt de părere că prezența mișcării sacadate grăbește „considerabil" uzarea cuplelor respective de frecare [21]. În partea de început a lucrării [6] se afirmă numai că, în practica industrială, fenomenul de stick-slip conduce la sporirea uzării mașinilor-unelte. Și autorul lucrării [4] presupune un efect similar care ar însoți reducerea coeficientului de frecare. În alte lucrări [5], [10], deși se tratează uzarea ghidajelor mașinilor-unelte în funcție de natura materialului, sarcină, regim de ungere etc., nu se face nici o referire la influența mișcării sacadate asupra vitezei sau intensității uzării. În sfîrșit, recent, în lucrarea [8], se studiază uzarea rolelor într-o mașină de încercat, funcție de grosimea peliculei de ulei, constatîndu-se urme ondulate de diferite amplitudini și lungimi de undă, la diferite viteze și sarcini, fără a se conchide vreo legătură cu regimul de mișcare intermitentă. În lucrarea [1], s-a arătat că, în anumite condiții de frecare (rugozitate, vîscozitate, sarcină etc.), s-a remarcat o uzură mai mare în condițiile mișcării sacadate față de mișcarea de alunecare nesacadată. De asemenea, s-a sesizat tendința de variație (creștere sau descreștere) a vitezei de uzare, funcție de modificarea parametrilor menționați ai frecării.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 747—756, BUCUREȘTI, 1969

În lucrarea de față se aprofundează aceste aspecte și se prezintă rezultatele obținute și considerațiile autorilor asupra factorilor și a influenței lor asupra uzării, în cazul în care frecarea de alunecare este însoțită de „sacadări" (stick-slip sau vibrații). Se acordă atenție uzării ghidajelor deoarece acest efect al frecării, alături de cel de sacadare, influențează nefavorabil precizia mașinilor-unelte, în special a celor cu comandă-program.

1. CONDIȚII EXPERIMENTALE

A fost folosită instalația experimentală, prezentată în lucrările [1], [11], care permite modelarea frecării de alunecare alternativă (viteză variabilă, cu diferite valori de viteză medie și de sarcină), folosindu-se cuple de frecare cu suprafețe plane (tip IV-1-b, vezi clasificarea din lucrarea [1]).

Determinările au fost efectuate simultan pe patru dintre cuplele de frecare ale instalației amintite, și anume cîte două plasate simetric de sistemul de transmitere a mișcării (bielă-manivelă).

Mișcarea sacadată a fost înlesnită, la două din cuplele de frecare, prin montarea epruvetei inferioare pe un sistem elastic [1], avînd coeficientul de rigiditate $k = 2{,}44$ kgf/cm. La celelalte două cuple, de comparație, mișcarea sacadată a fost esențial amortizată prin mărirea coeficientului de rigiditate.

În ambele cazuri, ca metodă de măsurare a uzurii, s-a folosit metoda trasorilor radioactivi. Astfel, la reactorul Institutului de fizică atomică (flux maxim de neutroni 10^{13} n/cm^2/s), s-a iradiat o serie de epruvete de fontă din aceeași sarjă, iradierea făcîndu-se simultan în același canal. S-a preferat utilizarea ca trasor efectiv a Ir^{192}, față de Fe^{59}, fontei de ghidaje Fc-25 adăugîndu-i-se la turnare 0,1% Ir; s-a obținut o activitate specifică de 1,6 mCu/g.

Măsurarea periodică a activității întregii cantități de ulei din cuva de ulei a fiecărei cuple de frecare a fost făcută cu un sistem de contoare G—M, metodă care a permis o sensibilitate de măsură a intensității de uzare de 1×10^{-3} mg/km. În general, abaterile nu au depășit media pătratică de 12%.

Pentru a elimina fluctuațiile rezultatelor (datorate influenței condițiilor anterioare) s-au luat și alte măsuri de rigoare. Astfel, la schimbarea uleiului, s-a spălat corespunzător cupla de frecare și s-a efectuat totodată și un rodaj prealabil, asigurînd domeniul în care intensitatea uzării este constantă. După cum a rezultat din lucrările mai multor autori [4], [5], [7], [12], la o gamă mai largă de viteze pot apărea în zone diferite stick-slipul, o mișcare liniștită sau vibrațiile. Dat fiind că instalația de modelare asigură o mișcare de alunecare alternativă, deci cu viteză relativă variabilă, fiind posibil ca de-a lungul unei singure curse, la o anumită valoare medie a vitezei, să apară, alături de zonele stick-slip, zone fără sacadare sau zone de oscilații, dificil de separat în această situație, ne vom referi la efectul global al mișcării sacadate; includem astfel întreg fenomenul perturbatoriu al frecării de alunecare.

Existența fenomenului perturbator de-a lungul cursei s-a controlat cu un dispozitiv micrometric și, de asemenea, prin înregistrarea pe film a sacadărilor.

În lucrarea [1], studiindu-se variația regimului de ungere, funcție de rezistența ohmică medie a filmului de lubrifiant înregistrată cu un oscilograf cu variație lentă, s-a arătat că, pe măsură ce rugozitatea crește, frecarea se produce de regulă în regim mixt cu excepția unor viteze mari de alunecare, situate la mijlocul cursei.

Determinările experimentale au fost efectuate în prezența urmăritorilor parametri :

a. *Cupla de frecare* : epruvete de fontă (ghidaje de mașini-unelte) Fc-25 (C = 2,75%, Si = 1,93%, S = 0,064%, Mn = 0,80%, P = 0.11%, Ir = 0.10%), cu o duritate medie de 180 HB — epruveta superioară și 200 HB — epruveta inferioară.

În tabela 1 sînt prezentate condițiile de finisare a suprafețelor de frecare (determinările fiind efectuate cu un rugozimetru palpator tip Surtronic).

Tabela 1

Nr.	Cod	Tipul de finisare	Valoarea medie Ra μm
1	T_P	Polizare cu șmirghel metalografic 500	0,68
2	T_{20}	Tușare cu 20 pete/2,5 cm²	0,85
3	F_{L200}	Frezare longitudinală cu freza 200	2,00
4	F_L	Frezare longitudinală cu cuțit zburător	3,00
5	R_T	Rabotare transversală cu cuțit lat	8,30

Au fost alese aceste tipuri de finisare deoarece, de regulă, pentru finisarea suprafețelor ghidajelor metalice se utilizează : tușarea, frezarea, rabotarea fină, rectificarea.

b. *Încărcările* : 15 și 20 kgf/cm² (se vor nota cu N_1, N_2)

c. *Vitezele de alunecare* : 43, 110, 280 și 680 cm/min, valorile medii ale vitezelor relative de alunecare, respectiv de deplasare a epruvetei superioare, se vor nota V_1, V_2, V_3, V_4. S-au preferat și unele viteze mai mari, ca cele de avans rapid, pentru a studia mai bine efectul vibrațiilor.

d. *Lubrifianții* : STAS 405 și STAS 410 (neaditivați), avînd la 23°C aproximativ 230 cSt și respectiv, 510 cSt.

Menționăm că frecarea s-a produs în condițiile de imersie a cuplei de frecare. Au fost preferați lubrefianții neaditivați pentru a se putea sesiza mai eficient influența diferitelor finisări ale suprafețelor.

e. *Temperatura* : a fost asigurată constantă (23°C).

2. REZULTATELE EXPERIMENTĂRILOR

Au fost parcurse trei etape distincte, urmărindu-se succesiv influenţa suprafeţei cuplei de frecare în diferite situaţii, a viscozităţii lubrifiantului, a vitezei de alunecare şi a sarcinii, cu şi fără mişcare sacadată.

a) O primă serie de determinări, în cazul în care *cupla de frecare are ambele suprafeţe prelucrate în aceleaşi mod*, a pus în evidenţă faptul că, în condiţii diferite de finisare a suprafeţelor, atît în prezenţa mişcării sacadate cît şi în lipsa acesteia, se obţine o diferenţiere a valorilor intensităţii de uzare (tabela 2); în condiţiile mişcării sacadate rezultă valori mai mari. Totodată se remarcă faptul că intensitatea de uzare în ambele condiţii se reduce cu viteza relativă de alunecare.

Tabela 2

Tipul supraf. cuplei	Încărcarea	Viteza de alunecare	Felul mişcării					
			Sacadată				Nesacadată	
			$Iu_1 \times 10^2$ mg/km	n	h_{max} mm	F_{Smax} kgf	$Iu_2 \times 10^2$ mg/km	F_c kgf
$\frac{T_{20}}{T_{20}}$	N_1	V_1	0,75	50	0,5	2,8	0,60	1,8
		V_2	0,24	82	0,2	1,4	0,19	1,0
	N_2	V_1	0,98	44	0,9	3,0	0,73	2,2
		V_2	0,46	62	0,4	2,1	0,24	1,3
$\frac{F_{LCS}}{F_{LCS}}$	N_1	V_1	1,63	46	0,9	3,9	0,98	2,6
		V_2	0,65	40	0,7	3,3	0,40	2,0
	N_2	V_1	2,54	26	1,5	5,6	1,20	3,2
		V_2	0,98	32	1,2	4,2	0,85	2,8

În tabela 2, Iu_1, Iu_2, reprezintă valorile medii ale intensităţii de uzură ($x10^{-2}$mg/km) după terminarea rodajului preliminar de 2,5 km; n reprezintă numărul perioadelor fenomenului, iar h_{max}, valorile maxime ale amplitudinii fenomenului în cazul primei perioade. F_{1max} şi F_{2max} sînt valorile maxime ale forţelor de frecare (kgf/cm). Aceeaşi notaţie va fi folosită şi în restul lucrării.

Indicii 1 şi 2 reflectă prezenţa sau absenţa mişcării sacadate.

La cele două viteze de alunecare (43 cm/min şi 110 cm/min) şi, respectiv, încărcări (15 şi 20 kgf/cm²), pentru uleiul 405 neaditivat, cu viscozitate relativ mică (23I cSt), se obţine o intensitate de uzare mai mică pentru cuplul de frecare T_{20}/T_{20}, comparativ cu F_{LCS}/F_{LCS}.

Se remarcă şi faptul că numărul perioadelor fenomenului de sacadare este în general mai redus în cazul cuplei de frecare F_{LCS}/F_{LCS} faţă de T_{20}/T_{20}; de asemenea, amplitudinea maximă (h max) este mai mare în primul caz. Valorile maxime ale vitezei medii de slip, măsurate grafic, sînt de regulă de ordinul 30—50 cm/s, fiind mai reduse pentru această cuplă de frecare. Valorile cele mai mari ale forţelor de frecare se găsesc pentru cazul F_{LCS}/F_{LCS} în ambele condiţii de viteză de încărcare.

b. A doua serie de determinări a urmărit, de asemenea, influența finisării suprafeței, dar pentru cazul în care *ambele suprafețe ale cuplei de frecare sînt diferit finisate.* Astfel, s-au studiat cuplele de frecare T_{20}/F_{L200} și T_{20}/R_T în prezența uleiului STAS 410 (510 cSt) la sarcinile 15 și 20 kgf/cm² și vitezele de alunecare medii : 43 și 110 cm/min ; de asemenea și 680 cm/min pentru T_{20}/R_T, care a dat intensitatea de uzare cea mai mare pentru N_2 V_1.

Tabela 3

Tipul supraf. cuplei	Încărcarea	Viteza de alunecare	Felul mișcării					
			Sacadată				Nesacadată	
			Iu_1 x10² mg/km	n	h_{max} mm	F_{Smax} kgf	Iu_2 x10² mg/km	F_c kgf
$\frac{T_{20}}{F_{L200}}$	N_2	V_1	0,87	32	1,8	4,2	1,74	3,8
		V_2	0,67	42	1,6	3,8	1,23	3,0
$\frac{T_{20}}{R_T}$	N_2	V_1	3,12	30	4,8	8,1	2,14	4,0
		V_4	0,74	52	0,5	3,0	0,36	1,2

Aceste condiții au arătat destul de evident faptul că prelucrarea diferită a suprafețelor, aceeași cuplă de frecare conduce, de asemenea, la valori diferite ale intensității uzării.

Astfel, în condițiile mișcării sacadate, la cupla T_{20}/T_{L200} intensitățile de uzare sînt mult mai reduse decît la cupla T_{20}/R_T ; comparativ cu situația în care lipsește practic mișcarea sacadată, rezultatele diferă după cum urmează :

— T_{20}/F_{L200}, intensitatea de uzare este mai mică în cazul prezenței mișcării sacadate și scade puțin cu viteza relativă de alunecare ;

— T_{20}/R_T, intensitatea de uzare este mult mai mare în cazul prezenței, mișcării sacadate și scade sensibil cu viteza relativă de alunecare, la viteza V_4, la care predomină vibrațiile.

Dacă se examinează rugozitatea în cazul T_{20}/F_{L200}, N_2V_1, în care rezultă o intensitate de uzare aproape dublă în cazul mișcării de alunecare fără sacadare, se constată următoarele valori medii Ra μm :

	Mișcare sacadată	*Mișcare nesacadată*
începutul cursei	1,6	1,1
mijlocul cursei	1,9	1,4
finele cursei	1,5	1,2

Pentru cupla T_{20}/R_T se constată o uzare mai mare a microrugozităților în primul caz (mișcarea sacadată).

c. A treia serie de determinări a urmărit, îndeosebi, influența vitezei de alunecare, în continuare, a determinărilor de mai sus. Pe lîngă valorile medii ale vitezelor de alunecare menționate, s-au adăugat și treapta de viteză 280 cm/min, la care, de-a lungul cursei epruvetei mobile, regimul de vibrații are de asemenea o pondere însemnată față de regimul propriu-

zis de stick-slip. Pe de altă parte, în cazul uleiului 405 (230 cSt) și la 20 kgf/cm², s-a constatat (prin înregistrări pe film a variației rezistenței ohmice [1] că pentru suprafețe cu rugozitate mai mare regimul mixt se menține pînă la apariția vitezelor maxime în regiunea de mijloc a epruvetei inferioare.

În tabela 4 sînt prezentate rezultatele obținute cu cupla de frecare T_P/F_{LCS}.

Tabela 4

Viteza de alunecare	Felul mișcării					
	Sacadată				Nesacadată	
	$Iu_1 \times 10^2$ mg/km	n	h_{max} mm	F_{smax} kgf	$Iu_2 \times 10^2$ mg/km	F_c kgf
V_1	0,65	22	3,8	5,7	1,97	4,00
V_2	0,42	29	2,9	4,7	0,82	3,33
V_3	0,25	33	1,6	4,2	0,35	2,60

În cazul cuplei de frecare T_P/F_{LCS} și în prezența factorilor menționați se remarcă următoarele :

— reducerea intensității de uzare Iu (mg/km) cu viteza de alunecare ;

— valorile intensităților de uzare în condițiile mișcării sacadate sînt esențial mai mici decît în absența acesteia, cu tendința de egalare a valorilor, la viteze mai mari de alunecare.

În ambele cazuri se remarcă totodată reducerea valorii maxime a forței de frecare (atît în regim de stick-slip, cît și pentru frecarea cinetică). Se reduce de asemenea și amplitudinea fenomenului de stick-slip. Constatări similare, dar de implicație mai mare, s-au făcut pentru T_{20}/R_T în cazul V_4, deși uleiul 410 avea o viscozitate mai mare.

Examinarea după procesul de frecare-uzare a suprafețelor epruvetelor inferioare finisate prin frezare cu cuțit zburător și care inițial aveau o rugozitate medie $R_a = 3{,}0$ μm a indicat următoarele valori medii R_a μm :

	Mișcare sacadată	*Mișcare nesacadată*
începutul cursei	2,3	1,00
mijlocul cursei	2,9	2,25
finele cursei	2,2	1,25

Suprafața epruvetei mobile, polizată inițial cu șmirghel metalografic 500, apărea lucioasă (optic fără rugozități).

Rezultă în mod normal o uzură mai mare la terminarea mișcării (viteze relative foarte mici) în regim de mișcare sacadată ; în regiunea vitezelor relative mari, unde regimul poate deveni hidrodinamic, nu se constată practic uzarea microasperităților. Situația microasperităților din această regiune confirmă valoarea mai ridicată a intensității de uzare obținută pentru lipsa mișcării nesacadate.

CONCLUZII

Din datele prezentate rezultă că în timpul frecării de alunecare intermitentă a suprafețelor plane de fontă (Fc-25), funcție de prezența și valoarea anumitor parametri, intensitatea de uzare a acestor suprafețe poate să fie mai mare, egală sau mai redusă, comparativ cu situația în care, prin utilizarea unui sistem elastic, cu coeficient de rigiditate mult mai mare, intermitențele sînt practic amortizate.

După cum se cunoaște, în afară de parametrii „clasici" care influențează intensitatea de uzare (rugozitate, sarcină, viscozitate etc.), în condițiile alunecării intermitente mai intervin lipirile (stick) și dezlipirile, precum și variația vitezei de alunecare în perioada de slip.

Între parametrii clasici și acești parametri s-a constatat următoarea dependență:

— numărul perioadelor de „stick" crește o dată cu viscozitatea și se reduce cu creșterea sarcinii și rugozității, în diferite condiții de finisare a suprafeței (frezare, tușare etc.);

— viteza de „slip" care s-a remarcat dependentă de amplitudinea fenomenului depinde, în consecință, de creșterea sarcinii și a rugozității, precum și de reducerea viscozității și a vitezei relative de alunecare [1].

Considerăm că aceste dependențe pot explica variațiile intensități de uzare în diferite situații.

a) Astfel, *variația frecvenței fenomenului vibratoriu* poate influența diferit intensitatea de uzare. Aparent, variația numărului perioadelor de lipire (stick) a celor două suprafețe ar conduce la o variație a drumului de frecare și deci a uzării. De asemenea, s-ar părea că sarcina mărește frecvența lipirilor. Aceste moduri de influență nu se confirmă; creșterea sarcinii mărește perioada de lipire și, în consecință, amplitudinea fenomenului. Totodată, dacă (în regiunea de stick-slip) suprafețele fiind lipite, viteza relativă de alunecare este nulă, urmează dezlipirea, la care vitezele de alunecare (slip) au valori foarte mari.

— *Frecvența mai mică* care apare în condiții de sarcină și rugozitate mai mare și de viteză de alunecare redusă conduce la o creștere a intensității de uzare — ca în cazul cuplei de frecare T_{20}/R_T (tabela 3) și F_{LCS}/F_{LCS} (tabela 2) datorită unor ruperi mari profunde (smulgeri). În aceste condiții va predomina tipul de uzare de aderență, conjugat, desigur, cu cel de abraziune. De asemenea, $Iu_1 > Iu_2$.

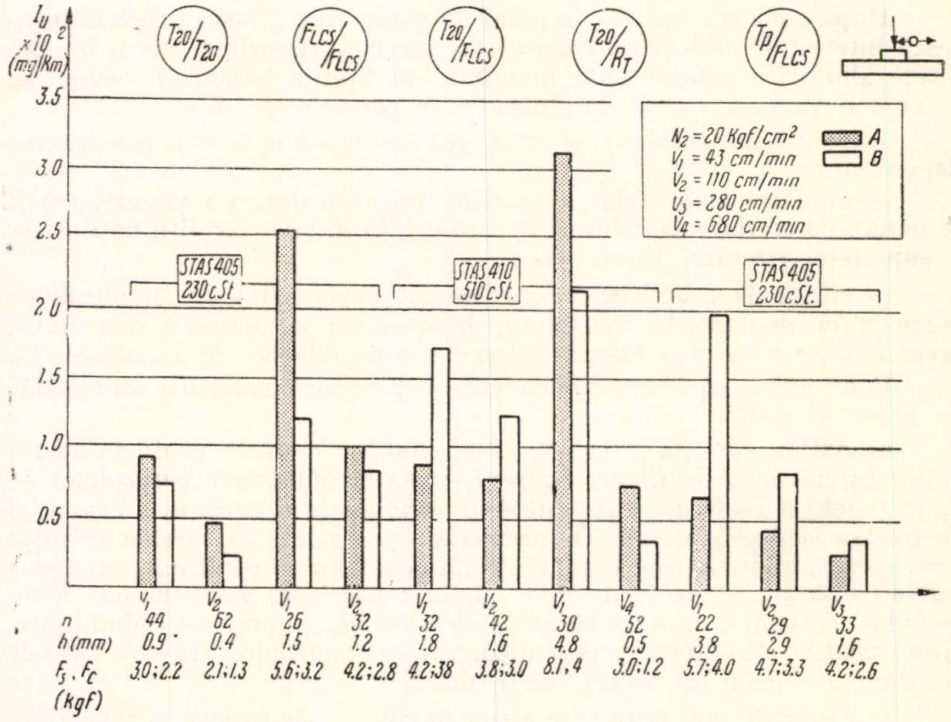
— *Frecvența mai mare* (lipiri și dezlipiri) care apare în condițiile de sarcină și rugozitate mică sau a suprafețelor tușate ce favorizează formarea micropungilor de ulei, precum și atunci cînd viscozitatea este mare, are drept urmare o reducere a intensității de uzare. În tabelele 2, 3, 5 se poate observa variația intensității de uzare cu n. De asemenea, valorile mici ale Iu în cazul T_{20}/T_{20} sau F_{LCS}/F_{LCS} la $N_1 - V_2$.

b) *Valoarea vitezei de slip* joacă de asemenea un rol important.

Vitezele de „slip" reprezintă valori medii cu 15—20 de ori mai mari decît viteza relativă de alunecare, valorile vitezei relative instantanee fiind în realitate pînă la 200 de ori viteza de deplasare a epruvetei superioare.

Astfel, amplitudinea fenomenului și respectiv, vitezele mari de „slip" în condițiile de sarcină și rugozitate mare și viscozitate redusă, cînd frecvența fenomenului este mică (și în condițiile unui regim de frecare limită și mixt), constituie o altă cauză a măririi intensității de uzare (vezi tabela 3, cupla $T_{20}/R_T - N_2V_1$).

Amplitudinile mici, ce conduc la viteze de slip mai reduse, influențează, îndeosebi, prin obosirea stratului superficial.



c) S-ar părea că în momentul în care *predomină autovibrațiile* față de mișcarea de alunecare intermitentă (stick-slip), variația intensității de uzare este influențată în mod diferit. În acest regim de frecare, în care fenomenul nu mai este reprezentat numai prin lipiri și dezlipiri succesive, tipice, ci într-o măsură mai mare printr-un fenomen oscilatoriu al uneia din suprafețe, în timp ce cealaltă își continuă mișcarea de alunecare, implicațiile asupra intensității uzării nu sînt esențial diferite. Rezultatele obținute în ultimul ciclu al determinărilor (tabela 4 și tabela 3 — N_2V_4) arată acest lucru. Explicăm acest fapt prin variația vitezei relative de alunecare, într-o măsură asemănătoare celei din timpul „slipului".

d) *Reducerea intenistății de uzare cu creșterea vitezei de alunecare* se datorează ponderii regimului semifluid și apariției la mijlocul cursei a celui hidrodinamic; coeficienții de frecare variază în jurul valorilor 0,06 — —0,20 (tabela 3 — N_2V_4, V_1).

Se constată că, în cazul cuplelor de frecare T_{20}/T_{20}, F_{LCS}/F_{LCS}, variația lui Iu cu viteza de alunecare este mare; urmează cupla T_{20}/R_T,

cu o variație mai mică, și apoi celelalte cuple de frecare menționate. În toate cele trei cazuri se remarcă prezența unor micropungi de ulei și efectul favorizant al creșterii vitezei *medii* care conduce la apariția unor viteze relative mari la mijlocul cursei (73 cm/min, 180 cm/min etc.).

e) După cum au constatat și alți autori, *tipul finisării suprafeței* influențează apreciabil mișcarea sacadată. De pildă, tușarea, în prezența tușării sau a diferitelor tipuri de frezare, a rabotării fine etc., conduce atît la amplitudini diferite ale fenomenului de mișcare sacadată, cît și la variații în sensuri diferite ale intensității uzării în prezența sau în absența acestui fenomen. De asemenea, frezarea fină, în prezența tipurilor de finisare experimentate, poate conduce la efecte mai favorabite decît ale tușării, îndeosebi în prezența uleiurilor mai vîscoase sau aditive.

În acest mod, tipul de finisare a suprafețelor cuplei de frecare influențează indirect și totodată diferit variația intensității de uzare. În timp ce parametrii viteză și sarcină, în cazul mașinilor-unelte, sînt de regulă impuși, se poate stabili finisarea optimă a suprafețelor. Deoarece se presupune, desigur, eliminarea mișcării sacadate îndeosebi prin utilizarea uleiurilor aditivate cu proprietăți antistick-slip*, se recomandă acele finisări de suprafață, care conduc, în lipsa mișcării sacadate, la intensități de uzare reduse.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Dependence of friction and stick-slip on the main wear factors*, Rev. Roumaine des Sci. Tehn. — Mécanique Appliquée, **13**. *1*, 61—77 (1968).
2. A. K. Banarjee, *Influence of kinetic friction on the critical velocity of stisk-slip motion*, Wear, vol. 12, 2, Aug. 1968, p. 107—116.
3. F. P. Bowden, D. Tabor, *The friction and lubrication of solids*, Oxford at the Clarendon Press, 1964.
4. L. Cigan, *Influența principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele mașinilor-unelte*, St. cerc. mec. apl. **27**, *5*, 1079—1091 (1968).
5. D. Domrös, *Über das Verschleiβ- und Reibungsverhalten von Werkzeugmaschinen-Gleitführungen*, Dissertation TH Aachen, 1966.
6. G. Fleischer, *Grundsätzliches über das Stick-slip- Phänomen*, Symp. Schmierstoffe und Schmierung, 16—19.VI.1969. Dresden Akad. Verlag, Berlin, 1960, p. 72—82.
7. B. I. Hunt, I. Torbe, C. G. Spencer, *The phase plane analysis of sliding motion*, Wear, *8*, p. 455—465 (1965).
8. E. W. Landen, *Slow speed wear of steel. Surface lubricated by thin oil films*, Asle Transaction, **11**, *1*, p. 6—18 (1968).
9. G. Nieman, K. Ehrlenspiel, *Relative influence of varions factor in the stik-slip of metals*, Lubrication Engineering, vol. 20, nr. 3, 1964, p. 84—86.
10. H. Opitz, *Reibung und Verschleiβ von Werkzeugmaschinen"*, Schmiertechnik und Tribologie, vol. 15, nr. 2, 1968 p. 77—86.
11. D. Pavelescu, *Main parameters of the wear of plane surfaces in alternating motion. Modelling and measuring instalation (I)*, Rev. Roumaine des sci. Tehn. Série de Mecanique Appliquée, **12**, *2*, 585—495 (1967).

* În Republica Socialistă România, Institutul de cercetări pentru prelucrarea țițeiului — Ploiești a preparat astfel de uleiuri, ca, de exemplu, I-40-5 și I-90-5; verificările au fost făcute atît pe instalațiile Centrului de mecanică a solidelor al Academiei, în Laboratorul Institutului de cercetări și proiectări mașini-unelte și agregate, precum și în producție.

12. E. Rabinowicz, *A Study of the stick-slip process* Friction and Wear, Elsevier Publish Co., London, 1959, p. 149—164.
13. H. I. Schmidt, ,,*Beitrag zur Ermittlung der Grenzgeschwindigkeit bei Stick-slip-Schwingungen*", Wissenschaftliche Zeitschrift, *3* p. 201—211 (1967).
14. C. Stromberger, K, Drews, ,,*Reibungsverhältnisse an Gleitführungen beim Auftreten von Stick-slip*", Werkstatt und Betrieb, vol. 1/1968 p. 9—17.
15. P. Studt, ,,*Zum Stand der Forschung über Trockenreibung, Gernzschmierung und Gleitverschleiβ*" Schmiertechnik, **11**, *4*, 211—216p. (1964).
16. A. S. Tobias, *Machine tool vibration*. Blackie, London, 1965, 7, p. 40—44.
17. D. M. Tolstoi, *Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibrations in contact friction*, Wear, **10**, *3*, p. 199—213, (1967).
18. A. M. Tolstoi, P. L. Kaplan, *K voprosu o roli normalnih peremeşcenii pri vneşnem trenii. Novoe v teorii treniia*, Izd. « Nauka », Moskva, 1966, p. 42, 58.
19. G. W. Voorhes, *Investigation of stick-slip in simulated slide-ways*, Lubricating Engineering, vol. 19, 1963, p. 457—462.
20. G. Wolf, *Stick-slip and machine tool lubrication* Engineering, vol. 21, nr. 7, 1965, p. 273—275.
21. B. V. Deriaghin, Y. E. Push, D. M. Tolstoi, *A theory of stick-slip slidering of solids*, Proc. Conf. of Friction and Lubrication, 1957, London P. 13 Inst. of Mechanical Engineering, London, p. 257—268.

CONGRESUL JUBILIAR CANADIAN DE MECANICĂ APLICATĂ

ANUL CENTENARULUI, 1967, UNIVERSITATEA LAVAL, QUÉBEC, 22—26 MAI 1967

de D. MANGERON
Institutul politehnic, Iaşi

Congresul naţional canadian de mecanică aplicată, organizat cu ocazia primului centenar al Canadei (1867—1967), s-a bucurat de o participare cu totul remarcabilă a unora din cei mai de seamă mecanicieni de pe glob. Lucrările congresului, cristalizate în trei volume mari [1]—[3], au fost subdivizate în lucrări de sinteză prezentate în şedinţe plenare, lucrări de mecanică a solidului şi lucrări de mecanică a fluidelor.

După strălucita conferinţă inaugurală rostită de preşedintele I.U.T.A.M. (Uniunea internaţională de mecanică teoretică şi aplicată), pînă mai ieri preşedinte al Academiei de Ştiinţe din Franţa, prof. Maurice Roy, axată pe ideea majoră a imperioasei necesităţi de a se restitui mecanicii — acestei „discipline primordiale" — cu orice preţ importanţa sa esenţială şi adevărata sa faţă de ştiinţă fundamentală, cu aplicaţii pe cît de diferite şi vaste, pe atît de înrudite, renumiţii specialişti B. Etkin (Universitatea din Toronto), P. Germain (Sorbona, Paris), A. Roshko (Institutul de tehnologie din California), D. B. Spalding (Colegiul imperial de ştiinţă şi tehnică), R. W. Stewart (Universitatea din Columbia Britanică), S. T. Ariaratnam (Universitatea din Waterloo), K. L. Johnson (Universitatea din Cambridge), C. Truesdell (Universitatea „John Hopkins") şi H. Ziegler (Şcoala politehnică din Zürich) au prezentat expuneri plenare referitoare, respectiv, la *Dinamica vehiculelor zburătoare; Actualitatea problemelor transsonice; Revederea conceptelor în curgere separată; O teorie a stratului-limită turbulent; Efecte neliniare la suprafaţa undelor; Stabilitate dinamică sub acţiunea vibraţiei aleatorii; Eforturi în suprafeţe în contact de rostogolire; Termodinamica deformaţiei* şi *Unele dezvoltări în teoria stabilităţii.*

Ne vom mărgini aici, în legătură cu conţinutul conferinţelor generale menţionate mai sus, să subliniem unele rezultate de anvergură ce se desprind din tematicile expuse de academicienii C. Truesdell şi H. Ziegler.

Primul, continuînd seria de lucrări fundamentale proprii de sinteză mecanică, publicate în parte în „Buletinul Institutului politehnic din Iași" [4], scoate în primul rînd în evidență rolul sutelor de memorii ale lui Onsager, Eckart, Meixner, Prigogine, Kirkwood & Crawford, De Groot ș.a., publicate începînd cu 1940 și consacrate fenomenelor zise „de transport" [5]. Această literatură merită recunoștința tuturor pentru faptul de a fi atras atenția asupra ansamblului de idei asociate cu disiparea energiei și creșterea entropiei în circumstanțe termomecanice și electromagnetice. În al doilea rînd, C. Truesdell expune metoda lui Coleman [6] în termocinetică, insistă asupra importanței rezultatelor acestuia, ilustrînd-o prin rezolvarea unei probleme centrale de propagare a undelor, și enunță, în fine, o teoremă care face să se vadă legătura intimă dintre termostatică și termocinetică.

Fascinantul subiect referitor la teoria stabilității, care include într-însul — după cum se știe — diferite definiții ale stabilității fără ca vreuna din ele să fie complet satisfăcătoare pentru tehnica actuală, este limitat voit de H. Ziegler la trecerea în revistă a stabilității echilibrului configurațiilor. Autorul, după ce pune în evidență și în acest domeniu restrîns o vastă gamă de probleme nerezolvate, se oprește în detaliu asupra recentelor contribuții menite să modifice în mod creator concepția de stabilitate a lui Liapunov, datorite îndeosebi lui Shield și Green [7] și Koiter [8]. Întregul diapazon al problematicii expuse arată că la ambele nivele — fizic și matematic — o mulțime de probleme referitoare la stabilitatea echilibrului și cu atît mai mult la stabilitatea mișcării rămîn încă deschise și-și așteaptă rezolvarea adecvată.

În imposibilitatea de a putea intra aici în detalii în legătură cu lucrările prezentate la congres consacrate mecanicii solidului (141 la număr), mecanicii fluidelor (90 la număr) și termodinamicii și propagării căldurii (47 la număr), subliniem doar varietatea subiectelor tratate, actualitatea lor, largul diapazon al aparatului matematic de investigație științifică și acela al mijloacelor de tehnică inginerească de mare precizie folosite în elaborarea tematicii alese.

Unele lucrări prezentate la congres au văzut între timp lumina tiparului în paginile revistei „Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée", ca, de exemplu *Concepții recente referitoare la optimizare în domeniile mecanicii* (M. Z. v. Krzywoblocki) și *Aproximări de ordin superior în studiul mișcării perturbate a oscilatorilor* (D. Mangeron și R. Chaléat).

BIBLIOGRAFIE

1. *Canadian Congress of Applied Mechanics. Centennial Year, 1967*, Proceedings, *General Lectures*, Edited by B. H. Karnopp, University of Toronto.
2. *Canadian Congress of Applied Mechanics. Centennial Year, 1967*, Proceedings, *Solid Mechanics*, Edited by L. E. Jones and F. P. J. Rimrott, University of Toronto.

3. *Canadian Congress of Applied Mechanics. Centennial Year, 1967*, Proceedings, *Fluid Mechanics, Thermodynamics*, Edited by L. E. Jones and F. P. J. Rimrott, University of Toronto.

4. C. Truesdell, *Rational Mechanics of Deformation and Flow* (II), Bul. Inst. politehn. Iași, s.n., **XIV (XVIII)**, *1—2*, 131—136 (1968).

5. D. Mangeron, B. R. Seth, *On the Transition Phenomena*, Bul. Inst. politehn. Iași, s.n., **X (XIV)**, *3—4*, 311—322 (1964).

6. B. D. Coleman, *Thermodynamics of Materials with Memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 17, 1—46, 1964 și *On Thermodynamics, Strain impulses, and Viscoelasticity*, ibid., 230—254.

7. R. T. Shield, A. E. Green, Arch. Rat. Mech. Anal., *12*, 354, 1963.

8. W. T. Koiter, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. B-68, 178, 1965.

A V-a CONSFĂTUIRE ASUPRA PROBLEMELOR DE BAZĂ ALE TEORIEI MAŞINILOR ŞI MECANISMELOR. SUHUMI — U.R.S.S.

15—20 MAI 1967

de TUDOR-VASILE HUNCHER
Ministerul Industriei Construcţiei de Maşini
C.I.M.F.A. — Bucureşti

Între 15 şi 20 mai 1967 s-a ţinut, în localul Institutului de economie subtropicală din Suhumi — U.R.S.S., a V-a Consfătuire asupra problemelor de bază ale teoriei maşinilor şi mecanismelor, iniţiată de Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. şi Academia de Ştiinţe a R. S. S. Gruzine, în cadrul manifestărilor cultural-ştiinţifice prilejuite de a 50-a aniversare a Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie.

Consfătuirea s-a bucurat de o largă participare, atît pe plan intern, cît şi internaţional. Pe lîngă savanţi sovietici, renumiţi în domeniul teoriei mecanismelor, ca : acad. I. I. Artobolevski (care a fost şi preşedintele Comitetului de organizare), S. N. Kojevnikov, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., şi doctorii în ştiinţe tehnice N. I. Levitski, G. G. Baranov, Ia. L. Gheronimus, D. S. Tavhelidze, F. L. Litvin, P. A. Lebedev, A. E. Kobrinski, V. A. Zinoviev, A. P. Bessonov, L. N. Reşetov, S. A. Cercudinov şi alţii, au fost prezenţi printre participanţii străini prof. dr. ing. W. Meyer zur Capellen (R. F. a Germaniei), prof. F. R. E. Crossley (S.U.A.), prof. dr. ing. Z. Terplan (Ungaria), dr. ing. I. Volmer şi dr. ing. G. Bögelsack (R.D.G.), prof. dr. I. Oderfeld,prof. dr. ing. A. Morecki şi prof. dr. ing. Z.Parsevski (Polonia), conf. dr. M. S. Konstantinov (Bulgaria), dr. V. Brat (Cehoslovacia), precum şi conducătorul delegaţiei române — prof. dr. ing. R. C. Bogdan.

Lucrările consfătuirii s-au desfăşurat în cadrul a patru secţii, şi anume :

I — secţia de analiza şi sinteza mecanismelor — 90 de comunicări ;
II — secţia de dinamica maşinilor — 114 comunicări ;
III — secţia de teoria maşinilor cu funcţionare automată şi a acţionării pneumatice şi hidraulice — 86 de comunicări ;
IV — secţia de teoria transmisiilor în maşini — 48 de comunicări.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 761—763, BUCUREŞTI, 1969

Dat fiind numărul mare de comunicări înscrise, unele, care tratau subiecte în cadrul aceleiași probleme, au fost sintetizate în referate comune.

În cadrul primei secții, expunerile au fost dominate de teme privind sinteza mecanismelor, studiul mecanismelor complexe și al mecanismelor spațiale, reflectînd astfel noile tendințe moderne. Se pot astfel menționa următoarele lucrări :

— referatul dr. șt. tehn. P. A. Lebedev privind studiul cinemtic al mecanismelor spațiale prin metoda vector-proiecțiilor a pentalaterului articulat spațial, precum și cinetostatica mecanismelor plane considerate într-un spațiu tridimensional ;

— referatul dr. șt. tehn. N. I. Levitski asupra unor comunicări privind sinteza pentalaterului cu manivelă și balansier, sinteza mecanismelor spațiale cu bielă conducătoare, sinteza patrulaterului spațial de ghidare cu manivelă și balansier și despre proprietățile aproximării pătratice în sinteza mecanismelor ;

— referatul dr. șt. tehn. S. A. Cerkudinov asupra mișcării mecanismului sintetizat pentru trei poziții, asupra sintezei mecanismelor cu două manivele și a mecanismelor cu șase elemente de mișcare aproximativ uniformă.

— problema erorilor în mecanisme a fost dezvoltată în referatul cand. șt. tehn. M. I. Kocenov, care a prezentat o metodă matriceală de cercetare a preciziei mecanismelor spațiale, determinarea erorilor de mișcare a tachetului provocate de mișcarea de rotație neuniformă a camei și influența erorilor profilului activ al camei asupra vitezei și accelerației tachetului.

S-au mai prezentat de asemenea lucrări privind analiza și sinteza mecanismelor cu came, studiul mecanismelor cu mișcare intermitentă, mecanisme automate.

Secția a doua a evidențiat lucrări privind influența jocurilor, a elasticității elementelor, a unei echilibrări insuficiente, a variației maselor, precum și legăturile elastice în mecanisme și mașini. Se pot cita :

— referatul acad. I. I. Artobolevski asupra dinamicii sistemelor mecanice cu variator și a sintezei dinamice a mecanismelor în condițiile de minimizare a accelerațiilor pe elementul condus ;

— referatul dr. șt. tehn. A. P. Bessonov privind echilibrarea mecanismului plan cu masă variabilă a elementelor, procese nestaționare într-un sistem vibrant și unele probleme ale dinamicii mașinilor grele ținînd seama de elasticitate și variabilitatea maselor ;

— referatul lui S. N. Kojevnikov, membru corespondent al Academiei de Științe a U.R.S.S., asupra influenței condițiilor la limită privind caracteristicile de frecvență ale elementelor sistemelor mecanice, tensiunile dinamice în elementele elastice ale mecanismelor cu bare în cazul rotației neuniforme a suportului și rezolvarea problemelor speciale ale vibrațiilor prin metoda reducerii, plecînd de la principiul lui Hamilton.

S-a prezentat de asemenea lucrări privind rezolvarea unor probleme de dinamică cerute de industrie, cum ar fi funcționarea fără șocuri a laminoarelor, a macaralelor, a vibratoarelor, vibromașinilor, a ciururilor vibrante, a mașinilor de transportat vibrante.

În cadrul celei de-a treia secții, comunicările au reflectat dezvoltarea teoriei mașinilor automate, factor important al progresului tehnic. S-au prezentat astfel : teoria ciclogramării mașinilor automate, utilizarea metodei jocurilor la construirea mașinilor, mașini automate care se autoorganizează, mărirea preciziei de măsurare la mașinile automate prin metoda compensării erorilor, folosirea magneților ca acționări suplimentare ale mașinilor tehnologice, avantajele folosirii comenzilor hidraulice și pneumatice.

Secția a patra a reunit teme legate în special de transmisiile prin roți dințate ; au fost prezentate noutăți în acest domeniu, precum și realizări deosebite privind transmisiile spațiale, teoria angrenajelor punctuale, reducerea angrenajelor evolvento-conice și evolvento-ipoidale la angrenaje dințate cilindrice și elicoidale, cinematica transmisiilor conice și melcate cu angrenaj Novikov, influența erorilor de montaj asupra calității angrenajului, cinematica transmisiilor ondulate.

Delegația noastră a prezentat, în cadrul secției I, comunicarea „Bazele calculului mecanismelor cu cinci elemente cu cuple de translație, cu ajutorul analizei armonice complexe" de Bogdan R. C., Huncher T. V. și Larionescu D. Lucrarea a trezit interesul auditoriului, bucurîndu-se de aprecieri și de o vie participare la discuții. Mai mulți participanți s-au interesat mai îndeaproape de rezultatele obținute în cadrul Secției de teoria mecanismelor de la Centrul de mecanică a solidelor, în domeniul studiului mecanismelor cu metoda analizei armonice complexe, unii exprimîndu-și chiar dorința de a veni pentru specializare în cadrul colectivului condus de prof. dr. ing. R. C. Bogdan.

După închiderea lucrărilor consfătuirii, Institutul politehnic din Tbilisi a organizat o scurtă deplasare turistică prin Gruzia, de la Suhumi la Tbilisi, care s-a încheiat cu vizitarea capitalei gruzine și a laboratoarelor institutului și care a prilejuit participanților străini posibilitatea de a cunoaște, în parte, din frumusețile vestite ale ținuturilor georgiene.

Consfătuirea s-a bucurat de o bună organizare, creînd prilejul întîlnirii și al schimbului reciproc de idei pentru un mare număr de cercetători în domeniul teoriei mecanismelor și a mașinilor, fiind în același timp un stimulent în vederea organizării unor manifestări similare și în viitor.

RECENZII

DOBROSAV JEVTIĆ. *Einflussdiagramme zur Ermittlung der durch Vorspannung in Vorspannträgwerken verursachten Momente und Verformungen* (Linii de influenţă pentru determinarea momentelor încovoietoare şi deformaţiilor produse de forţele de precomprimare în structurile de beton precomprimat), Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin-München, 1966, 89 p., 20 fig., 27 tabele

Lucrarea se ocupă cu determinarea liniilor de influenţă ale deformaţiilor grinzilor static determinate şi ale momentelor de încastrare perfectă ale grinzilor static nedeterminate produse de forţele de precomprimare sau de sarcinile exterioare. În acest scop se stabilesc expresiile coeficienţilor de influenţă care definesc aceste linii, în cazul general al grinzilor cu secţiunea variabilă. Pentru aceasta se admite că grinzile se comportă elastic, respectiv deformaţiile şi solicitările sînt proporţionale cu mărimea forţelor de precomprimare sau a sarcinilor exterioare.

Valorile coeficienţilor de influenţă sînt concentrate în 18 tabele. Ele permit efectuarea calculului prin diferenţe finite al următoarelor caracteristici ale grinzilor prevăzute cu vute drepte sau parabolice la unul sau la ambele capete, pentru orice formă a diagramei de momente :

— rotirile capetelor grinzilor simplu rezemate,

— săgeţile grinzilor simplu rezemate, în dreptul a nouă secţiuni care împart deschiderile grinzilor în zece porţiuni de lungime egală,

— momentele de încastrare perfectă ale grinzilor cu încastrare şi reazem simplu sau dublu încastrate.

Lucrarea cuprinde, de asemenea, şapte tabele în care se dau valorile coeficienţilor necesari pentru determinarea momentelor de pe reazemele intermediare ale grinzilor continue pe două, trei sau patru deschideri inegale, cu secţiunea constantă, pentru orice formă a diagramei de momente. Un exemplu de calcul arată modul de utilizare a acestor tabele.

Domeniul de aplicare a lucrării, aşa cum rezultă de altfel şi din textul ei, este mai mare decît cel precizat prin titlu. Într-adevăr, pe lîngă determinarea efectelor forţelor de precomprimare, coeficienţii de influenţă daţi în tabelele lucrării permit, de asemenea, determinarea rapidă a deformaţiilor şi necunoscutelor static nedeterminate ale grinzilor de beton armat sau de beton precomprimat cu secţiunea constantă sau variabilă, pentru orice diagramă de momente produsă de sarcinile exterioare. De aceea lucrarea este deosebit de utilă inginerilor constructori care se ocupă cu proiectarea grinzilor de felul celor menţionate mai sus.

V. Petcu

MONTE A. CALVERT — THE MECHANICAL ENGINEER IN AMERICA (1830—1910), Professional Cultures in Conflict, The John Hopkins Press, Baltimore, 1967, 296 p.

Monte A. Calvert (associate curator of mechanical civil engineering at the Smithsonian Institution's Museum of History and Technology) prezintă în cartea sa un foarte interesant şibine documentat studiu istoric-social asupra „profesionalizării" inginerului mecanic în America.

Cu alte cuvinte, autorul urmăreşte complexul proces de evoluţie a profesiunii de inginer mecanic în Statele Unite, începînd din epoca cînd era doar o „ocupaţie" imprecis definită (1830) şi pînă cînd ea a devenit o profesiune de sine stătătoare, menţionată în *United States Census* (1910).

Desigur că şi înainte de anul 1830 existau în America specialişti care se ocupau cu proiectarea, controlul fabricaţiei şi punerea în funcţiune a instalaţiilor siderurgice, a maşinilor-unelte, a navelor maritime sau fluviale etc. Însă abia de la această dată sînt semnalate (în documentele tehnice ale epocii) mai multe persoane care lucrau în industrie ca „ingineri mecanici".

După 1910, activităţile multiple legate de „profesionalizarea" inginerilor mecanici au continuat, însă ele nu se mai deosebeau de cele desfăşurate pentru „profesionalizarea" celorlalte categorii de ingineri.

Dar ce este „profesionalizarea"? Istoricii şi sociologii n-au ajuns încă la un acord deplin asupra celei mai cuprinzătoare şi mai corecte definiţii pentru această noţiune complexă, deoarece o privesc din puncte de vedere diferite.

Monte A. Calvert se referă în cartea sa numai la acele atribute şi activităţi specifice „profesionalizării" în meseriile tehnice, care pot da „imaginea profesională completă a inginerului mecanic".

Astfel, el a luat în considerare:

1. Modul în care s-a acumulat, sistematic, volumul de cunoştinţe tehnice necesare acestei profesiuni, pentru îmbinarea armonioasă a teoriei cu practica.

2. Perioada şi împrejurările în care s-a recunoscut, treptat, necesitatea unei instruiri prelungite pentru obţinerea competenţei profesionale a specialiştilor din domeniul ingineriei mecanice, precum şi apariţia institutelor de învăţămînt superior de specialitate.

3. Etapele caracteristice pentru socializarea şi controlul activităţilor profesionale ale inginerilor mecanici, tineri şi bătrîni. Totodată, evoluţia sistemului de titluri ştiinţifice, a licenţelor de practică şi a celorlalte forme de ierarhizare şi calificare a inginerilor mecanici din S.U.A.

4. Dezvoltarea conştiinţei profesionale a inginerilor mecanici, modul în care s-a stabilit statutul lor social şi organizarea asociaţiilor profesionale (Societatea americană a inginerilor mecanici, ASME, a fost înfiinţată încă din anul 1880).

5. Condiţiile care au determinat apariţia şi consolidarea sentimentului de colegialitate între specialiştii de aceeaşi profesiune, incluzînd aşa-numitul cod al eticii sociale prin care s-au stabilit relaţiile dintre inginerii mecanici, dintre aceştia şi clienţi, sau marele patronat.

Avînd în vedere cele de mai sus, se poate uşor înţelege cît de profund şi multilateral este studiul efectuat de Monte A. Calvert.

În prima parte — *Originile* — el descrie mediul social, cultural şi profesional în care s-au format inginerii mecanici, scoţînd în evidenţă căile de specializare şi diferenţiere a acestor ingineri în cadrul lumii industriale. M. A. Calvert precizează că, în S.U.A. îndelungatul proces de profesionalizare a inginerului mecanic a fost foarte mult complicat de conflictul dintre cele două „culturi tehnice" ce au coexistat multă vreme: „cultura de atelier" (practică, intuitivă şi eclectică), bazată pe activitatea micilor ateliere manufacturiere, constructoare de maşini, din nord-estul Americii, şi „cultura ştiinţifică" (teoretică, sistematică, specializată), care a emanat din institutele de învăţămînt tehnic superior.

A doua parte — *Dezvoltarea internă* — se referă la educaţia tehnică şi ştiinţifică a inginerilor mecanici, la asociaţiile profesionale şi la aşa-numitul „Statut al profesiunii".

În partea treia — *Relaţii externe* — se studiază influenţa pe care au avut-o asupra profesionalizării multiplele relaţii dintre inginerii mecanici şi ceilalţi specialişti ce lucrau în industrie, dintre inginerii mecanici şi ceilalţi ingineri, dintre inginerii mecanici şi capitalişti sau clienţi.

Anexele şi tabelele centralizatoare ale tuturor categoriilor de ingineri mecanici din S.U.A. completează în mod util lucrarea.

Fără îndoială, *The Mechanical Engineer in America* (1830—1910) este una dintre cele mai valoroase cărți consacrate acestui subiect și ea interesează nu numai pe istorici, sociologi, psihologi sau pe inginerii mecanici, ci și pe toți cei ce doresc să se informeze asupra originilor industriei americane contemporane.

Constantin Sabin Ioan

JOHN R. SIMONSON — *An Introduction to Engineering Heat Transfer*, Mc Graw-Hill European Mechanical Engineering Series, London, 1967, 244 p. + 72 fig.

Scopul lucrării este de a introduce atît pe inginerii specialiști, cît și pe cei nespecialiști în problemele transferului de căldură.

Autorul, lector la The City University din Londra, și-a propus să pună la îndemîna cititorilor, într-o formă gradată și concisă, un material cuprinzînd principiile fundamentale ale transferului de căldură. Prin nivelul la care sînt tratate subiectele, cartea poate fi parcursă cu ușurință și de aceia care prin profilul activității lor nu posedă cunoștințe aprofundate în domeniul matematicii și doresc să obțină noțiuni legate de transferul de căldură, des întîlnit în practică.

Cartea cuprinde aspecte ale transferului de căldură, dezvoltate în patru părți.

Prima parte se ocupă de transferul de căldură prin conducție. Se stabilește ecuația diferențială a conducției în coordonate rectangulare și cilindrice, după care se fac cîteva aplicații referitoare la conducția unidimensională.

Partea a II-a se referă la transferul de căldură prin convecție. Se studiază îndeosebi convecția forțată în stratul-limită termic, cu referire la scurgerea laminară pe placă, scoțîndu-se în evidență mărimile fundamentale care apar în această scurgere. În continuare se studiază cîteva probleme legate de convecția naturală.

Partea a III-a tratează transferul de căldură prin conducție combinat cu cel prin convecție și intensificarea schimbului de căldură prin mărirea suprafeței radiante.

Ultima parte cuprinde transferul de căldură prin radiație și legile fundamentale ale radiației.

La sfîrșitul fiecărui capitol se dau referințe cu scopul de a ajuta cititorul să găsească în detaliu subiectele care îl interesează. De asemenea, fiecare capitol este însoțit de probleme, ajutînd în felul acesta la fixarea materialului expus.

Cartea conține în final un Apendix cu tabele, în care sînt date proprietățile termice ale metalelor, nemetalelor, lichidelor și gazelor utilizate în mod curent în practică.

Paul Marinescu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel, cu caracter fundamental, de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :
- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille, n. 15, sectorul 7.

D. DUMITRESCU, C. I. CRĂCIUN

MIŞCAREA FLUIDULUI VÎSCOS ÎN LUNGUL UNEI PLĂCI PLANE LA NUMERE REYNOLDS MICI

Se integrează cu ajutorul calculatoarelor numerice ecuaţiile Navier-Stokes nesimplificate, scrise în diferenţe, pentru mişcarea fluidului vîscos în prezenţa unei plăci plane de lungime finită paralelă curentului. Se trasează spectrele liniilor de curent şi de echivîrtej. Rezultatele se compară cu cele obţinute folosind maşini analogice (Janssen-California).

St. cerc. mec. apl., tom, 28, nr. 3, 1969, p. 497—506
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

T. OROVEANU, I. SPULBER

UNELE ASPECTE ALE DEZLOCUIRII BIDIMENSIONALE A FLUIDELOR MISCIBILE ÎN MEDII POROASE

Se consideră problema variaţiei concentraţiei în cazul dezlocuirii unui fluid care saturează un mediu poros, de către un altul miscibil cu el. Se arată ce probleme apar atunci cînd dispersia este plană, staţionară sau nestaţionară.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 517—524
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

N. TIPEI, ST. NEDELCU, L. STĂNOIU

DESPRE POSIBILITĂŢILE DE CARACTERIZARE A MEDIILOR NENEWTONIENE

Folosindu-se rezultatele generale date de teoria mediilor nenewtoniene, sînt dezvoltate două metode pentru caracterizarea acestor medii, cu ajutorul atît al datelor teoretice, cît şi experimentale, pentru a face posibilă astfel o comparaţie privind proprietăţile diferitelor fluide legate de gradientul de viteză.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 507—516
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ELIE CARAFOLI, ŞTEFAN STAICU

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPII DELTA ARCUITĂ ŞI TORSIONATĂ SIMETRIC, ŢINÎND SEAMA DE SEPARAŢIA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

În această lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subţiri deformate, avînd distribuţia de incidenţe simetrică şi variind proporţional cu x_1 şi x_2. Luînd în consideraţie separaţia curentului la bordurile de atac subsonice, se determină distribuţia de presiuni şi caracteristicile aerodinamice ale aripii, prin intermediul unei aripi fictive, echivalentă, din punct de vedere aerodinamic, cu aripa reală.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 525—549
Redacţia: Bucureştt, str. Const. Mille nr. 15

ADRIANA NĂSTASE

ARIPA DELTA SUBȚIRE, DE GEOMETRIE VARIABILĂ, OPTIMĂ LA DOUĂ REGIMURI DE ZBOR SUPERSONICE

În articol se determină forma suprafeței componente subțiri a aripii delta groase portante, de geometrie variabilă, care are anvergura $2l$ dată atunci cînd e complet pliată și care trebuie să fie optimă cînd este plasată în curentul caracterizat prin numărul Mach M, iar atunci cînd este complet depliată are anvergura $2L > 2l$ și trebuie să fie optimă cînd este plasată în curentul caracterizat prin numărul Mach $M_1 < M$.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 551—571
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CORNELIU CRĂCIUN

MIȘCAREA DE ANTRENARE ȘI TRANSFERUL DE CĂLDURĂ PENTRU FLUIDE VÎSCOASE STRATIFICATE

Se determină repartiția de presiuni, viteze și temperaturi pentru un sistem de fluide vîscoase stratificate în mișcare de antrenare (de tip Couette), ca de exemplu între două plăci în translație relativă cu viteză uniformă V_0, respectiv V_n, și temperaturi θ_0, respectiv θ_n.

St. cerc. mec. apl., tom, 28, nr. 3, 1969, p. 585—593
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. SETEANU

SOLUȚII ÎN SERIE ÎN STUDIUL FLUIDULUI VÎSCOS

Se studiază fenomenul curgerii plane a fluidului vîscos incompresibil, folosindu-se metoda dezvoltării în serie și o transformare conformă adecvată care permite satisfacerea automată a condițiilor la limită.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 573—583
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MARIA ARSENIE, DUMITRU ARSENIE

O PROPUNERE PRIVIND LUNGIMEA DE AMESTEC DIN TEORIA LUI L. PRANDTL, PENTRU CAZUL CURGERII TURBULENTE ÎN CANALE ȘI CONDUCTE, AVÎND LA BAZĂ UN PRINCIPIU VARIAȚIONAL

În lucrare se verifică faptul că, în cazul curgerii turbulente în lungul unui perete plan, relațiile cunoscute pentru tensiunile turbulente, lungimea de amestec și distribuție a vitezei, conduc la un minim al transferului de impuls. Postulînd existența acestui minim, se ajunge la o nouă relație pentru lungimea de amestec în cazul curgerii turbulente în canale de forma

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3h}}$$

și în cazul curgerii turbulente în conducte de forma

$$l(y) = \varkappa y \sqrt{1 - \frac{2y}{3R}}$$

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 595—606
Redactia: București, str. Const. Mille nr. 15

S. GĂLEȚUȘE

ASUPRA CĂDERII DE PRESIUNE LA SCURGERILE PRIN CONDUCTE ÎN REGIM TURBULENT

În lucrare se deduc expresiile vitezei medii pentru scurgerea turbulentă în conducte circulare și de secțiune plan-paralelă.
Folosind aceste expresii, se obțin relațiile dintre parametrul adimensional al gradientului de presiune și numărul Reynolds sub o formă convenabilă pentru aplicații ulterioare la lubrificația în regim turbulent.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 607—613
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA SOARE

APLICAREA ECUAȚIILOR CU DIFERENȚE FINITE LA CALCULUL REȚELELOR SPAȚIALE PLANARE PĂTRATE

În studiu se examinează cel mai simplu tip de rețea avînd ochiuri pătrate și fețe identice, decalate între ele cu o jumătate de interval. Ca metode de calcul sînt examinate metoda forțelor și metoda deformațiilor, bazate pe aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 631—664
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

AUGUSTIN PETRE

REPARTIȚIA SARCINILOR DATORITĂ ACȚIUNII VÎNTULUI ASUPRA CONSTRUCȚIILOR ELASTICE, LUÎND ÎN CONSIDERARE EFECTELE COMBINATE DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE ȘI PORTANȚĂ

Pornind de la existența unei incidențe sau a unei săgeți inițiale, se stabilește existența unor deformații de încovoiere și răsucire care amplifică, în general, repartiția sarcinilor aerodinamice față de cazul rigid. Calculul acestei repartiții este dat sub formă de tabele și diagrame funcție de parametri adimensionali.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 615—629
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ION MUNTEANU și IOSIF STURZ

CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA STRUCTURILOR SPAȚIALE

Lucrarea prezintă în mod unitar și sub formă matriceală problemele calculului structurilor spațiale de rezistență și soluționarea generală prin cele două metode.
Se dau relații de calcul pentru centrul elastic al forțelor plane și spațiale și se demonstrează posibilitatea rezolvării problemei în metoda deplasărilor prin împărțirea în submatrice.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 665—675
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA RADEŞ

VIBRAŢIILE TRANSVERSALE FORŢATE ALE GRINZILOR FINITE, REZEMATE PE FUNDAŢIE DEFORMABILĂ AMORTIZANTĂ

Se prezintă o metodă de calcul al răspunsului staţionar al grinzilor finite, rezemate pe un mediu deformabil disipant, solicitate de forţe transversale sau momente concentrate.
Mediul de rezemare este schematizat printr-un model de fundaţie deformabilă Winkler, definit de un „modul complex al fundaţiei", care permite considerarea unui factor de amortizare independent de frecvenţă.
Se compară curbele răspunsului grinzii elastice şi al grinzii considerate rigidă, arătînd utilitatea aplicării metodei la frecvenţe ridicate.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 677—696
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

N. BOICU

DEFORMAŢIA LOCALĂ, DE CONTACT ELASTIC LINIAR, LA ROŢILE DINŢATE

Lucrarea studiază aspecte actuale ale construcţiei şi exploatării angrenajelor, lămurind unul din factorii care contribuie la preluarea şocurilor şi a altor efecte dinamice. De asemenea, studiind fenomenele care au loc în stratul superficial al dinţilor, oferă elemente pentru cunoaşterea comportării superficiale a materialelor dinţilor roţilor dinţate.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 705—723
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

EINAR KEINTZEL

CALCULUL SIMPLIFICAT AL CONLUCRĂRII SPAŢIALE A DIAFRAGMELOR CU MAI MULTE ŞIRURI DE GOLURI

Se tratează calculul simplificat al conlucrării spaţiale a diafragmelor cu mai multe şiruri de goluri, înlocuind aceste structuri printr-un sistem format din două bare fictive, obligate să se deformeze împreună, dintre care una se deformează numai prin moment, iar cealaltă numai prin forţă tăietoare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 697—703
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ANDREI ALBU şi EUGEN PAY

CONTRIBUŢII LA DINAMICA VIBRAŢIILOR SUPAPELOR DE PRESIUNE DIN CIRCUITELE HIDRAULICE DE ACŢIONARE ALE MAŞINILOR-UNELTE

Lucrarea tratează dinamic vibraţiilor unor supape de presiune, avînd în vedere şi influenţa vibraţiilor generate de sursa de acţionare.
Pe baza relaţiilor obţinute se pot determina — într-un sistem de acţionare dat — parametrii geometrici şi dimensionali ai supapelor de presiune, care lucrează fără zgomot, cu vibraţii foarte reduse, practic neglijabile.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 725—730
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

N. ORLANDEA

CONTRIBUȚII LA SINTEZA MECANISMELOR PE BAZA ALGORITMULUI DE FORMARE A CURBELOR DE ÎNFĂȘURARE LINIARĂ

În lucrare autorul a introdus coordonatele omogene tangențiale rezultînd din relațiile valabile chiar și pentru dreptele care trec prin originea axelor considerate.
În concluzie se arată că orice curbă plană poate fi înfășurată cu mecanisme de ordinul II.
În continuare se dă o metodă bazată pe un sistem de mecanisme cu două grade de mobilitate și, ca aplicare practică, se prezintă un dispozitiv pentru rectificări de profiluri.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 731—745
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN PAVELESCU, BORIS DIMITROV

UZAREA ÎN CONDIȚIILE ALUNECĂRII SACADATE

Se continuă studiul privind influența mișcării sacadate (stick-slipului și vibrațiilor) asupra uzării suprafețelor metalice și se arată modul în care — în condiții de mișcare sacadată — (stick-slip sau vibrații) principalii parametri ai frecării influențează intensitatea de uzare, comparativ cu frecarea de alunecare, în care intermitențele sînt atenuate.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 3, 1969, p. 747—756
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

V. VISARION, **Stări de tensiune în teoria plăcilor curbe**, 1967, 510 p., 32 lei.

T. OROVEANU, **Mecanica fluidelor vîscoase**, 1967, 444 p., 28 lei.

M. MIŞICU, **Mecanica mediilor deformabile. Fundamentele elasticităţii structurale**, 1967, 365 p., 22,50 lei.

AL. NICA, **Sisteme de lubrificaţie**, 1967, 262 p., 14,50 lei.

GH. VASILCA şi OLGA BIŢĂ, **Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice**, 1967, 409 p., 29 lei.

S. HÎNCU, **Modelarea hidraulică în curenţi de aer sub presiune**, 1967, 246 p., 11 lei.

H. PASCAL, **Curgerea staţionară a gazelor prin conducte magistrale**, 1967, 273 p., 16 lei.

CHR. PELECUDI, **Bazele analizei mecanismelor**, 1967, 370 p., 18 lei.

T. HACKER, **Stabilitate şi comandă în teoria zborului**, 1968, 322 p., 21,50 lei.

V. V. GHIA, **Recirculaţia gazelor la cuptoare**, 1968, 336 p., 29 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, **Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă**, 1968, 312 p., 15 lei.

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări**, 1968, 260 p., 12,50 lei.

A. MILLION şi C. MILLION, **Hidrogenul în oţeluri şi în îmbinări sudate**, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, **Tratat de maşini electrice, vol. I. Maşini de curent continuu**, 1968, 412 p., 27 lei.

RADU C. BOGDAN, DAN LARIONESCU, **Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane**, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 282 p., 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri**, 1968, 624 p., 33 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 3, P. 495—768, BUCUREŞTI, 1969

I. P. „Informaţia" — c. 3199

43832

Lei 40. —

F2557
R
F2557 4-6.10.

4
TOMUL 28
1 9 6 9

3147

1969 OKT 18

STUDII SI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN**,
Prof. **CR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU C. BOGDAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacție.*

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei,

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : București

Str. Const. Mille 15, tel. 13.83.26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 4 1969

7

SUMAR

STUDII

Pag.

ELIE CARAFOLI, ŞTEFAN STAICU, Asupra separaţiei curentului la bordurile aripii delta antisimetrice în regim supersonic 771

N. N. PATRAULEA, Asupra determinării figurii de echilibru a unei plasme rotitoare 791

R. VOINEA, V. DROBOTĂ, Studiul grinzilor continue de deschidere egale cu ajutorul ecuaţiilor funcţionale 803

S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU, Utilizarea calculatoarelor electronice în calculul structurilor static nedeterminate, alcătuite din bare, în domeniul elasto-plastic 821

VALERIU PETCU, Teoria redistribuţiei minime de momente a structurilor continue de beton armat 845

MIRCEA RADEŞ, Lungimea de încastrare la flambaj 867

F. DINCĂ, T. SIRETEANU, Vibraţii aleatoare în dinamica autovehiculelor 875

ALEX. VAICUM, Influenţa forţei tăietoare asupra stabilităţii fundaţiilor încastrate. . 901

RODICA MANIŢIU, Asupra condiţiilor de etanşare ale segmenţilor de piston în cazul variaţiei diametrului de montaj 921

A. ANTAL, Teoria generală a frezelor melcate 933

P. DODOC, Apariţia şi măsurarea rugozităţii de vibraţii la strunjirea de înaltă precizie 941

M. TEODORESCU, C. CIUCĂ, I. TARĂU, E. ŢÂRU, Studiul influenţei regimului de aşchiere şi a structurii materialului asupra rugozităţii suprfaeţelor prelucrate prin strunjire 955

VICTOR CALCAN, Utilizarea textolitului în construcţia ghidajelor rectilinii plane. I. Comportarea la uzură a cuplurilor de frecare textolit-fontă 969

I. FĂGĂRĂŞANU, D. N. NESTORESCU, Influenţa temperaturii asupra staticii şi dinamicii proceselor de curgere printr-un distribuitor de gaze naturale cu comandă automată 983

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE 997

RECENZII 1005

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1848
KÖNYVTÁRA

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratleltár
455/1970

ASUPRA SEPARAȚIEI CURENTULUI LA BORDURILE ARIPII DELTA ANTISIMETRICE ÎN REGIM SUPERSONIC

de ELIE CARAFOLI și ȘTEFAN STAICU
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În lucrarea de față vom studia scurgerea supersonică în jurul aripii delta antisimetrice, luînd în considerație separația curentului la bordurile de atac subsonice. Ca și la aripa delta subțire cu incidența constantă, în cazul de față curentul se separă în jurul bordurilor creind un strat de vîrtejuri care se situează pe extradosul aripii transformîndu-se în două nuclee concentrate de vîrtejuri de aceeași intensitate și de același semn, avînd însă o poziție antisimetrică față de axa de simetrie a aripii. Formarea vîrtejurilor are drept efect producerea unui cîmp complex de viteze verticale, care vor modifica scurgerea astfel încît presiunile vor fi finite la bordurile de atac. Distribuția vitezelor verticale conduce la un sistem de trei aripi fictive, prin superpoziția cărora se obține o aripă rezultantă fictivă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală. Scurgerea care are loc este omogenă de ordinul doi și avem posibilitatea determinării presiunilor pe extradosul și intradosul aripii și a caracteristicilor aerodinamice.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În lucrarea prezentă vom face studiul scurgerii supersonice în jurul aripii delta subțiri antisimetrice, luînd în considerație desprinderile de curent din jurul bordurilor de atac subsonice. Distribuția antisimetrică a incidențelor sau a vitezelor verticale corespunde unei aripi delta torsionată antisimetric după o funcție liniară. Fie U_∞ viteza curentului neperturbat, paralelă cu axa de simetrie a aripii (fig. 1).

Ca și la aripa delta subțire plană cu incidența constantă [1], curentul se separă la bordurile de atac, creind cîte un strat de vîrtejuri care se situează deasupra și dedesubtul aripii, producînd o mișcare antisimetrică. Stratul de vîrtejuri avînd grosimea suficient de mică poate fi considerat ca o pînză de vîrtejuri, care se înfășoară, după cum au arătat diverși autori, printre care vom menționa pe M. Roy [4], sub forma unui cornet compus dintr-un nucleu concentrat și o pînză de vîrtejuri marginală pornind de la bordul de atac.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28. Nr. 4, 1969, p. 771–790

Deoarece incidenţa este variabilă pe suprafaţa aripii, axa pe care se înfăşoară cornetul va fi o curbă iar intensitatea turbionară a nucleului este variabilă în lungul axei, proporţional cu deschiderea aripii. Pentru simplificare, în cele ce urmează, axa pe care se situează nucleele de vîrtejuri se consideră a fi o linie dreaptă.

În felul acesta cîmpul scurgerii este modificat de existenţa a două nuclee de vîrtejuri de aceeaşi intensitate şi acelaşi semn, situate antisimetric în raport cu axa de simetrie Ox_1 (fig. 1) la abscisa c şi ordonata t.

Făcînd aceste consideraţii, scurgerea în jurul aripii rămîne în continuare *conică de ordinul doi* şi se poate trata utilizînd metodele din teoria mişcărilor conice de ordin superior [2]. Astfel, pentru soluţionarea problemei de faţă, vom urmări calea utilizată în lucrările anterioare [1], [3], [11], unde s-au dat soluţiile pentru aripile delta subţiri, cu incidenţa constantă şi, respectiv, antisimetrică (antisimetrie forţată) în raport cu Ox_1, care ne-au condus la o mişcare conică propriu-zisă.

Pentru aceasta, vom admite că efectul desprinderii curentului la bordurile de atac şi formarea celor două nuclee antisimetrice este crearea unui cîmp de viteze verticale şi longitudinale care vor aduce modificări asupra cîmpului scurgerii, avînd ca urmare evitarea vitezelor infinite la bordurile de atac, aşa cum rezultă din teoria liniară clasică. Dar se poate admite că efectul vitezelor longitudinale de perturbaţie va putea fi înlocuit prin acela al unei distribuţii corespunzătoare a vitezelor verticale. De aceea, vom considera o distribuţie de viteze verticale, respectiv de incidenţe, antisimetrică, aşa ca să corespundă cazului real al unei aripi delta subţiri fictivă cu incidenţa variabilă, diferită pe cele două feţe ale sale, avînd în acelaşi timp vitezele finite la bordurile de atac. Datorită antisimetriei, vitezele verticale şi axiale adiţionale create de nucleele de vîrtejuri scad către mijlocul aripii, devenind egale cu zero pe axa de simetrie Ox_1. În felul acesta efectele celor două vîrtejuri se anulează pe linia centrală, unde va rămîne mai departe o viteză verticală nulă. Vom admite că aripa reală subţire, care are în mod cert vitezele finite la borduri prin efectul desprinderilor de curent, este echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu o aripă subţire fictivă, avînd aceeaşi variaţie de incidenţe pe care am definit-o mai sus.

Pentru a studia cu uşurinţă mişcarea, prin metoda mişcărilor conice, vom descompune aripa fictivă corespunzătoare distribuţiei de viteze verticale de mai sus în trei aripi componente, aşa cum s-a procedat în cazurile precedente [1], [3]:

1) Aripa subţire avînd variaţia de incidenţă antisimetrică convenabil aleasă pentru a respecta oarecum fenomenul modificării presiunii şi al vitezelor verticale pe suprafaţa aripii în apropierea bordului de atac. Se obţine în acest mod o aripă subţire fictivă cu vitezele finite la bordurile de atac, dar egale şi de sens contrar pe cele două feţe, superioară şi inferioară.

2) Aripa de „grosime" simetrică—noţiunea de „grosime" are aici un sens fictiv — avînd panta egală şi de acelaşi semn cu incidenţa primei aripi. Această aripă combinată cu cea de la 1) va avea presiunile diferite pe cele două feţe, cum se întîmplă şi în realitate.

3) Aripa a treia va avea „grosimea" simetrică cu panta variabilă şi antisimetrică, însă astfel încît, combinată cu aripa din 2), să se obţină

o *pantă medie* nulă, corespunzător unei aripi reale subțiri. Prin suprapunerea celor trei aripi componente, vom obține aripa rezultantă fictivă echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa delta cu separația curentului.

Examinînd fenomenul real al desprinderii curentului la borduri și luînd în considerație indicațiile experimentale, vom reuși să alegem

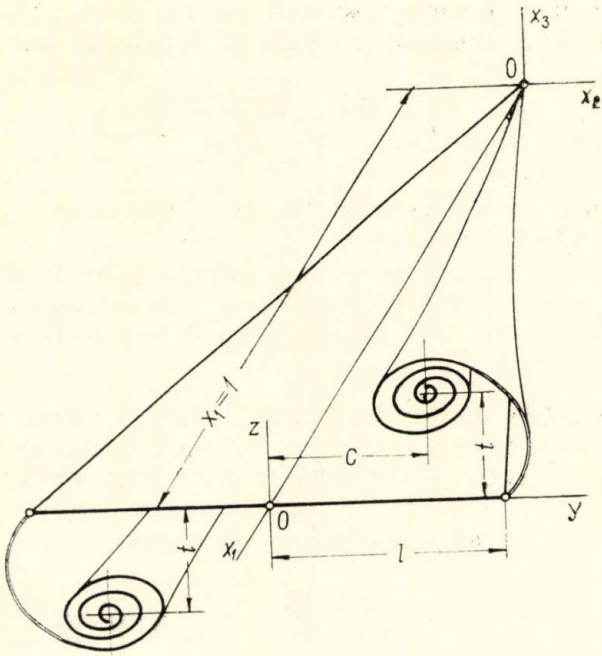


Fig. 1

o distribuție corespunzătoare a vitezelor verticale ori a incidențelor. Astfel, vom nota mai departe

$$w'_u = -\alpha'_u U_\infty, \quad w'_l = -\alpha'_l U_\infty, \tag{1}$$

vitezele verticale și incidențele, w'_u, α'_u, pe fața superioară, respectiv w'_l, α'_l pe cea inferioară a aripii fictive subțiri; viteza verticală $w = -\alpha U_\infty$ pe aripa reală este dată de relația

$$w = w_{01} x_2 = x_1 w_{01} y = -x_1 \alpha_{01} U_\infty y. \tag{2}$$

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

În continuare vom determina pentru cele trei aripi componente antisimetrice, vitezele axiale de perturbație, fiind necesare pentru calculul distribuției de presiuni și al caracteristicilor aerodinamice ale aripii fictive rezultante, care sînt presupuse a fi aceleași cu cele ale aripii delta subțiri reale, avînd incidența definită de (2). Mișcarea în jurul aripii fiind conică

de ordinul doi, vom utiliza mai departe aceleaşi metode obişnuite, considerînd în acest sens planul fizic Oyz (fig. 1) normal pe Ox_1 şi avînd coordonatele

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{3}$$

axele Oy şi Oz fiind paralele, respectiv cu Ox_2 şi Ox_3. Mai departe vom face transformarea analogă cu cea dată de Busemann (fig. 2):

$$\mathcal{Y} = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \; \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \; (x = \mathcal{Y} + i\mathfrak{z}), \tag{4}$$

obţinînd un plan ce are proprietatea de a păstra urma aripii ($\mathcal{Y} = y$, $z = \mathfrak{z} = 0$) în adevărata mărime.

După cum se ştie, în acest plan primele derivate ale vitezelor de perturbaţie u, v, w sînt funcţii armonice şi li se pot asocia funcţiile conjugate respective astfel încît să se obţină funcţii analitice de variabilă complexă $x = \mathcal{Y} + i\mathfrak{z}$ (4).

1) *Aripa subţire antisimetrică.* Vom considera viteza verticală de pe această aripă, ca urmare a efectului celor două nuclee de vîrtejuri, constantă în lungul axei Ox_1 şi variabilă pe urma aripii după relaţia

$$w' = w'_{01}(y) x_2 = x_1 y\, w'_{01}(y), \tag{5}$$

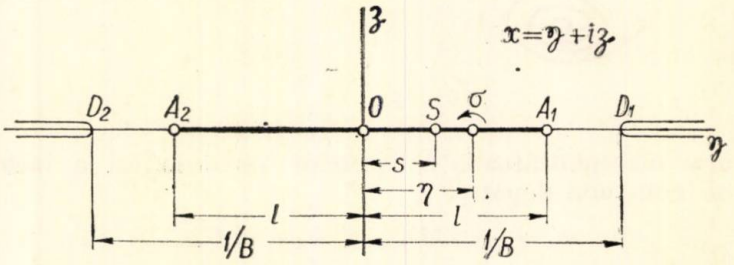


Fig. 2

în care parametrul $w'_{01}(y)$, variabil pe aripă, se obţine cu ajutorul unei distribuţii corespunzătoare de singularităţi de ordinul doi (surse) plasate pe urma aripii din planul $x = \mathcal{Y} + i\mathfrak{z}$, cu intensitatea q' dată de funcţia

$$q'(y) = q^*\left(1 - \frac{y}{l}\right) \; (s < y < l), \tag{6}$$

obţinem în felul acesta vitezele $w^{(1)}_{01} x_2 = -\alpha^{(1)}_{01} U_\infty x_1 l$, la bordul aripii şi $w^{(0)}_{01} x_2 = -\alpha^{(0)}_{01} U_\infty x_1 y$ pentru punctele de pe aripă cuprinse între $y = 0$ şi $y = s$.

Astfel, în cazul mișcării omogene de ordinul doi ($n = 2$), vom avea următoarele distribuții ale intensității surselor:

$$q'_{20} = \pm q^*_{20}\left(1 - \frac{\eta}{l}\right),\quad q'_{21} = \pm q^*_{21}\left(1 - \frac{\eta}{l}\right) \qquad (s \leqslant \eta \leqslant l), \tag{7}$$

unde η va reprezenta poziția unui element de intensitate de pe urma aripii din planul auxiliar $x = \mathcal{Y} + i\mathcal{Z}$. Ținînd seama de lucrările anterioare [2], contribuția sursei elementare dq' în expresia vitezei axiale de perturbație din punctul x va fi

$$d\mathcal{U} = (dq'_{20} + x dq'_{21}) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}. \tag{8}$$

Viteza axială de perturbație pentru aripa componentă subțire va fi obținută prin însumarea contribuțiilor tuturor surselor sub forma

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_l = \mathcal{U}_{1l} = \frac{A_{21}x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q^*_{20} + x q^*_{21}) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta - x)}}\, d\eta -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q^*_{20} - x q^*_{21}) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\, d\eta, \tag{9}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_l = \mathcal{U}_{1l} = \frac{A_{21}x}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{1}{\pi}\left[(q^*_{20} + q^*_{21}x)(s - x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} -\right.$$

$$- (q^*_{20} - q^*_{21}x)(s + x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} +$$

$$\left. + x\left((q^*_{20} - 2q^*_{21}l)\cos^{-1}\frac{s}{l} + q^*_{21}l\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right]. \tag{10}$$

2) *Aripa de grosime simetrică, cu panta egală cu incidența primei aripi subțiri.* Introducerea celei de a doua aripi, de „grosime" simetrică, este necesară pentru a înlătura vîrfurile accentuate de presiuni pe intradosul aripii, unde repartiția presiunilor obținută prin suprapunerea cu prima aripă componentă, va fi diferită de cea de pe extrados. Urmînd metoda generală a mișcărilor conice [2], pentru o aripă de grosime sime-

trică cu variaţia de pantă dată de aceeaşi distribuţie de surse (7), vom scrie pentru viteza axială de perturbaţie următoarea expresie, analogă cu (9):

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t=\mathcal{U}_{1t}=\frac{2}{\pi}\int_s^l\left(1-\frac{\eta}{l}\right)(q_{20}^*+xq_{21}^*)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}}\,d\eta-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_s^l\left(1-\frac{\eta}{l}\right)(q_{20}^*-xq_{21}^*)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\,d\eta\pm L. \quad (11)$$

Efectuînd integralele de mai sus, vom găsi

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t=\mathcal{U}_{1t}=\frac{1}{\pi}\left\{(q_{20}^*+q_{21}^*x)\left[(l-x)\left(1-\frac{l+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)}-\right.\right.$$

$$-(s-x)\left(1-\frac{s+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1-B^2sx}{B(s-x)}\Bigg]-$$

$$-(q_{20}^*-q_{21}^*x)\left[(l+x)\left(1-\frac{l-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}-\right.$$

$$-(s+x)\left(1-\frac{s-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1+B^2sx}{B(s+x)}\Bigg]-$$

$$-\frac{x\sqrt{1-B^2x^2}}{Bl}\Bigg[(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)(q_{20}^*-2q_{21}^*l)-$$

$$\left.\left.-\frac{q_{21}^*}{B}(\sqrt{1-B^2l^2}-\sqrt{1-B^2s^2})\Bigg]\right\}\pm L, \quad (12)$$

unde L reprezintă contribuţia bordului subsonic avînd panta egală cu $\alpha_{01}^{(1)}l$.

3) *Aripa de grosime simetrică compensatoare de pantă.* În continuare vom remarca, că prin introducerea efectului aripii de la punctul 2), aripa rezultantă a devenit aripă „groasă". Vom putea compensa acest lucru, introducînd pe urma aripii din planul x (4) o nouă distribuţie de surse de o formă adecvată, ce va readuce aripa la o grosime medie nulă. Variaţia vitezelor verticale w'', date de aceste surse, care va prezenta neapărat la bordul aripii viteza $-w_{01}x_1l$, va corespunde cu o „aripă compensatoare de pantă" de „grosime" simetrică, care are rolul de a anula panta medie şi efectul bordului aripii dela 2). Distribuţia de surse q'', pe care o vom introduce, va trebui să creeze pe intradosul aripii o distribuţie de presiuni fără vîrfuri accentuate, aproximativ liniară, cu excepţia regiunii din apropierea bordului de atac.

De aceea, pentru simplificare, vom alege următoarea expresie a distribuției de surse :

$$q''_{20} = \pm k_{20}\eta(1 + k_{10}\eta),\ q''_{21} = \pm k_{21}\eta(1 + k_{11}\eta) \quad (0 \leqslant \eta \leqslant l), \tag{13}$$

considerată egală și de semn contrar pentru punctele simetrice față de axa Ox_1 a aripii.

Am obținut, astfel, ca cele două „aripi groase" să formeze una singură, avînd panta variabilă în așa fel ca cea medie să fie nulă. Pentru această aripă, expresia vitezei axiale de perturbație $\mathcal{U}_{1c}$ va fi, analog cu (11), următoarea :

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_{1c} = \frac{2}{\pi}k_{20}\int_0^l \eta\,(1 + k_{10}\eta)\left(\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}}\right)\mathrm{d}\eta +$$

$$+ x\,\frac{2}{\pi}k_{21}\int_0^l \eta(1 + k_{11}\eta)\left(\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}} + \right.$$

$$\left. + \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}}\right)\mathrm{d}\eta \pm L, \tag{14}$$

care se poate pune sub forma, după integrare,

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_{1c} = \frac{k_{20}}{2\pi B^2}\left[B^2(l^2 - x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1 - B^2lx}{B(l - x)} - \cosh^{-1}\frac{1 + B^2lx}{B(l + x)}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sin^{-1} Bl\ Bx\sqrt{1 - B^2x^2}\right] + \frac{k_{20}k_{10}}{3\pi B^3}\left[B^3(l^3 - x^3)\cosh^{-1}\frac{1 - B^2lx}{B(l - x)} - \right.$$

$$\left. - B^3(l^3 + x^3)\cosh^{-1}\frac{1 + B^2lx}{B(l + x)} + 2B^3x^3\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + \right.$$

$$\left. + 2\left(1 - \sqrt{1 - B^2l^2}\right)Bx\sqrt{1 - B^2x^2}\right] +$$

$$+ x\left\{\frac{k_{21}}{2\pi B^2}\left[B^2(l^2 - x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1 - B^2lx}{B(l - x)} + \cosh^{-1}\frac{1 + B^2lx}{B(l + x)}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2B^2x^2\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} + 2\left(1 - \sqrt{1 - B^2l^2}\right)\sqrt{1 - B^2x^2}\right] + \right.$$

$$+\frac{k_{21}k_{11}}{3\pi B^3}\left[B^3(l^3-x^3)\cos h^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)}+B^3(l^3+x^3)\cos h^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}+\right.$$

$$\left.+\left(2\sin^{-1}Bl\,B^2x^2+\sin^{-1}Bl-Bl\sqrt{1-B^2l^2}\right)\sqrt{1-B^2x^2}\right]\Bigg\}\pm L. \quad (15)$$

Suprapunînd cele trei aripi componente, se obţine aripa fictivă rezultantă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală, pentru care viteza axială de perturbaţie are expresia

$$\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_{1l}+\mathcal{U}_{1t}+\mathcal{U}_{1c}, \quad (16)$$

care va fi antisimetrică faţă de axa de simetrie Ox_1 şi continuă în origina O. Să observăm că viteza $\mathcal{U}_{1l}$ pe faţa superioară este egală şi de semn contrar cu cea de pe faţa inferioară, deoarece corespunde aripii subţiri.

3. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru determinarea constantelor q_{20}^* şi q_{21}^* care apar în expresia (10) a lui $\mathcal{U}_{1l}$, vom porni de la condiţiile următoare

$$\operatorname{Im}\left(\int_\sigma\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right)\mathrm{d}x\right)=0, \quad (17\,a)$$

$$-\operatorname{Im}\left(\int_\sigma\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{d}w_{01}'}{\mathrm{d}\eta}, \quad (17\,b)$$

deduse din teoria mişcărilor conice [2], integrarea fiind efectuată pe un semicerc σ de rază foarte mică în jurul unui punct oarecare $y=\eta$ de pe aripă, cuprins în intervalul $(y=s,\ y=l)$, (fig. 2).

Vom obţine, astfel relaţiile

$$q_{20}'=\frac{\mathrm{d}w_{01}'}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\eta^2}{(1-B^2\eta^2)^{3/2}},\quad q_{21}'=-\frac{\mathrm{d}w_{01}'}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{B^2\eta^3}{(1-B^2\eta^2)^{3/2}}, \quad (18)$$

care stabilesc dependenţa dintre variaţia surselor şi distribuţia de viteze verticale.

Ţinînd seama de (7), vom porni dela (18) şi vom pune condiţiile la limită în punctele $\eta=s$ şi $\eta=l$ pentru viteza verticală $w_{01}'\,x_2$:

$$w_{01}^{(1)}-w_{01}^{(0)}=\frac{q_{20}^*}{l}\int_s^l\frac{(l-\eta)(1-B^2\eta^2)}{\eta^2}\sqrt{1-B^2\eta^2}\,\mathrm{d}\eta, \quad (19\,a)$$

$$w_{01}^{(1)}-w_{01}^{(0)}=-\frac{q_{21}^*}{B^2l}\int_s^l\frac{(l-\eta)(1-B^2\eta^2)}{\eta^3}\sqrt{1-B^2\eta^2}\,\mathrm{d}\eta, \quad (19\,b)$$

de unde deducem primele relații dintre constantele q_{20}^*, q_{21}^*, $w_{01}^{(0)}$ și $w_{01}^{(1)}$:

$$-\frac{q_{20}^*}{l}\left\{\left(1+\frac{l}{s}\right)\sqrt{1-B^2s^2}-2\sqrt{1-B^2l^2}-\frac{3}{2}Bl(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}B^2l^2\left(\sqrt{1-B^2l^2}-\frac{s}{l}\sqrt{1-B^2s^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left[(1-B^2l^2)^{3/2}-(1-B^2s^2)^{3/2}\right]+\cos h^{-1}\frac{1}{Bl}-\cos h^{-1}\frac{1}{Bs}\right\}=w_{01}^{(0)}-w_{01}^{(1)}, \tag{20 a}$$

$$\frac{q_{21}^*}{2B^2l^2}\left\{(1-B^2l^2)^{3/2}+\left[B^2l^2\left(2-\frac{s}{l}\right)+\frac{l^2}{s^2}\left(1-2\frac{s}{l}\right)\right]\sqrt{1-B^2s^2}+\right.$$

$$+3B^2l^2\left(\cos h^{-1}\frac{1}{Bl}-\cos h^{-1}\frac{1}{Bs}\right)+$$

$$\left.+3Bl(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)\right\}=w_{01}^{(0)}-w_{01}^{(1)}. \tag{20b}$$

Pe de altă parte, viteza verticală medie $w_{01}x_2$ sau incidența medie $\alpha_{01}x_2$ a aripii reale, egală cu cea a primei aripi componente ca și cu cea a aripii rezultante fictive, se obține ținînd seama că cele două aripi groase 2) și 3) se compensează reciproc creind o pantă medie nulă ; vom putea scrie relația

$$\frac{2}{l}\int_0^l w_{01}'\,\eta\,d\eta=w_{01}l, \tag{21}$$

corespunzătoare numai aripii subțiri componente 1). Procedînd în acest mod și ținînd seama de (21) vom avea

$$\frac{1}{2}w_{01}l^2=\frac{1}{2}w_{01}^{(0)}s^2+\int_s^l w_{01}'\,\eta\,d\eta, \tag{22}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$\frac{q_{20}^*}{8Bl^2}\left\{3\,[\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl(1-B^2l^2)^{1/2}-Bs(1-B^2s^2)^{1/2}]+\right.$$

$$+2[Bl(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs(1-B^2s^2)^{3/2}]+$$

$$\left.+\frac{8}{5Bl}\left[(1-B^2l^2)^{5/2}-(1-B^2s^2)^{5/2}\right]\right\}=w_{01}^{(1)}-w_{01}. \tag{23}$$

Constanta A_{21}, care apare în expresia (9) a vitezei axiale de perturbaţie, o vom determina considerînd variaţia vitezei verticale w'_{01} de la un punct de pe aripă pînă la unul de viteză verticală nulă (de exemplu de pe conul Mach). Pentru a evita calculele laborioase care apar, vom considera că sursele distribuite liniar în intervalul (s, l) sînt concentrate în $y = s'$, de intensităţi Q_{20} şi Q_{21} astfel încît vom avea

$$s' = s + \frac{l-s}{3},\ Q_{20} = \frac{1}{2} q^*_{20} l \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2,\ Q_{21} = \frac{1}{2} q^*_{21} l \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2. \quad (24)$$

Procedînd în acest mod, vom scrie relaţia

$$\mathrm{Re}\, i \int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \frac{d^2 \mathcal{U}'_{1l}}{dx^2}\, dx = w^{(1)}_{01}, \quad (25)$$

unde $\mathcal{U}'_{1l}$ este viteza axială de perturbaţie pentru cazul simplificat al sursei concentrate în $y = s'$, dată de expresia

$$\mathcal{U}'_{1l} = \frac{1}{x_1}\mathcal{U}'_l = \frac{A_{21} x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}(Q_{20} + Q_{21} x) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+s')(l-x)}{2l(s'-x)}} -$$

$$- \frac{2}{\pi}(Q_{20} - Q_{21} x) \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+s')(l+x)}{2l(s'+x)}}. \quad (26)$$

Efectuînd integrala (25) pe axa ordonatelor ($\mathcal{Y} = 0$, $x = i\zeta$) între limitele 0 şi ∞, rezultă

$$A_{21} \frac{(2 - B^2 l^2) E(k) - B^2 l^2 K(k)}{l^2 (1 - B^2 l^2)} +$$

$$+ \frac{9}{4\pi} q^*_{20} \left(1 - \frac{s'}{l}\right)^2 \frac{\sqrt{l^2 - s'^2}}{s' l (1 - B^2 s'^2)} \Big[(1 - B^2 s'^2) E(k) -$$

$$- B^2 l^2 (K(k) - \Pi(\rho, k)) \Big] +$$

$$+ \frac{9}{4\pi} l\, q^*_{21} \left(1 - \frac{s'}{l}\right)^2 \frac{B^2 \sqrt{l^2 - s'^2}}{1 - B^2 s'^2} [(2 - B^2 s'^2)\, \Pi(\rho, k) - K(k)] = - w^{(0)}_{01}, \quad (27)$$

în care $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(\rho, k)$ reprezintă integralele eliptice complete de prima, a doua şi, respectiv, a treia speţă, avînd modulul k şi parametrul ρ daţi de relaţiile

$$\Pi(\rho, k) = K(k) + \frac{\sqrt{1 - B^2 s'^2}}{B^2 s' \sqrt{l^2 - s'^2}} \Big[\frac{\pi}{2} - K(k) E(\varphi_0, k') +$$

$$+ (K(k) - E(k)) F(\varphi_0, k') \Big], \quad (28\,a)$$

$$k = \sqrt{1 - B^2 l^2},\ \rho = B^2 s'^2 - 1 = \frac{1}{9} B^2 (l + 2s)^2 - 1,$$

$$k' = Bl,\ \varphi_0 = \sin^{-1} \frac{s'}{l}. \tag{28 b}$$

Mai departe, datorită separației curentului la borduri, vom impune condiția ca viteza să fie finită la bordurile subsonice, anulînd constanta A_{21} :

$$A_{21} = 0. \tag{29}$$

Eliminînd pe $w_{01}^{(0)}$ și $w_{01}^{(1)}$ între ecuațiile (20a), (20b), (23) și (27), vom obține constantele q_{20}^* și q_{21}^*,

$$q_{20}^* = -\frac{I_{21}}{I_{21} J_{20} - I_{20} J_{21}} w_{01},\ q_{21}^* = \frac{I_{20}}{I_{21} J_{20} - I_{20} J_{21}} w_{01}, \tag{30}$$

în care am făcut notațiile

$$I_{20} = 2B^2 l \left\{ \left(1 + \frac{l}{s}\right) \sqrt{1 - B^2 s^2} - 2\sqrt{1 - B^2 l^2} - \frac{3}{2} Bl (\sin^{-1} Bl - \right.$$

$$- \sin^{-1} Bs) - \frac{1}{2} B^2 l^2 \left(\sqrt{1 - B^2 l^2} - \frac{s}{l} \sqrt{1 - B^2 s^2}\right) - \tag{31 a}$$

$$\left. - \frac{1}{3} [(1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2}] + \cos h^{-1} \frac{1}{Bl} - \cos h^{-1} \frac{1}{Bs} \right\},$$

$$I_{21} = (1 - B^2 l^2)^{3/2} + \left[B^2 l^2 \left(2 - \frac{s}{l}\right) + \frac{l^2}{s^2} \left(1 - 2 \frac{s}{l}\right) \right] \sqrt{1 - B^2 s^2} +$$

$$+ 3Bl \left[\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + Bl \left(\cos h^{-1} \frac{1}{Bl} - \cos h^{-1} \frac{1}{Bs} \right) \right], \tag{31 b}$$

$$J_{20} = \frac{1}{8Bl^2} \left\{ 3 [\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + Bl (1 - B^2 l^2)^{1/2} - Bs (1 - B^2 s^2)^{1/2}] + \right.$$

$$+ 2 [Bl (1 - B^2 l^2)^{3/2} - Bs (1 - B^2 s^2)^{3/2}] +$$

$$\left. + \frac{8}{5\, Bl} [(1 - B^2 l^2)^{5/2} - (1 - B^2 s^2)^{5/2}] \right\} +$$

$$+ \frac{9}{4\, \pi s'} \left(1 - \frac{s'}{l}\right)^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{s'^2}{l^2}}}{1 - B^2 s'^2} \left[(1 - B^2 s'^2)\, E(k) - B^2 l^2 (K(k) - \Pi(\rho, k)) \right], \tag{31 c}$$

$$J_{21}=\frac{1}{2B^2l^2}\left\{(1-B^2l^2)^{3/2}+\left[B^2l^2\left(2-\frac{s}{l}\right)+\frac{l^2}{s^2}\left(1-2\frac{s}{l}\right)\right]\sqrt{1-B^2s^2}+\right.$$

$$+3B^2l^2\left(\cos h^{-1}\frac{1}{Bl}-\cos h^{-1}\frac{1}{Bs}\right)+$$

$$\left.+3\,Bl\,(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)\right\}+$$

$$+\frac{9}{4\pi}\left(1-\frac{s'}{l}\right)^2\frac{B^2l^2\sqrt{1-\frac{s'^2}{l^2}}}{1-B^2s^2}\,[(2-B^2s'^2)\,\Pi(\rho,k)-K(k)]. \tag{31 d}$$

Constantele k_{10}, k_{20}, k_{11} și k_{21}, care apar în expresia lui $\mathcal{U}_{1c}$ dată de (14), se determină luînd în considerație rolul celei de a treia aripi componente care va avea panta medie $-w_{01}x_2$; vom scrie asemănător cu (21)

$$-\frac{1}{2}w_{01}l^2=\int_0^l w_{01}''\,\eta\,\mathrm{d}\eta, \tag{32}$$

de unde deducem relațiile

$$(w_{01}-w_{01}^{(1)})\,l^2=k_{20}\int_0^l\eta\,(1+k_{10}\,\eta)\,(1-B^2\,\eta^2)^{3/2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{33a}$$

$$(w_{01}-w_{01}^{(1)})\,l^2=-\frac{k_{21}}{B^2}\int_0^l(1+k_{11}\,\eta)\,(1-B^2\,\eta^2)^{3/2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{33b}$$

care capătă forma

$$w_{01}^{(1)}-w_{01}=\frac{k_{20}}{B^2l^2}\left\{\frac{1}{5}((1-B^2l^2)^{5/2}-1)+\frac{1}{2}k_{10}\,l\left[\frac{1}{3}(1-B^2l^2)^{5/2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{12}(1-B^2l^2)^{3/2}-\frac{1}{8}\left(\sqrt{1-B^2l^2}+\frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)\right]\right\}, \tag{34a}$$

$$w_{01}^{(1)}-w_{01}=\frac{k_{21}}{B^3l^2}\left\{\frac{1}{8}Bl\left[2\,(1-B^2l^2)^{3/2}+3\left(\sqrt{1-B^2l^2}+\frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{k_{11}}{5B}\left((1-B^2l^2)^{5/2}-1\right)\right\}. \tag{34b}$$

Considerînd pentru k_{10} și k_{11} valorile convenabile

$$k_{10} = k_{11} = -\frac{1}{2l}, \tag{35}$$

vom obține din ecuațiile (23), (34a) și (34b) constantele k_{20} și k_{21}:

$$k_{20} = \frac{1}{2} Bq_{20}^{*} \Big\{ 3\,[\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + Bl\,(1 - B^2 l^2)^{1/2} - Bs\,(1 - B^2 s^2)^{1/2}] +$$

$$+ 2\,[Bl\,(1 - B^2 l^2)^{3/2} - Bs\,(1 - B^2 s^2)^{3/2}] +$$

$$+ \frac{8}{5Bl}\Big[(1 - B^2 l^2)^{5/2} - (1 - B^2 s^2)^{5/2}\Big]\Big\} \times$$

$$\times \Big[\frac{7}{15}(1 - B^2 l^2)^{5/2} + \frac{1}{12}(1 - B^2 l^2)^{3/2} +$$

$$+ \frac{1}{8}\Big(\sqrt{1 - B^2 l^2} + \frac{\sin^{-1} Bl}{Bl}\Big) - \frac{4}{5}\Big]^{-1}, \tag{36a}$$

$$k_{21} = \frac{B^3 l}{4} q_{20}^{*} \Big\{ 3\Big[\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + Bl\,(1 - B^2 l^2)^{1/2} - Bs(1 - B^2 s^2)^{1/2}\Big] +$$

$$+ 2\Big[Bl\,(1 - B^2 l^2)^{3/2} - Bs(1 - B^2 s^2)^{3/2}\Big] +$$

$$+ \frac{8}{5Bl}\Big[(1 - B^2 l^2)^{5/2} - (1 - B^2 s^2)^{5/2}\Big]\Big\} \times$$

$$\times \Big\{\frac{1}{4} B^2 l^2 \Big[2(1 - B^2 l^2)^{3/2} + 3\Big(\sqrt{1 - B^2 l^2} + \frac{\sin^{-1} Bl}{Bl}\Big)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{5}\Big((1 - B^2 l^2)^{5/2} - 1\Big)\Big\}^{-1}. \tag{36b}$$

4. DISTRIBUȚIA DE PRESIUNI ȘI CARACTERISTICELE AERODINAMICE

Am arătat că viteza axială de perturbație pe aripa reală rezultă prin superpoziția celor trei aripi fictive componente, obținîndu-se formula (16). Astfel, coeficientul de presiune se va obține considerînd viteza axială totală dată de (16), (fig. 3):

$$C_p = -2\frac{u_1}{U_\infty} = -2\mathrm{Re}\frac{\mathcal{U}_1}{U_\infty}. \tag{37}$$

Pentru calculul coeficientului de portanță al jumătății din dreapta aripii vom face observația că aripile de grosime simetrică nu dau portanță, încît se va considera numai cel dat de „aripa portantă" :

$$C_l = \frac{8}{3l\,U_\infty}\int_0^l u_{1l}\,dy. \tag{38}$$

Efectuînd calculele, se va obține

$$C_l = \frac{8l}{3\pi U_\infty}\left\{q^*_{20}\left[\left(1-\frac{1}{3}\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l}-\right.\right.$$

$$-\frac{s^2}{l^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{s}{l}\right)\cosh^{-1}\frac{l}{s}\Bigg] + q^*_{21}\,l\left[\frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{s}{l}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{s}{l}\right)\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}+\frac{s^2}{l^2}\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right)\right]\right\}. \tag{39}$$

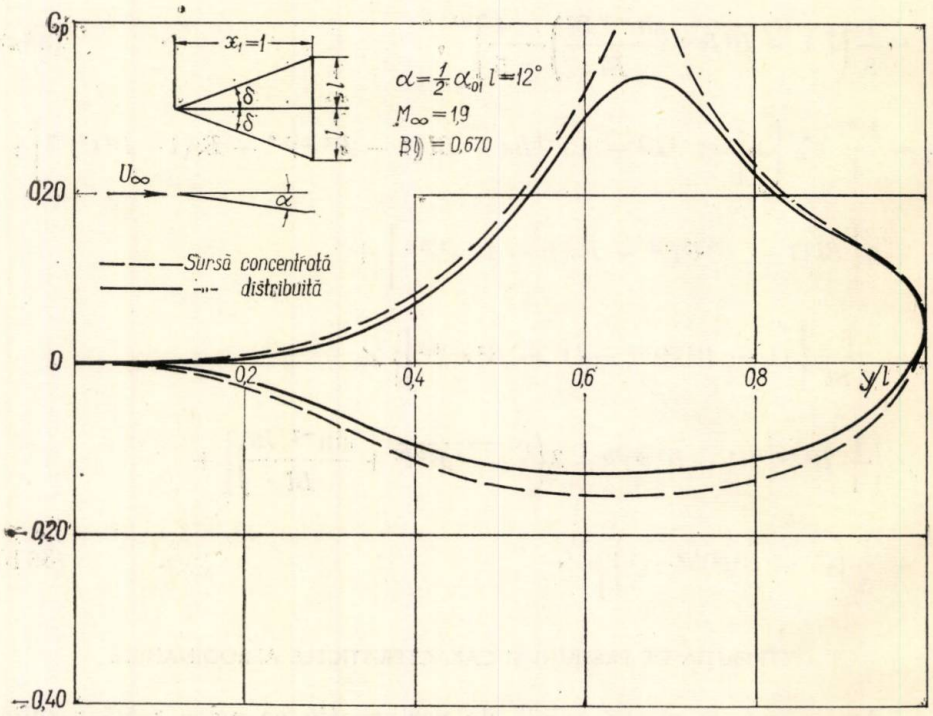


Fig. 3

Coeficientul momentului de ruliu este

$$HC_m = \frac{2}{lU_\infty}\int_0^l u_{1l}\,y\,dy, \tag{40}$$

care, după efectuarea calculului, capătă forma

$$HC_m = \frac{l^2}{8U_\infty}\left\{q^*_{20}\left[\left(\frac{8}{3}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)-\frac{s}{l}\left(1-2\frac{s^2}{l^2}\right)\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}\right]+\right.$$

$$\left.+q^*_{21}\,l\left[2\cos^{-1}\frac{s}{l}-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\left(\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{l}\left(1+2\frac{s^2}{l^2}\right)\left(2-\frac{8}{5}\frac{s}{l}\right)\right)\right]\right\}, \tag{41}$$

unde H este o lungime de referință (fig. 4).

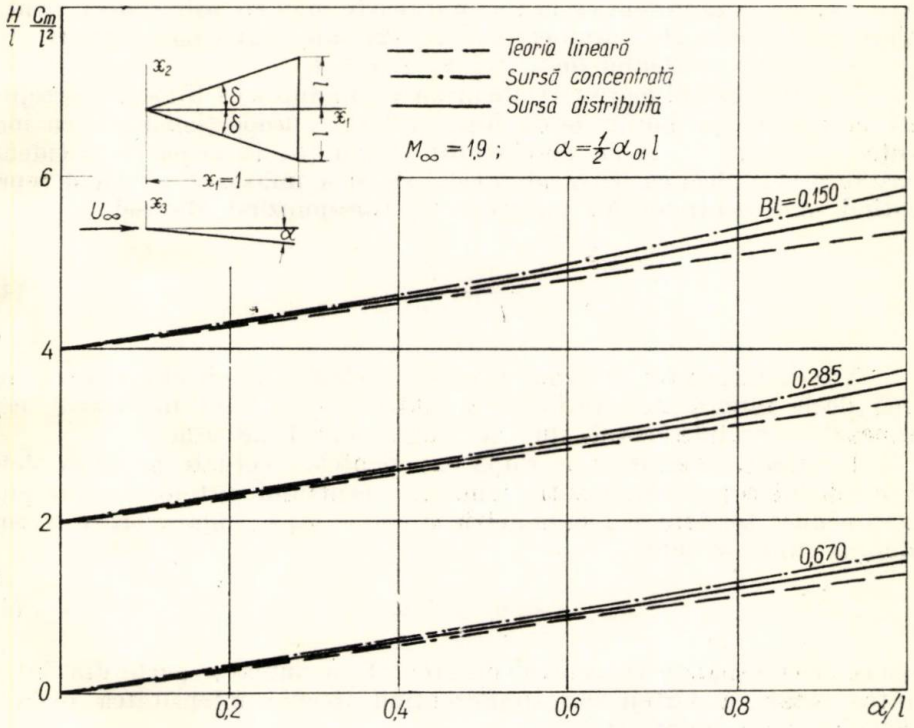


Fig. 4

Pentru definirea parametrului $\frac{s}{l}$, care intră în expresiile de mai sus și care determină limitele distribuției de surse, vom remarca mai întîi că poziția de maxim a distribuției de presiuni coincide cu abscisa $y = c$ a centrului nucleului de vîrtej, așa cum se constată de altfel și din experiențe. Dar, făcînd calculul pe baza distribuției de surse (6), se constată că vîrful depresiunilor de pe extradosul aripii cade aproximativ la jumătatea distanței dintre centrul de greutate al intensității surselor și punctul

de abscisă s, pe care urmărim să-l determinăm. În modul acesta putem deduce relația dintre s și c

$$c = s + \frac{1}{6}(l - s) \qquad \left(\frac{s}{l} = 1{,}2\,\frac{c}{l} - 0{,}2\right). \tag{42}$$

Pentru definirea pozițiilor nucleelor de vîrtejuri, vom observa că la mici torsiuni ale aripii, aceasta se poate considera aproximativ plană și paralelă cu direcția curentului neperturbat U_∞, încît vîrtejurile desprinse la bordurile de atac, în formă de cornet ar putea fi considerate ca lipite de suprafața superioară a aripii. Acest lucru ar duce, oricît de mică ar fi intensitatea vîrtejurilor, la viteze locale foarte mari, incompatibile cu efectele reale ale separației curentului la borduri. Pentru a evita acest lucru trebuie să admitem că la torsiuni foarte mici ale aripii, deci, pentru valori foarte mici ale parametrului α_{01} (2) sau, mai exact, atunci cînd $\alpha_{01} \to 0$, poziția nucleului de vîrtej va fi $c = l$.

Pentru torsiuni mai mari ale aripii vom admite că firele de vîrtejuri, care pornesc de pe bordurile de atac, evoluează proporțional atît cu incidența $\alpha = \alpha_{01} x_2$ cît și cu deschiderea aripii (ca la aripa cu incidență constantă [1]), deci cu pătratul anvergurii, și se înfășoară pe o axă reprezentînd linia centrelor lor de greutate, corespunzînd abscisei

$$\frac{c}{l} = \frac{3}{4}. \tag{43}$$

Vom remarca totuși că intensitatea nucleului de vîrtej este ceva mai mică decît intensitatea turbionară totală, restul fiind în stratul care formează suprafața cornetului de lîngă bordul de atac.

De aceea, orientîndu-ne după experiențele efectuate pe aripa delta cu incidență constantă, poziția minimă a centrului vîrtejului, corespunzătoare unor torsiuni sau parametrii $w_{01} = -\alpha_{01} U_\infty$ mari, poate fi considerată cuprinsă între

$$c \cong 0{,}6\,l \div 0{,}7\,l, \tag{44}$$

ceea ce ar corespunde cu centrul de greutate a numai o parte din intensitatea totală a vîrtejurilor, reprezentînd tocmai intensitatea reală a nucleului rămas (circa 80%).

Ceea ce face ca această poziție minimă să fie greu de stabilit este și faptul că la incidențe mari apar nuclee de vîrtejuri interioare, de sens contrar cu cel principal, situate între acesta și bordul de atac.

Între aceste limite, ținînd seama și de rezultatele experimentale obținute de diverși autori pe aripa delta plană cu incidența constantă, vom admite pentru poziția nucleului de vîrtej următoarea formulă aproximativă de variație cu incidența:

$$\frac{c}{l} \cong \frac{1}{1 + 1{,}1\,(\alpha)^{1/2}}, \tag{45}$$

unde α reprezintă incidența aripii într-un punct convenabil, reprezentînd centrul de greutate al efectelor aerodinamice, adică

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{2}{3} x_1 l = \frac{1}{2} l. \tag{46}$$

Vom remarca, că întregul raționament care a condus la stabilirea formulei (45) se poate aplica pentru fiecare secțiune a aripii, obținîndu-se în felul acesta o linie curbă pentru pozițiile nucleelor de vîrtejuri. Dar abaterile de la o linie dreaptă se constată către vîrful aripii, unde contribuțiile aerodinamice sînt foarte mici, iar în spatele aripii, unde incidențele cresc, vîrtejurile sînt așezate rectiliniu. De aceea, putem admite o linie dreaptă pentru axa pe care se înfășoară pînza de vîrtejuri în formă de cornet, corespunzătoare secțiunii dată de (46).

Această ipoteză ne permite să aplicăm metodele scurgerilor conice de ordin superior.

5. CAZUL SURSELOR CONCENTRATE

Considerînd, pentru simplificare, o variație bruscă a vitezei verticale în punctul $s' = c$, corespunzător abscisei nucleului de vîrtej, vom obține cazul unei „muchii" de separație a vitezelor verticale $w_{01}^{(0)} cx_1$ și $w_{01}^{(1)} cx_1$ [2].

Saltul brusc de viteză verticală sau de incidență se realizează analitic cu ajutorul unor singularități logaritmice concentrate în punctele $s' = \pm c$ de pe urma aripii din planul auxiliar x (4), avînd intensitățile Q_{20}, Q_{21}.

În acest caz, vitezele axiale de perturbație ale celor trei aripi componente au următoarele expresii

$$\mathcal{U}'_{1l} = \frac{1}{x_1} \mathcal{U}'_l = \frac{A_{21} x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} (Q_{20} + Q_{21} x) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(l + c)(l - x)}{2l(c - x)}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} (Q_{20} - Q_{21} x) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(l + c)(l + x)}{2l(c + x)}} = \tag{47}$$

$$= \frac{A_{21} x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} \left(\pm Q_{20} \operatorname{ch}^{-1} \frac{c}{l} \sqrt{\frac{l^2 - x^2}{c^2 - x^2}} + Q_{21} x \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{l^2 - x^2}{c^2 - x^2}} \right)$$

pentru „aripa portantă subțire";

$$\mathcal{U}'_{1t} = \frac{1}{x_1} \mathcal{U}_t = \frac{2}{\pi} (Q_{20} + Q_{21} x) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(1 + Bc)(1 - Bx)}{2B(c - x)}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} (Q_{20} - Q_{21} x) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(1 + Bc)(1 + Bx)}{2B(c + x)}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pm Q_{20} \cos h^{-1} Bc \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(c^2 - x^2)}} + Q_{21}\, x \cos h^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(c^2 - x^2)}}\right) \pm L \tag{48}$$

pentru „aripa groasă", și

$$\mathcal{U}'_{1c} \equiv \mathcal{U}_{1c} \tag{49}$$

pentru „aripa compensatoare" de pantă, unde $\mathcal{U}_{1c}$ are expresia dată de (15). Vom remarca și de data aceasta că semnul vitezei axiale $\mathcal{U}'_{1l}$ este diferit pe cele două fețe ale aripii. Expresia vitezei axiale totale va fi dată de o formulă analogă cu (16), care ne va permite determinarea distribuției de presiuni.

Pornind de la (17a) și (17b), vom găsi în cazul sursei concentrate pentru Q_{20} și Q_{21}, următoarele expresii:

$$Q_{20} = \frac{c^2}{(1 - B^2 c^2)^{3/2}}(w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)}),\ Q_{21} = -\frac{B^2 c^3}{(1 - B^2 c^2)^{3/2}}(w_{01}^{(1)} - w_{01}^{(0)}), \tag{50}$$

iar din (25), în care am introdus pe $\mathcal{U}'_{1l}$ dat de (47), vom obține

$$A_{21}\frac{(2 - B^2 l^2) E(k) - B^2 l^2 K(k)}{l^2 (1 - B^2 l^2)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} Q_{20} \frac{\sqrt{l^2 - c^2}}{cl^2 (1 - B^2 c^2)} [(1 - B^2 c^2) E(k) - B^2 l^2 (K(k) - \Pi(\rho, k))] +$$

$$+ \frac{2}{\pi} Q_{21} \frac{B^2 \sqrt{l^2 - c^2}}{1 - B^2 c^2} [(2 - B^2 c^2) \Pi(\rho, k) - K(k)] = - w_{01}^{(0)}, \tag{51}$$

în care integralele eliptice complete, în această formulă, au modulul k și parametrul ρ dați de relațiile (28a) și (28b), în care se va pune însă $s' = c$.

Folosind relația (21), vom obține

$$(w_{01}^{(0)} - w_{01}^{(1)}) c^2 = (w_{01} - w_{01}^{(1)}) l^2, \tag{52}$$

care, împreună cu condiția ca viteza să fie finită la borduri

$$A_{21} = 0, \tag{53}$$

și cu ecuațiile (50), (51) formează sistemul de ecuații din care deducem constantele.

$$\frac{w_{01}^{(0)}}{w_{01}} = \frac{E(k) - B^2 l^2 \left[K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)\right]}{E(k) - B^2 l^2 \left[K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)\right] - \frac{\pi}{2}(1 - B^2 c^2)\sqrt{\left(\frac{l^2}{c^2} - 1\right)(1 - B^2 c^2)}}, \tag{54 a}$$

$$\frac{w_{01}^{(1)}}{w_{01}} = -\frac{E(k) - B^2 l^2 [K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)] - \dfrac{\pi(1 - B^2 c^2)}{2\left(1 - \dfrac{c^2}{l^2}\right)}\sqrt{\left(\dfrac{l^2}{c^2} - 1\right)(1 - B^2 c^2)}}{E(k) - B^2 l^2 [K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)] - \dfrac{\pi}{2}(1 - B^2 c^2)\sqrt{\left(\dfrac{l^2}{c^2} - 1\right)(1 - B^2 c^2)}}, \tag{54 b}$$

$$Q_{20} = -\frac{\pi c^2}{2\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)\sqrt{1 - B^2 c^2}\left\{E(k) - B^2 l^2 \left[K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)\right] - \frac{\pi}{2}(1 - B^2 c^2)\sqrt{\left(\frac{l^2}{c^2} - 1\right)(1 - B^2 c^2)}\right\}}, \tag{54 c}$$

$$Q_{21} = \frac{\pi B^2 c^3}{2\left(1 - \frac{c^2}{l^2}\right)\sqrt{1 - B^2 c^2}\left\{E(k) - B^2 l^2 \left[K(k) - (1 - B^2 c^2)\,\Pi(\rho, k)\right] - \frac{\pi}{2}(1 - B^2 c^2)\sqrt{\left(\frac{l^2}{c^2} - 1\right)(1 - B^2 c^2)}\right\}} \tag{54 d}$$

Astfel, vom obține, respectiv

Constantele k_{20}, k_{21} se deduc din (34a), (34b) în care se înlocuiește $w_{01}^{(1)}$ prin expresia sa dată de (54b).

Pentru determinarea coeficientului de portanță al jumătății de aripă, vom porni de la(38) în care se va introduce expresia lui $u'_{1l} = \operatorname{Re} \mathcal{U}'_{1l}$ din (47) și se va obține:

$$C_z = \frac{8}{3\pi l U_\infty}\left[2Q_{20}\, c \cos h^{-1}\frac{l}{c} + Q_{21}\, l^2\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}} + \frac{c^2}{l^2}\cos h^{-1}\frac{l}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{8\,Q_{20}}{3\pi\, U_\infty}\frac{c}{l}\left[(2 - B^2 c^2)\cos h^{-1}\frac{l}{c} - B^2 l^2\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\right]. \qquad (55)$$

Coeficientul momentului de ruliu se calculează pornind de la relația (40)

$$HC_m = \frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}}{U_\infty}\left[c\,Q_{20} + \frac{1}{3}Q_{21}\,(l^2 + 2c^2)\right] =$$

$$= \frac{Q_{20}c}{3\,U_\infty}\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}\left[3 - B^2\,(l^2 + 2c^2)\right], \qquad (56)$$

în care constanta Q_{20} are expresia (54c), dată mai sus.

6. REMARCĂ FINALĂ

Rezultatele obţinute mai sus, în cazul aripii torsionate, pot fi utilizate şi la aripa delta plană în mişcarea de rotaţie în jurul axei de simetrie Qx_1.

În acest caz însă, datorită rotaţiei permanente de ruliu, va fi necesar să facem însă şi alte consideraţii.

Pe de altă parte, vom remarca că poziţia nucleelor de vîrtejuri va fi afectată şi de un efect centrifugal, care le împinge spre bordurile de atac îndepărtîndu-le, în cazul vitezelor mari de rotaţie, la distanţe mai mari, chiar peste 0,75 l.

Primită la redacţie la 10 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac*, St. cerc. mec. apl., **4** (1966).
2. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
3. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Antisymmetrical thin delta wing with flow separation at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XI**, *6* (1966).
4. M. Roy, *Sur la théorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en cornets*, C. R. Ac. Sc., R. A. 56 (1957).
5. K. M. Mangler, J. H. Smith, *A Theory of the Flow Past a Slender Delta Wing with Leading Edge Separation*, Proc. Roy. Soc., May, 1959.
6. D. Küchemann, *A Non-Linear Lifting-Surface Theory for Wings of Small Aspect-Ratio With Edge Separation*, R. A. E. Rep. 2540, April, 1955.
7. L. C. Squire, *The Estimation of the Non-Linear Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds*, Journ. R.A S., Aug. 1963.
8. W. H. Michael, *Flow Studies on Flate-Plate Delta Wings at Supersonic Speed*, N.A.C.A. TN 3472, July, 1955.
9. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique*, R. A., 7 (1949).
10. R. Legendre, *Nappes de tourbillons déferlant des bord d'attaque des ailes en delta*, ONERA. Commun. Présenté au Symposium IUTAM, Ann-Arbor, 6—10 juillet, 1964.
11. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque*, Journal de Mécanique, **6**, *2*, Juin 1967, Paris.
12. E. Carafoli, Şt. Staicu, *On the delta wing with forced antisymmetry in supersonic flow, considering the leading edge separation*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mécanique Appliquée, **XII**, 2 (1968).
13. E. Carafoli, Şt. Staicu, *L'écoulement supersonique autour de l'aile delta arquée et gauchie symétriquement, compte tenu de la séparation du courant aux bords d'attaques*. Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appliquée, **XX**, 3 (1969).

ASUPRA DETERMINĂRII FIGURII DE ECHILIBRU A UNEI PLASME ROTITOARE

de N. N. PATRAULEA
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Autorul discută condițiile de echilibru relativ al unui sistem de ioni în raport cu un sistem de referință rotitor și dă o metodă de construire a figurii de echilibru. Metoda este bazată pe conceptul de sarcină fictivă, în sistemul relativ de referință, introdus de autor într-o lucrare precedentă.

1. În două lucrări anterioare, [1], [2] am studiat echilibrul macroscopic al unui sistem de ioni față de un reper rotitor, ținînd seama și de efecte relativiste. Înainte de a discuta în această lucrare metoda de a calcula figura de echilibru și de condițiile în care ea se realizează, vom scrie ecuațiile de mișcare ale unei particule încărcate în cadrul unui reper rotitor, renunțînd pentru simplitate la efectele relativiste, care se manifestă simțitor numai la viteze apropiate de viteza luminii.

După cum se știe, într-un sistem inerțial, ecuațiile de mișcare a unei particule încărcate, sînt :

$$m\bar{a} = q\bar{E} + \bar{v} \times \bar{H}\frac{q}{c}, \tag{1.1}$$

unde $\bar{a}$, $\bar{m}$, $\bar{q}$, $\bar{v}$ reprezintă, respectiv, accelerația, masa, sarcina și viteza particulei, $\bar{E}$, $\bar{H}$ reprezintă, respectiv, cîmpul electric și magnetic în reperul inerțial și c viteza luminii.

În scopul de a obține ecuațiile de mișcare în raport cu reperul care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei Oz, vom scrie accelerația $\bar{a}$ în funcție de accelerația relativă ($\bar{a}_r$) de transport și Coriolis ($2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$) :

$$\bar{a} = \bar{a}_r - \bar{r}_0\,\omega^2 r + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r, \tag{1.2}$$

unde r este distanța de la particulă la axa Oz, $\bar{r}_0$ — versorul vectorului r, avînd sensul de la axă la particulă și vectorul rotație.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 791—801

Vom pune mai departe

$$\overline{v} = \overline{v}_r + \omega r \overline{\theta}_0, \tag{1.3}$$

unde $\overline{\theta}_0$ este versorul direcției tangențiale, perpendicular pe Oz și $\overline{r}_0$, în punctul respectiv.

Conform ecuațiilor (1.2) și (1.3), ecuația (1.1) devine:

$$m\overline{a}_r = \left(q\overline{E} + \frac{q}{c}\omega r \overline{\theta}_0 \times \overline{H} + m\overline{r}_0 \omega^2 r\right) + \left(\frac{q}{c}\overline{v}_r \times \overline{H} + 2m\overline{v}_r \times \overline{\omega}\right). \tag{1.4}$$

În prima paranteză din membrul doi al relației de mai sus am așezat termenul,

$$\frac{1}{c}\omega r \overline{\theta}_0 \times \overline{H} + \frac{m}{q}\overline{r}_0 \omega^2 r, \tag{1.5}$$

care poate fi interpretat ca un cîmp electric suplimentar de care trebuie să se țină seama în sistemul de referință rotitor și se compune, după cum se vede, din cîmpul lorentzian și cîmpul centrifugal.

În ceea ce privește al doilea termen din paranteza a doua se remarcă, prin comparație cu primul termen din aceiași paranteză, că expresia

$$\frac{2m}{q} c\overline{\omega} \tag{1.6}$$

poate fi considerată că reprezintă un cîmp magnetic fictiv de valoare constantă.

Rezultă așadar că mișcarea particulei în reperul rotitor poate fi stabilită cu ecuații de aceeași formă ca într-un sistem inerțial cu condiția ca în afară de cîmpul electric, $\overline{E}$, să se țină seama și de cîmpul (1.5) iar pe lîngă cîmpul magnetic din sistemul inerțial să se țină seama și de cîmpul magnetic fictiv (1.6).

O proprietate interesantă a cîmpului electric fictiv este aceea că divergența sa este, în general, diferită de zero, cu toate că nu este indusă de sarcini. Într-adevăr, se obține printr-un calcul simplu, în ipoteza că cîmpul magnetic este irotațional

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{c}\omega r \overline{\theta}_0 \times \overline{H}\right) = 2\frac{\omega}{c} H_z, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{m}{q}\omega^2 \overline{r}_0 r\right) = 2\frac{m}{q}\omega^2. \tag{1.8}$$

Pe de altă parte calculînd rotorul cîmpurilor (1.5), obţinem în coordonate cilindrice (versori $\bar{r}_0$, $\bar{\theta}_0$, $\bar{z}_0$),

$$\operatorname{rot}(r\bar{\theta}_0 \times \bar{H}) = -\bar{r}_0 \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \bar{\theta}_0 \left[\frac{\partial (rH_r)}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (rH_z)}{\partial z} \right] - \bar{z}_0 \frac{\partial H_z}{\partial \theta}, \tag{1.9}$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{m}{q} \bar{r}_0 \omega^2 r\right) = 0. \tag{1.10}$$

În afară de aceasta, admiţînd că cîmpul magnetic are o simetrie axială, observăm că rotorul expresiei (1.9) este nul fiindcă componenta H_z nu depinde de θ şi fiindcă factorul versorului $\bar{\theta}_0$ în ecuaţia de mai sus se anulează, deoarece reprezintă

$$r \operatorname{div} \bar{H} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta}.$$

Astfel, în cadrul ipotezelor noastre, există o funcţie potenţial φ_1 pentru cîmpul electric fictiv (1.5). Cum divergenţa cîmpului electric fictiv este, în general, diferită de zero, putem să considerăm, în sistemul de referinţă rotitor, cîmpul $\bar{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad} \varphi_1$ ca un cîmp electrostatic, indus de anumite sarcini fictive, a căror densitate spaţială este dată de,

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{E}} = -\Delta \varphi_1 = 4\pi \rho_1, \tag{1.11}$$

adică, după (1.7) şi (1.8),

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{H_z \omega}{c} + \frac{m}{q} \omega^2 \right) = \frac{1}{2\pi c} \cdot H_z \omega \left(1 + \frac{m}{q} \cdot \frac{c\omega}{H_z} \right). \tag{1.12}$$

În general, $\dfrac{m}{q} \dfrac{c\omega}{H_z} \ll 1$.

În concluzie, mişcarea unei particule reale de masă m şi sarcină q se va determina exact ca într-un sistem de referinţă inerţial dacă se consideră că, în afară de sarcinile reale, există sarcinile fictive de densitate ρ_1 cu distribuţie cunoscută şi cîmpul magnetic fictiv $\dfrac{2m}{q} c\varpi$, paralel cu axa de rotaţie.

Sarcinile fictive se comportă în sistemul mobil, în ceea ce priveşte acţiunea lor asupra ionilor, la fel ca şi cum ar fi reale cu singura deosebire că nu opun nici o rezistenţă mecanică particulelor reale.

2. În particular, dacă în sistemul de referință mobil se realizează o figură de echilibru a sistemului de ioni, atunci, punînd în ecuația (1.4) $\overline{v}_r = \overline{a}_r = 0$, avem

$$\overline{E} + \frac{\omega r}{c}\overline{\theta}_0 \times \overline{H} + \frac{m}{q}\overline{r}_0\omega^2 r = 0. \tag{2.1}$$

Dacă prin $\overline{\mathcal{E}}_L$ însemnăm partea lorentziană a cîmpului electric fictiv $\overline{\mathcal{E}}$,

$$\overline{\mathcal{E}}_L + \overline{\mathcal{E}}_i = \overline{\mathcal{E}}, \tag{2.2}$$

unde $\overline{\mathcal{E}}_i$ este partea inerțială,

$$\overline{\mathcal{E}}_i = \frac{m}{q}\overline{r}_0\omega^2 r, \tag{2.3}$$

în interiorul figurii de echilibru va trebui să fie respectată condiția :

$$\overline{E} + \overline{\mathcal{E}}_L + \overline{\mathcal{E}}_i = \overline{E} + \overline{\mathcal{E}} = 0 \tag{2.4}$$

sau luînd divergența în ecuația de mai sus se obține,

$$\rho = -\rho_1, \tag{2.5}$$

adică sarcinile reale ρ se grupează în reperul rotitor în așa fel încît „neutralizează" sarcinile fictive ρ_1. În particular, dacă $\overline{H}$ este constant, atunci se vede imediat din (1.2) că

$$\rho = -\rho_1 = \text{const.}$$

Cîmpul $\overline{E}$ este de fapt indus de sarcinile reale din figura de echilibru și de eventuale alte sarcini din afara domeniului.

Există totuși și alte condiții necesare care trebuie să fie îndeplinite la echilibru. Astfel, la echilibru densitatea sarcinilor reale avînd masa m și sarcina q, într-un punct interior al figurii de echilibru, este

$$\rho = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{H_z\,\omega}{c} + \frac{m}{q}\omega^2\right). \tag{2.6}$$

Deoarece densitatea volumică ρ a sarcinilor reale și q trebuie, evident să fie de același semn, formula de mai sus arată că în mod necesar,

$$\frac{\overline{H}\cdot\overline{\omega}}{cq} < 0 \tag{2.7}$$

și

$$\left|\frac{\overline{H}\cdot\overline{\omega}}{c}\right| > \frac{m}{|q|}\omega^2, \tag{2.8}$$

inegalități care pot fi reduse la una singură:

$$\frac{\overline{H} \cdot \overline{\omega}}{cq} < -\frac{m}{q^2}\omega^2. \tag{2.9}$$

Aceasta este o condiție necesară pentru existența unei densități de sarcină ρ în vecinătatea unui punct. Împărțind relația (2.6) cu q și ținînd seamă de condiția de mai sus, obținem numărul ionilor de tipul (m, q) în unitatea de volum:

$$n = \frac{1}{2\pi c}\left|\frac{H\omega}{q}\right|\left(1 - m\left|\frac{\omega}{qH}\right| \cdot c\right). \tag{2.10}$$

Pe de altă parte se poate dovedi că în același element de volum nu pot coexista particule diferite $\left(\text{adică cu diferite rapoarte } \frac{m}{q}\right)$ în stare de echilibru. Într-adevăr, dacă aceasta ar fi posibil, atunci am putea scrie o ecuație (2.1) pentru fiecare tip de particulă ceea ce este absurd avînd în vedere că $\overline{E}$ și $\overline{H}$ au valori unice într-un punct.

3. Dacă vitezele haotice (în raport cu reperul rotitor) ale particulelor sînt luate în considerație, atunci ecuația (2.4) nu mai reprezintă o condiție necesară pentru echilibrul macroscopic. Pentru a obține funcția de distribuție a echilibrului macroscopic va trebui să folosim ecuația barometrică,

$$\rho = \rho_0 \exp\frac{\Phi}{kT}, \tag{3.1}$$

unde k este constanta lui Boltzmann Φ este potențialul cîmpului total, $\overline{E} + \overline{\mathcal{E}}$ și T temperatura Kelvin, relativă. În lucrarea [3] am arătat că energia termică are, în general, o influență slabă asupra figurii de echilibru, afectînd numai un mic strat în jurul figurii de echilibru. Cu alte cuvinte în interiorul figurii de echilibru, cîmpul total $\overline{E} + \overline{\mathcal{E}}$ diferă foarte puțin de cîmpul nul, sarcinile reale „neutralizînd" aproape complet sarcinile fictive în fiecare element de volum. Aceasta justifică neglijarea influenței energiei termice relative în lucrarea de față.

4. Vom admite mai departe că există o simetrie axială și vom încerca să găsim o metodă, fie pentru determinarea figurii de echilibru în anumite condiții la limită, fie de a găsi condițiile necesare pentru a asigura formarea unei anumite figuri de echilibru.

În orice caz, vom considera că figura de echilibru există și că, cu ajutorul unor electrozi speciali repartizați pe o suprafață S exterioară și care închide figura de echilibru, este posibil să se controleze potențialele pe S. Fiind dată o anumită figură de echilibru, Σ, vom considera mai întîi problema găsirii unei suprafețe S și distribuția potențialelor pe aceasta.

De fapt, funcţiile care intervin în problemă sînt: potenţialul φ_1 definit de

$$\bar{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad}\varphi_1,$$

potenţialul φ ($\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi$) şi potenţialul total, Φ, definit de

$$-\operatorname{grad}\Phi = -\operatorname{grad}(\varphi + \varphi_1) = \bar{E} + \bar{\mathcal{E}}. \tag{4.1}$$

Aceste funcţii trebuie să satisfacă condiţiile:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho \quad \text{în domeniul închis de } \Sigma, \tag{4.2}$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{în domeniul mărginit de } \Sigma \text{ şi } S, \tag{4.3}$$

$$\Delta\varphi_1 = 4\pi\rho_1 \quad \text{în domeniul închis de } S, \tag{4.4}$$

$$\Phi = \text{const.} \quad \text{în interior şi pe } \Sigma, \tag{4.5}$$

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho_1, \quad \text{în domeniul dintre } \Sigma \text{ şi } S \tag{4.6}$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0 \quad \text{pe } \Sigma. \tag{4.7}$$

Relaţia (4.7) exprimă faptul că nu există sarcini cu densitate superficială pe Σ.

Fie acum o familie de suprafeţe închise, depinzînd de un parametru n astfel ales încît suprafaţa care corespunde unei anumite valori a parametrului închide pe toate cele care corespund unei valori mai mici a parametrului şi care, în plus, se bucură de proprietatea că sarcinile ρ_1 cuprinse între două suprafeţe infinit vecine, S_n, $S_{n'}$, induc un cîmp coulombian nul în interiorul suprafeţei S_n.

Din această ultimă proprietate, rezultă că distribuţia produsului dintre grosimea dn a stratului elementar cuprins între cele două suprafeţe vecine, într-un punct al suprafeţei şi densitatea sarcinilor fictive în acelaş punct, trebuie să fie identică cu distribuţia sarcinilor superficiale corespunzătoare unui conductor S_n încărcat electric şi izolat în spaţiu.

Această observaţie permite construirea suprafeţelor $S_{n'}$ dacă se cunoaşte suprafaţa vecină interioară S_n. Se înţelege că dîndu-se Σ se poate, în general, construi din aproape în aproape familia de suprafeţe pînă la o suprafaţă finală S. După stabilirea suprafeţei finale S se poate calcula mai departe potenţialele induse de sarcinile ρ_1 cuprinse între Σ şi S. Din felul construcţiei rezultă că în interiorul suprafeţei Σ vom avea un cîmp-grad Φ nul. Vom considera că pe S nu mai există sarcini cu densitate superficială sau, dacă există, acestea sînt astfel distribuite încît să inducă un cîmp rezultant nul în interior.

Cunoscînd acum distribuţia potenţialelor Φ pe S se poate calcula distribuţia potenţialelor φ induse de sarcinile reale.

Cîmpul -gradφ va fi însă identic cu cîmpul care se înregistrează în sistemul fix de referinţă. În cazurile practice suprafaţa S este fixă şi va trebui să aşezăm pe ea electrozi legaţi la potenţialele astfel calculate.

Evident, orice suprafață S_n a familiei de suprafețe construită, poate fi considerată ca suprafață S.

O soluție pentru problema inversă se poate da într-un fel cu totul analog. Într-adevăr se pornește de data aceasta de la o suprafață S dată și se va deduce pe de o parte potențialele pe această suprafață iar pe de altă parte figura de echilibru Σ. Procedeul este exact invers și rezultă că orice suprafață S_n poate fi considerată ca o suprafață Σ. După alegerea acesteia se vor putea calcula potențialele pe S. Alegerea suprafeței Σ corespunde din punct de vedere fizic cu condiția ca, în incintă, (figura de echilibru) să existe o cantitate de ioni dată.

5. Cel mai simplu exemplu de aplicare a metodei este acela al figurii de echilibru în formă de cilindru circular de lungime infinită în prezența unui cîmp magnetic uniform. Evident, în acest caz suprafețele cilindrice coaxiale sînt suprafețe echipotențiale pentru funcțiile Φ, φ, φ_1. În cilindrul care constituie figura de echilibru, densitatea sarcinilor reale va fi constantă :

$$\rho = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\overline{H}\cdot\overline{\omega}}{c} + \frac{m}{q}\omega^2\right). \tag{5.1}$$

În conformitate cu relația (2.11), numărul specific de ioni va fi dat de

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\left(\left|\frac{H\omega}{cq}\right| - \frac{m\omega^2}{q^2}\right). \tag{5.2}$$

Un calcul elementar bazat pe ecuațiile (5.1) sau (5.2), arată că pentru o intensitate dată a cîmpului magnetic, cea mai mare densitate se realizează pentru o viteză unghiulară :

$$|\omega^*| = \frac{|Hq|}{2\pi c}. \tag{5.3}$$

Pentru această viteză unghiulară, termenul lorentzian $\frac{|H\omega|}{c}$ ia valoarea $\frac{H^2q}{2mc^2}$ care este de două ori mai mare ca a termenului inerțial din aceeași paranteză și densitatea de sarcină corespunzătoare va fi,

$$\rho^* = \frac{H^2q}{4\pi mc^2}. \tag{5.4}$$

Raza R_Σ, a cilindrului Σ, se stabilește din condiția ca cilindrul Σ să cuprindă cantitatea de ioni introdusă, corespunzînd unei cantități de electricitate, Q, adică,

$$Q = \pi R_\Sigma^2 \rho = -\pi R_\Sigma^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\overline{H}\cdot\overline{\omega}}{c} - \frac{m}{|q|}\omega^2\right]. \tag{5.5}$$

În cazul particular al densității maxime, relația de mai sus devine,

$$Q = R_{\Sigma}^{2} \frac{H^2 q}{16\, mc^2}. \tag{5.6}$$

Între axă și suprafața cilindrului de echilibru, cîmpul electric ($-$ grad φ) este radial și are variația simplă,

$$E = 2\pi r \rho = - rq\left[\left|\frac{H\omega}{cq}\right| - \frac{m}{q^2}\omega^2\right] \tag{5.7}$$

și potențialul respectiv (considerînd valoarea nulă pe axă),

$$\varphi = - \pi r^2 \rho = - \frac{r^2 q}{2}\left[\left|\frac{H\omega}{cq}\right| - \frac{m}{q^2}\omega^2\right]. \tag{5.8}$$

În cazul densității maxime,

$$E^{+} = \frac{r}{2\, mc^2} \cdot H^2 q, \tag{5.9}$$

$$\varphi^{+} = - \frac{r^2}{4\, mc^2} H^2 q, \tag{5.10}$$

cu condiția ca vitezele liniare, $\omega^{+} r$ să fie suficient de mici în raport cu viteza luminii, adică după (5.3),

$$H qr \ll 2\, mc^2. \tag{5.11}$$

Cînd există o anumită cantitate de electricitate avînd o densitate liniară constantă pe axă, atunci figura de echilibru va fi mărginită de doi cilindrii coaxiali. Raza cea mai mică a figurii de echilibru r_1 va putea fi dedusă din relația

$$Q_0 = - \pi r_1^2 \rho_1 = \frac{1}{2} r_1^2 q\left[\left|\frac{H \cdot \omega}{cq}\right| - \frac{m}{q^2}\omega^2\right], \tag{5.12}$$

a cărei verificare este cerută de condiția de anulare a cîmpului total electric în figura de echilibru.

6. Este de asemenea foarte ușor să se aplice metoda în cazul unei figuri sferice situată într-un cîmp magnetic uniform. Suprafețele S_n vor fi, evident, sfere. Cîmpul -grad Φ va fi dat de următoarea relație :

$$- |\operatorname{grad} \Phi|\, 4\pi R^2 - 4\pi \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi (R^3 - R_{\Sigma}^3),$$

adică

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R}=\frac{4}{3}\,\rho_1\left(R-\frac{R_\Sigma^3}{R^2}\right), \tag{6.1}$$

unde prin $R > R_\Sigma$ s-a notat raza curentă.

Integrînd ecuația de mai sus și luînd valoarea nulă a potențialului Φ în origine (deci în Σ), avem

$$\Phi(R)=-\frac{4}{3}\,\rho_1\left[\frac{R^2}{2}-\frac{R_\Sigma^2}{2}+R_\Sigma^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_\Sigma}\right)\right]. \tag{6.2}$$

În ceea ce privește cîmpul electric suplimentar, punînd

$$\overline{H}=\overline{Z}_0 H$$

și ținînd seama de (2.1), avem

$$\overline{\mathscr{E}}=\overline{r}_0\left(\frac{r\,\omega H}{c}+\frac{m}{q}\,\omega^2 r\right)=\overline{r}_0\,\frac{r\,\omega H}{c}\left(1+\frac{m\,\omega\,c}{qH}\right), \tag{6.3}$$

unde prin r s-a notat distanța la axa de rotație. Prin integrare obținem mai departe,

$$\varphi_1=-\int_0^r \mathscr{E}_r\,\mathrm{d}r=-\frac{\omega H}{c}\,\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{m\,\omega\,c}{qH}\right). \tag{6.4}$$

Termenul al doilea din paranteză este subunitar și, în general, mult mai mic ca unu, conform celor discutate în paragraful 2.

Potențialul corespunzînd sarcinilor reale va fi atunci,

$$\varphi=\Phi-\varphi_1. \tag{6.5}$$

Făcînd notația

$$1+\frac{m\,c\,\omega}{qH}=\gamma \tag{6.6}$$

și ținînd seama de (1.11), avem:

$$\varphi=-\frac{2}{3}\,\frac{H\,\omega\,\gamma}{c}\left[\frac{1}{2}\,(R^2-R_\Sigma^2)+R_\Sigma^3\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_\Sigma}\right)\right]+$$

$$+\frac{H\,\omega\,R^2\gamma}{2c}\sin^2\alpha, \tag{6.7}$$

unde s-a pus

$$R \sin \alpha = r. \tag{6.8}$$

Diferența maximă de potențial pe un meridian al sferei S între pol ($\alpha = 0$) și ecuator $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ va fi,

$$\varphi_{\alpha=\frac{\pi}{2}} - \varphi_{\alpha=0} = \frac{H \omega R^2 \gamma}{2c}, \tag{6.9}$$

variația pe meridian fiind în general

$$\varphi_{(\alpha)} - \varphi_{\alpha=0} = \frac{H \omega \gamma}{2c} \sin^2 \alpha. \tag{6.10}$$

Dacă pentru fixarea ideilor considerăm $q > 0$ (adică ioni pozitivi în groapa de potențial, Σ), atunci cum $\frac{\omega}{Hq} < 0$, avem $\omega H < 0$. Se observă din relația (6.10) că potențialele cresc, în condițiile precizate, de la ecuator către pol ceea ce arată prezența unor sarcini pozitive înspre pol și a unor sarcini negative înspre ecuator. Sarcinile pozitive de la pol au rolul de a împiedica scurgerea axială a sarcinilor datorită respingerii lor mutuale, ceea ce explică posibilitatea existenței figurii de echilibru.

7. S-a arătat mai înainte că în același element de volum nu pot coexista mai multe genuri de ioni. Vom arăta acum că în cazul simplu al configurației cilindrice, și al unor ioni eterogeni, echilibrul se realizează sub o formă stratificată.

Într-adevăr, fie mai multe componente ionice cu sarcini de același semn și caracterizate prin rapoartele $\frac{m_1}{|q_1|} < \frac{m_2}{|q_2|} < \frac{m_3}{|q_3|} < \ldots$ îndeplinindu-se și condiția (2.9),

$$m_i c \cdot \frac{\omega}{q_i H} < -1. \tag{7.1}$$

În fiecare strat în echilibru, va trebui să se anuleze cîmpul total și deci vom putea scrie

$$E_i + \frac{\omega H r_i}{c} + \frac{m_i}{q_i} \omega^2 r_i = 0, \tag{7.2}$$

$$E_j + \frac{\omega H r_j}{c} + \frac{m_j}{q_j} \omega^2 r_j = 0. \tag{7.3}$$

Luînd $j = i + 1$ şi considerînd r_{i+1} raza inferioară a stratului $i + 1$ iar r_i raza superioară a stratului i, înmulţind ecuaţiile (7.2) şi (7.3) cu r_i, respectiv r_{i+1} şi scăzîndu-le membru cu membru, avem

$$\frac{H}{c}(r_{i+1} - r_i) + \left(\frac{m_{i+1}}{q_{i+1}} \cdot r_{i+1} - \frac{m_i}{q_i} r_i\right)\omega = 0. \tag{7.4}$$

Termenii $E_i r_i$, $E_{i+1} r_{i+1}$, s-au redus pe baza conservării cîmpului indus de sarcinile reale. Din relaţia de mai sus se poate calcula r_{i+1} în funcţie de r_i

$$r_{i+1} = r_i \frac{1 + \dfrac{m_i}{q_i}\dfrac{\omega}{H} \cdot c}{1 + \dfrac{m_{i+1}}{q_{i+1}}\dfrac{\omega}{H} \cdot c}. \tag{7.5}$$

În cazul cînd cantităţile $c\dfrac{m_i}{q_i}\dfrac{\omega}{H}$ sînt mult mai mici ca unitatea, se poate folosi formula aproximativă

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i} = c\left|\frac{\omega}{H}\right|\left(\frac{m_{i+1}}{|q_{i+1}|} - \frac{m_i}{|q_i|}\right). \tag{7.6}$$

În ceea ce priveşte grosimea fiecărui strat, aceasta depinde, evident, de cantitatea de ioni de tipul respectiv care a fost introdusă.

Primită la redacţie la 14 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *Equilibre macroscopique d'un système d'ions, isolé par rapport à un système de référence tournant*, C. R. Acad. Sc. Paris, **263**, 226–228, 1 août (1966).
2. — *L'équilibre relatif d'un système d'ions par rapport à un système de référence tournant*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **11**, *5*, 1199 (1966).
3. N. N. Patraulea şi N. Postelnicu, *L'équilibre relatif macroscopique du plasma à symétrie cylindrique*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **13**, *1*, 3 (1968).

STUDIUL GRINZILOR CONTINUE DE DESCHIDERI EGALE CU AJUTORUL ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE

de R. VOINEA și V. DROBOTĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

În lucrare este prezentat un nou mod de calcul al momentelor pe reazeme la grinzile continue cu deschideri egale, pentru diverse încărcări, grinzile putînd avea capetele rezemate liber, încastrate, console sau combinații ale acestora.
La stabilirea relațiilor de calcul necesare s-a ajuns prin folosirea ecuațiilor funcționale, care dau posibilitatea scrierii cu ușurință a ecuației celor trei momente și a generalizării acesteia la o grindă cu un număr oricît de mare de reazeme, pentru diverse încărcări și moduri de rezemare.
Lucrarea conține studiul acestor grinzi pentru toate modurile posibile de rezemare, cu tabelele pentru efectuarea unor asemenea calcule la grinzi pînă la maximum 5 deschideri și exemplele de calcul necesare pentru ilustrarea modului de aplicare al acestei metode.

Se consideră grinda continuă pe n reazeme echidistante (fig. 1), avînd pe reazemele extreme momentele M_0 și M_n și încărcată astfel încît reacțiunile date de încărcarea fictivă cu diagrama de momente pe un sistem de bază cu articulații în dreptul reazemelor sînt $\mathcal{A}_0 = 0$,

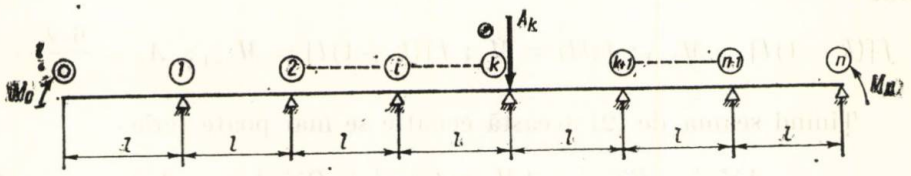


Fig. 1

$\mathcal{A}_1 = 0, \ldots, \mathcal{A}_{k-1} = 0$, $\mathcal{A}_k \neq 0$, $\mathcal{A}_{k+1} = 0, \ldots, \mathcal{A}_n = 0$ iar momentul în reazemul k este M_k.

Pentru reazemele de la $1 - k$ și de la $k - n$ ecuația lui Clapeyron scrisă pentru un grup de trei reazeme se poate pune sub forma unei ecuații funcționale

$$f(x - l) + 4f(x) + f(x + l) = 0, \tag{1}$$

în care $f(x)$ reprezintă momentul M_i pe reazemul situat la distanţa $x = il$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Soluţiile acestor ecuaţii funcţionale sînt următoarele:

$$\begin{aligned} f_1(il) &= A\lambda_1^i + B\lambda_2^i, \quad \text{pentru} \quad x = 0, l, 2l, \ldots, kl, \\ f_2(il) &= C\lambda_1^i + D\lambda_2^i, \quad \text{pentru} \quad x = kl, (k+1)l, \ldots, nl, \end{aligned} \tag{2}$$

unde A, B, C şi D sînt nişte constante iar λ_1 şi λ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \quad \text{respectiv} \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Determinarea constantelor A, B, C şi D se face punînd condiţiile la limite şi anume

$$\text{pentru} \quad i = 0 : f_1(il) = M_0, \quad \text{adică} \quad A + B = M_0, \tag{3}$$

$$i = k : f_1(il) = M_k, \qquad A\lambda_1^k + B\lambda_2^k = M_k, \tag{4}$$

$$i = k : f_2(il) = M_k, \qquad C\lambda_1^k + D\lambda_2^k = M_k, \tag{5}$$

$$i = n : f_2(il) = M_n, \qquad C\lambda_1^n + D\lambda_2^n = M_n. \tag{6}$$

Deoarece în ecuaţiile (3), (4), (5) şi (6), în afara constantelor de determinat, apare şi momentul pe reazemul k, respectiv M_k, stabilirea expresiilor acestor patru constante şi a momentului M_k face necesară încă o ecuaţie ce se poate scrie aplicînd ecuaţia lui Clapeyron grupului de reazeme $k-1$, k şi $k+1$ şi anume

$$f[(k-1)l] + 4f(kl) + f[(k+1)l] = -A_k,$$

unde

$$f[(k-1)l] = M_{k-1}; \; f(kl) = M_k; \; f[(k+1)l] = M_{k+1}; \; A_k = \frac{6\mathcal{A}_k}{l}.$$

Ţinînd seama de (2) această ecuaţie se mai poate scrie

$$A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + 4M_k + C\lambda_1^{k+1} + D\lambda_2^{k+1} = -A_k. \tag{7}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (3), (4), (5), (6) şi (7) duce la următoarele soluţii:

$$A = \frac{M_k - M_0\lambda_2^k}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) - M_0\lambda_2^n + M_n\right], \tag{8}$$

$$B = -\frac{M_k - M_0\lambda_1^k}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[-\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) + M_0\lambda_1^n - M_n\right], \tag{9}$$

$$C = \frac{M_n \lambda_2^k - M_n \lambda_2^n}{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}} = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[- \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \lambda_2^n (\lambda_1^k - \lambda_2^k) - M_0 \lambda_2^n + M_n \right], \quad (10)$$

$$D = - \frac{M_n \lambda_1^k - M_k \lambda_1^n}{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}} = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}} \lambda_1^n (\lambda_1^k - \lambda_2^k) + M_0 \lambda_1^n - M_n \right]. \quad (11)$$

Înlocuind expresiile acestor constante în relaţiile (2) se obţin soluţiile ecuaţiilor funcţionale (1) respectiv momentele pe reazeme în oricare reazem interesează şi anume :

$$f_1(il) = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left\{\left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) - M_0 \lambda_2^n + M_n\right]\lambda_1^i + \right.$$

$$\left. + \left[- \frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) + M_0 \lambda_1^n - M_n\right]\lambda_2^i \right\},$$

$$f_2(il) = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left\{\left[- \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \lambda_2^n (\lambda_1^k - \lambda_2^k) - M_0 \lambda_2^n + M_n\right]\lambda_1^i + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}} \lambda_1^n (\lambda_1^k - \lambda_2^k) + M_0 \lambda_1^n - M_n\right]\lambda_2^i \right\}.$$

Relaţiile (12) se pot aplica şi generaliza într-o serie de cazuri, ţinînd seama de modul de rezemare al celor două extremităţi ale grinzii.

1. GRINDA CONTINUĂ CU EXTREMITĂŢILE ÎNCASTRATE

Considerînd grinda încărcată ca în figura 1 şi ţinînd seama de particularităţile de rezemare a extremităţilor, figura 2, ecuaţia lui Clapeyron aplicată pe reazemele extreme este reprezentată de sistemul

$$2M_0 + M_1 = 0; \quad M_{n-1} + 2M_n = 0. \quad (13)$$

Ţinînd seama de (2), M_1 şi M_{n-1} se pot scrie astfel

$$M_1 = A\lambda_1 + B\lambda_2, \quad M_{n-1} = C\lambda_1^{n-1} + D\lambda_2^{n-1}. \quad (14)$$

Înlocuind constantele A, B, C şi D cu expresiile lor din (8), (9), (10) şi (11) se obţine

$$M_1 = - 2M_0 + \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[A_k(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) + 2\sqrt{3}\, M_n - \sqrt{3}\, M_0(\lambda_1^n + \lambda_2^n)\right],$$

$$M_{n-1} = - 2M_n + \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[A_k(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + 2\sqrt{3}\, M_0 - \sqrt{3}\, M_n(\lambda_1^n + \lambda_2^n)\right]. \quad (15)$$

Introducînd expresiile lui M_1 şi M_{n-1} în (13) se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\,M_n - \sqrt{3}\,M_0(\lambda_1^n + \lambda_2^n) + A_k(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) = 0, \\ -\sqrt{3}\,(\lambda_1^n + \lambda_2^n)\,M_n + 2\sqrt{3}\,M_0 + A_k(\lambda_1^k - \lambda_2^k) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

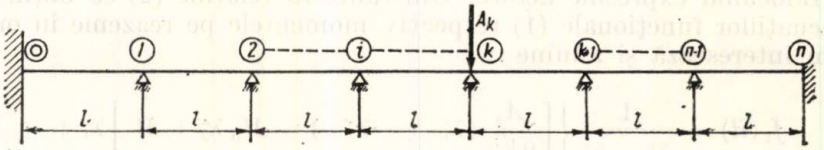


Fig. 2

a cărui rezolvare duce la următoarele expresii pentru M_0 şi M_n

$$M_0 = \frac{A_k}{\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^{n-k} + \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}, \qquad M_n = \frac{A_k}{\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}. \tag{17}$$

Înlocuind pe M_0 şi M_1 din (8), (9), (10) şi (11) cu expresiile din (17) se obţine

$$\begin{aligned} A = B = \frac{M_0}{2} = \frac{A_k}{2\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^{n-k} + \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}, \\ C = \frac{A_k}{2\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_2^n(\lambda_1^k + \lambda_2^k)}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}, \qquad D = \frac{A_k}{2\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^n(\lambda_1^k + \lambda_2^k)}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Introducînd pe A, B, C şi D în (2), momentele pe reazeme se vor determina cu ajutorul relaţiilor

$$\begin{aligned} f_1(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^{n-k} + \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}(\lambda_1^i + \lambda_2^i) \qquad 0 < i < k, \\ f_2(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}}\,\frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^n - \lambda_2^k}(\lambda_1^{n-i} + \lambda_2^{n-i}) \qquad k < i < n. \end{aligned} \tag{19}$$

Făcînd următoarele notaţii:

$$\begin{aligned} \varphi_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n); \quad \varphi'_{n-k} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} + \lambda_2^{n-k}); \quad \varphi'_i = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^i + \lambda_2^i), \\ \varphi'_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^k + \lambda_2^k); \quad \varphi'_{n-i} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-i} + \lambda_2^{n-i}), \end{aligned} \tag{20}$$

relaţiile (19) devin

$$M_i = A_k \frac{\varphi'_{n-k}\varphi'_i}{\varphi_n}, \quad 0 < i < k,$$
$$M_i = A_k \frac{\varphi'_k \varphi'_{n-i}}{\varphi_n}, \quad k < i < n. \tag{21}$$

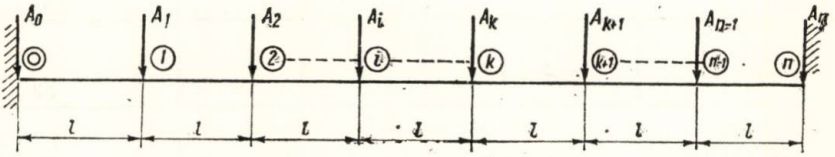


Fig. 3

Pentru cazul general al grinzii pe n reazeme echidistante cu extremităţile încastrate încărcată astfel încît toate reacţiunile fictive sînt diferite de zero (fig. 3), momentul pe reazemul i se obţine, ţinînd seama de (21) prin suprapunerea efectelor, cu ajutorul relaţiei

$$M_i = \frac{1}{\varphi_n}\left[\varphi'_i \sum_{k=i+1}^{n} \varphi'_{n-k} A_k + \varphi'_i \varphi'_{n-i} A_i + \varphi'_{n-i} \sum_{l=1}^{i-1} \varphi'_l A_l\right] \tag{22}$$

sau, grupînd termenii,

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} A_j, \tag{23}$$

unde η'_{ij} sînt coeficienţi de influenţă, ale căror expresii sînt

$$\eta'_{ij} = \frac{\varphi'_j \varphi'_{n-i}}{\varphi_n} \quad \text{dacă } j < i,$$
$$\eta'_{ij} = \frac{\varphi'_i \varphi'_{n-j}}{\varphi_n} \quad \text{dacă } j > i, \tag{24}$$
$$\eta'_{ij} = \frac{\varphi'_i \varphi'_{n-i}}{\varphi_n} \quad \text{dacă } j = i.$$

Valorile lui φ'_i şi φ_i pentru diverşi exponenţi ai lui λ_1 şi λ_2 sînt calculate în tabela 1.

Cu aceste notaţii momentele pe reazeme se obţin din relaţiile

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0 \eta'_{00} + A_1 \eta'_{10} + A_2 \eta'_{20} + \ldots + A_n \eta'_{n0}, \\ M_1 &= A_0 \eta'_{01} + A_1 \eta'_{11} + A_2 \eta'_{21} + \ldots + A_n \eta'_{n1}, \\ &\vdots \\ M_n &= A_0 \eta'_{0n} + A_1 \eta'_{1n} + A_2 \eta'_{2n} + \ldots + A_n \eta'_{nn}. \end{aligned} \tag{25}$$

Tabela 1

i	λ_1^i	λ_2^i	$\varphi_i = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^i - \lambda_2^i)$	$\varphi_i' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^i + \lambda_2^i)$
0	1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
1	$-2+\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$	1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
2	$7-4\sqrt{3}$	$7+4\sqrt{3}$	-4	$\frac{7}{\sqrt{3}}$
3	$-26+15\sqrt{3}$	$-26-15\sqrt{3}$	15	$-\frac{26}{\sqrt{3}}$
4	$97-56\sqrt{3}$	$97+56\sqrt{3}$	-56	$\frac{97}{\sqrt{3}}$
5	$-362+209\sqrt{3}$	$-362-209\sqrt{3}$	209	$-\frac{362}{\sqrt{3}}$
6	$1351-780\sqrt{3}$	$1351+780\sqrt{3}$	-780	$\frac{1351}{\sqrt{3}}$
7	$-5042+2911\sqrt{3}$	$-5042-2911\sqrt{3}$	2911	$-\frac{5042}{\sqrt{3}}$
8	$18817-10864\sqrt{3}$	$18817+10864\sqrt{3}$	-10864	$\frac{18817}{\sqrt{3}}$
9	$-70226+40545\sqrt{3}$	$-70226-40545\sqrt{3}$	40545	$-\frac{70226}{\sqrt{3}}$
10	$262087-151316\sqrt{3}$	$262087+151316\sqrt{3}$	-151316	$\frac{262087}{\sqrt{3}}$

Coeficienţii η_{ij}' se determină cu uşurinţă, dacă se ţine seama de faptul că $\eta_{ij}' = \eta_{ji}'$ şi că $\eta_{ij}' = \eta_{i,n-j}'$.

Aceşti coeficienţi pot fi tabelaţi pentru grinzi cu un număr oarecare n de reazeme. În tabelele 2, 3, 4, 5, 6 s-au calculat valorile acestora pentru grinda continuă pe 2, 3, 4, 5 şi 6 reazeme.

Se observă că tabelele acestor coeficienţi sînt simetrice faţă de cele două diagonale ale acestora.

Exemplu de calcul. Să se calculeze momentele pe reazeme la grinda continuă de deschideri egale pe patru reazeme cu extremităţile încastrate, încărcată ca în figura 4.

Tabela 2

$n = 1$

j \ i	0	1
0	−0,66667	0,33333
1	0,33333	−0,66667

Tabela 3

$n = 2$

j \ i	0	1	2
0	−0,58333	0,16667	−0,08333
1	0,16667	−0,33333	0,16667
2	−0,08333	0,16667	−0,58333

Tabela 4

$n = 3$

j \ i	0	1	2	3
0	−0,57778	0,15556	−0,04444	0,02222
1	0,15556	−0,31111	0,08889	−0,04444
2	−0,04444	0,08889	−0,31111	0,15556
3	0,02222	−0,04444	0,15556	−0,57778

Tabela 5

$n = 4$

j \ i	0	1	2	3	4
0	−0,57738	0,15476	−0,04167	0,01190	−0,00595
1	0,15476	−0,30952	0,08334	−0,02381	0,01190
2	−0,04167	0,08334	−0,29133	0,08334	−0,04167
3	0,01190	−0,02381	0,08334	−0,30952	0,15476
4	−0,00595	0,01190	−0,04167	0,15476	−0,57738

Tabela 6

$n = 5$

j \ i	0	1	2	3	4	5
0	−0,57735	0,15470	−0,04147	0,01116	−0,00319	0,00159
1	0,15470	−0,30940	0,08293	−0,02233	0,00638	−0,00319
2	−0,04147	0,08293	−0,29027	0,07815	−0,02233	0,01116
3	0,01116	−0,02233	0,07815	−0,29027	0,08293	−0,04147
4	−0,00319	0,00638	−0,02233	0,08293	−0,30940	0,15470
5	0,00159	−0,00319	0,01116	−0,04147	0,15470	−0,57735

Pentru rezolvarea acestui caz se calculează mai întîi încărcările fictive pe reazeme. Se obţin astfel

$$A_0 = \frac{8}{27} Pl;\quad A_1 = \frac{10}{27} Pl;\quad A_2 = \frac{1}{4} Pl;\quad A_3 = \frac{1}{4} Pl.$$

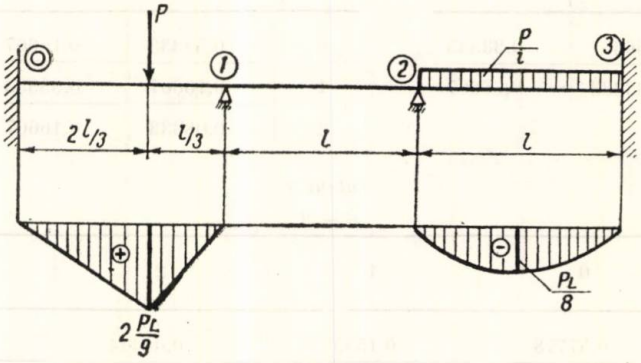


Fig. 4

Momentele de reazeme se obţin din relaţiile 25, folosind coeficienţii de influenţă calculaţi în tabela 4 pentru grinda avînd trei deschideri egale, respectiv

$$M_0 = \left(-0{,}57778\frac{8}{27} + 0{,}15556\frac{10}{27} - 0{,}04444\frac{1}{4} + 0{,}02222\frac{1}{4}\right) Pl = -0{,}11914 Pl,$$

$$M_1 = \left(0{,}15556\frac{8}{27} - 0{,}31111\frac{10}{27} + 0{,}08889\frac{1}{4} - 0{,}04444\frac{1}{4}\right) Pl = 0{,}05802 Pl,$$

$$M_2 = \left(-0{,}04444\frac{8}{27} + 0{,}08889\frac{10}{27} - 0{,}31111\frac{1}{4} + 0{,}15556\frac{1}{4}\right) Pl = -0{,}01914 Pl,$$

$$M_3 = \left(0{,}02222\frac{8}{27} - 0{,}04444\frac{10}{27} + 0{,}15556\frac{1}{4} - 0{,}57778\frac{1}{4}\right) Pl = -0{,}11543 Pl.$$

2. GRINDA CONTINUĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT ŞI LIBER REZEMATĂ LA CELĂLALT

Pentru acest caz de rezemare avînd încărcare fictivă numai în reazemul k respectiv $\mathcal{A}_k$ (fig. 5), constantele A, B, C, D necesare scrierii momentului în oricare reazem al grinzii se obţin din (8), (9), (10) şi (11) în care se consideră $M_n = 0$.

Rezultă astfel

$$A = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) - M_0\lambda_2^n\right], \tag{26}$$

$$B = \frac{1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[-\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}) + M_0\lambda_1^n\right], \tag{27}$$

$$C = \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[-\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + M_0\right], \tag{28}$$

$$D = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\left[\frac{A_k}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + M_0\right]. \tag{29}$$

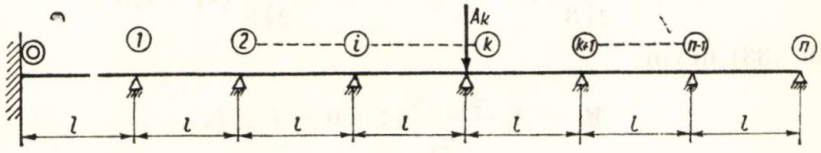


Fig. 5

Ţinînd seama de încastrarea din reazemul origină, ecuaţia lui Clapeyron aplicată grupului de reazeme ce cuprinde şi această încastrare se scrie

$$2M_0 + M_1 = 0. \tag{30}$$

Dar deoarece $M_1 = A\lambda_1 + B\lambda_2$, A şi B fiind date de (26) şi (27), din (30) rezultă că

$$M_0 = \frac{A_k}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}. \tag{31}$$

Introducînd această expresie în (26), (27), (28) şi (29) se elimină momentul M_0 şi constantele A, B, C şi D devin

$$A = B = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n + \lambda_2^n},$$

$$C = -\frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^n + \lambda_2^n} \lambda_2^n; \quad D = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^n + \lambda_2^n} \lambda_1^n. \tag{32}$$

Aceste expresii ale constantelor A, B, C şi D permit scrierea relaţiilor cu ajutorul cărora se pot calcula momentele pe reazeme respectiv

$$f_1(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n + \lambda_2^n}(\lambda_1^i + \lambda_2^i), \quad 0 < i < k,$$

$$f_2(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{\lambda_1^n + \lambda_2^n}(\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i}), \quad k < i < n. \tag{33}$$

Folosind notaţiile

$$\varphi_{n-k}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-k}-\lambda_2^{n-k});\quad \varphi_k'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^k+\lambda_2^k);\quad \varphi_i'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^i+\lambda_2^i),$$

$$\varphi_{n-i}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^{n-i}-\lambda_2^{n-i});\quad \varphi_i'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda_1^i+\lambda_2^i), \tag{34}$$

relaţiile (33) devin

$$M_i=A_k\frac{\varphi_{n-k}\varphi_i'}{\varphi_n'};\quad 0<i<k,$$

$$M_i=A_k\frac{\varphi_k'\varphi_{n-i}}{\varphi_n'};\quad k<i<n. \tag{35}$$

Pentru cazul general al grinzii pe n reazeme echidistante, rezemată în acelaşi mod ca grinda studiată (fig. 5), încărcată astfel încît există reacţiuni fictive pe toate reazemele (fig. 6), momentul pe reazemul i se obţine, ţinînd seama de (35), prin suprapunerea efectelor, cu ajutorul relaţiei:

$$M_i=\frac{1}{\varphi_n'}\left[\varphi_i'\sum_{k=i+1}^{n}\varphi_{n-k}A_k+\varphi_i'\varphi_{n-i}A_i+\varphi_{n-i}\sum_{l=1}^{i-1}\varphi_l'A_l\right]. \tag{36}$$

Această relaţie se mai poate scrie sub forma:

$$M_i=\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}''A_j, \tag{37}$$

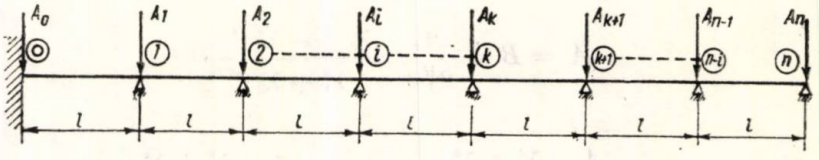


Fig. 6

unde η_{ij}'' sînt, de asemenea, nişte coeficienţi de influenţă cu următoarea expresie:

$$\eta_{ij}''=\frac{\varphi_j'\varphi_{n-i}}{\varphi_n'},\quad \text{pentru } j<i,$$

$$\eta_{ij}''=\frac{\varphi_i'\varphi_{n-j}}{\varphi_n'},\quad \text{pentru } j>i, \tag{38}$$

$$\eta_{ij}''=\frac{\varphi_i'\varphi_{n-i}}{\varphi_n'},\quad \text{pentru } j=i.$$

Pentru diverse valori ale lui i, φ_i și φ_i' sînt aceiași din tabela 1. Folosind notațiile (38), momentele pe reazeme se obține din relațiile

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0\eta''_{0\cdot 0} + A_1\eta''_{0\cdot 1} + A_2\eta''_{0\cdot 2} + \ldots + A_n\eta''_{0\cdot n},\\ M_1 &= A_0\eta''_{0\cdot 1} + A_1\eta''_{1\cdot 1} + A_2\eta''_{1\cdot 2} + \ldots + A_n\eta''_{1\cdot n},\\ &\vdots\\ M_n &= A_0\eta''_{0\cdot n} + A_1\eta''_{1\cdot n} + A_2\eta''_{2\cdot n} + \ldots + A_n\eta''_{n\cdot n}. \end{aligned} \tag{39}$$

Valorile coeficienților η''_{ij} pot fi calculate funcție de numărul de deschideri ale grinzii. În tabelele 7, 8, 9, 10 și 11 s-au calculat coeficienții de influență η''_{ij} pentru grinzi cu 1, 2, 3, 4 și 5 deschideri. Deoarece $\eta''_{ij} = \eta''_{ji}$ aceste tabele sînt simetrice în raport cu una din diagonalele sale și nu cu ambele diagonale ca cele rezultate pentru grinzile încastrate la ambele capete.

Tabela 7

$n = 1$

j \ i	0
0	−0,5

Tabela 8

$n = 2$

j \ i	0	1
0	−0,57143	0,14286
1	0,14286	−0,28571

Tabela 9

$n = 3$

j \ i	0	1	2
0	−0,57692	0,15385	−0,03846
1	0,15385	−0,30769	0,07692
2	−0,03846	0,07692	−0.26923

Tabela 10

$n = 4$

j \ i	0	1	2	3
0	−0,57732	0,15463	−0,04124	0,01031
1	0,15463	−0,30928	0,08247	−0,02062
2	−0,04124	0,08247	−0,28865	0,07216
3	0,01031	−0,02062	0,07216	−0,26804

Tabela 11

$n = 5$

j \ i	0	1	2	3	4
0	−0,57735	0,15469	−0,04144	0,01105	−0,00276
1	0,15469	−0,30939	0,08287	−0,02210	0,00552
2	−0,04144	0,08287	−0,29006	0,07735	0,01934
3	0,01105	−0,02210	0,07735	−0,28729	0,07182
4	−0,00276	0,00552	−0,01934	0,07182	−0,26796

Exemplu de calcul. Să se calculeze momentele pe reazeme pentru grinda continuă pe patru reazeme echidistante cu una din extremităţi încastrată, cealaltă liber rezemată, încărcată ca în figura 7.

Se calculează încărcările fictive pe cele patru reazeme ale grinzii care sînt

$$A_0 = \frac{3}{8} Pl; \qquad A_1 = \frac{5}{8} Pl; \qquad A_2 = \frac{Pl}{2}; \qquad A_3 = \frac{Pl}{4}.$$

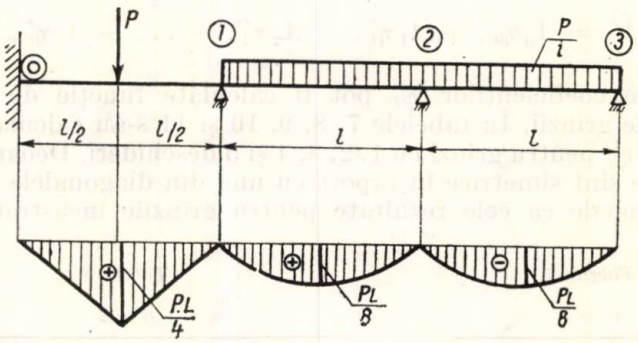


Fig. 7

Se calculează apoi momentele pe reazeme, folosind relaţiile (39) şi coeficienţii de influenţă η''_{ij} din tabela 9 pentru grinda avînd trei deschideri egale:

$$M_0 = \left(-0{,}57692\frac{3}{8} + 0{,}15385\frac{5}{8} - 0{,}03846\frac{1}{2}\right) Pl = -0{,}13941\,Pl,$$

$$M_1 = \left(0{,}15385\frac{3}{8} - 0{,}30769\frac{5}{8} + 0{,}07692\frac{1}{2}\right) Pl = -0{,}09615\,Pl,$$

$$M_2 = \left(-0{,}03846\frac{3}{8} + 0{,}07692\frac{5}{8} - 0{,}26923\frac{1}{2}\right) Pl = -0{,}10096\,Pl.$$

3. GRINDA CONTINUĂ, REZEMATĂ LIBER LA AMBELE EXTREMITĂŢI

Grinda continuă, rezemată liber la ambele extremităţi, încărcată astfel încît există numai în reazemul k o încărcare fictivă $\mathcal{A}_k$ (fig. 8), este, de asemenea, un caz particular al cazului studiat iniţial, în care momentele pe reazemele extreme respectiv M_0 şi M_1 sînt egale cu zero.

Pentru obţinerea funcţiilor cu ajutorul cărora se pot obţine momentele pe oricare dintre reazeme se calculează constantele A, B, C şi D din (8), (9), (10) şi (11) scriind că $M_0 = M_n = 0$. Rezultă că

$$A = -B = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n},$$

$$C = -\frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_2^n(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}; \qquad D = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^n(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}. \tag{40}$$

Momentele pe reazeme se obţin astfel din relaţiile

$$f_1(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} (\lambda_1^i - \lambda_2^i), \quad \text{pentru } 0 < i < k,$$

$$f_2(il) = \frac{A_k}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} (\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i}), \quad \text{pentru } k < i < n. \tag{41}$$

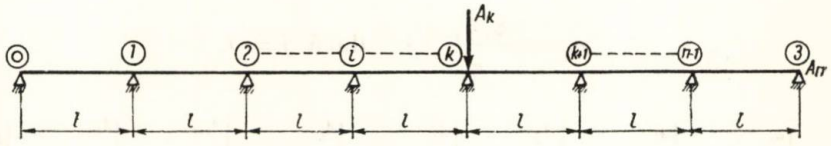


Fig. 8

Făcînd notaţiile

$$\varphi_{n-k} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^{n-k} - \lambda_2^{n-k}); \quad \varphi_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n); \quad \varphi_k = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^k - \lambda_2^k),$$

$$\varphi_{n-i} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i}); \quad \varphi_i = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^i - \lambda_2^i). \tag{42}$$

Momentul pe un reazem oarecare i se scrie:

$$M_i = A_k \frac{\varphi_i \varphi_{n-k}}{\varphi_n}, \quad 0 < i < k,$$

$$M_i = A_k \frac{\varphi_k \varphi_{n-i}}{\varphi_n}, \quad k < i < n. \tag{43}$$

Calculul acestor coeficienţi se poate face folosind aceeaşi tabelă 1. Pentru cazul general al grinzii pe n reazeme echidistante avînd reacţiunile fictive $\mathcal{A}_0 \ldots \mathcal{A}_n$ toate diferite de zero (fig. 9), momentul pe reazemul i se obţine, ţinînd seama de (43), prin suprapunerea efectelor, cu ajutorul relaţiei

$$M_i = \frac{1}{\varphi_n} \left[\varphi_i \sum_{k=i+1}^{n} \varphi_{n-k} A_k + \varphi_i \varphi_{n-i} A_i + \varphi_{n-i} \sum_{l=1}^{i-1} \varphi_l A_l \right], \tag{44}$$

în care grupînd termenii devine

$$M_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} A_j, \tag{45}$$

unde η_{ij} sînt coeficienţi de influenţă şi au expresiile:

$$\eta_{ij} = \frac{\varphi_j \varphi_{n-i}}{\varphi_n}, \quad \text{dacă } j < i,$$

$$\eta_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_{n-j}}{\varphi_n}, \quad \text{dacă } j > i, \tag{46}$$

$$\eta_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_{n-i}}{\varphi_n}, \quad \text{dacă } j = i.$$

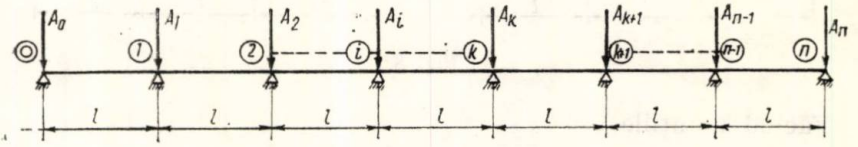


Fig. 9

Momentele încovoietoare pe reazeme se calculează din relaţiile:

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0 \eta_{00} + A_1 \eta_{10} + \ldots + A_n \eta_{n0}, \\ M_1 &= A_0 \eta_{01} + A_1 \eta_{11} + \ldots + A_n \eta_{n1}, \\ &\vdots \\ M_n &= A_0 \eta_{0n} + A_1 \eta_{1n} + \ldots + A_n \eta_{nn}. \end{aligned} \tag{47}$$

Dacă se ţine seama că din tabela 1 rezultă $\varphi_0 = 0$ atunci toţi coeficienţii η_{ij} cu cel puţin un indice zero sau n sînt nuli adică

$$\eta_{00} = \eta_{01} = \eta_{02} = \ldots = \eta_{0n} = \eta_{n0} = \eta_{n1} = \ldots = \eta_{nn} = 0,$$

atunci sistemul de relaţii (47) devine

$$\begin{aligned} M_0 &= A_1 \eta_{11} + A_2 \eta_{21} + \ldots + A_n \eta_{n-1,1}, \\ M_1 &= A_1 \eta_{12} + A_2 \eta_{22} + \ldots + A_n \eta_{n-1,2}, \\ &\vdots \\ M_n &= A_1 \eta_{1,n-1} + A_2 \eta_{2,n-2} + \ldots + A_n \eta_{n-1,n-1}. \end{aligned} \tag{48}$$

În acest sistem coeficienţii η_{ij} sînt funcţii de numărul de deschideri ale grinzii şi se determină ţinînd seama de faptul că $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ şi că $\eta_{ij} = \eta_{i,n-j}$.

În tabelele 12, 13, 14 şi 15 s-au calculat aceşti coeficienţi pentru grinzi cu 2, 3, 4 şi 5 deschideri. Se observă, de asemenea, din aceste tabele că ele sînt simetrice în raport cu diagonalele, uşurîndu-se mult calculul lor.

Tabela 12

$n = 2$

j \ i	1
1	−0,25

Tabela 13

$n = 3$

j \ i	1	2
1	−0,26667	0,06667
2	0,06667	−0,26667

Tabela 14

$n = 4$

j \ i	1	2	3
1	−0,26786	0,07143	−0,01786
2	0,07143	−0,28571	0,07143
3	−0,01786	0,07143	−0,26786

Tabela 15

$n = 5$

j \ i	1	2	3	4
1	−0,26794	0,07177	−0,01914	0,00478
2	0,07177	−0,28708	0,07655	−0,01914
3	−0,01914	0,07655	−0,28708	0,07177
4	0,00478	−0,01914	0,07177	−0,26794

Exemplu de calcul. Să se calculeze momentele pe reazeme la grinda continuă cu cinci deschideri egale şi extremităţile liber rezemate, încărcată ca în figura 10.

Se calculează încărcările fictive pe cele patru reazeme ale grinzii ce interesează şi se obţine

$$A_1 = \frac{11}{12} Pl;\quad A_2 = \frac{2}{3} Pl;\quad A_3 = \frac{1}{4} Pl;\quad A_4 = \frac{5}{4} Pl.$$

Momentele pe reazeme se calculează cu ajutorul relaţiilor (48) şi a coeficienţilor η_{ij} din tabela 15, calculaţi pentru grinda continuă pe şase reazeme:

$$M_1 = \left(-0{,}26794\,\frac{11}{12} + 0{,}07177\,\frac{2}{3} - 0{,}01914\,\frac{1}{4} + 0{,}00478\,\frac{5}{4}\right) Pl = -0{,}19657\,Pl,$$

$$M_2 = \left(0.07177\,\frac{11}{12} - 0{,}28708\,\frac{2}{3} + 0{,}07655\,\frac{1}{4} - 0{,}01914\,\frac{5}{4}\right) Pl = -0{,}13040\,Pl,$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$M_3 = \left(-0{,}01914\,\frac{11}{12} + 0{,}07655\,\frac{2}{3} - 0{,}28708\,\frac{1}{4} + 0{,}07177\,\frac{5}{4}\right) Pl = 0{,}05143\ Pl,$$

$$M_4 = \left(0{,}00478\,\frac{11}{12} - 0{,}01914\,\frac{2}{3} + 0{,}07177\,\frac{1}{4} - 0{,}26794\,\frac{5}{4}\right) Pl = -0{,}32536\ Pl.$$

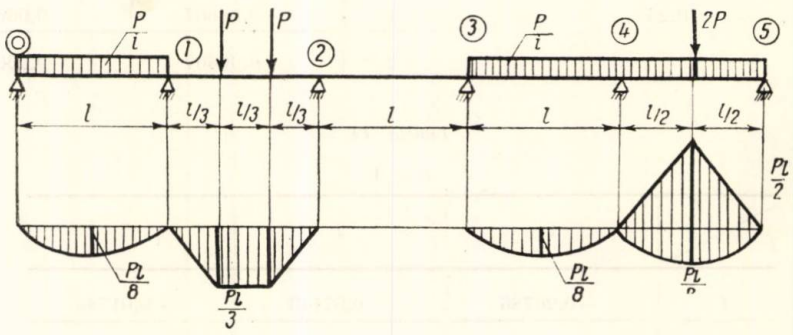


Fig. 10

4. GRINZI CONTINUE CU CONSOLE

Grinzile continue cu console la ambele capete, avînd încărcări fictive pe toate reazemele grinzii, precum şi sarcini pe console care produc în reazemele extreme momentele M_0 şi M_n (fig. 11), se studiază întocmai ca cele liber rezemate pe reazemele extreme, considerînd însă în încărcările fictive A_1 şi A_{n-1} şi încărcările produse de sarcinile de pe console respectiv

$$A_1 = \frac{6}{l}\left(\mathcal{A}_0 + \frac{M_0 l}{6}\right); \quad A_{n-1} = \frac{6}{l}\left(\mathcal{A}_n + \frac{M_n l}{6}\right), \tag{49}$$

unde $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_n$ sînt încărcările fictive cu diagramele de momente pe un sistem de bază cu articulaţii alcătuit din grinzile ce conţin aceste reazeme, iar M_0, M_n reprezintă momentele încovoietoare pe reazemul 0, respectiv, n, produse de încărcările de pe console în acest reazem.

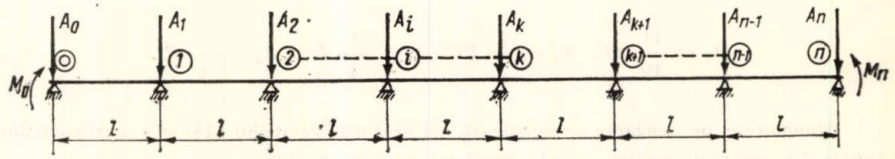


Fig. 11

Pentru rezolvarea unei asemenea probleme rămîn valabile toate relaţiile de calcul stabilite la grinda continuă avînd extremităţile rezemate liber, notaţiile avînd aceeaşi semnificaţie şi coeficienţii calculaţi aceleaşi valori.

Grinda continuă de n deschideri egale, încastrată la un capăt și cu consolă pe celălalt, se rezolvă întocmai ca grinda încastrată la un capăt și liberă la celălalt, avîndu-se în vedere ca în încărcarea fictivă A_1 sau A_{n-1} din vecinătatea reazemului în consolă, să fie cuprins și momentul produs de sarcina de pe consolă, folosindu-se relația (49).

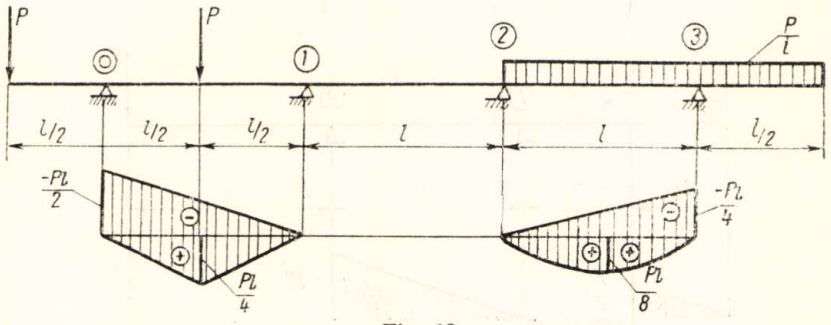


Fig. 12

În exemplele de calcul ce urmează se va prezenta modul de lucru folosit la asemenea cazuri.

Exemplu de calcul. Să se calculeze momentele pe reazeme la grinda continuă pe patru reazeme echidistante cu console încărcată ca în figura 12.

Se calculează încărcările fictive pe reazemele unu respectiv doi ce conțin și momentele de pe reazemele 0 și trei și care sînt:

$$A_1 = \frac{6}{l}\,\mathcal{A}_1 + M_0 = \frac{3}{8}\,Pl - \frac{Pl}{2} = -\frac{1}{8}\,Pl,$$

$$A_2 = \frac{6}{l}\,\mathcal{A}_2 + M_3 = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{4} = 0.$$

Momentele pe reazeme se determină cu relațiile (48) și coeficienții η_{ij} din tabela 13, respectiv

$$M_1 = 0{,}26667\,\frac{Pl}{8} = 0{,}03333\,Pl; \quad M_3 = -\frac{Pl}{2},$$

$$M_2 = -\,0{,}06667\,\frac{Pl}{8} = -\,0{,}00833\,Pl; \quad M_4 = -\frac{Pl}{4}.$$

Exemplu de calcul. Să se calculeze momentele pe reazeme la grinda continuă pe trei reazeme echidistante încastrată la un capăt și cu consolă la celălalt încărcată, ca în figura 13.

Încărcările fictive pe reazemele 0 și 1 sînt:

$$A_0 = \frac{6}{l}\,\mathcal{A}_0 = -\frac{Pl}{4}; \quad A_1 = \frac{6}{l}\,\mathcal{A}_1 + M_2 = \frac{Pl}{4} - Pl = -\frac{3}{4}\,Pl.$$

Momentele pe reazeme se calculează cu relaţiile (39) şi coeficienţii η''_{ij} din tabela 8:

$$M_0 = \left(0{,}57143\,\frac{1}{3} - 0{,}14286\,\frac{3}{4}\right) Pl = 0{,}03941\,Pl,$$

$$M_1 = \left(-0{,}14286\,\frac{1}{4} + 0{,}28571\,\frac{3}{4}\right) Pl = 0{,}17857\,Pl.$$

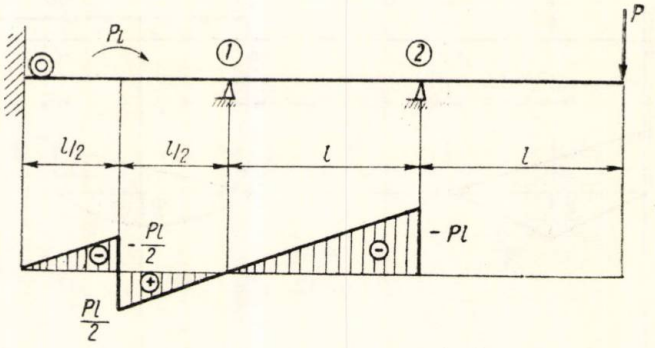


Fig. 13

5. CONCLUZII

1. Relaţiile de calcul stabilite soluţionează una din problemele laborioase întîlnite în practică la asemenea grinzi şi anume calculul momentelor pe reazeme.

2. Modul de calcul al momentelor pe reazeme la grinzi continue, cuprins în lucrare, este expeditiv şi uşor de folosit.

3. Cu ajutorul relaţiilor stabilite se poate calcula momentul pe unul din reazeme ce interesează, fără să fie necesar calculul momentelor pe celelalte reazeme ale grinzii.

4. Metoda de calcul propusă poate soluţiona calculul momentelor pe reazeme la grinzi continue cu un număr oricît de mare de deschideri egale şi pentru orice fel de rezemare la extremităţi, prin extinderea tabelelor din lucrare pentru valori $n > 5$, respectiv $n > 6$.

Primită la redacţie la 28 decembrie 1968

UTILIZAREA CALCULATOARELOR ELECTRONICE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE, ALCĂTUITE DIN BARE, ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

de S. RĂUTU şi VETURIA CHIROIU
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea are drept scop automatizarea completă a calculului unei structuri static nedeterminate, formată din bare, în domeniul elasto-plastic. Se calculează sarcina de rupere şi diagrama de efort corespunzătoare, ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice şi verificarea în fiecare etapă a mărimii deschiderii articulaţiilor plastice.

Calculul structurilor static nedeterminate în domeniul plastic, se face în prezent pe baza teoriei plastice simple. Acceptarea acestei teorii duce la simplificări importante iar erorile rezultate sînt de acelaşi ordin de mărime cu cele admise în mod curent în practică. În calculul deformaţiilor şi a capacităţii portante a cadrelor întîlnite curent în proectare se ţine seama numai de efectul momentelor încovoietoare, care reprezintă efectul dominant (se neglijează efectul forţelor axiale şi forţelor tăietoare).

Calculul în domeniul plastic prezintă următoarele obiective:

— calculul sarcinii de rupere şi a diagramei corespunzătoare;

— calculul ordinei de apariţie a articulaţiilor plastice;

— verificarea în fiecare etapă a mărimii deschiderii articulaţiilor plastice.

Calculul este efectuat de către maşina electronică numai în cazul structurilor la care articulaţiile plastice se deformează în acelaşi sens în tot timpul încărcării, maşina verificînd sensul deformaţiilor plastice. Cînd deformaţia schimbă de sens calculul automat se opreşte, semnalizîndu-se punctul în care apare o schimbare de semn. Pentru continuarea calculului trebuie să intervină proiectantul pentru a da unele comenzi suplimentare.

Avînd în vedere că aceste cazuri sînt foarte rare, se poate spune că acest calcul este automatizat pentru aproximativ 90% din structurile întîlnite în practică, pentru celelalte structuri trebuind ca determinările să se facă în două etape automatizate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 821—844

Calculul structurilor static nedeterminate se face în următoarele etape :

Etapa 1.

Se calculează capacitatea portantă a structurii respective, modul de lucru fiind prezentat în lucrarea [1].

Pornind de la condiţia de maxim, respectiv de minim a sarcinii de rupere, corespunzătoare unei diagrame static, respectiv cinematic compatibile, determinarea capacităţii portante a fost sistematizată pentru a fi introdusă în calculatoarele electronice.

Utilizarea diagramelor static şi cinematic compatibile şi renunţarea la sistemul de bază face ca metoda să fie net superioară celor utilizate pînă în prezent [2]. Problema astfel pusă nu mai necesită alegerea unui sistem de bază, ci elaborarea unor diagrame de moment în echilibru cu solicitările exterioare şi a unor diagrame în autoechilibru, liniar independente, în număr egal cu gradul de nedeterminare statică. Diagrama de moment în echilibru cu solicitările exterioare M_p^0 se construieşte utilizînd pentru fiecare încărcare un sistem de bază avantajos, iar diagramele în autoechilibru m_i vor fi orice sistem complet de diagrame tip. Pentru exemplificare se prezintă un mod particular de lucru. În figura 1*b* este trasată diagrama M_p^0 pentru cadrul din figura 1*a*. Diagramele m_i sînt combinaţii pe conture a diagramelor tipizate, liniar independente, reprezentate în figura 1*c*.

Pentru cadrul considerat matricea m a diagramelor unitare este reprezentată în tabela 1.

Convenţia de semne admisă este arătată în figura 1*d*, unde linia punctată corespunde părţii pe care momentul este considerat pozitiv. Punctele caracteristice sînt reprezentate în figura 1*d*. Pentru cadrele plane simple operaţia de calcul a diagramelor M_p^0 şi m_i se face complet automat. Pentru aceasta este necesar ca la fiecare sarcină orizontală să se indice punctul de aplicaţie, intensitatea sarcinii şi coordonatele punctului.

Momentele se transmit numai pe stîlpul respectiv, pentru toate punctele avînd $h_i < h_p$ iar valoarea momentului este $P(h_p - h_i)$, unde h_i este distanţa de la punctul i la baza stîlpului şi h_p este distanţa de la punctul de aplicaţie a sarcinii exterioare la baza stîlpului.

Pentru sarcinile verticale trebuie date coordonatele punctului de aplicaţie de pe riglă şi distanţele a, b, şi maşina calculează direct momentul maxim, care are valoarea

$$P = \frac{ab}{a + b},$$

iar în alte puncte intermediare se dau valorile momentelor funcţie de coordonatele punctelor. Sarcina de rupere va fi valoarea maximă a parametrului P

$$P = \max$$

în condițiile

$$-M_{pl} \leqslant Pm_p^0 + M_{pl},$$

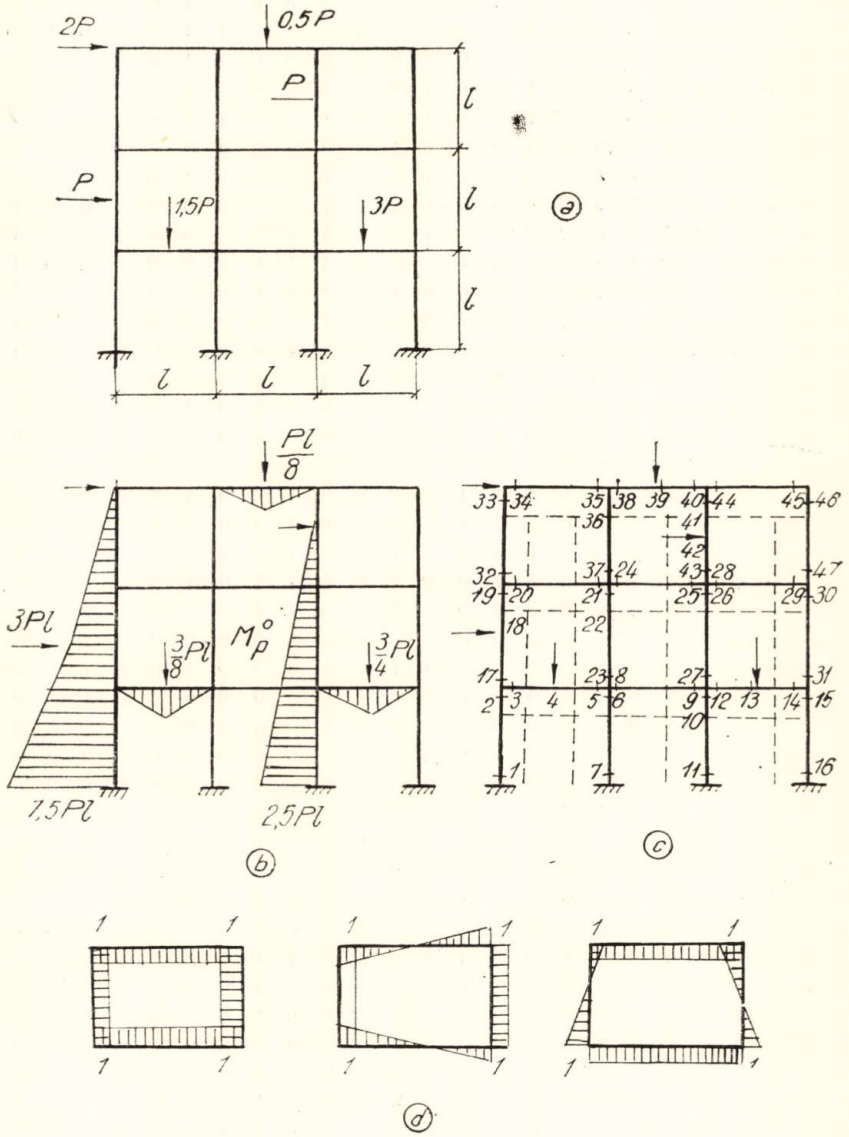


Fig. 1

unde m_p^0 este matricea unei diagrame în echilibru cu solicitările exterioare pentru valoarea parametrului P, egală cu unitatea; m este matricea diagramelor în autoechilibru și M_{pl} este matricea momentelor plastice.

Tabela 1

$m =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0
7	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
9	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
10	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0
11	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
13	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
21	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
22	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	1	−1	0	1	0	0	−1	0	0	0	0
23	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	−1	1	0	−1	0	0	1	0	0	0	0
24	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	−1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
25	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	−1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
26	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0
27	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0
28	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
29	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
30	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
31	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
32	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0
33	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
34	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
35	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
36	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0
37	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0
38	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
39	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
40	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
41	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
42	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1
44	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
45	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
46	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
47	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1

Diagrama finală de rupere se determină din relaţia

$$M_p = P_r\, m_p^0 + m\, X.$$

Schema logică a operaţiilor ce se execută de maşina de calcul este reprezentată în figura 2 (Bloc 1).

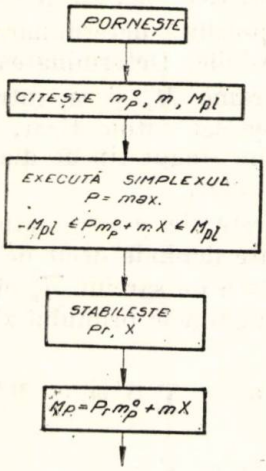


Fig. 2

Etapa a 2-a.

Avînd mecanismul de rupere, putem cunoaşte punctele în care apar articulaţiile plastice. Pentru a putea efectua calculul biografic, este necesar să se cunoască care este secţiunea în care apare ultima articulaţie plastică. O metodă de determinare a acestei articulaţii este dată în lucrarea [3].

În cele ce urmează se prezintă modul de automatizare a operaţiilor de determinare a ultimei articulaţii plastice.

Pornind de la teorema dată de Sydmons-Neal [4], care demonstrează că ultima articulaţie plastică este aceea căreia îi corespunde o energie potenţială maximă, se caută a se determina care este ultima articulaţie plastică, eliminînd pe rînd una din articulaţiile sistemului şi calculînd pentru fiecare caz, lucrul mecanic de deformaţie.

În cazul unei structuri avînd n grade de nedeterminare statică avem $n + 1$ sisteme de bază posibile, obţinute prin eliminarea unei articulaţii, dintre articulaţiile mecanismului, de rupere. Va trebui să se aleagă sistemul de bază care nu conţine printre articulaţiile sale, articulaţia corespunzătoare ultimei articulaţii plastice. Sistemul de bază căutat va fi acel pentru care expresia energiei potenţiale va avea o valoare maximă.

Lucrul mecanic de deformaţie se calculează ţinîndu-se seama de relaţia stabilită în lucrarea [3]

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\overline{M}_p^{02}}{EI}\, \mathrm{d}\, s,$$

unde $\overline{M}_p^0$ este diagrama de momente construită pe sistemul de bază obţinut prin eliminarea ultimei articulaţii plastice.

Sub formă matriceală lucrul mecanic de deformaţie se scrie

$$W = \overline{M}_p^{0\prime} A \overline{M}_p^0,$$

unde $\overline{M}_p^{0\prime}$ este transpusa matricei $\overline{M}_p^0$, iar A este matricea flexibilităţilor.

Problema dificilă o prezintă determinarea diagramelor $\overline{M}_p^0$ pe cele $n+1$ sisteme de bază posibile. Determinarea acestor diagrame se face cu ajutorul aceloraşi diagrame M_p^0 şi m_i introduse la început, ceea ce permite calculul unitar, complet automatizat, al structurilor în domeniul plastic, pornindu-se de la un singur tip de diagrame, $\overline{M}_p^0$ şi $\overline{m}_i$, ale căror matrice se construiesc automat.

Deoarece structura este de n ori static nedeterminată înseamnă că diagrama totală nu poate depinde decît de n parametri independenţi. Prin urmare, diagramele date de sarcini $\overline{M}_p^0$ cît şi diagramele unitare $\overline{m}_i$ trebuie să se obţină din diagramele primului sistem, prin relaţii de forma

$$\overline{M}_p^0 = \sum \beta_i m_i + M_p^0,$$

$$\overline{m}_i = \sum \alpha_{ij} m_j$$

sau, scrise matricial,

$$\overline{M}_p^0 = \beta m + M_p^0,$$

$$\overline{m} = \alpha m.$$

În articulaţiile sistemului de bază avem îndeplinită condiţia

$$\beta m + M_p^0 = 0. \tag{1}$$

Acesta este un sistem de ecuaţii bine determinat din care se obţin necunoscutele β_i. Aplicînd sistemul de ecuaţii (1) de $(n+1)$ ori se obţine un sistem de $n+1$ valori β_i, cu ajutorul cărora se obţin $n+1$ diagrame $\overline{M}_p^0$. Diagrama $\overline{M}_p^0$ pe sistemul de bază căutat va fi aceea pentru care expresia energiei de deformaţie va avea o valoare maximă.

Prin urmare, calculînd $W = \overline{M}_p^{0\prime} A \overline{M}_p^0$ pentru toate sistemele de bază obţinute, sistemul de bază utilizat mai departe în calculul biografic va admite o cantitate W maximă.

Calculul se efectuează de către maşină, conform schemei logice din figura 3 (Bloc 2).

Acest mod de calcul este valabil atunci cînd mecanismul de rupere este obţinut prin apariţia a $n+1$ articulaţii plastice.

În cazul cînd ruperea se produce după un mecanism parțial avînd m articulații plastice raționamentul este analog, cu singura deosebire că se presupun deschise $m - 1$ articulații, iar pentru obținerea necunoscutelor se pun condiții de continuitate în celelalte puncte $n - m + 1$.

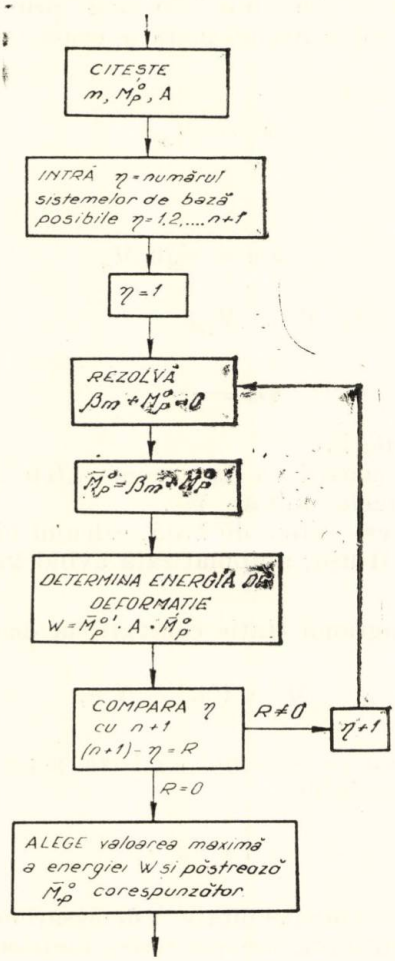


Fig. 3

Etapa a 3-a.

Cunoscînd sistemul de bază pe care se lucrează, se trece la efectuarea calculului biografic care se bazează pe urmărirea îndeaproape a comportării structurii din momentul apariției primei articulații plastice pînă în momentul transformării lor în mecanism. Diagramele unitare $\overline{m}_i$ pe acest sistem de bază se determină cu ajutorul diagramelor unitare în autoechilibru m_i introduse la început în lucrare:

$$\overline{m} = \alpha m.$$

Pentru ca noile diagrame să fie liniar independente trebuie ca determinantul matricei coeficienţilor α_{ij} să fie diferit de zero

$$D(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

Diagrama $\overline{m}_i$ va fi diagrama obţinută prin încărcarea succesivă a sistemului de bază cu o necunoscută y_i egală cu momentul plastic al secţiunii respective

$$Y_i = M_{ip^1}.$$

Prin urmare

$$\alpha m = \text{sign } M_p$$

în articulaţia pentru care $Y_j = M_{jp^1}$
şi

$$\alpha m = 0$$

pentru celelalte articulaţii.

Acest sistem de ecuaţii va da necunoscutele α_{ij} cu ajutorul cărora se construiesc diagramele unitare $\overline{m}_i$.

Pornind de la acest sistem de bază, calculul biografic poate fi astfel conceput ca să poată fi uşor automatizată avînd în fiecare etapă aceeaşi schemă logică.

Acceptînd ca diagramă static compatibilă diagrama dată de relaţia

$$M = P\overline{m}_p^0 + Ym,$$

unde $\overline{m}_p^0$ este diagrama pe sistemul de bază pentru valoarea unitară a parametrului P, în condiţiile

$$|Y| \leqslant 1,$$

şi punînd condiţia de compatibilitate a deplasărilor pe direcţiile pe care continuitatea este menţinută, relaţie scrisă matriceal sub forma

$$\delta Y + P\,\delta_p = 0,$$

întregul calcul se reduce la o operaţie de Simplex

$$P = \max,$$

în condiţiile

$$[\delta Y + P\delta_p]^\circ = 0, \qquad (2)$$
$$|Y| \leqslant 1,$$

unde

$$\delta = \overline{m}' A \overline{m},$$

$$\delta_p = \overline{m}' A \overline{m}_p^0.$$

Semnul 0 din relaţiile de sus corespunde faptului că din sistemul de ecuaţii nu se elimină nici o ecuaţie sau că nu s-a determinat încă nici o articulaţie plastică.

Din relaţia Simplex rezultă P_1 şi diagrama corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice

$$M_1 = P\overline{m}_p^0 + \sum Y_{i(1)} \overline{m}_i.$$

După apariţia primei articulaţii plastice corespunzătoare unei valori $Y_j = 1$ (restul valorilor vor fi mai mici decît unitatea)

$$Y_j = 1,$$

$$Y_{i(i \neq j)} \leqslant 1,$$

schema statică a structurii se modifică, aceasta lucrînd pentru sarcini superioare sarcinii P_1.

Sarcina P_2 corespunzătoare apariţiei celei de a doua articulaţie plastică se determină la fel, din algoritmul

$$P = max$$

în condiţiile

$$[\delta Y + P\delta_p]' = 0,$$

$$Y_j = 1, \tag{3}$$

$$|Y_i|_{(i \neq j)} \leqslant 1.$$

Semnul prim din sistemul (3) indică faptul că din sistemul de ecuaţii (2) lipseşte ecuaţia j.

În continuare, semnul secund va însemna că din sistemul (3) va lipsi şi ecuaţia K corespunzătoare apariţiei celei de-a doua articulaţii plastice $Y_k = 1$.

În rest avem

$$Y_{i(i \neq j \neq k)} \leqslant 1$$

şi diagrama de momente corespunzătoare celei de-a doua articulaţie plastică va fi

$$M_2 = P\overline{m}_p^0 + \sum Y_{i(2)} \overline{m}_i.$$

Datorită creşterii sarcinii de la P_1 la P_2, eforturile în toate secţiunile cresc cu excepţia secţiunii j unde a apărut prima articulaţie plastică şi

unde efortul nu poate depăşi momentul capabil M_{jpl}. În schimb, influenţa creşterii sarcinii exterioare se manifestă prin producerea unei deplasări relative $\Delta_{j(1)}$ a secţiunilor aflate de o parte şi de alta a articulaţiei plastice j.

Deplasarea $\Delta_{j(1)}$ se calculează din relaţia

$$\Delta_{j(1)} = \sum Y_{i(2)}\, \delta_{j1} + P_2\, \delta_{j2}$$

sau, matriceal,

$$\Delta_{j(1)} = Y_{(2)}\, \delta + P_2\, \delta_j .$$

În faza următoare se elimină din problema (3) ecuaţia k şi în celelalte ecuaţii se introduce $Y_k = 1$, care devine o nouă componentă a termenului liber. Se obţine astfel P_3, sarcina corespunzătoare apariţiei celei de-a treia articulaţii plastice, precum şi diagrama de momente corespunzătoare

$$M_3 = P\, \overline{m}_p^0 + \sum Y_{i(3)}\, \overline{m}_i .$$

În secţiunile j şi k în care au apărut prima şi a doua articulaţii plastice, momentul este egal cu M_{pl}, aşa încît aici se produc rotiri relative ale secţiunilor vecine, care, la apariţia celei de-a treia articulaţie plastică, au valoarea

$$\Delta_{j(2)} = \sum Y_{i(3)}\, \delta_{ji} + P_3\, \delta_{jp},$$

$$\Delta_{k(2)} = \sum Y_{i(3)}\, \delta_{ki} + P_3\, \delta_{kp}.$$

Sub formă matriceală rotirile relative devin

$$\Delta_{j(2)} = Y_{(3)}\, \delta + P_3\, \delta_p,$$

$$\Delta_{k(2)} = Y_{(3)}\, \delta + P_3\, \delta_k .$$

În secţiunea j la apariţia celei de a doua articulaţie plastică se produsese deplasarea $\Delta_{j(1)}$, care este mai mică decît $\Delta_{j(2)}$. De fapt, deplasarea $\Delta_{j(2)}$ conţine deplasarea $\Delta_{j(1)}$.

Se observă că $\Delta^*_{j(3-2)}$ este diferenţa dintre deplasările în etapele trei şi doi

$$\Delta^*_{j(3-2)} = \Delta_{j(3)} - \Delta_{j(2)}$$

şi reprezintă corecţia deplasării calculată în etapa anterioară.

Avînd în vedere că deplasările se opun acţiunii momentelor de plasticitate şi, în consecinţă, sînt negative, trebuie ca

$$\Delta^*_{j(3-2)} < 0,$$

pentru ca articulația j să nu se închidă și calculul se poate continua în același mod.

Dacă articulația j evoluează în sens contrar, articulația j se închide și, în faza următoare, ecuația j reapare în calcul. În acest caz mașina se oprește și calculatorul trebuie să intervină pentru a da o serie de indicații suplimentare legate de scoaterea din lucru a articulației respective și reluarea calculului de la etapa precedentă. Evident că și aceste operații puteau fi automatizate, însă avînd în vedere că asemenea cazuri intervin foarte rar, nu s-a considerat că acest lucru este strict necesar.

În momentul ruperii, avem deplasările $\Delta_{j(n-1)}$, $\Delta_{k(n-1)}$ etc., care sînt obținute prin corectarea primelor valori ale deplasărilor, cu corecția $\Delta^*_{j(r-q)}$. Deplasarea finală Δ_j se obține prin aproximații succesive, pornind de la valoarea inițială corectată la fiecare ciclu de determinare a valorii maxime a parametrului P, prin adăugarea unor cantități $\Delta^*_{j(n-q)}$, unde q și r sînt două cicluri succesive. Valorile intermediare se utilizează la determinarea săgeților pe parcurs. Calculul se continuă pînă cînd se recalculează sarcina de rupere. Sarcina de rupere se obține din nou din următorul algoritm Simplex

$$P = \max$$

în condiția ca momentul să nu depășească în nici una din articulațiile sistemului de bază momentul plastic de care este capabilă articulația respectivă,

$$-M_{pl} \leqslant M_p \leqslant M_{pl}.$$

Recalcularea sarcinii de rupere și a diagramei corespunzătoare reprezintă verificarea calculului din prima etapă, unde s-a determinat direct sarcina de rupere și diagrama finală de moment încovoietor. Schema de calcul pentru etapa a treia este dată în figura 4 (Bloc 3).

Exemplu de calcul: se consideră cadrul din figura 5*a*.

Diagrama în echilibru cu forțele exterioare și diagramele corespunzătoare unei sarcini în autoechilibru sînt reprezentate în figura 5*b*,*c*. Convenția de semne admisă și punctele caracteristice sînt reprezentate în figura 5*d*.

Sarcina de rupere este valoarea maximă a funcției

$$f = P$$

în condițiile:

$$-M_{pl} \leqslant X_1 + X_2 + X_3 - 0{,}5\,Pl \leqslant M_{pl},$$

$$-M_{pl} \leqslant X_1 + X_2 = 0{,}5\,X_3 \leqslant M_{pl},$$

$$-M_{pl} \leqslant X_1 + X_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-M_{pl} \leqslant -X_1 + X_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-M_{pl} \leqslant -X_1 + X_2 + X_3 \leqslant M_{pl}.$$

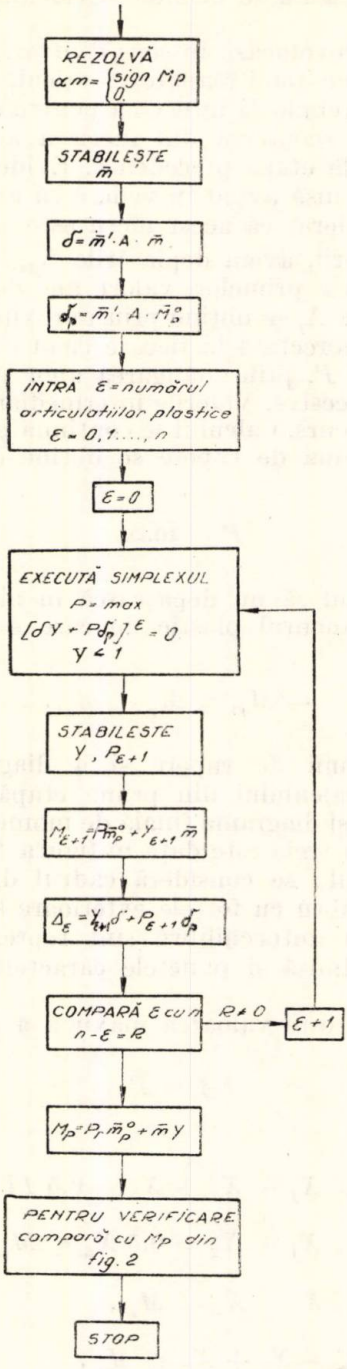

REZOLVĂ
αm = { sign Mp / 0
STABILEȘTE
m̄
δ = m̄' · A · m̄
δp = m̄' · A · M̄p°
INTRĂ ε = numărul articulațiilor plastice
ε = 0, 1, ..., n
ε = 0
EXECUTĂ SIMPLEXUL
P = max
[δY + Pδp]ε = 0
Y ≥ 1
STABILESTE
Y , Pε+1
Mε+1 = P m̄p° + Yε+1 m̄
Δε = Yε+1 δ' + Pε+1 δp
COMPARĂ ε cu n
n - ε = R
R ≠ 0
ε + 1
Mp = P1 m̄p° + m̄ Y
PENTRU VERIFICARE
compară cu Mp din fig. 2
STOP

Fig. 4

Punînd $X_i = y_i' - y_i''$ $(i = 1, 2, 3)$ cu y_i', y_i'' pozitive, obține o problemă clasică de Simplex a cărei soluție este

$$X_1 = 0{,}5\ M_{pl},$$

$$X_2 = -\ 0{,}5\ M_{pl},$$

$$X_3 = 2M_{pl},$$

$$P_r = 6\frac{M_{pl}}{l}.$$

Tabela 2

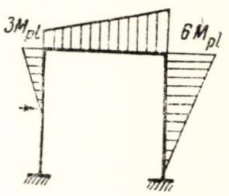
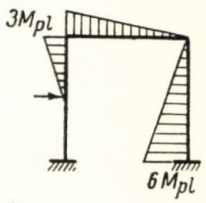
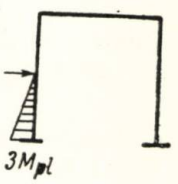
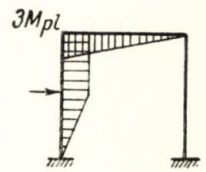
Nr.	SISTEM DE ECUAȚII	SOLUȚIE	DIAGRAMA $\overline{M}_p^0$
1	$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3 = 0$ $\beta_1 + \beta_2 + 0{,}5\ \beta_3 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{3}{2}$ $\beta_2 = -\frac{9}{2}$ $\beta_3 = 6$	
2	$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3 = 0$ $\beta_1 + \beta_2 + 0{,}5\ \beta_3 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 = 0$	$\beta_1 = -\frac{3}{2}$ $\beta_2 = -\frac{3}{2}$ $\beta_3 = 6$	
3	$\beta_1 + \beta_2 + 0{,}5\ \beta_3 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$	$\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$ $\beta_3 = 0$	
4	$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 = 0$ $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$	$\beta_1 = \frac{3}{2}$ $\beta_2 = \frac{3}{2}$ $\beta_3 = 0$	

Diagrama finală de rupere este reprezentată în figura 5*e*.

Sistemele de ecuații pentru determinarea diagramelor $\overline{M}_p^0$ și diagramele $\overline{M}_p^0$ corespunzătoare sînt reprezentate în tabela 2.

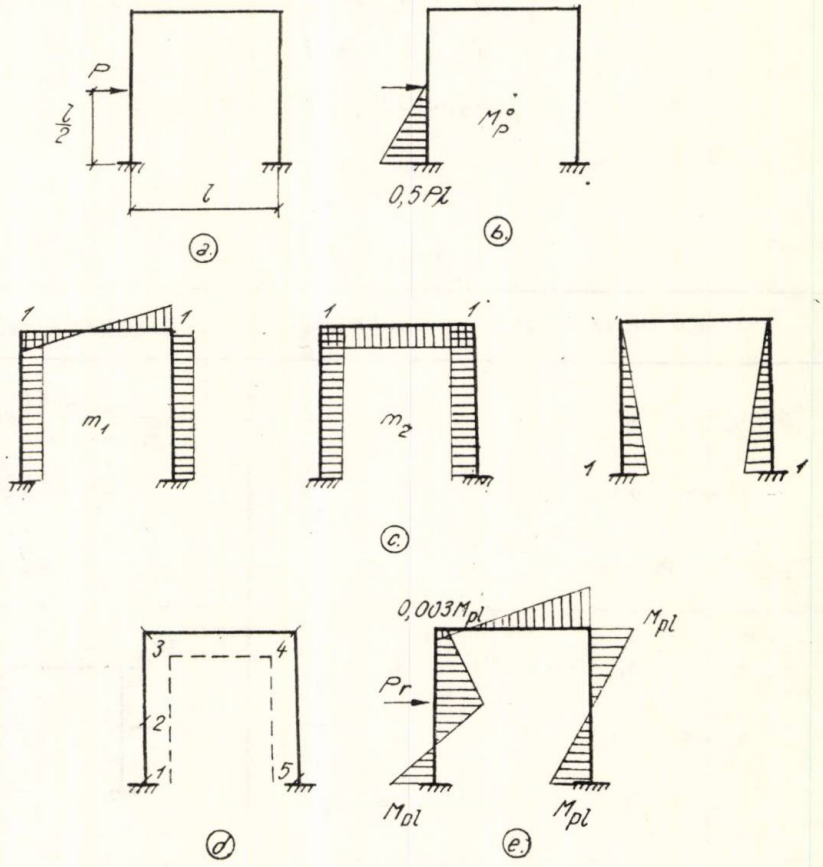


Fig. 5

Pentru a alege sistemul de bază, care nu conține ca articulație secțiunea care se plastifică ultima, calculăm energia de deformație,

$$W = \overline{M}_p^{0\prime} A M_p^0,$$

pentru fiecare din diagramele din tabela 2.

Se obține

$$W_a = \frac{207}{12},$$

$$W_b = \frac{99}{12},$$

$$W_c = \frac{9}{12},$$

$$W_d = \frac{27}{8}.$$

Prin urmare, ultima articulație plastică apare în secțiunea a patra și sistemul de bază pentru care efectuăm calculul biografic precum și diagrama $\overline{M}_p^0$ corespunzătoare sînt reprezentate în figura 6.

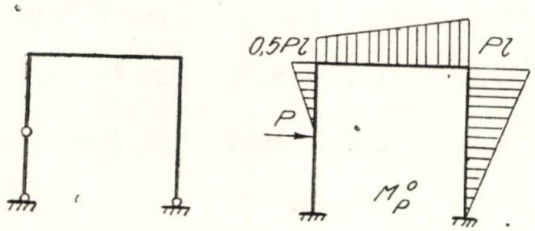
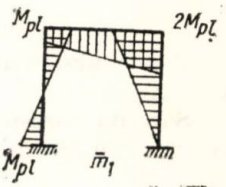
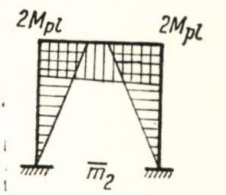
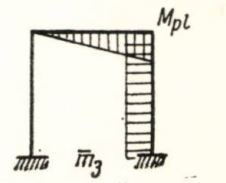


Fig. 6

Diagramele $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, $\overline{m}_3$ pentru acest sistem de bază și sistemele de ecuații din care se determină coeficienții α_{ij} sînt reprezentate în tabela 3.

Tabela 3

Nr.	SISTEM DE ECUAȚII	SOLUȚIE	DIAGRAMA UNITARĂ $\overline{m}$
1	$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = -1$ $\alpha_{11} + \alpha_{12} + 0{,}5\,\alpha_{13} = 0$ $-\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0$	$\alpha_{11} = -0{,}5$ $\alpha_{12} = 1{,}5$ $\alpha_{13} = -2$	
2	$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0$ $\alpha_{21} + \alpha_{22} + 0{,}5\,\alpha_{23} = 1$ $-\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0$	$\alpha_{21} = 0$ $\alpha_{22} = 0$ $\alpha_{23} = -2$	
3	$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0$ $\alpha_{31} + \alpha_{32} + 0{,}5\,\alpha_{33} = 0$ $-\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 1$	$\alpha_{31} = -0{,}5$ $\alpha_{32} = 0{,}5$ $\alpha_{33} = 0$	

Sarcina corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice se obţine din următorul Simplex :

$$P = \max,$$

$$80\,X_1 + 56\,X_2 + 24\,X_3 - 28{,}5\,P = 0,$$

$$56\,X_1 + 48\,X_2 + 22\,X_3 - 23\,P = 0,$$

$$24\,X_1 + 22\,X_2 + 16\,X_3 - 11\,P = 0,$$

$$|X_1| \leqslant 1,$$

$$|X_2| \leqslant 1,$$

$$|X_3| \leqslant 1,$$

avînd soluţiile

$$P_1 = 3{,}57\,\frac{M_{pl}}{l},$$

$$X_1 = 0{,}45,$$

$$X_2 = 1,$$

$$X_3 = 0{,}4035.$$

Prima articulaţie plastică apare în secţiunea a doua şi corespunde valorii $X_2 = 1$.

Sarcina corespunzătoare apariţiei celei de-a doua articulaţii plastice se obţine din Simplexul

$$P = \max,$$

$$80\,X_1 + 24\,X_3 - 28{,}5\,P + 56 = 0,$$

$$24\,X_1 + 16\,X_3 - 11\,P + 22 = 0,$$

$$|X_1| \leqslant 1,$$

$$|X_3| \leqslant 1,$$

avînd soluţia

$$P_2 = 5{,}59\,\frac{M_{pl}}{l},$$

$$X_1 = 1,$$

$$X_3 = 0{,}966.$$

A doua articulație plastică apare în punctul unu. Sarcina corespunzătoare celei de a treia articulație plastică se obține în continuare din Simplexul

$$P = \max,$$

$$16\,X_3 - 11\,P + 46 = 0,$$

$$|X_3| \leqslant 1,$$

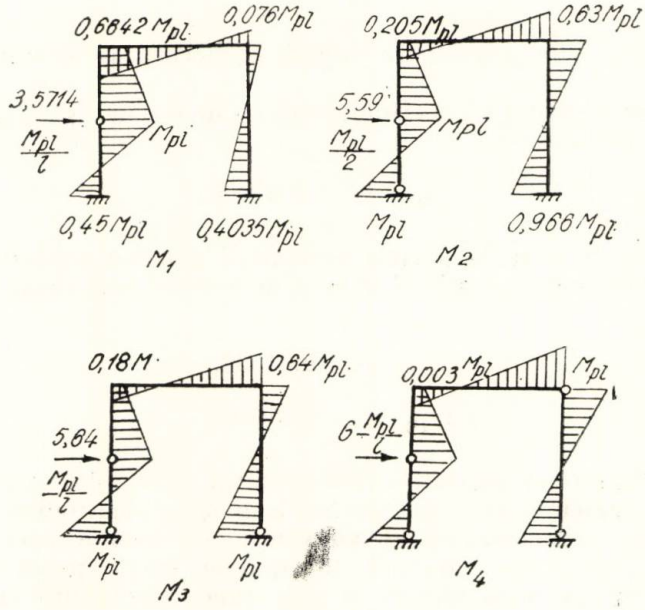


Fig. 7

cu soluția

$$P_3 = 5{,}64\,\frac{M_{pl}}{l},$$

$$X_3 = 1,$$

ceea ce corespunde apariției celei de a treia articulații plastice în punctul cinci.

Diagramele de moment încovoietor rezultate după apariția fiecărei articulații plastice sînt reprezentate în figura 7*a,b,c*.

Ultima articulație plastică apare în punctul patru.

Sarcina de rupere se recalculează din Simplexul

$$P = \max,$$

$$-1 \leqslant -X_1 \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant X_2 \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant -P + 2\,X_1 + 2\,X_2 + X_3 \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant X_3 \leqslant 1,$$

cu soluţia

$$P = 6\,\frac{M_{pl}}{l},$$

$$X_1 = 1,$$

$$X_2 = 1,$$

$$X_3 = 1.$$

Diagrama corespunzătoare ruperii structurii este reprezentată în figura 7 *d*.

Deplasarea relativă a secţiunilor aflate de o parte şi de alta a primei articulaţii plastice este

$$\Delta_{2\,(1)} = -\,0{,}27265.$$

La apariţia celei de a treia articulaţii plastice deplasările relative ale secţiunilor vecine ale primei şi celei de a doua articulaţii plastice sînt date de

$$\Delta_{2\,(2)} = -\,0{,}31033,$$

$$\Delta_{1\,(2)} = -\,0{,}05666.$$

În continuare se prezintă calculul unitar şi complet al structurii din figura 8*a* în domeniul plastic, efectuat la maşina electronică MECIPT 2.

Punctele caracteristice şi convenţia de semne sînt arătate în figura 8*b* — unde linia punctată corespunde părţii pe care momentul este pozitiv. Diagramele unitare şi diagrama în echilibru cu solicitările exterioare sînt reprezentate în figurile 8*d*, *c*.

Momentele plastice de care sînt capabile elementele structurii sînt indicate în figura 8*a*.

Matricea diagramelor unitare este reprezentată în tabela 4.

Tabela 4

0	0	0	1	1	−1
0	0	0	1	1	1
−1	−1	1	1	1	1
1	1	−1	0	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
−1	1	1	0	0	0
−1	1	1	0	0	0
−1	1	−1	0	0	0
1	−1	1	−1	1	1
0	0	0	−1	1	1
0	−1	1	0	1	1
0	0	0	−1	1	−1

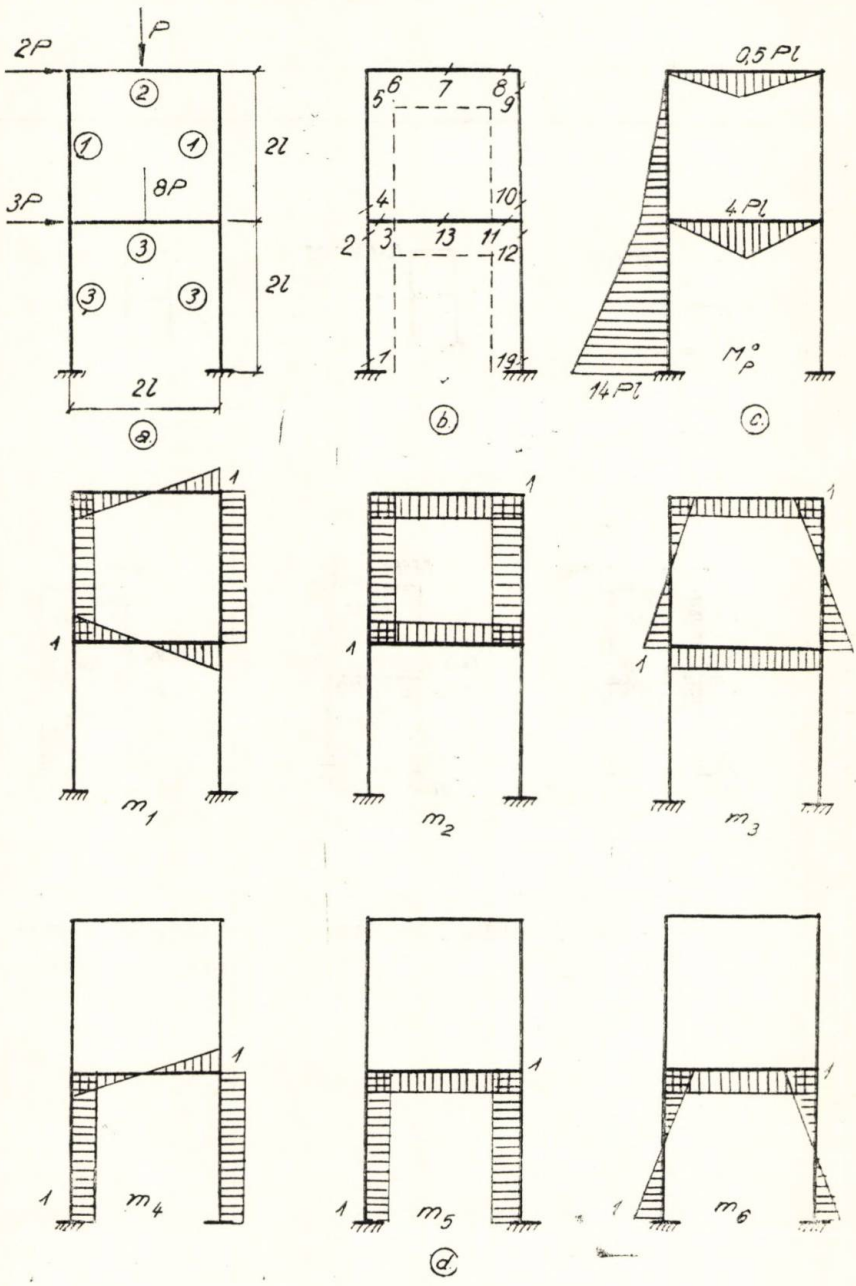
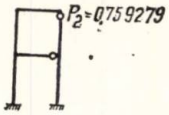
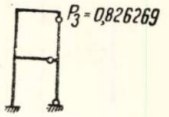
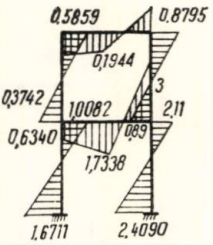
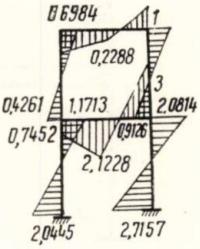
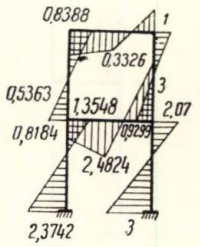
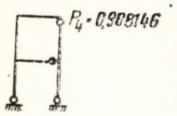


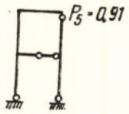
Fig. 8

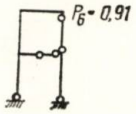
Tabela

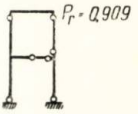
APARIȚIA ARTICULAȚIILOR PLASTICE $\frac{(M_{pl})}{l}$			
DIAGRAMA DE MOMENTE (M_{pl})			
DEPLASĂRI RELATIVE (Pl^2)		$EI\Delta_{11\,(1)} = -100{,}75$	$EI\Delta_{11\,(2)} = -148{,}78$ $EI\Delta_{9\,(1)} = -57{,}68$

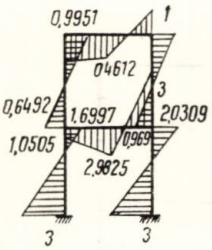
5

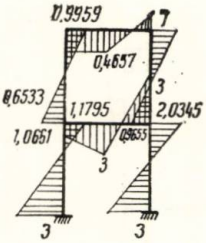


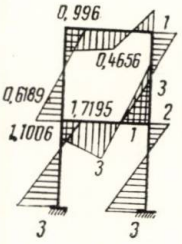


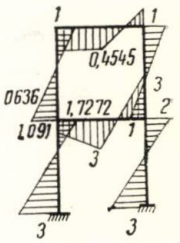












$EI\Delta_{11\,(3)} = -158{,}61$

$EI\Delta_{9\,(2)} = -58{,}98$

$EI\Delta_{14\,(1)} = -35{,}42$

$EI\Delta_{11\,(4)} = -169$

$EI\Delta_{9\,(3)} = -68{,}66$

$EI\Delta_{14\,(2)} = -36{,}43$

$EI\Delta_{1\,(1)} = -28{,}8$

$EI\Delta_{11\,(5)} = -169{,}4$

$EI\Delta_{9\,(4)} = -69{,}12$

$EI\Delta_{14\,(3)} = -37{,}44$

$EI\Delta_{1\,(2)} = -38{,}97$

$EI\Delta_{10\,(1)} = -78{,}38$

$EI\Delta_{11\,(6)} = -169{,}8$

$EI\Delta_{9\,(5)} = -69{,}15$

$EI\Delta_{14\,(4)} = -37{,}6$

$EI\Delta_{1\,(3)} = -40{,}65$

$EI\Delta_{10\,(2)} = -78{,}76$

$EI\Delta_{13\,(1)} = -167{,}19$

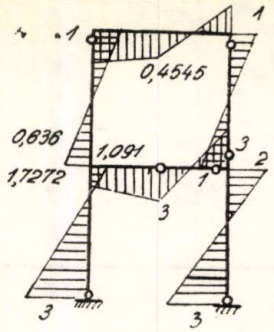
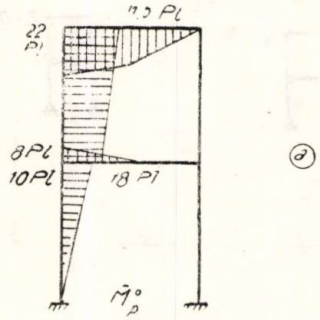


Fig. 9



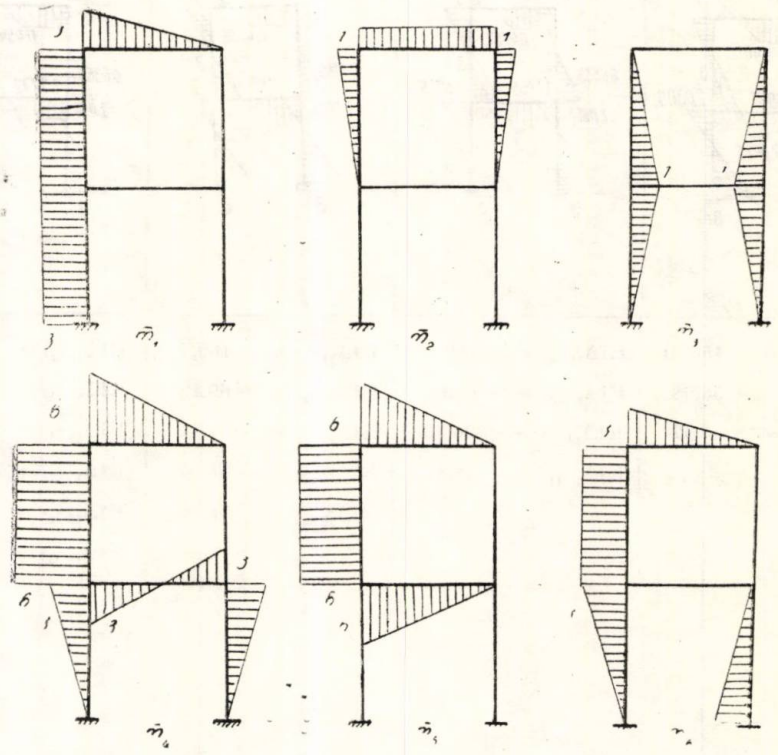


Fig. 10

Sarcina de ruperea structurii este dată de soluția

$$P_r = 0{,}909,$$
$$X_1 = 1,$$
$$X_2 = 1,$$
$$X_3 = -1,$$
$$X_4 = 3{,}3636,$$
$$X_5 = 3{,}8636,$$
$$X_6 = -2{,}5.$$

Diagrama finală de rupere și mecanismul de rupere sînt reprezentate în figura 9. Sistemul de bază care nu conține ca articulație secțiunea în care apare ultima articulație plastică și diagrama $\overline{M}_p^0$ corespunzătoare, este reprezentată în figura 10*a*. Diagramele unitare $\overline{m}$ construite pe acest sistem de bază sînt reprezentate în figura 10*b*.

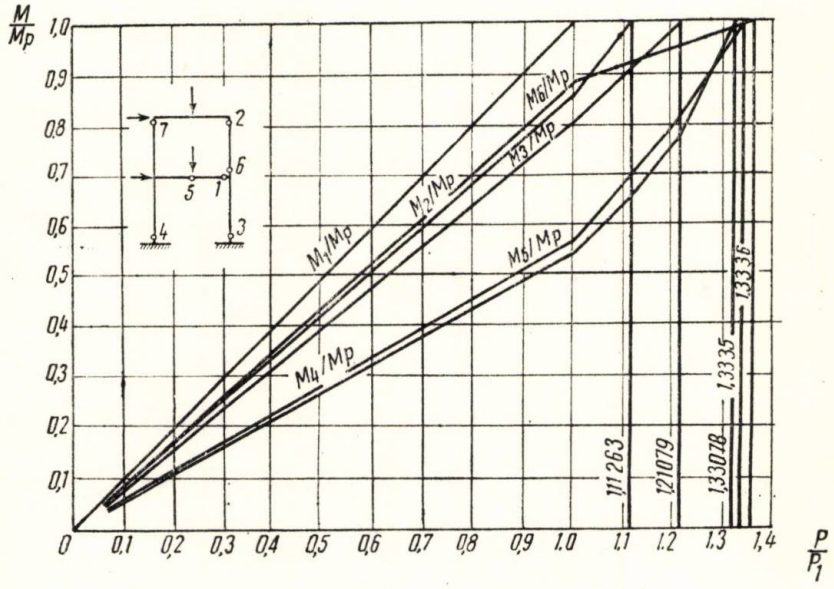


Fig. 11

În tabela 5 este reprezentat calculul biografic cu sarcinile corespunzătoare apariției, pe rînd, a articulațiilor plastice, diagramele de moment corespunzătoare și deplasările relative pentru fiecare etapă.

Variația momentelor în secțiunile caracteristice ca și deschiderea articulațiilor plastice de sarcină exterioară sînt date în graficul din figura 11.

Primită la redacție la 27 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. S. RĂUTU, V. CHIROIU, *Unele probleme ale calculului structurilor static nedeterminate în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., **28**, *1* (1969).
2. MASSONET, M. A. SAVE, *Calcul plastique des constructions*. vol. 1. *Structures dépendant d'un paramètre*, Bruxelles, 1967.
3. S. RĂUTU, V. CHIROIU, *Determinarea ultimei articulaţii plastice a unei structuri alcătuite din bare drepte şi solicitate dominant la încovoiere*, St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
4. P. S. SYDMONS, B. G. NEAL, *The interpretation of failure loads in the plastic theory of continuous beams and frames*, J. Aero Sci., *1* (1952).

TEORIA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE MOMENTE A STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT*)

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

În lucrare se prezintă o teorie a calculului plastic al structurilor continue de beton armat solicitate de sarcini verticale permanente și temporare. Teoria se bazează pe ideea maximizării valorilor momentelor plastice în vederea minimizării redistribuției plastice a momentelor pentru toate schemele nefavorabile de încărcare. În acest scop se enunță și se demonstrează trei teoreme. Aplicarea practică a teoriei este ilustrată printr-un exemplu de calcul. În final se face o comparație între rezultatele ce se obțin pe baza teoriei redistribuției minime de momente și cele furnizate de teoria calculului plastic optim.

1. INTRODUCERE

În cadrul unui studiu anterior [1], teoria calculului plastic optim a fost extinsă la cazul general al structurilor continue de beton armat solicitate de sarcini verticale permanente și temporare care pot forma mai multe scheme de încărcare și pot varia după orice lege de la valorile lor normate la valorile lor de calcul. Pe baza acestei teorii se pot determina momentele plastice din secțiunile critice ale oricărei structuri continue de beton armat în ipoteza redistribuirii totale a momentelor încovoietoare pentru fiecare schemă nefavorabilă de încărcare, astfel încît limita superioară a mărimilor domeniilor plastice corespunzătoare tuturor schemelor de încărcare să fie minimă. Avantajele aplicării teoriei calculului plastic optim sînt în prezent evidente. Totuși timpul necesar pentru aplicarea acestei teorii poate fi însă considerat uneori prea mare în raport cu cel necesar pentru efectuarea calculului elastic al solicitărilor. De aceea, pentru introducerea în proiectare a metodelor de calcul plastic optim devine de o importanță deosebită determinarea, în prealabil, a soluțiilor plastice optime pentru structurile continue de beton armat curent folosite

*) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée, t. 14, n°. 4, p. 797 (1969) (în limba engleză).

în practică. În același timp însă, apare oportună elaborarea de procedee de calcul care să aproximeze cu o exactitate suficientă soluțiile plastice optime ale acestor structuri. Avînd în vedere acest din urmă aspect, în cadrul acestui studiu se prezintă un procedeu simplu de calcul plastic al structurilor continue de beton armat, bazat pe o teorie proprie. Modul de aplicare a procedeului este ilustrat printr-un exemplu de calcul. În final, rezultatele ce se pot obține prin aplicarea procedeului sînt comparate cu cele furnizate de calculul plastic optim.

II. NOTAȚII

A_j, A_k — ariile armăturii corespunzătoare momentelor plastice unitare M_{pj} și M_{pk} care acționează pe direcțiile l_j și l_k în cîmpul unui panou de placă;

a_i — coeficientul de influență al momentului elastic produs de sarcinile permanente în secțiunea critică i;

b_i — coeficientul de influență al momentului elastic maxim din secțiunea critică i, produs de sarcinile temporare formînd cea mai defavorabilă schemă de încărcare pentru această secțiune critică;

G — valoarea normată a sarcinii permanente de referință;

G_c — valoarea de calcul a sarcinii permanente de referință;

H — raportul dintre valoarea normată a sarcinii temporare de referință și valoarea normată a sarcinii permanente de referință;

i — indice exprimînd numărul de ordine al secțiunilor critice ale structurii ($i = 1, 2, \ldots, n_s$);

$j-1$, j, $j+1$ — indici exprimînd numărul de ordine al secțiunilor critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul și de pe reazemul din dreapta ale unui panou de placă pe direcția deschiderii l_j;

$k-1$, k, $k+1$ — indici exprimînd numărul de ordine al secțiunilor critice de pe reazemul din stînga, din cîmpul și de pe reazemul din dreapta ale unei deschideri de grindă sau ale unui panou de placă pe direcția deschiderii l_k a acestuia;

l — lungimea deschiderii de referință;

l_j, l_k — lungimile deschiderilor unui panou dreptunghiular de placă armată pe două direcții;

M_{ei} — momentul elastic maxim din secțiunea critică i produs de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul, formînd cea mai defavorabilă schemă de încărcare pentru această secțiune critică;

$\overline{M}_k$ — momentul de simplă rezemare al unei deschideri de grindă, măsurat în dreptul secțiunii critice k din cîmp, produs de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul;

M_{pi} — momentul plastic al secțiunii critice i;

M_{pi}^{m} — momentul plastic al secțiunii critice i, dat de teoria redistribuției minime de momente;

M_{pi}^{o} — momentul plastic al secțiunii critice i, dat de teoria calculului plastic optim;

n_e — numărul de ecuații distincte de echilibru plastic, egal cu numărul de mecanisme plastice distincte ale structurii;

n_s — numărul secțiunilor critice ale structurii;

P — valoarea normată a sarcinii temporare de referință;

P_c — valoarea de calcul a sarcinii temporare de referință;

s — numărul secțiunilor critice ale unui mecanism plastic;

W_G — lucrul mecanic virtual al sarcinilor permanente de calcul în stadiul de mecanism al unei deschideri de grindă sau al unui panou de placă;

W_P — lucrul mecanic virtual al sarcinilor temporare de calcul în stadiul de mecanism al unei deschideri de grindă sau al unui panou de placă;

X — exponent exprimînd numărul de ordine al mecanismelor plastice ale structurii ($X = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots, \mathrm{L}$);

η_{lj} — raportul dintre aria armăturii intersectate de liniile pozitive de rupere pe lățimea l_k a unui panou de placă și produsul $A_j l_k$, ($\eta_j \leqslant 1$);

η_{lk} — raportul dintre aria armăturii intersectate de liniile pozitive de rupere pe lățimea l_j a unui panou de placă și produsul $A_k l_j$, ($\eta_k \leqslant 1$);

λ_c — coeficientul de supraîncărcare de calcul al sarcinilor permanente;

λ_{oi} — coeficientul de supraîncărcare al sarcinilor permanente corespunzător atingerii momentului plastic optim în secțiunea critică i;

μ_e — coeficientul de supraîncărcare de calcul al sarcinilor temporare;

μ_{oi} — coeficientul de supraîncărcare al sarcinilor temporare corespunzător atingerii momentului plastic optim în secțiunea critică i;

ν_i — coeficientul plastic al secțiunii critice i;

ν_m — valoarea comună a coeficienților plastici ai tuturor secțiunilor critice aparținînd unui mecanism plastic oarecare;

ν_m^X — valoarea comună a coeficienților plastici ai tuturor secțiunilor critice aparținînd mecanismului plastic X;

θ_i — deplasarea unghiulară virtuală a articulației plastice i;

ξ_k — raportul dintre distanța de la reazemul din stînga pînă la secțiunea critică k din cîmpul unei deschideri de grindă și lungimea deschiderii respective.

III. IPOTEZE DE CALCUL

Elaborarea teoriei redistribuției minime de momente se face pe baza următoarelor ipoteze :

1. Structurile continue de beton armat sînt solicitate numai de sarcini verticale permanente și temporare. De aceea cedarea lor se caracterizează prin formarea unuia sau mai multor mecanisme de grindă sau de panou de placă. Motivele pentru care nu este recomandabil să se redistribuie momentele încovoietoare produse de forțele orizontale în cadrele cu noduri deplasabile vor fi prezentate în cadrul unei lucrări separate.

2. Sarcinile permanente pot fi exprimate în funcție de o singură sarcină de referință, care poate varia de la valoarea ei normată, G, pînă la valoarea ei de calcul G_c. În mod asemănător, sarcinile temporare pot fi exprimate în funcție de o singură sarcină de referință, care poate varia de la valoarea ei normată, P, pînă la valoarea ei de calcul, P_c.

3. Sarcinile temporare pot varia independent de cele permanente, respectiv între sarcina temporară de referință și sarcina permanentă de referință nu există nici o relație de legătură.

4. Sarcinile permanente au fixe direcția de acțiune și punctele de aplicație, ele fiind aplicate în totalitate și simultan asupra structurii. Sarcinile temporare au, de asemenea, fixe direcția de acțiune și punctele de aplicație, dar ele pot fi aplicate în una sau mai multe deschideri ale structurii. Ca urmare, sarcinile permanente și temporare pot forma două sau mai multe scheme defavorabile de încărcare.

5. Fiecărei scheme de încărcare formate de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul îi corespunde formarea unuia sau mai multor mecanisme plastice. Ca urmare, fiecare structură are același grad de siguranță în raport cu formarea oricărui mecanism plastic.

6. Există întotdeauna o schemă de încărcare pentru care prima articulație plastică se formează într-o anumită secțiune critică a structurii.

7. Structurile se comportă elastic pînă în momentul formării primei articulații plastice.

IV. NOȚIUNEA DE COEFICIENT PLASTIC

Momentul plastic al unei secțiuni critice i aparținînd unei structuri continue de beton armat poate fi exprimat în funcție de momentul elastic maxim produs de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul, după cum urmează

$$M_{pi} = \nu_i \, M_{ei}. \tag{1}$$

În relația (1) coeficientul ν_i, a cărui valoare este mai mică decît unitatea, este prin definiție coeficientul plastic al secțiunii critice i. Ca urmare, fiecare soluție a momentelor plastice din secțiunile critice ale unei structuri conține cîte o valoare bine precizată a coeficientului plastic pentru fiecare secțiune critică. Cu alte cuvinte, numărul coeficienților plastici ai unei structuri este egal cu numărul secțiunilor ei critice, n_s.

V. CRITERIUL REDISTRIBUȚIEI MINIME A MOMENTELOR

Prima operație a procesului de dimensionare în domeniul plastic a unei structuri continue de beton armat constă în determinarea valorilor momentelor plastice din secțiunile ei critice în ipoteza redistribuirii totale a momentelor pentru fiecare schemă defavorabilă de încărcare formată de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Așa cum s-a arătat anterior [1], [2], această operație poate fi efectuată prin adăugarea unui număr de $n_s - n_e$ ecuații suplimentare la cele n_e ecuații de echilibru ale mecanismelor plastice distincte ale structurii. Modul de stabilire a acestor ecuații suplimentare adoptat în cadrul acestui studiu se bazează pe următoarele considerații.

Fiecare soluție a valorilor momentelor plastice din cele n_s secțiuni critice ale structurii conține n_s coeficienți plastici. Ansamblul lor are o limită inferioară, care este egală cu cea mai mică valoare a acestor coeficienți. Pe de altă parte, comportarea structurii în stadiul de exploatare se îmbunătățește cu cît momentele plastice sînt mai mari decît momentele elastice maxime produse de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor normate. De asemenea, comportarea structurii în domeniul plastic se îmbunătățește pe măsură ce momentele plastice se apropie de momentele elastice maxime produse de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul. Din cele de mai sus rezultă că comportarea structurii atît în stadiul de exploatare cît și în domeniul plastic se îmbunătățește pe măsura creșterii valorilor coeficienților plastici. Această concluzie sugerează ideea de a se determina momentele plastice ale structurilor continue de beton armat astfel încît limita inferioară a coeficienților plastici să fie cît mai mare posibil. Din punct de vedere static, aplicarea acestei idei conduce la minimizarea redistribuției de momente pentru toate schemele posibile de încărcare. De aceea criteriul de determinare a momentelor plastice pornind de la ideea maximizării limitei inferioare a coeficienților plastici adoptat pentru alcătuirea celor $n_s - n_e$ ecuații suplimentare a fost denumit *criteriul redistribuției minime a momentelor.*

VI. TEORIA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE MOMENTE

Teoria care stă la baza operației de maximizare a limitei inferioare a coeficienților plastici conține următoarele trei teoreme.

TEOREMA 1. *În calculul plastic al unei structuri continue de beton armat este posibilă egalitatea coeficienților plastici ai tuturor secțiunilor critice numai dacă numărul de ecuații distincte de echilibru plastic este egal cu unitatea.*

Demonstrație. Prin egalarea tuturor coeficienților plastici ai structurii se obțin $n_s - 1$ ecuații. Pe de altă parte însă, numărul de ecuații suplimentare necesare pentru determinarea valorilor momentelor plastice din cele n_s secțiuni critice este egal cu diferența $n_s - n_e$. În consecință, egalitatea tuturor coeficienților plastici ai structurii este posibilă numai dacă este satisfăcută condiția

$$n_s - 1 = n_s - n_e. \tag{2}$$

Din această ecuație se obține

$$n_e = 1, \tag{3}$$

rezultat care demonstrează teorema enunțată.

TEOREMA 2. *Limita inferioară a coeficienților plastici corespunzători secțiunilor critice ale unui mecanism plastic al unei structuri continue de beton armat atinge valoarea sa maximă atunci cînd toți coeficienții plastici sînt egali între ei.*

Demonstrație. Ecuația de echilibru plastic a mecanismului considerat, care exprimă egalitatea dintre lucrul mecanic virtual efectuat de momentele plastice și cel efectuat de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul, este

$$\sum_{i=1}^{i=s} M_{pi}\,\theta_i = W_G + W_P. \tag{4}$$

Ținînd seama de expresia (1), din ecuația (4) se obține

$$\sum_{i=1}^{i=s} \nu_i\, M_{ei}\theta_i = W_G + W_P, \tag{5}$$

unde singurele necunoscute sînt coeficienții plastici ν_i.

Deoarece numărul secțiunilor critice ale mecanismului îndeplinește întotdeauna condiția $s > 1$, rezultă că numărul de soluții ale coeficienților plastici care satisfac ecuația (5) este, teoretic, infinit. Printre aceste soluții există însă una particulară în care toți coeficienții ν_i sînt egali între ei. Fie ν_m valoarea comună a coeficienților ν_i, adică

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_s = \nu_m. \tag{6}$$

Luînd în considerație egalitățile (6), din ecuația (5) se obține

$$\nu_m = \frac{W_G + W_P}{\sum_{i=1}^{i=s} M_{ei}\,\theta_i}. \tag{7}$$

Ecuațiile (5) și (7) arată că orice altă soluție a coeficienților ν_i diferită de cea dată de egalitățile (6) trebuie să conțină în mod necesar unul sau mai mulți coeficienți plastici mai mari decît ν_m și deci unul sau mai mulți coeficienți plastici mai mici decît ν_m, pentru ca ecuația (5) să fie satisfăcută. Prin urmare, ν_m este valoarea maximă a limitei inferioare a coeficienților ν_i corespunzători secțiunilor critice ale mecanismului considerat.

TEOREMA 3. *În calculul plastic al unei structuri continue de beton armat cu două sau mai multe ecuații distincte de echilibru plastic există întotdeauna o soluție a valorilor momentelor plastice pentru care* $n_s - n_e + 1$

coeficienți plastici sînt egali între ei, ceilalți $n_e - 1$ *coeficienți plastici fiind mai mari decît valoarea comună a celor* $n_s - n_e + 1$ *coeficienți plastici.*

Observație preliminară. Se consideră o soluție a coeficienților ν_i corespunzători celor s secțiuni critice ale unui mecanism al structurii, care satisface ecuația respectivă de echilibru plastic. O altă soluție poate fi dedusă din prima prin micșorarea coeficienților ν_i pentru $s - 1$ secțiuni critice. Din ecuația (5) rezultă că coeficientul plastic al secțiunii critice rămase va fi mai mare în raport cu valoarea lui din prima soluție, pentru ca ecuația de echilibru plastic a mecanismului considerat să fie satisfăcută.

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 1, pentru fiecare mecanism al structurii, considerat separat, se poate efectua egalarea coeficienților plastici ai secțiunilor lor critice. Fie ν_m^{I}, ν_m^{II}, ν_m^{III} ,..., ν_m^{L} valorile comune ale coeficienților plastici corespunzătoare mecanismelor I, II, III,.., L ale structurii, obținute ca rezultat al acestei operații. Se consideră că aceste valori satisfac inegalitățile

$$\nu_m^{\mathrm{I}} < \nu_m^{\mathrm{II}} < \nu_m^{\mathrm{III}} < \ldots < \nu_m^{\mathrm{L}}. \tag{8}$$

Dacă se neglijează inițial cîte o secțiune critică aparținînd fiecăruia din mecanismele II, III, ..., L și dacă coeficienții plastici ai secțiunilor critice rămase se egalează cu valoarea comună ν_m^{I} a coeficienților plastici ai tuturor secțiunilor critice ale mecanismului I, atunci se obțin $n_s - n_e + 1$ coeficienți plastici egali cu ν_m^{I} și $n_e - 1$ coeficienți plastici mai mari decît ν_m^{I}. Această concluzie este o consecință evidentă a faptului că coeficientul plastic al fiecărei secțiuni critice neglijate inițial (al căror număr este egal cu $n_e - 1$), se încadrează în observația preliminară care precede demonstrația teoremei 3.

Egalitatea dintre cei $n_s - n_e + 1$ coeficienți plastici ν_i a căror valoare comună este ν_m^{I}, dă naștere la $n_s - n_e$ ecuații, care sînt chiar ecuațiile suplimentare necesare pentru obținerea unei soluții a momentelor plastice din secțiunile critice ale structurii.

Conform teoremei 2, un astfel de procedeu de calcul conduce la maximizarea tuturor coeficienților plastici ai structurii. În consecință momentele plastice obținute în acest mod sînt în deplină concordanță cu criteriul redistribuției minime a momentelor.

VII. PRINCIPIUL REDISTRIBUȚIEI MINIME A MOMENTELOR

Rezultatul practic al teoriei redistribuției minime a momentelor este reprezentat de *principiul redistribuției minime a momentelor*, care indică modul de alcătuire a ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea soluției valorilor momentelor plastice din secțiunile critice ale unei structuri continue de beton armat. Conform acestui principiu, *soluția plastică a unei structuri continue de beton armat se obține din egalarea între ei a unui anumit număr de coeficienți plastici, în funcție de numărul de ecuații suplimentare necesare pentru obținerea valorilor momentelor*

plastice din secțiunile critice ale structurii, astfel încît coeficienții plastici rămași să aibă valori mai mari decît valoarea comună a primilor coeficienți plastici.

VIII. EXPRESIA COEFICIENTULUI ν_m PENTRU GRINZI CONTINUE, CADRE ȘI PLĂCI ARMATE PE O SINGURĂ DIRECȚIE

La aplicarea teoriei redistribuției minime a momentelor la grinzi continue, cadre continue și plăci continue armate pe o singură direcție este necesar să se determine coeficientul ν_m pentru fiecare deschidere.

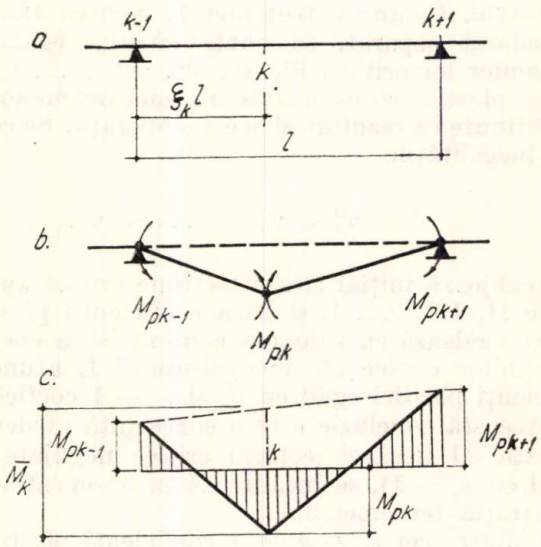


Fig. 1. — Deschiderea curentă a unei grinzi continue.

Pentru simplificarea efectuării acestei operații, în cele ce urmează se stabilește expresia generală a acestui coeficient plastic. În acest scop se consideră o deschidere oarecare și se notează cu $k-1$, k și $k+1$ secțiunile critice de pe reazemul din stînga, din cîmp și de pe reazemul din dreapta, ca în figura 1*a*.

Conform relației (1), momentele plastice din aceste secțiuni critice sînt

$$M_{pk-1} = \nu_{k-1} M_{ek-1}, \tag{9}$$

$$M_{pk} = \nu_k M_{ek}, \tag{10}$$

$$M_{pk+1} = \nu_{k+1} M_{ek+1}. \tag{11}$$

Coeficientul plastic ν_m al deschiderii se obține din condițiile

$$\nu_{k-1} = \nu_k = \nu_{k+1} = \nu_m. \tag{12}$$

Momentele plastice devin în acest caz

$$M_{pk-1} = \nu_m M_{ck-1}, \tag{13}$$

$$M_{pk} = \nu_m M_{ek}, \tag{14}$$

$$M_{pk+1} = \nu_m M_{ck+1}. \tag{15}$$

Ecuația de echilibru plastic a deschiderii considerate este (fig. 1*b*,*c*) :

$$(1 - \xi_k) M_{pk-1} + M_{pk} + \xi_k M_{pk+1} = \overline{M}_k, \tag{16}$$

unde $\overline{M}_k$ este momentul de simplă rezemare în dreptul secțiunii critice k, produs de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul.

Folosind notația

$$Z_k = (1 - \xi_k) M_{ek-1} + M_{ek} + \xi_k M_{ek+1}, \tag{17}$$

din ecuațiile (13) și (16) se obține expresia generală a coeficientului ν_m sub forma

$$\nu_m = \frac{\overline{M}_k}{Z_k}. \tag{18}$$

IX. EXPRESIA COEFICIENTULUI ν_m PENTRU PLĂCI CONTINUE ARMATE PE DOUĂ DIRECȚII

Se consideră o placă continuă armată pe două direcții alcătuită din panouri dreptunghiulare, rezemată pe tot conturul. Un panou oarecare al plăcii este reprezentat în figura 2*a*, în care $j - 1$, j și $j + 1$ sînt secțiunile critice pe direcția deschiderii l_j, iar $k - 1$, k și $k + 1$ sînt secțiunile critice pe direcția deschiderii l_k.

Momentele elastice maxime pe unitatea de lățime, produse de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul, se notează cu M_{ej-1}, M_{ej}, M_{ej+1} și M_{ek-1}, M_{ek}, M_{ek+1}.

Conform relației (1), momentele plastice pe unitatea de lățime în secțiunile critice ale panoului de placă considerat, sînt

$$M_{pj-1} = \nu_{j-1} M_{ej-1}, \tag{19}$$

$$M_{pj} = \nu_j M_{ej}, \tag{20}$$

$$M_{pj+1} = \nu_{j+1} M_{ej+1} \tag{21}$$

și

$$M_{pk-1} = \nu_{k-1} M_{ek-1}, \tag{22}$$

$$M_{pk} = \nu_k M_{ek}, \tag{23}$$

$$M_{pk+1} = \nu_{k+1} M_{ek+1}. \tag{24}$$

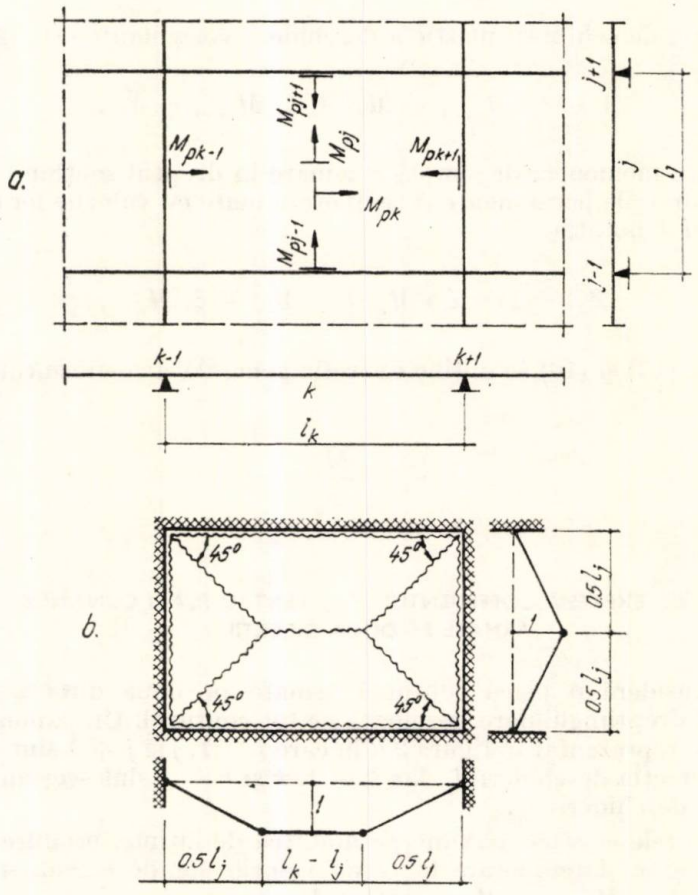


Fig. 2. — Placă continuă armată pe două direcții:
a. panou curent,
b. mecanism aproximativ de rupere.

Coeficientul ν_m al panoului de placă se obține din condițiile

$$\nu_{j-1} = \nu_j = \nu_{j+1} = \nu_m \tag{25}$$

și

$$\nu_{k-1} = \nu_k = \nu_{k+1} = \nu_m. \tag{26}$$

Momentele plastice devin în ac est caz

$$M_{pj-1} = \nu_m M_{ej-1}, \tag{27}$$

$$M_{pj} = \nu_m M_{ej}, \tag{28}$$

$$M_{pj+1} = \nu_m M_{ej+1} \tag{29}$$

și

$$M_{pk-1} = \nu_m M_{ek-1}, \tag{30}$$

$$M_{pk} = \nu_m M_{ek}, \tag{31}$$

$$M_{pk+1} = \nu_m M_{ek+1}. \tag{32}$$

În practică se obișnuește în mod curent ca la calculul plastic al plăcilor armate pe două direcții, rezemate pe tot conturul și solicitate de sarcini uniform distribuite pe toată suprafața lor, să se admită un mecanism aproximativ de cedare, în care liniile pozitive de rupere care pătrund în colțuri formează unghiuri de 45° cu laturile adiacente, iar linia pozitivă de rupere paralelă cu laturile lungi ale plăcilor este situată la jumătatea distanței dintre aceste laturi [3], [4]. Prin aceste simplificări erorile care afectează valorile momentelor plastice nu depășesc 3% [5]. Caracteristicile mecanismului aproximativ de cedare al panoului de placă considerat sînt date în figura 2*b*.

Ecuația de echilibru plastic a acestui mecanism este

Cazul I: $l_j > l_k$

$$2l_k(M_{pj-1} + 2\eta_j M_{pj} + M_{pj+1}) +$$

$$+ 2l_j(M_{pk-1} + 2\eta_k M_{pk} + M_{pk+1}) = l_k(W_G + W_P). \tag{33}$$

Cu notațiile

$$Z_j = M_{ej-1} + 2\eta_j M_{ej} + M_{ej+1} \tag{34}$$

și

$$Z_k = M_{ek-1} + 2\eta_k M_{ek} + M_{ek+1} \tag{35}$$

și luînd în considerație relațiile (27) — (32), din ecuația (33) se obține expresia generală a coeficientului ν_m sub forma

$$\nu_m = \frac{l_k(W_G + W_P)}{2(l_k Z_j + l_j Z_k)}. \tag{36}$$

Cazul II : $l_j < l_k$

$$2l_k\,(M_{pj-1} + 2\eta_j\,M_{pj} + M_{pj+1}) +$$

$$+ 2l_j\,(M_{pk-1} + 2\eta_k\,M_{pk} + M_{pk+1}) = l_j\,(W_G + W_P). \tag{37}$$

Luînd în considerație relațiile (27) — (32) și notațiile (34) și (35), din ecuația (37) se obține

$$\nu_m = \frac{l_j\,(W_G + W_P)}{2\,(l_k Z_j + l_j Z_k)}. \tag{38}$$

X. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă continuă de beton armat cu secțiunea constantă, simplu rezemată la extremități și avînd cinci deschideri egale. Grinda este solicitată de sarcini permanente și temporare aplicate concentrat la treimile fiecărei deschideri. Sarcinile permanente sînt aplicate în toate deschiderile grinzii, iar sarcinile temporare pot fi aplicate în una sau mai multe deschideri. Secțiunile critice ale grinzii sînt situate în dreptul reazemelor intermediare și în punctul de aplicație a sarcinilor din fiecare deschidere în care momentul elastic produs de sarcinile temporare este maxim. Schema generală a grinzii este dată în figura 3*a*.

În cele ce urmează se aplică teoria redistribuției minime de momente pentru determinarea momentelor plastice din secțiunile critice ale grinzii considerate. În acest scop se adoptă pentru coeficienții de supraîncărcare de calcul următoarele valori, luate în conformitate cu prescripțiile românești de calcul la stări limită [6], [7]:

$$\lambda_c = 1{,}1 \tag{39}$$

și

$$\mu_c = 1{,}4. \tag{40}$$

De asemenea, pentru raportul dintre valorile normate ale sarcinilor temporare și permanente de referință se alege valoarea

$$H = \frac{P}{G} = 1. \tag{41}$$

Momentul elastic maxim dintr-o secțiune critică i produs de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul are expresia

$$M_{ei} = (a_i\,G\lambda_c + b_i\,P\mu_c)\,l \tag{42}$$

sau

$$M_{ei} = (a_i\,\lambda_c + b_i\,H\mu_c)\,Gl. \tag{43}$$

Valorile coeficienților elastici a_i și b_i sînt date în tabela 1 [8]. Coeficienții a_i corespund schemei de încărcare a sarcinilor permanente reprezentate în figura 3*b*, ia coficienții b_i corespund celor mai defavorabile scheme de încărcare ale sarcinilor temporare, reprezentate în figura 3*c,d,e,f*.

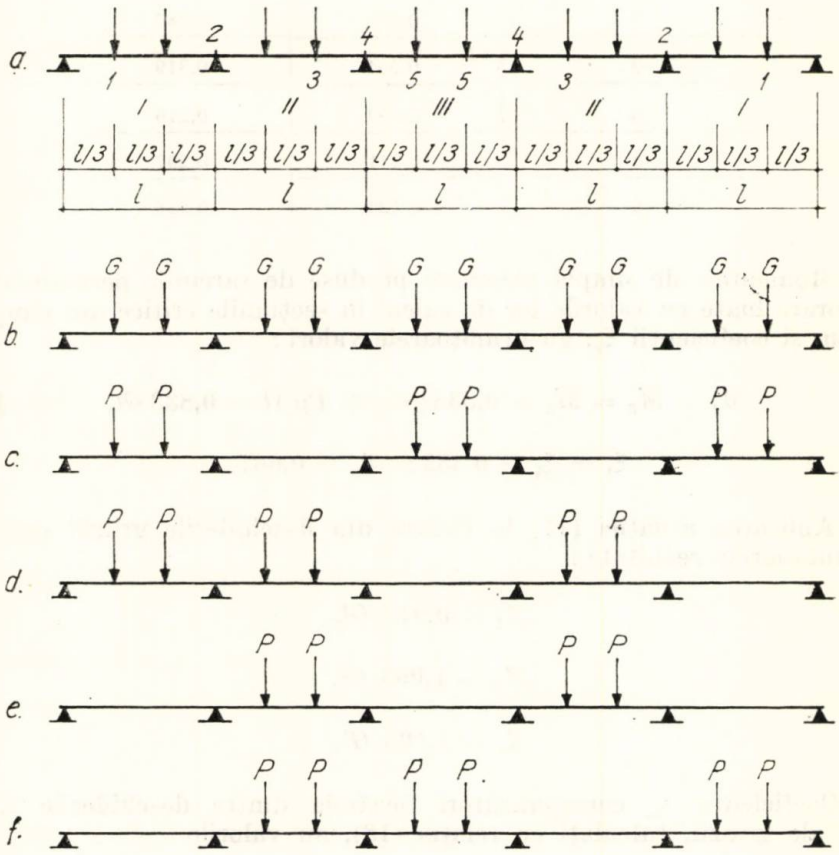


Fig. 3. — Grindă cu 5 deschideri egale:
a. vedere generală,
b. schema sarcinilor permanente,
c, d, e, f. schemele sarcinilor temporare.

Ținînd seama de valorile coeficienților a_i și b_i, din relațiile (41) și (43) se obține

$$M_{e1} = 0{,}666\ Gl, \tag{44}$$

$$M_{e2} = 0{,}756\ Gl, \tag{45}$$

$$M_{e3} = 0{,}411\ Gl, \tag{46}$$

$$M_{e4} = 0{,}648\ Gl, \tag{47}$$

$$M_{e5} = 0{,}455\ Gl. \tag{48}$$

Tabela 1

Coeficienții de influență a_i și b_i

Secțiunea critică	a_i	b_i
1	0,240	0,287
2	0,281	0,319
3	0,099	0,216
4	0,211	0,297
5	0,123	0,228

Momentele de simplă rezemare produse de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul în secțiunile critice din cîmpuri, precum și coeficienții ξ_k, au următoarele valori:

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_3 = \overline{M}_5 = 0{,}333\,(G\lambda_c + P\mu_c)\,l = 0{,}833\,Gl, \tag{49}$$

$$\xi_1 = \xi_5 = 0{,}333\,; \quad \xi_3 = 0{,}667. \tag{50}$$

Aplicarea ecuației (17) la fiecare din deschiderile grinzii conduce la următoarele rezultate:

$$Z_1 = 0{,}918\ Gl, \tag{51}$$

$$Z_3 = 1{,}095\ Gl, \tag{52}$$

$$Z_5 = 1{,}103\ Gl. \tag{53}$$

Coeficienții ν_m corespunzători fiecăreia dintre deschiderile I, II și III ale grinzii, calculați cu relația (18), au valorile

$$\nu_m^{\mathrm{I}} = 0{,}917\,; \quad \nu_m^{\mathrm{II}} = 0{,}761\,; \quad \nu_m^{\mathrm{III}} = 0{,}755. \tag{54}$$

Acești coeficienți satisfac inegalitățile

$$\nu_m^{\mathrm{III}} < \nu_m^{\mathrm{II}} < \nu_m^{\mathrm{I}}. \tag{55}$$

Conform teoremei 3, în faza inițială de calcul se exclude cîte o secțiune critică din mecanismele plastice I și II, iar toți coeficienții plastici ai celorlalte secțiuni critice ale acestor mecanisme se egalează cu ν_m^{III}. Secțiunile critice neglijate inițial sînt cele notate cu 1 și 3 (fig. 3*a*).

Coeficienții plastici ai secțiunilor critice 2, 4 și 5 sînt deci

$$\nu_2 = \nu_4 = \nu_5 = 0{,}755. \tag{56}$$

Momentele plastice din aceste secțiuni critice, determinate cu relația (1), au valorile

$$M_{p2} = 0{,}571\ Gl, \tag{57}$$

$$M_{p4} = 0{,}489\ Gl, \tag{58}$$

$$M_{p5} = 0{,}344\ Gl. \tag{59}$$

Momentele plastice din secțiunile critice 1 și 3 se obțin din ecuația de echilibru plastic (16) aplicată fiecăruia din mecanismele I și II.

Rezultă

$$M_{p1} + 0{,}333\ M_{p2} = 0{,}833\ Gl \tag{60}$$

și

$$0{,}333\ M_{p2} + M_{p3} + 0{,}667\ M_{p4} = 0{,}833\ Gl. \tag{61}$$

Din ecuațiile de mai sus se obține

$$M_{p1} = 0{,}643\ Gl \tag{62}$$

și

$$M_{p3} = 0{,}317\ Gl. \tag{63}$$

Coeficienții plastici ai secțiunilor critice 1 și 3 au valorile

$$\nu_1 = \frac{M_{p1}}{M_{e1}} = 0{,}965 \tag{64}$$

și

$$\nu_3 = \frac{M_{p3}}{M_{e3}} = 0{,}771. \tag{65}$$

XI. COMPARAREA REZULTATELOR DATE DE TEORIA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE MOMENTE ȘI DE TEORIA CALCULULUI PLASTIC OPTIM

Atît teoria redistribuției minime de momente cît și teoria calculului plastic optim au fost elaborate pornind de la ideea generală a obținerii unor condiții de rupere și de exploatare cît mai favorabile cu putință, în ipoteza formării unuia sau mai multor mecanisme de grindă sau de placă pentru fiecare schemă defavorabilă formată de sarcinile permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul.

Teoria calculului plastic optim conduce la cele mai favorabile condiții de rupere și de exploatare întrucît ea se bazează pe ideea minimizării mărimilor domeniilor plastice ale structurilor [1]. Pe de altă parte

însă, teoria redistribuției minime de momente este mai simplă decît teoria calculului plastic optim din punctul de vedere al aplicării în practică. De aceea apare necesară examinarea consecințelor pe care le are înlocuirea teoriei calculului plastic optim prin teoria redistribuției minime de momente asupra dimensionării structurilor de beton armat în domeniul plastic. În cele ce urmează se face această examinare pentru structurile a căror cedare are loc prin formarea unuia sau mai multor mecanisme de grindă. Pentru aceasta se consideră din nou deschiderea de grindă din figura 1*a*. Conform teoriei redistribuției minime de momente, momentele plastice din secțiunile critice $k-1$, k și $k+1$ ale deschiderii pot fi scrise sub forma

$$M^m_{pk-1} = \nu_m (a_{k-1}\,\lambda_c + b_{k-1} H\,\mu_c)\,Gl, \tag{66}$$

$$M^m_{pk} = \nu_m\,(a_k\,\lambda_c + b_k\,H\,\mu_c)\,Gl, \tag{67}$$

$$M^m_{pk+1} = \nu_m\,(a_{k+1}\,\lambda_c + b_{k+1} H\,\mu_c)\,Gl. \tag{68}$$

Cu notațiile

$$\alpha_k = (1-\xi_k)\,a_{k-1} + a_k + \xi_k\,a_{k+1} \tag{69}$$

și

$$\beta_k = (1-\xi_k)\,b_{k-1} + b_k + \xi_k\,b_{k+1}, \tag{70}$$

expresia momentului de simplă rezemare în secțiunea critică k devine

$$\overline{M}_k = \alpha_k\,(\lambda_c + H\mu_c)Gl, \tag{71}$$

iar ecuația de echilibru plastic (16) poate fi pusă sub forma

$$\nu_m\,(\alpha_k\,\lambda_c + \beta_k\,H\mu_c) = \alpha_k\,(\lambda_c + H\mu_c). \tag{72}$$

Din ecuația de mai sus se deduce

$$\nu_m = \frac{\lambda_c + H\mu_c}{\lambda_c + \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} H\,\mu_c}. \tag{73}$$

Ca urmare, momentul plastic în secțiunea critică i a deschiderii considerate ($i = k-1,\ k,\ k+1$) poate fi pus sub forma

$$M^m_{pi} = \frac{(\lambda_c + H\mu_c)\left(\lambda_c + \dfrac{b_i}{a_i} H\mu_c\right)}{\lambda_c + \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} H\mu_c}\,a_i\,Gl. \tag{74}$$

Pentru determinarea momentelor plastice optime din secțiunile critice ale deschiderii se consideră că sarcinile temporare cresc primele de la valorile lor normate la valorile lor de calcul, sarcinile permanente rămînînd constante și egale cu valorile lor normate și numai după aceea se admite creșterea sarcinilor permanente de la valorile lor normate la valorile lor de calcul [1]. Ținînd seama de această ipoteză relativă la creșterea sarcinilor, pentru $\lambda_{0i} = 1$ și $1 \leqslant \mu_{0i} \leqslant \mu_c$ momentele plastice optime din secțiunile critice ale deschiderii se pot scrie după cum urmează

$$M^0_{pk-1} = (a_{k-1} + b_{k-1} H \mu_{0k-1}) Gl, \tag{75}$$

$$M^0_{pk} = (a_k + b_k H \mu_{0k}) Gl, \tag{76}$$

$$M^0_{pk+1} = (a_{k+1} + b_{k+1} H \mu_{0k+1}) Gl. \tag{77}$$

Pentru

$$\mu_{0k-1} = \mu_{0k} = \mu_{0k+1} = \mu_0, \tag{78}$$

ecuația de echilibru plastic a deschiderii este:

$$\alpha_k + \beta_k H \mu_0 = \alpha_k (\lambda_c + H \mu_c) \tag{79}$$

de unde rezultă

$$\mu_0 = \frac{\lambda_c + H\mu_c - 1}{\frac{\beta_k}{\alpha_k} H}. \tag{80}$$

În consecință, momentul plastic optim într-o secțiune critică i a deschiderii ($i = k - 1,\ k,\ k + 1$) este

$$M^0_{pi} = \left[1 + \frac{\frac{b_i}{a_i} (\lambda_c + H\mu_c - 1)}{\frac{\beta_k}{\alpha_k}} \right] a_i Gl. \tag{81}$$

Pentru compararea între ele a momentelor plastice M^m_{pi} și M^0_{pi} este în primul rînd necesar să se stabilească valorile critice ale rapoartelor $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$ și $\frac{b_i}{a_i}$. Din expresiile generale (66) — (68) și (75) — (77) ale momentelor plastice este ușor de dedus că diferențele maxime dintre momentele plastice M^0_{pi} și M^m_{pi} se obțin pentru $\mu_0 = 1$ sau $\mu_0 = \mu_c$. Ținînd seama de aceste valori critice, din relația (79) rezultă

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = \frac{\lambda_c + H\mu_c - 1}{H} \tag{82}$$

pentru $\mu_0 = 1$, și

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} = \frac{\lambda_c + H\mu_c - 1}{H\mu_c} \tag{83}$$

pentru $\mu_0 = \mu_c$.

Limitele inferioară și superioară ale raportului $\frac{b_i}{a_i}$ sînt, în mod obișnuit, egale cu 1 și respectiv ∞.

Ținînd seama de precizările de mai sus, valorile raportului $\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0}$ care se abat cel mai mult de la unitate se determină după cum urmează :

Cazul A : $\mu_0 = 1$ *și* $\frac{b_i}{a_i} = 1$

$$\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0} = \frac{(\lambda_c + H\mu_c)^2}{(1 + H)[\lambda_c + \mu_c(\lambda_c + H\mu_c) - 1]}. \tag{84}$$

Cazul B : $\mu_0 = 1$ *și* $\frac{b_i}{a_i} = \infty$

$$\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0} = \frac{\mu_c(\lambda_c + H\mu_c)}{\lambda_c + \mu_c(\lambda_c + H\mu_c - 1)}. \tag{85}$$

Cazul C : $\mu_0 = \mu_c$ și $\frac{b_i}{a_i} = 1$

$$\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0} = \frac{(\lambda_c + H\mu_c)^2}{(1 + H\mu_c)(2\lambda_c + H\mu_c - 1)}. \tag{86}$$

Cazul D : $\mu_0 = \mu_c$ *și* $\frac{b_i}{a_i} = \infty$

$$\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0} = \frac{\lambda_c + H\mu_c}{2\lambda_c + H\mu_c - 1}. \tag{87}$$

Compararea momentelor plastice date de teoria redistribuției minime a momentelor și de teoria calculului plastic optim s-a făcut prin luarea în considerație a coeficienților de supraîncărcare specificați în trei normative pentru calculul elementelor de beton armat [6], [9], [10] după cum urmează

$$\lambda_c = 1{,}1 \text{ și } \mu_c = 1{,}4,$$

$$\lambda_c = 1{,}4 \text{ și } \mu_c = 1{,}4,$$

$$\lambda_c = 1{,}5 \text{ și } \mu_c = 1{,}8.$$

Înfășurătoarele valorilor maxime și minime ale raportului $\frac{M_{pi}^{m}}{M_{pi}^{0}}$ rezultate din relațiile (84) — (87) sînt trasate în figurile 4—6, în funcție de parametrul H, pentru cele trei cupluri de valori ale coeficienților λ_c și

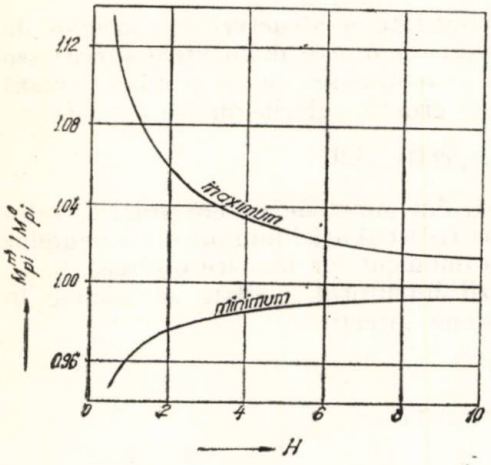


Fig. 4. — Raportul $\frac{M_{pi}^{m}}{M_{pi}^{0}}$ pentru $\lambda_c = 1{,}1$ și $\mu_c = 1{,}4$.

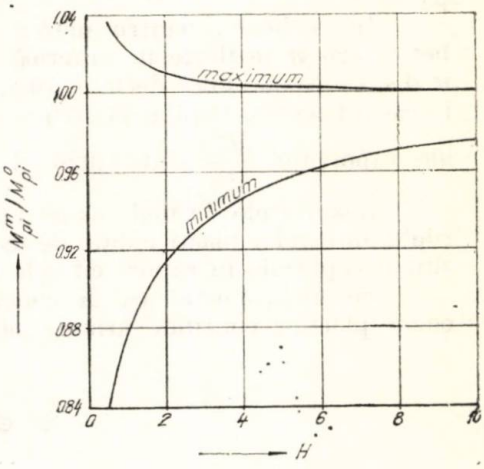


Fig. 5. — Raportul $\frac{M_{pi}^{m}}{M_{pi}^{0}}$ pentru $\lambda_c = 1{,}4$ și $\mu_c = 1{,}4$.

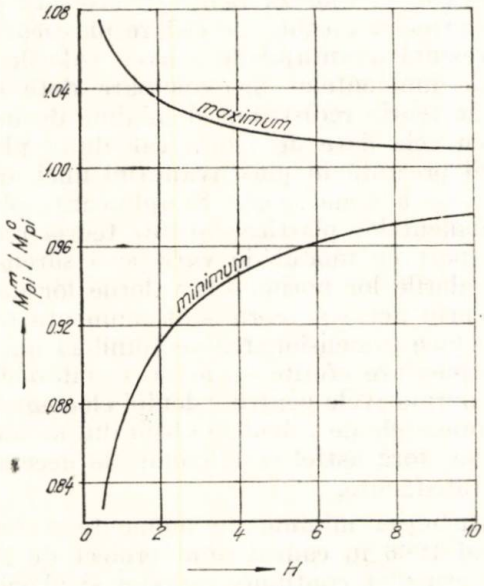


Fig. 6. — Raportul $\frac{M_{pi}^{m}}{M_{pi}^{0}}$ pentru $\lambda_c = 1{,}5$ și $\mu_c = 1{,}8$.

μ_c date mai sus. Din aceste figuri rezultă că pentru $H \geqslant 0{,}5$ și indiferent de valorile coeficienților λ_c și μ_c luate în considerație în cadrul acestei

operații de comparare, momentele plastice date de teoria redistribuției minime de momente sînt cu cel mult 13,5 mai mari, respectiv cu cel mult 17,3 mai mici decît momentele plastice optime corespunzătoare. Aceste rezultate sînt generale întrucît ele acoperă și cazul în care $1 \leqslant \lambda_{0i} \leqslant \lambda_c$ și $\mu_{0i} = \mu_c$.

În realitate, pentru marea majoritate a structurilor continue de beton armat întîlnite în practică diferența dintre momentele specificate mai sus este mai mică decît $\pm$ 10%. Ca exemplu se citează grinda calculată în cadrul acestui studiu. Pentru această grindă, valorile maximă și minimă ale raportului $\frac{M_{pi}^m}{M_{pi}^0}$ sînt 1,026 și respectiv 0,977.

Rezultatele de mai sus arată că, din punct de vedere practic, valorile momentelor plastice date de teoria redistribuției minime a momentelor sînt acceptabile în raport cu cele ale momentelor plastice optime.

Se menționează că la concluzii întrutotul similare se ajunge în cazul plăcilor continue armate pe două direcții.

XII. CONCLUZII

Teoria redistribuției minime de momente prezentată în cadrul acestui studiu permite să se stabilească soluțiile momentelor plastice ale structurilor continue de beton armat solicitate de sarcini verticale permanente și temporare, în ipoteza realizării aceleiași siguranțe în raport cu formarea mecanismelor posibile de cedare plastică. Momentele plastice astfel obținute prezintă avantajul de a avea valorile cele mai apropiate posibil de cele ale momentelor încovoietoare date de calculul elastic. Rezultatele date de teoria redistribuției minime de momente sînt acceptabile în raport cu cele date de teoria calculului plastic optim. Prima dintre aceste teorii prezintă în plus avantajul unei aplicări practice mai simple față de cea de a doua teorie. Simplificarea provine din independența valorilor momentelor plastice date de teoria redistribuției minime de momente în raport cu modul de variație a sarcinilor permanente și temporare de la valorile lor normate la valorile lor de calcul. Momentele plastice calculate prin această teorie sînt momente de calcul (momente pe baza cărora se face dimensionarea secțiunilor) numai dacă condițiile de rupere și de exploatare oferite de acestea sînt mai avantajoase decît cele specificate de normativele pentru calculul elementelor de beton armat. În caz contrar, momentele de calcul se obțin din momentele plastice prin mărirea valorilor acestora astfel încît condițiile necesare de rupere și de exploatare să fie satisfăcute.

Teoria redistribuției minime de momente a fost aplicată pentru prima dată în anul 1966 în cadrul unui proiect de recomandări pentru calculul plastic al grinzilor continue, cadrelor și plăcilor de beton armat [11]. Cu acel prilej s-au stabilit valorile coeficienților plastici pentru grinzile continue cu 2—5 deschideri egale, solicitate de șapte tipuri de sarcini permanente și temporare.

Primită la redacție la 28 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. Petcu, *Generalizarea teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat.* St. cerc. mec. apl., **28**, *2*, 289—308 (1969).
2. V. Petcu, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **12**, *5*, 1017—1023 (1961).
3. * * *, STAS 3599-52 : *Construcții civile și industriale. Planșee de beton armat monolite. Plăci, grinzi. Prescripții de calcul și alcătuire.*
4. * * *, *Instrucțiuni pentru calculul structurilor de beton armat static nedeterminate cu considerarea redistribuției eforturilor* (trad. din l. rusă). Edit. tehnică, București, 1963.
5. V. Petcu, *Mecanisme de rupere exacte și aproximative în calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat.* St. cerc. mec. apl., **22**, *3*, 781—804 (1966).
6. * * *, *Calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de beton, beton armat și beton precomprimat* (P. 8—62). Edit. tehnică, București, 1963.
7. * * *, STAS 8000-67 : *Calculul elementelor de beton, beton armat și beton precomprimat. Metoda la stări limită.*
8. C. N. Avram, *Grinzi continue.* Edit. tehnică, București, 1964.
9. * * *, *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé.* Comité Européen du Béton, Paris, 1964.
10. * * *, *Building Code Requirements for Reinforced Concrete* (ACI 318—63). American Concrete Institute, Detroit, 1963.
11. V. Petcu, *Recomandări pentru calculul plastic al grinzilor continue, cadrelor și plăcilor de beton armat, cu armătura din oțel OL 38.* Redactarea I, INCERC, VII 89/a, 1966

LUNGIMEA DE ÎNCASTRARE LA FLAMBAJ

de MIRCEA RADEŞ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Pentru bara comprimată axial, liberă la un capăt şi încastrată elastic la celălalt, se determină lungimea porţiunii ce trebuie introdusă în mediul elastic de încastrare (Winkler), astfel ca sarcina critică de flambaj să poată fi calculată cu relaţia lui Euler.

1. INTRODUCERE

Încastrarea unei bare se realizează prin introducerea capătului acesteia într-un masiv (de ex. : o grindă într-un zid, un stîlp într-o fundaţie), care este, în general, un mediu cu o anumită elasticitate, ce se opune deplasării laterale a barei prin reacţiuni distribuite în lungul suprafeţei de contact. Este normal, deci, ca sarcina critică de flambaj a unei bare încastrate să depindă de lungimea porţiunii cuprinse în mediul de încastrare şi de elasticitatea acestuia, elemente pe care formula lui Euler, dedusă pentru încastrări rigide, nu le ia în considerare.

Problema gradului de încastrare la flambaj a fost studiată [1] considerînd un moment-reacţiune proporţional cu rotirea barei în dreptul punctului de încastrare. În lucrarea de faţă problema încastrării elastice este tratată diferit. Considerînd utilă formula lui Euler datorită simplităţii, se calculează care trebuie să fie raportul dintre lungimea porţiunii de bară din încastrare şi cea a porţiunii libere — în funcţie de elasticitatea mediului de încastrare — astfel ca sarcina critică de flambaj să aibe aceeaşi valoare cu cea obţinută cu relaţia lui Euler, stabilită pentru porţiunea liberă a barei şi încastrări rigide.

Încastrarea este schematizată printr-un reazem elastic bilateral lung [2] pentru care, în orice secţiune, reacţiunea normală a mediului de încastrare este proporţională cu deplasarea transversală a barei (ipoteza Winkler); se neglijează efectul reacţiunilor tangenţiale, presupunînd că întreaga sarcină de compresiune este preluată de presiunea (dirijată axial) pe suprafaţa capătului barei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 867–874

2. REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A PROBLEMEI

Pentru o bară de secțiune constantă, introdusă într-un mediu elastic continuu (model de fundație Winkler) și solicitată prin sarcini axiale, ecuația diferențială a liniei elastice (neglijînd influența forțelor tăietoare) este [3]

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 2m^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + n^4 v = 0, \tag{1}$$

unde

$$m = \sqrt{\frac{P}{2EI}}, \tag{2}$$

$$n = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}, \tag{3}$$

iar v este deplasarea transversală a barei în secțiunea x;

EI — rigiditatea la încovoiere a barei;

P — sarcina axială de compresiune;

k — modulul mediului de încastrare.

În funcție de valorile relative ale lui m și n, soluțiile ecuației (1) au forme diferite, astfel:

a) Dacă $m > n$ ($P > 2\sqrt{kEI}$), cu notațiile

$$\mu = \sqrt{m^2 + \sqrt{m^4 - n^4}}, \qquad \lambda = \sqrt{m^2 - \sqrt{m^4 - n^4}}, \tag{4}$$

soluția generală a ecuației (1) este

$$v_1(x) = C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x) + C_3 \Phi_3(x) + C_4 \Phi_4(x), \tag{5}$$

unde $C_1 = v_0$, $C_2 = v_0'$, $C_3 = v_0''$, $C_4 = v_0'''$ sînt constante de integrare (parametrii inițiali), iar $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_4(x)$ sînt funcții Cauchy (formează împreună cu primele trei derivate succesive, la $x = 0$, o matrice unitară)

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}(\mu^2 \cos \lambda x - \lambda^2 \cos \mu x), \\
\Phi_2(x) &= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}\left(\frac{\mu^2}{\lambda} \sin \lambda x - \frac{\lambda^2}{\mu} \sin \mu x\right), \\
\Phi_3(x) &= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}(\cos \lambda x - \cos \mu x), \\
\Phi_4(x) &= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda} \sin \lambda x - \frac{1}{\mu} \sin \mu x\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

b) Dacă $m < n$ ($P < 2\sqrt{kEI}$), soluția generală a ecuației (1) se obține din (5) prin substituția ($i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned} \mu &= \beta + i\alpha, \\ \lambda &= \beta - i\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

c) Cazul $m = n$ ($P = 2\sqrt{kEI}$) rezultă din cel anterior, dacă se înlocuiește

$$\alpha = 0, \qquad \beta = m. \tag{8}$$

În absența mediului elastic de rezemare ($k = 0$; $n = 0$), ecuația (1) devine

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 2m^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \tag{1'}$$

Cu notația

$$\eta = m\sqrt{2} \tag{9}$$

soluția generală a ecuației (1') este

$$v_2(x) = C_1' \Psi(x) + C_2' \Psi_2(x) + C_3' \Psi_3(x) + C_4' \Psi_4(x) \tag{10}$$

unde $C_1', \ldots, C_4'$ sînt constante de integrare (parametrii inițiali), iar $\Psi_1(x), \ldots, \Psi_4(x)$ funcții Cauchy

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= 1; \quad \Psi_2(x) = x, \\ \Psi_3(x) &= \frac{1}{\eta^2}(1 - \cos \eta x), \\ \Psi_4(x) &= \frac{1}{\eta^3}(\eta x - \sin \eta x). \end{aligned} \tag{11}$$

Funcțiile (11) se deduc direct din (6) prin substituția

$$\mu = \eta; \quad \lambda = 0. \tag{12}$$

3. ECUAȚIA VALORILOR PROPRII

Fie bara din figura 1, liberă la un capăt, încastrată elastic la celălalt și solicitată la compresiune prin forța P.

Pentru porțiunea O_1R a barei, aflată în mediu elastic continuu (model Winkler), ecuația diferențială a liniei elastice este (1). Dacă

$m > n$, soluţia generală este (5). Considerînd sistemul de referinţă $x_1O_1y_1$, cu originea în capătul liber al grinzii — unde momentul încovoietor şi forţa tăietoare sînt nule — condiţiile la limită corespunzătoare se scriu

$$(v_1'')_{x_1=0} = 0\,; \quad (v_1''' + 2m^2 v_1')_{x_1=0} = 0,$$

astfel că relaţia (5) ia forma

$$v_1(x) = C_1\Phi_1(x) + C_2[\Phi_2(x) - 2m^2\Phi_4(x)]. \tag{13}$$

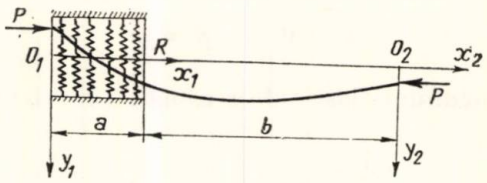


Fig. 1

Pentru porţiunea RO_2 a barei (fig. 1), expresia săgeţilor este dată de (10). Considerînd un sistem de referinţă $x_2O_2y_2$, condiţiile la limită în O_2 sînt

$$(v_2'')_{x_2=0} = 0\,; \quad (v_2''' + 2m^2 v_2')_{x_2=0} = 0,$$

iar relaţia (10) ia forma

$$v_2(x) = C_1'\Psi_1(x) + C_2'[\Psi_2(x) - 2m^2\Psi_4(x)]. \tag{14}$$

În secţiunea R, condiţiile de continuitate a eforturilor şi deformaţiilor sînt :

$$\begin{aligned}
(v_1)_{x_1=a} &= (v_2)_{x_2=-b} \\
(v_1')_{x_1=a} &= (v_2')_{x_2=-b} \\
(v_1'')_{x_1=a} &= (v_2'')_{x_2=-b} \\
(v_1''' + 2m^2 v_1')_{x_1=a} &= (v_2''' + 2m^2 v_2')_{x_2=-b}
\end{aligned} \tag{15}$$

Se observă că ultima egalitate (15) se reduce la $(v_1''')_{x_1=a} = (v_2''')_{x_2=-b}$. Înlocuind (13) şi (14) în (15), rezultă un sistem omogen, de patru ecuaţii cu patru necunoscute C_1, C_2, C_1', C_2'. Condiţia de a avea soluţii nebanale conduce la anularea determinantului acestui sistem, care se reduce la forma

$$\begin{vmatrix} \Phi_1'(a) & \Phi_3''(a) & \Psi_3''(-b) \\ \Phi_1'''(a) & \Phi_3'''(a) & \Psi_3'''(-b) \\ \Phi_2(a) & \Phi_4'(a) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

După dezvoltare, cu notația

$$M = \mu a; \quad L = \lambda a, \tag{17}$$

rezultă ecuația valorilor proprii

$$\sqrt{M^2 + L^2}\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{a}\sqrt{M^2 + L^2} = \\ = \frac{2M^3L^3(1 - \cos M\cos L) - (M^6 + L^6)\sin M\sin L}{(M^2 - L^2)(M^3\sin L\cos M - L^3\sin M\cos L)}. \tag{18}$$

Pentru $m < n$, ecuația valorilor proprii se deduce din (18) prin substituția

$$M = B + \mathrm{i}A, \qquad L = B - \mathrm{i}A, \tag{19}$$

unde

$$A = \alpha a, \qquad B = \beta a. \tag{20}$$

Rezultă

$$\sqrt{2(B^2 - A^2)}\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{a}\sqrt{2(B^2 - A^2)} = \\ = \frac{B^2(3A^2 - B^2)^2\mathrm{sh}^2A - A^2(3B^2 - A^2)^2\sin^2B}{AB[A(3B^2 - A^2)\sin 2B + B(3A^2 - B^2)\mathrm{sh}2A]}. \tag{21}$$

Pentru $m = n$, se înlocuiește în (21)

$$A = 0; \quad B = ma \tag{22}$$

și se obține

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\eta\, b = \frac{9\sin^2 ma - (ma)^2}{2ma - 3\sin 2ma}. \tag{23}$$

Rezolvînd ecuațiile (18) și (21), pentru fiecare pereche de valori M, L, respectiv A, B, care le satisface, se pot calcula și reprezenta într-un grafic expresiile:

— pentru $m > n$

$$\frac{P}{\sqrt{kEI}} = \frac{M^2 + L^2}{ML}; \qquad \sqrt[4]{\frac{ka^4}{EI}} = 2ML, \tag{24}$$

— pentru $m < n$

$$\frac{P}{\sqrt{kEI}} = 2\,\frac{B^2 - A^2}{B^2 + A^2}; \qquad \sqrt[4]{\frac{ka^4}{EI}} = 2(A^2 + B^2) \tag{24'}$$

pentru diferite valori ale raportului $\frac{b}{a}$.

În cele ce urmează, ne vom limita la determinarea raportului $\frac{a}{b}$ pentru care, la o anumită valoare a modulului fundației $\left(\text{cantitatea adimensională } \sqrt{\frac{kb^4}{EI}}\right)$, sarcina critică de flambaj, dată de (24) sau (24'), este egală cu cea obținută din formula lui Euler, considerînd încastrările rigide și bara de lungime b.

4. LUNGIMEA DE ÎNCASTRARE LA FLAMBAJ

Pentru bara liberă la un capăt și încastrată la celălalt, de lungime b și rigiditate la încovoiere EI, valoarea primei forțe critice de flambaj este [3]

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4b^2}. \tag{25}$$

Cu condiția $P = P_{cr}$, înlocuind (25) în (2) și (9), rezultă

$$\eta = \frac{\pi}{2b}, \tag{26}$$

deci

$$\operatorname{tg} \eta b = \infty. \tag{27}$$

Înlocuind (27) în (18), (21), (23), se obține:

— pentru $m > n$

$$M^3 \operatorname{tg} L = L^3 \operatorname{tg} M, \tag{28}$$

— pentru $m < n$

$$\frac{\sin 2B}{\operatorname{sh} 2A} = -\frac{B(3A^2 - B^2)}{A(3B^2 - A^2)}, \tag{29}$$

— pentru $m = n$

$$\sin 2ma = \frac{2ma}{3}. \tag{30}$$

După rezolvarea ecuațiilor (28)—(30), se calculează expresiile $\frac{a}{b}$ și $\sqrt{\frac{kb^4}{EI}}$. Astfel:

— pentru $m > n$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\pi}\sqrt{M^2 + L^2}\ ; \quad \sqrt{\frac{kb^4}{EI}} = \frac{\pi^2}{2}\frac{2ML}{M^2 + L^2}, \tag{31}$$

— pentru $m < n$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\pi}\sqrt{2(B^2 - A^2)}; \qquad \sqrt{\frac{kb^4}{EI}} = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{B^2 + A^2}{B^2 - A^2}, \tag{32}$$

— pentru $m = n$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2ma}{\sqrt{2}}; \qquad \sqrt{\frac{kb^4}{EI}} = \frac{\pi^2}{2}, \tag{33}$$

iar valorile obținute se trec în diagrame avînd $\frac{a}{b}$ în ordonată și $\left(\frac{kb^4}{EI}\right)^{1/2}$ în abscisă.

În figura 2 s-a dat o astfel de reprezentare grafică pentru valori $k < \frac{\pi^4 EI}{4b^4}$ $(m > n)$, iar în figura 3 — pentru $k \geqslant \frac{\pi^4 EI}{4b^4}$ $(m \leqslant n)$. Domeniul

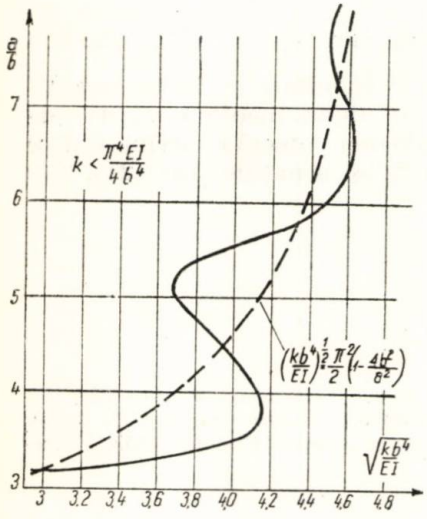


Fig. 2

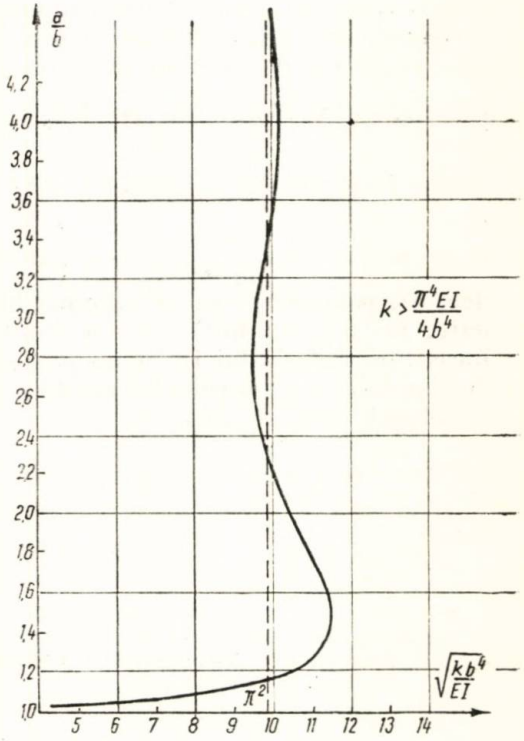


Fig. 3

de trasare a curbelor poate fi extins, observînd că în primul caz — diagrama tinde spre hiperbola cubică de ecuație $\left(\frac{kb^4}{EI}\right)^{1/2} = \frac{\pi^2}{2}\left(1 - \frac{4b^2}{a^2}\right)$, iar în al doilea caz — curba tinde spre verticala de abscisă π^2.

Pentru alte condiții de capăt, relațiile (31)—(33) nu mai corespund.

Astfel, la bara dublu încastrată, pentru aceeaşi valoare $\left(\frac{kb^4}{EI}\right)^{1/2}$, mărimea raportului $\frac{a}{b}$ este jumătate din cea dată de relaţiile (31)—(33), diagramele respective putînd fi obţinute prin modificarea figurilor 2 şi 3, împărţind la doi valorile ordonatelor.

Relaţiile (28)—(30) sînt tocmai ecuaţiile valorilor proprii pentru bara de lungime a, liberă la un capăt şi cu încastrare rigidă mobilă la celălalt, introdusă în mediu elastic pe toată lungimea; aceasta dă o indicaţie asupra formei deformate a barei după flambaj.

5. CONCLUZII

La o bară de lungime liberă b şi rigiditate la încovoiere EI date, solicitată ca în figura 1, curbele din figurile 2 şi 3 permit calculul porţiunii ce trebuie introdusă într-un mediu de încastrare de modul k, astfel ca sarcina critică de flambaj să poată fi calculată cu relaţia simplă a lui Euler (25). Problema este posibilă numai pentru $2{,}964 \leqslant \left(\frac{kb^4}{EI}\right)^{1/2} \leqslant 11{,}47$ soluţia fiind multiplă. Valori de interes practic ale raportului $\frac{a}{b}$ se obţin doar pentru $5 \leqslant \sqrt{\frac{kb^4}{EI}} \leqslant 11{,}5$ $\left(\text{limite între care } \frac{a}{b} < 1{,}5\right)$. Rezultă deci că, pentru o bară de lungime liberă b şi rigiditate la încovoiere EI date, peste o anumită valoare limită a modulului mediului elastic de încastrare, relaţia lui Euler nu poate da valoarea corectă a sarcinii critice de flambaj; pentru calculul acesteia se vor folosi ecuaţiile (18), (21), (23) şi relaţiile (24) şi (24′).

Primită la redacţie la 7 octombrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. N. Korcinski, *Gradul de încastrare la flambaj*, St. cerc. mec. şi metalurg., **2**, 151 (1951).
2. Gh. Buzdugan, *Grinzi pe reazeme elastice de lungime dată*, St. cerc. mec. apl., **9**, 2, 471 (1958).
3. А. Р. Ржаницын, *Устоичивость равновесия упругих систем*, Москва, 1955, Гостехиздат, стр. 345.

VIBRAȚII ALEATOARE ÎN DINAMICA AUTOVEHICULELOR

de F. DINCĂ și T. SIRETEANU
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare sînt studiate o serie de probleme privind vibrațiile aleatoare ale unui autovehicul care merge cu viteză constantă pe un drum cu denivelări.
Folosindu-se ca model un sistem oscilant cu un singur grad de libertate și cu caracteristică de disipare neliniară, supus la perturbații aleatoare, se urmăresc comportările optimale ale mărimilor medii pătratice care caracterizează răspunsul, în funcție de valorile coeficientului liniar echivalent al disipării, obținut prin metoda liniarizării statistice.

Problema vibrațiilor unui autovehicul care merge cu viteză constantă pe un drum cu denivelări este deosebit de complexă.

Această complexitate rezultă pe de-o parte din faptul că modelul mecanic care ar putea să descrie cu un grad mare de precizie mișcarea, constă într-un sistem cu un mare număr de grade de libertate, iar pe de altă parte din faptul că, în general, atît caracteristica de disipare cît și cea elastică sînt neliniare.

Un alt aspect care sporește complexitatea problemei este acela al reprezentării cele mai adecvate a acțiunii drumului asupra sistemului mecanic care schematizează autovehiculul.

Pentru a ocoli aceste dificultăți, în funcție de anumite probleme specifice, se aleg modele simple atît pentru sistemul mecanic însăși, cît și pentru caracterizarea perturbației. Cea mai mare parte din lucrările de specialitate în care se analizează vibrațiile autovehiculelor se bazează pe modele liniare cu unul, două sau patru grade de libertate. Abordarea pe modele neliniare a acestor probleme se face în prezent aproape exclusiv pe modele cu unul, cel mult două grade de libertate. În ceea ce privește reprezentarea perturbațiilor, încă și în prezent o serie de informații utile se obțin prin utilizarea funcțiilor trigonometrice sau de tip Heaviside. Totuși în ultimul timp, alături de reprezentările de mai sus, o serie de autori [10], [11], [12], [17] au propus reprezentarea acestora prin procese aleatoare de un anumit tip.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 875–900

Printre argumentele care pledează pentru aceste reprezentări ale perturbaţiei, vom cita :

1. Efectele perturbaţiilor induse de drum se produc pe un spectru continuu de frecvenţă, fiecare frecvenţă avînd o anumită pondere în compunerea perturbaţiei, caracterizată prin densitatea spectrală a acesteia.

2. Imposibilitatea de a reprezenta prin aceeaşi funcţie nealeatoare două tronsoane diferite aparţinînd aceluiaşi tip de drum.

3. În general, în comportarea dinamică a unui autovehicul este interesant aspectul global, desfăşurat într-o anumită perioadă de timp şi numai într-o măsură mai mică fenomenele locale legate de trecerea peste o anumită denivelare de tip sinusoidal sau Heaviside.

Acest aspect nu poate fi pus în evidenţă decît ţinînd seama de proprietăţile statistice ale perturbaţiei şi prin evaluarea proprietăţilor statistice ale răspunsului.

Aplicarea teoriei proceselor aleatoare în dinamica autovehiculelor, alături de procedeele deterministe, dă posibilitatea rezolvării mai adecvate pentru o serie de probleme, cum sînt : influenţa caracteristicii elastice sau disipative asupra confortului, calculul la oboseală a unor elemente care datorită vibraţiilor generale intră într-un regim de solicitări variabile, evaluarea frecvenţei de funcţionare a limitatorilor, evaluarea desprinderilor roţilor de drum etc.

1. ECUAŢIA DE MIŞCARE. CARACTERIZAREA ACŢIUNII DRUMULUI CA PROCES ALEATOR

Ca model pentru studiul vibraţiilor aleatoare ale unui autovehicul care merge cu viteză constantă pe un drum cu denivelări, am considerat sistemul din figura 1, care, ţinînd seama că rigiditatea pneurilor este în general mare, poate descrie într-o primă aproximaţie mişcarea masei suspendate ce revine punţii faţă sau spate a autovehiculului. Cu notaţiile din figură ecuaţia de mişcare a masei M este

$$M\ddot{z} + 2F(\dot{z} - \dot{h}) + 2G(z - h) = 0, \tag{1.1}$$

unde funcţiile F şi G sînt funcţii continui şi crescătoare de argumentele respective.

Funcţia $h(s) = h(v \cdot t) = h(t)$ reprezintă suprafaţa drumului presupusă cilindrică, faţă de o origine arbitrară.

Dacă notăm

$$x = z - h \tag{1.2}$$

şi presupunem că $G(x) = cx$, ecuaţia (1.1) devine :

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + \omega_n^2 x = -\ddot{h}(t), \tag{1.3}$$

unde

$$f(\dot{x}) = \frac{2F(\dot{x})}{M}, \quad \omega_n^2 = \frac{2c}{M}. \tag{1.4}$$

În practică, pentru majoritatea autovehiculelor, $\omega_n = (7 \div 13)$ s.$^{-1}$
În exemplele analizate în această lucrare considerăm $\omega_n = 10$ s.$^{-1}$
În cele ce urmează, ecuația (1.3) va fi studiată în ipoteza că funcția $h(t)$ este o funcție aleatoare staționară și ergodică, de două ori derivabilă în

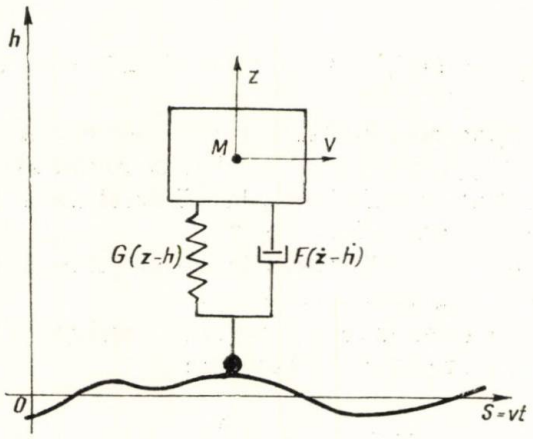


Fig. 1

sensul convergenței aproape sigure. În această ipoteză, funcția de corelație a lui $h(t)$ este dată de formula

$$R_h(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(t)\, h(t+\tau)\, dt, \tag{1.5}$$

integrala de mai sus fiind o integrală Riemann efectuată pentru o realizare oarecare a funcției aleatoare $h(t)$.

În practică pentru determinarea funcției de corelație a unui drum, parcurs de un autovehicul cu viteza constantă v, se ridică microprofilul unui tronson din acest drum, prin măsurarea la distanțe egale a cotelor față de un anumit plan de referință. Dacă lungimea tronsonului ales este s, numărul cotelor măsurate este N și notăm $T = \frac{s}{v}$ valoarea funcției de corelație pentru $\tau_m = \frac{mT}{N-1}$ se poate calcula prin formula aproximativă

$$R_h(\tau_m) = \frac{1}{N-m} \sum_{1}^{N-m} h_n\, h_{n+m} \quad (m = 1, 2, \ldots, N-1), \tag{1.6}$$

unde h_i sînt valorile cotelor măsurate față de planul de medie nulă, luate cu semnele lor.

Notînd cu $R_h^{(1)}(\tau)$ funcţia de corelaţie a unui drum, corespunzătoare parcurgerii sale cu viteza $v_1 = 1\text{m/s}$, funcţia de corelaţie corespunzătoare unei viteze oarecare v va fi dată de relaţia:

$$R_h^{(v)}(\tau) = R_h^{(1)}\left(\frac{v}{v_1}\tau\right). \tag{1.7}$$

În lucrarea de faţă, asupra funcţiei $h(t)$ vom face următoarele ipoteze:

1. $h(t)$ se obţine prin limitarea benzii spectrale a unei funcţii aleatoare δ — corelate („zgomot alb" cu bandă limitată);

2. $h(t)$ se obţine prin limitarea benzii spectrale a unei funcţii aleatoare cu corelaţie exponenţială liniară;

3. $h(t)$ se obţine prin limitarea benzii spectrale a unei funcţii aleatoare cu corelaţie armonică amortizată.

Corespunzător primului caz, funcţia de corelaţie $R_h(\tau)$ şi densitatea spectrală $S_h(\omega)$ au următoarele expresii:

$$R_h(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau), \tag{1.8}$$

$$S_h(\omega) = \begin{cases} S_0 \text{ pentru } |\omega| \leqslant \omega_1, \\ 0 \text{ pentru } |\omega| < \omega_1. \end{cases} \tag{1.9}$$

După cum arată A. A. SILAEV [17], către o astfel de densitate spectrală tinde, de exemplu, densitatea spectrală a perturbaţiei care rezultă din mersul peste o arătură cu viteze care depăşesc 15 m/s (peste 50 km/h). Pentru exemplul citat, deşi nu sînt date valorile lui S_0 şi ω_1, se poate deduce că $\omega_1 \leqslant h\omega_n$, valoarea constantei S_0 fiind aproximativ 2,5 cm².s.

În cel de al doilea caz considerat avem:

$$R_h(\tau) = 2\pi S_0 e^{-\alpha(\tau)}, \tag{1.10}$$

$$S_h(\omega) = \begin{cases} S_0 \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} & \text{pentru } |\omega| \leqslant \omega_1, \\ 0 & \text{pentru } |\omega| > \omega_1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Din analiza tipurilor fundamentale de drumuri făcută de către Ia. M. PEVZNER şi M. M. TIHONOV [12], a rezultat că printr-o astfel de corelaţie poate fi caracterizată acţiunea drumurilor pavate şi a drumurilor cu acoperire de beton. Pentru cele două categorii de drumuri sînt date: $\alpha = 0{,}45\ v/v_1\ \text{s}^{-1}$, $S_0 = (0{,}99 \div 1{,}70)\ \text{cm}^2$ şi, respectiv, $\alpha = 0{,}15\ v/v_1\ \text{s}^{-1}$, $S_0 = (0{,}04 \div 0{,}25)\ \text{m}^2$.

Din lucrarea citată rezultă, de asemenea, că se poate considrea $\omega_1 \leqslant 10\ \omega_n$.

Corespunzător celui de-al treilea caz considerat, funcția de corelație și densitatea spectrală sînt date de relațiile:

$$R_h(\tau) = 2\pi\ S_0\, e^{-\alpha(\tau)} \cos\beta\tau, \tag{1.12}$$

$$S_h(\omega) = \begin{cases} S_0 \dfrac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{\omega^4+2(\alpha^2-\beta^2)\omega^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}, & \text{pentru } |\omega| \leqslant \omega_1, \\ 0 & \text{pentru } |\omega| > \omega_1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Din analiza făcută de A. A. SILAEV [17] asupra mai multor tronsoane din diferite drumuri de țară, au rezultate pentru parametrii corelației α, β și pentru coeficientul S_0, următoarele domenii de variație:

$$\alpha = (0{,}014\ v/v_1 \div 0{,}111\ v/v_1)\ s^{-1},$$

$$\beta = (0{,}025\ v/v_1 \div 0{,}140\ v/v_1)\ s^{-1}, \tag{1.14}$$

$$S_0 = (7{,}23 \div 91{,}86)\text{cm}^2.$$

Pentru lățimea benzii spectrale rămîne valabilă limitarea anterioară.

Din unele măsurări efectuate în cadrul Centrului de mecanică a solidelor, pe un drum de țară s-au obținut

$$\alpha = 0{,}028\ v/v_1,\ s^{-1},$$

$$\beta = 0{,}041\ v/v_1\ s^{-1}, \tag{1.15}$$

$$S_0 = 6{,}32\ \text{cm}^2.$$

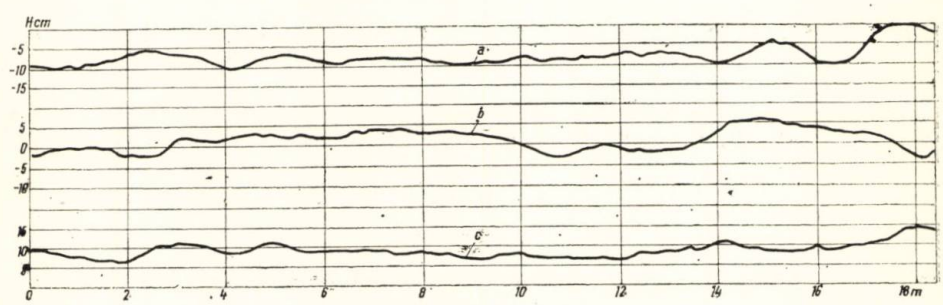


Fig. 2

În figura 2 sînt reprezentate trei porțiuni din microprofilul drumului pe care au fost efectuate măsurătorile, iar în figura 3, este reprezentată funcția de corelație normată $\rho(\tau) = \dfrac{R_h^{(1)}(\tau)}{2\pi\ S_0}$, pentru cazul în care funcția $R_h^{(1)}(\tau)$ este determinată prin valorile sale în punctele $\tau = \tau_m$, cal-

culate prin formula (1.6) şi în cazul în care această funcţie a fost aproximată printr-o formulă de tipul (1.13), curbele fiind trasate respectiv prin linie punctată şi linie continuă.

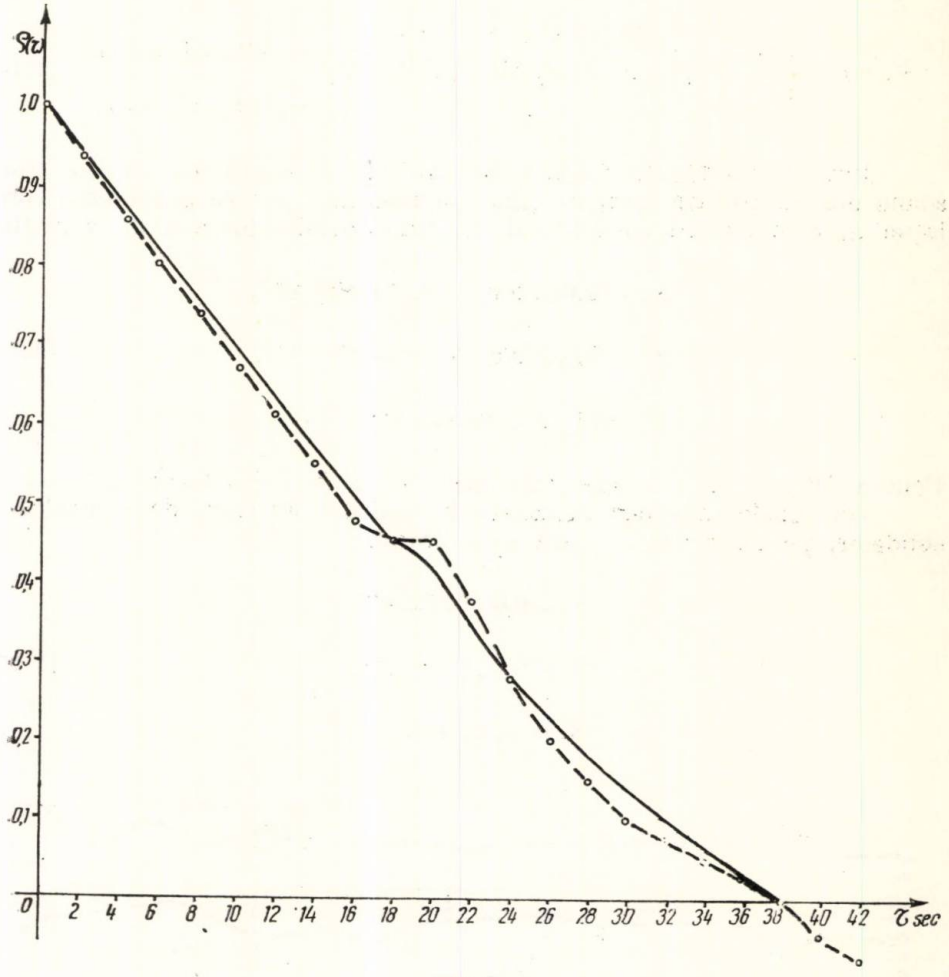


Fig. 3

2. DETERMINAREA COEFICIENTULUI LINIAR AL DISIPĂRII. STUDIUL ECUAŢIEI LINIARE

În cele ce urmează vom trata ecuaţia (1.3) în cele trei ipoteze de mai sus, făcute asupra funcţiei aleatoare $h(t)$, utilizînd metoda liniarizării statistice. În conformitate cu această metodă se scrie ecuaţia (1.3) sub forma [1], [2], [4], [7], [8], [9], [13]:

$$\ddot{x} + 2\omega_n \zeta \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{h}(t) + 2\omega_n \zeta \dot{x} - f(\dot{x}).$$

Notînd

$$A(\dot{x}, \zeta) = 2\omega_n \zeta \dot{x} - f(\dot{x}), \tag{2.1}$$

vom determina coeficientul liniar echivalent al disipării (coeficientul echivalent de aperiodicitate) ζ, din condiția

$$\overline{A}^2 = \min, \tag{2.2}$$

unde

$$\overline{A}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\dot{x}, \zeta)\, p(\dot{x})\, d\dot{x}. \tag{2.3}$$

În expresia (2.3) $p(\dot{x})$ este densitatea de probabilitate de primul ordin al funcției aleatoare $\dot{x}(t)$. Vom face ipoteza că această repartiție este normală și cu speranță matematică nulă. În acest caz, integrala (2.3) se va scrie:

$$\overline{A}^2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\dot{x}, \zeta)\, e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}}\, d\dot{x}, \tag{2.4}$$

unde prin $\sigma_{\dot{x}}^2$ s-a notat dispersia lui $\dot{x}(t)$.

Din condiția de minimum rezultă

$$2\omega_n \zeta = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^3 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\dot{x})\, e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}}\, d\dot{x}. \tag{2.5}$$

În acest mod studiul ecuației neliniare (1.3) se poate reduce la studiul ecuației liniare echivalente:

$$\ddot{x} + 2\omega_n \zeta \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{h}(t). \tag{2.6}$$

Această analiză va fi făcută pe rînd în cele trei ipoteze cu privire la funcția aleatoare $h(t)$.

Mărimile care ne interesează sînt $\sigma_{\ddot{x}}$, ca o măsură a confortului, σ_x și $\sigma_{\dot{x}}$, interesanți atît în analiza sistemului neliniar inițial cît și prin intervenția lor în unele probleme de oboseală. Se va presupune că aceste mărimi, corespunzînd ecuației neliniare (1.3), sînt egale respectiv cu cele care corespund ecuației liniare echivalente (2.6). Vom determina aceste mărimi ca funcție de coeficientul liniar echivalent al disipării ζ în cele trei cazuri menționate. Prin intermediul relației (2.5), aceste funcții vor deveni funcții de parametrii care definesc caracteristica neliniară de disipare $f(\dot{x})$.

Ecuația liniară (2.6) va fi studiată în ipoteza că $\zeta \in (0,1)$ corespunzătoare faptului că mișcarea liberă a sistemului liniar echivalent este o mișcare periodică amortizată.

Fie $\Phi_{uh}(\omega)$ funcţia de transfer a ieşirii $u(t)$ a sistemului liniar (2.6), în cazul în care se consideră că intrarea sistemului este funcţia $h(t)$. Dacă $S_h(\omega)$ este densitatea spectrală a lui $h(t)$, densitatea spectrală a funcţiei $u(t)$ este dată de relaţia [3], [13], [15], [16]:

$$S_{uh}(\omega) = |\Phi_{uh}\omega)|^2 \; S_h(\omega), \tag{2.7}$$

iar pentru densitatea spectrală a derivatei $u^{(n)}(t)$, avem expresia

$$S_{u^{(n)}h}(\omega) = \omega^{2n} |\Phi_{uh}(\omega)|^2 S_h(\omega). \tag{2.8}$$

Cunoscînd densitatea spectrală a lui $u(t)$, dispersia acestei mărimi se obţine din formula

$$\sigma^2_{uh} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uh}(\omega)\, d\omega. \tag{2.9}$$

În cazul ecuaţiei (2.6) se pot scrie relaţiile:

$$\Phi_{xh}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega_n\omega\zeta},$$
$$\Phi_{zh}(\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2i\omega_n\omega\zeta}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega_n\omega\zeta}. \tag{2.10}$$

Introducînd (2.10) în (2.7) şi în (2.8) se obţin densităţile spectrale ale lui $x(t)$, $\dot{x}(t)$ şi $\ddot{z}(t)$, iar din (2.9) se pot obţine dispersiile acestor mărimi pentru cele trei cazuri considerate.

Pentru cazul zgomotului alb cu bandă limitată avem:

$$\sigma^2_{1x} = \sigma^2_{1xh} = 2S_0\omega_n \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^4\, d\xi}{\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1} = \frac{S_0\omega_n}{2}\eta_{1x},$$
$$\sigma^2_{1\dot{x}} = \sigma^2_{1\dot{x}h} = 2S_0\omega_n^3 \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^6\, d\xi}{\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1} = \frac{S_0\omega_n^3}{2}\eta_{1\dot{x}}, \tag{2.11}$$
$$\sigma^2_{1\ddot{z}} = \sigma^2_{1\ddot{z}h} = 2S_0\omega_n^5 \int_0^{\xi_1} \frac{(4\zeta^2\xi^6 + \xi^4)\, d\xi}{\xi^2 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1} = \frac{S_0\omega_n^5}{2}\eta_{1\ddot{z}}.$$

În cazul exponenţialei liniare se obţine:

$$\sigma^2_{2x} = \sigma^2_{2xh} = \frac{4\alpha S_0}{\omega_n} \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^4\, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1](\xi^2 + \mu^2)} = \frac{\alpha S_0}{\omega_n}\eta_{2x},$$

$$\sigma_{2\dot{x}}^2 = \sigma_{2\dot{x}h}^2 = 4\alpha S_0 \omega_n \int_0^{\xi_1} \frac{\xi^6 \, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1](\xi^2 + \mu^2)} = \alpha S_0 \omega_n \eta_{1\dot{x}},$$

$$\sigma_{2\ddot{z}}^2 = \sigma_{2\ddot{z}h}^2 = 4\alpha S_0 \omega_n^3 \int_0^{\xi_1} \frac{(4\zeta^2 \xi^6 + \xi^4) \, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1](\xi^2 + \mu^2)} = \alpha S_0' \omega_n^3 \eta_{2\ddot{z}}. \tag{2.12}$$

În sfîrșit, în cazul armonicii amortizate aceste mărimi au expresiile :

$$\sigma_{3x}^2 = \sigma_{3xh}^2 =$$

$$= \frac{4\alpha S_0}{\omega_n} \int_0^{\xi_1} \frac{[\xi^6 + \mu^2(1 + k^2)\xi^4] \, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^2 + 1][\xi^4 + 2\mu^2(1 - k^2)\xi^2 + \mu^4(1 + k^2)^2]} =$$

$$= \frac{\alpha S_0}{\omega_n} \eta_{3x},$$

$$\sigma_{3\dot{x}}^2 = \sigma_{3\dot{x}h}^2 =$$

$$= 4\alpha S_0 \omega_n \int_0^{\xi_1} \frac{[\xi^8 + \mu^2(1 + k^2)\xi^6] \, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta^2 - 1)\xi^3 - 1][\xi^4 + 2\mu^2(1 - k^2)\xi^2 + \mu^4(1 + k^2)^2]} =$$

$$= \alpha S_0 \omega_n \eta_{3\dot{x}}, \tag{2.13}$$

$$\sigma_{3\ddot{z}}^2 = \sigma_{3\ddot{z}h}^2 =$$

$$= 4\alpha S_0 \omega_n^3 \int_0^{\xi_1} \frac{\{4\zeta^2 \xi^8 + [4\zeta^2 \mu^2(1 + k^2) + 1]\xi^6 + \mu^2(1 + k^2)\xi^4\} \, d\xi}{[\xi^4 + 2(2\zeta - 1)\xi^2 + 1][\xi^4 + 2\mu^2(1 - k^2)\xi^2 + \mu^4(1 + k^2)^2]} =$$

$$= dS_0 \omega_n^3 \eta_{3\ddot{z}}.$$

În formulele de mai sus au fost utilizate notațiile :

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \xi, \quad \frac{\omega_1}{\omega_n} = \xi_1, \quad \frac{\alpha}{\omega_n} = \mu, \quad k = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{2.14}$$

Efectuînd integralele (2.11) și (2.12) se obține pentru primul caz :

$$\eta_{1x} = 4\xi_1 - \frac{4\zeta^2 - 1}{\zeta} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta \xi_1}{1 - \xi_1^2} + \frac{4\zeta^2 - 3}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1 - \zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1 - \zeta^2}\,\xi_1 + 1},$$

$$\eta_{1\dot{x}} = \frac{4}{3}\xi_1^3 - 8(2\zeta^2 - 1)\xi_1 + \frac{16\zeta^4 - 12\zeta^2 + 1}{\zeta} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta \xi_1}{1 - \xi_1^2} +$$

$$+ \frac{4\zeta^2 - 3}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1 - \zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1 - \zeta^2}\,\xi_1 + 1}, \tag{2.15}$$

$$\eta_{1\ddot{z}} = \frac{16\zeta^2\xi_1^3}{\zeta} - 4(16\zeta^4 - 8\zeta^2 - 1)\xi_1 + \frac{64\zeta^6 - 48\zeta^4 + 1}{\zeta}\tan^{-1}\frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} -$$

$$- \frac{64\zeta^6 - 80\zeta^4 + 16\zeta^2 + 3}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\ln\frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}$$

şi, respectiv, pentru al doilea caz :

$$\eta_{2\dot{x}} = \frac{1}{1 - 2\mu^2(2\xi^2 - 1) + \mu^4}\left[\frac{1 - \mu^2(4\zeta^2 - 1)}{\zeta}\tan^{-1}\frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1 - \mu^2(4\zeta^2 - 3)}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\ln\frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1} + 4\mu^3\,\mathrm{arctg}\frac{\xi_1}{\mu}\right],$$

$$\eta_{2\dot{x}} = 4\xi_1 +$$

$$+ \frac{1}{1 - 2\mu^2(2\zeta^2 - 1) + \mu^4}\left[-\frac{4\zeta^2 - 1 - \mu^2(16\zeta^4 - 16\zeta^2 + 3)}{\zeta}\tan^{-1}\frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} +\right.$$

$$+ \frac{4\zeta^2 - 3 - \mu^2(16\zeta^4 - 20\zeta^2 + 5)}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\ln\frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1} -$$

$$\left. - \mu^5\,\mathrm{arctg}\frac{\xi_1}{\mu}\right], \tag{2.16}$$

$$\eta_{2\ddot{z}} = 16\zeta^2\xi_1 + \frac{1}{1 - 2\mu^2(2\zeta^2 - 1) + \mu^4}\times$$

$$\times\left[-\frac{16\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1 - \mu^2(64\zeta^6 - 48\zeta^4 + 1)}{\zeta}\tan^{-1}\frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} +\right.$$

$$+ \frac{16\zeta^4 - 12\zeta^2 - 1 - \mu^2(64\zeta^6 - 80\zeta^4 + 16\zeta^2 + 3)}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\ln\frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1} +$$

$$\left. + \mu^3(1 - 4\zeta^2\mu^2)\,\mathrm{arctg}\frac{\xi^1}{\mu}\right],$$

unde

$$\tan^{-1}\frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} & \text{pentru } \xi_1 \leqslant 1, \\ \pi + \mathrm{arctg}\dfrac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} & \text{pentru } \xi_1 \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Calculul integralelor (2.14), corespunzătoare celui de al treilea caz, se reduce la calculul unor integrale de tipul:

$$I = \int_0^{\xi_1} \frac{[A\xi^6 + B\xi^4 + C\xi^2 + D]\,\mathrm{d}\xi}{(\xi^4 + 2p_0\xi^2 + q_0)(\xi^4 + 2\mu^2 p_1\xi^2 + \mu^4 q_1)}, \tag{2.18}$$

unde

$$A = \alpha_0 + \alpha_2\mu^2,\ B = \beta_0 + \beta_2\mu^2 + \beta_4\mu^4,\ C = \gamma_0 + \gamma_2\mu^2 + \gamma_4\mu^4,$$

$$D = \delta_2\mu^2 + \delta_4\mu^4,\ p_0 = 2\zeta^2 - 1,\ q_0 = 1,\ p_1 = 1 - k^2,\ q_1 = (1 + k^2)^2, \tag{2.19}$$

α_i, β_i, γ_i, δ_i obținîndu-se imediat din (2.14) pentru fiecare integrală în parte.

Pentru integrala (2.18) avem următoarea expresie:

$$I = \sum_{i=0,1}\left[\frac{2Y_i + \mu^i a_i X_i}{\mu^i a_i}\tan^{-1}\frac{\mu^i b_i \xi_1}{\mu^{2i} c_i - \xi_1^2} + \frac{X_i}{2}\ln\frac{\xi_1^2 + \mu^i a_i \xi_1 + \mu^{2i} c_i}{\xi_1^2 - \mu^i a_i \xi_1 + \mu^{2i} c_i}\right], \tag{2.20}$$

unde s-a notat:

$$a_i = \sqrt{2(\sqrt{q_i} - p_i)},\ b_i = \sqrt{2(\sqrt{q_i} + p_i)},\ c_i = \sqrt{q_i}\ (i = 0,1), \tag{2.21}$$

$$\tan^{-1}\frac{\mu^i b_i \xi_1}{\mu^{2i} c_i - \xi_1^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\mu^i b_i \xi_1}{\mu^{2i} c_i - \xi_1^2} & \text{pentru } \xi_1 \leqslant \mu^i\sqrt{c_i}, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\mu^i b_i \xi_1}{\mu^{2i} c_i - \xi_1^2} & \text{pentru } \xi_1 \geqslant \mu^i\sqrt{c_i} \end{cases} \quad (i = 0,1), \tag{2.22}$$

iar pentru coeficienții X_i, Y_i, s-au obținut relațiile:

$$X_0 = -\frac{1}{2a_0 P}\left\{Q[1 - 2p_1\mu^2 + q_1(2p_0 - 1)\mu^4] + R(1 - 2p_0 + 2p_1\mu^2 - q_1\mu^4)\right\},$$

$$Y_0 = \frac{1}{2P}\left[Q(1 - q_1\mu^4) - 2R(p_0 + p_1\mu^2)\right], \tag{2.23}$$

$$X_1 = \frac{1}{2\mu a_1 P}\left\{P\left[\alpha_0 - \frac{\delta_2}{\sqrt{q_1}} + \left(\alpha_2 - \frac{\delta_4}{\sqrt{q_1}}\right)\mu^2\right] - \mu^2 Q(2p_1 - \sqrt{q_1} - 2p_0 q_1\mu^2 + q_1\sqrt{q_1}\mu^4) + R[1 - 2p_0\sqrt{q_1}\mu^2 + \sqrt{q_1}(2p_1 - q_1)\mu^4]\right\},$$

$$Y_1 = \frac{1}{2P}\left[\frac{P}{\sqrt{q_1}}(\delta_2 + \mu^2\delta_4) - 2\mu^2 Y_0\right].$$

În relaţiile de mai sus au fost introduse notaţiile :

$$P = 1 - 4\,p_0 p_1 \mu^2 + 2\,(2p_1^2 - q_1 + 2p_0^2 q_1)\,\mu^4 - 4\,p_0 q_1 p_1 \mu^6 - q_1^2 \mu^8,$$

$$Q = \beta 0 - 2p_0\,\alpha_0 + (\beta_2 - \delta_2 - 2\,p_0\,\alpha_2)\,\mu^2 + (\beta_4 - \delta_4)\,\mu^4,$$

$$R = \gamma_0 - \alpha_0 + (\gamma_2 - \alpha_2 - 2p_0\,\delta_2)\,\mu^2 + (\gamma_4 - 2p_0\,\delta_4)\,\mu^4.$$

Analiza, chiar numerică a mărimilor σ_{ix}, $\sigma_{i\dot{x}}$, $\sigma_{i\ddot{z}}$ $(i = 2, 3)$ este extrem de dificilă. Unele concluzii se pot trage însă pentru valori mici ale parametrului μ.

Astfel, funcţiile (2.16) se pot scrie toate sub forma :

$$\eta_{2u} = A_{0u} + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu^{2n}\right)\left[A_{1u} \tan^{-1} \frac{2\,\zeta\,\xi_1}{1 - \xi_1^2} + A_{2u} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\xi^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1} + \right.$$

$$\left. + \mu^3\, A_{3u}\, \operatorname{arctg} \frac{\xi_1}{\mu}\right] = \eta_{2u}^0 + \eta_{2u}^{(2)}\,\mu^2 + \ldots,$$

unde $a_u = a_u(\zeta)$, $A_{iu} = \alpha_{iu}^0(\zeta) + \alpha_{iu}^{(2)}(\zeta)\,\mu^2$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Pentru $\zeta \in (0, 1)$ coeficienţii acestei dezvoltări sînt de acelaşi ordin de mărime şi prin urmare pentru valori suficient de mici ale parametrului μ se pot studia, într-o primă aproximaţie a fenomenului, funcţiile η_{2u}^0. Acestea sînt :

$$\eta_{2x}^0 = \frac{1}{\zeta} \tan^{-1} \frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1},$$

$$\eta_{2\dot{x}}^0 = 4\xi_1 - \frac{4\zeta^2 - 1}{\zeta} \tan^{-1} \frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} + \frac{4\zeta^2 - 3}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2}\,\xi_1 + 1}, \qquad (2.24)$$

$$\eta_{2\ddot{z}}^0 = 16\zeta^2\xi_1 - \frac{16\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1}{\zeta} \tan^{-1} \frac{2\zeta\xi_1}{1-\xi_1^2} +$$

$$+ \frac{16\,\zeta^4 - 12\,\zeta^2 - 1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \ln \frac{\xi_1^2 + 2\sqrt{1-\zeta^2\xi_1} + 1}{\xi_1^2 - 2\sqrt{1-\zeta^2\xi_1} + 1}.$$

În cazul corelaţiei armonice amortizate funcţiile se pot pune sub forma :

$$\eta_{3u} = A_0 u + \sum_{i=0,1} \left[\frac{1}{\mu^i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}\,\mu^{2n} \tan^{-1} \frac{\mu^i\, b_i\, \xi_1}{\mu^{2i} c_i - \xi_1^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} b_{ni}\,\mu^{2n} \ln \frac{\xi_1^2 + \mu^i\, a_i\, \xi_1 + \mu^{2i} c_i}{\xi_1^2 - \mu^i\, a_i\, \xi_1 + \mu^{2i} c_i}\right],$$

unde $a_{ni} = a_{ni}(\zeta)$, $b_{ni} = b_{ni}(\zeta)$.

Ținînd seama că $a_{01} = 0$ și dezvoltînd logaritmul în serie după puterile lui μ (ceea ce se poate face pentru orice valori ale parametrilor μ, ξ_1, k), se obțin pentru primele aproximații ale acestor funcții, relațiile:

$$\eta_{3x}^0 = \eta_{2x}^0, \quad \eta_{3\dot{x}}^0 = \eta_{2\dot{x}}^0 = \eta_{1x}, \quad \eta_{3\ddot{z}}^0 = \eta_{2\ddot{z}}^0. \tag{2.25}$$

Valorile funcțiilor (2.15) și (2.24) pentru $\zeta \in [0{,}1,\ 1]$ și $\xi, \in [2,\ 10]$ sînt cuprinse în tabelele 1—5.

Menționăm că pentru cele două tipuri de drumuri considerate de Ia. M. PEVZNER și M. M. TIHONOV ca avînd acțiune reprezentabilă prin corelație de tipul (1.10), valorile parametrului μ sînt 0,045 v/v_1, și (0,015 v/v_1, iar pentru drumurile cu acțiune reprezentabilă prin corelație armonică amortizată, analizate de A. A. SILAEV, avem $\mu = 0{,}0014$ $v/v_1 \div 0{,}0111$ v/v_1. Din măsurările amintite a rezultat $\mu = 0{,}0028$ v/v_1.

Tabela 1

Variația funcțiilor $\eta_{1x}(\xi_1, \zeta)$, $\eta_{2\dot{x}}^0(\xi_1, \zeta)$, $\eta_{3\dot{x}}^0(\xi_1, \zeta)$.

ξ_1 \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,0	33,65	17,04	11,11	7,98	6,03	4,75	3,78	3,08	2,56	2,15
3,0	39,39	22,61	16,42	12,97	10,67	8,57	7,69	6,65	5,81	5,11
4,0	44,14	27,30	21,02	17,45	15,00	13,15	11,67	10,45	9,41	8,52
5,0	48,56	31,70	25,37	21,73	19,20	17,26	15,96	14,33	13,17	12,14
6,0	52,83	35,95	29,60	25,92	23,33	21,33	19,67	18,25	17,00	15,89
7,0	57,03	40,13	33,76	30,05	27,43	25,38	23,67	22,20	20,89	19,71
8,0	61,17	44,27	37,88	34,14	31,50	29,42	27,67	26,16	24,80	23,57
9,0	65,28	48,37	41,97	38,22	35,57	33,45	31,68	30,12	28,73	27,46
10,0	69,37	52,45	46,04	42,28	39,60	37,47	35,68	34,10	32,67	31,37

Tabela 2

Variația funcției $\eta_{1\dot{x}}(\xi_1, \zeta)$

ξ_1 \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,0	47,62	28,70	20,74	15,91	12,57	10,14	8,31	6,91	5,81	5,29
3,0	83,23	63,33	53,89	47,19	41,77	37,16	33,15	29,65	26,58	23,89
4,0	141,47	120,90	110,38	102,24	95,07	88,47	82,31	76,54	71,14	66,12
5,0	231,25	210,10	198,62	189,18	180,39	171,90	163,60	155,51	147,63	140,02
6,0	360,81	339,12	326,75	316,07	305,72	295,38	284,97	274,60	264,08	253,73
7,0	538,27	516,05	502,87	490,98	475,05	466,88	454,36	441,54	428,51	415,34
8,0	771,65	748,92	734,82	721,75	708,39	694,41	679,78	664,59	648,92	632,89
9,0	1068,99	1045,75	1030,81	1016,57	1001,68	985,84	969,22	951,64	933,32	914,38
10,0	1438,29	1414,55	1398,78	1383,84	1367,05	1349,48	1330,67	1310,71	1289,72	1267,85

Există prin urmare anumite domenii de variație a vitezelor (depinzînd de tipul de drum) pentru care se poate considera $\eta_{iu} \cong \eta_{iu}^0$ $(i = 2,\ 3)$, aceste domenii acoperind o parte, mai mare sau mai mică, a gamei de viteze uzuale.

Tabela 3

Variaţia funcţiei $\eta_{1\,z}^{\cdot\cdot}(\xi_1, \zeta)$

ξ_1 \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,0	35,56	21,63	18,57	18,16	18,60	19,31	20,06	20,76	21,37	22,98
3,0	42,72	32,72	35,82	43,18	52,44	62,49	72,65	82,55	91,93	100,67
4,0	49,79	46,65	60,76	82,88	110,07	140,52	173,00	206,38	237,51	273,00
5,0	57,81	65,30	96,87	142,80	199,59	264,79	336,32	412,40	491,46	572,20
6,0	67,26	90,20	147,22	228,19	329,05	446,67	578,17	720,96	872,57	1030,81
7,0	78,55	122,69	214,77	344,22	506,47	697,69	914,18	1152,47	1409,15	1681,06
8,0	92,02	164,08	302,41	496,05	739,87	1029,36	1359,99	1727,39	2127,15	2555,09
9,0	108,02	215,66	413,06	688,80	1037,27	1453,20	1931,26	2446,17	3052,49	3684,96
10,0	126,87	278,55	549,60	927,63	1406,62	1980,72	2643,46	3388,49	4211,08	5102,72

Tabela 4

Variaţia funcţiilor $\eta_{2x}^{\circ}(\xi_1, \zeta)$, $\eta_{3x}^{\circ}(\xi_1, \zeta)$

ξ_1 \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2,0	29,00	13,33	8,55	5,60	4,12	3,16	2,51	2,03	1,68	1,41
3,0	29,98	14,27	9,05	6,45	4,90	3,87	3,15	2,62	2,22	1,90
4,0	30,37	14,66	9,43	6,82	5,26	4,22	3,49	2,94	2,52	2,18
5,0	30,59	14,89	9,65	7,04	5,47	4,43	3,69	3,13	2,70	2,36
6,0	30,73	15,02	9,79	7,18	5,61	4,57	3,82	3,26	2,83	2,49
7,0	30,84	15,13	9,89	7,28	5,71	4,66	3,92	3,36	2,92	2,58
8,0	30,91	15,20	9,97	7,35	5,78	4,73	3,99	3,43	2,99	2,65
9,0	30,96	15,26	10,00	7,41	5,84	4,79	4,04	3,48	3,05	2,70
10,0	31,01	15,31	10,07	7,45	5,88	4,84	4,09	3,53	3,09	2,74

Tabela 5

Variaţia funcţiilor $\eta_{2\,z}^{\circ\cdot\cdot}(\xi_1, \zeta)$, $\eta_{3\,z}^{\circ\cdot\cdot}(\xi_1, \zeta)$

ξ_1 \ ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10
2,0										
3,0	30,34	16,06	12,15	10,71	10,15	9,95	9,91	9,93	9,98	24,20
4,0	31,55	17,89	14,97	14,75	15,57	16,81	18,22	19,65	21,02	42,72
5,0	32,14	19,04	17,01	17,99	20,26	23,16	26,37	29,68	33,00	60,02
6,0	32,54	19,95	18,97	20,94	24,67	29,28	34,40	39,81	45,36	76,81
7,0	32,85	20,78	20,45	23,76	28,94	35,28	42,38	49,99	57,92	93,94
8,0	33,12	21,55	22,05	26,51	33,14	41,21	50,32	60,18	70,60	109,72
9,0	33,36	22,29	23,60	29,20	37,28	47,10	58,23	70,39	83,34	126,01
10,0	33,58	23,00	25,13	31,87	41,41	52,95	66,13	80,60	96,13	142,22
	33,78	23,70	26,65	34,51	45,48	58,80	74,02	90,82	108,96	158,40

Din analiza efectuată asupra funcţiilor σ_{ix}, $\sigma_{i\,z}^{\cdot}$ şi $\sigma_{i\,z}^{\cdot\cdot}$ $(i = 1, 2, 3)$, rezultă următoarele concluzii:

1. Funcţiile σ_{ix}, $\sigma_{i\,z}^{\cdot}$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt funcţii monoton descrescătoare de ζ pentru orice lăţime a benzii spectrale. (Se notează prin σ_{iu} valoarea absolută a mărimii respective).

2. Pentru $\sigma_{i\ddot{z}}$ avem următoarele situații:

a) În cazul zgomotului alb cu bandă limitată, pentru $\xi_1 < 2$ accelerațiile medii pătratice absolute sînt funcții monoton descrescătoare de τ.

Pentru $\xi_1 \in [2, 4]$, $\sigma_{i\ddot{z}}$ are puncte de minim situate în intervalul $(0, 1, 0{,}4)$.

Pentru $\xi_1 > 4$, accelerațiile medii pătratice absolute devin funcții crescătoare de ζ.

b) În celelalte două cazuri echivalente (în prima lor aproximație), corespunzătoare corelației exponențiale liniare și corelației armonice amortizate, pentru $\xi_1 < 2$, accelerațiile medii pătratice absolute sînt funcții monoton descrescătoare de ζ, iar pentru $\xi_1 \in [2, 10]$ prezintă minime corespunzînd unor valori $\zeta \in [0{,}1\ ;\ 0{,}9)$.

În toate cazurile, valorile lui ζ care realizează minimul funcțiilor $\sigma_{i\ddot{z}}$ descresc cu creșterea lui ξ_1 (a lățimii benzii spectrale grupîndu-se în intervalul $(0{,}1\ ;\ 0{,}4)$.

Aspectul calitativ al comportării familiilor de curbe $\eta_{i\ddot{z}}(\xi_1, \xi)$ este redat în figurile 4 și 5.

Din cele arătate, rezultă că pentru sistemele liniare supuse la perturbații aleatoare de tipurile examinate mai sus, există valori ale coeficientului de aperiodicitate ζ care optimează sistemul în sensul că aceste valori minimează accelerația medie pătratică absolută.

Această concluzie a fost pusă în evidență și pe cale experimentală [18]. Efectuîndu-se măsurări pentru o serie de autovehicule, echipate cu

Tabela 6

Autovehicul	Reglaj		Accelerația medie pătratică în g
	Amortizor față	Amortizor spate	
T.V. 21	12	12	0,222
	6	6	0,167
	0	0	0,195
T.V. 71	9	16	0,294
	3	10	0,234
	0	4	0,277
S.R. 113	16	19	0,748
	10	13	0,461
	4	7	0,570

amortizoare hidraulice avînd caracteristică de disipare reglabilă manual, s-au obținut rezultatele indicate în tabela 6. În tabelă, cifrele care indică reglajul amortizoarelor sînt mai mari pentru rigidități mai mici ale acestora.

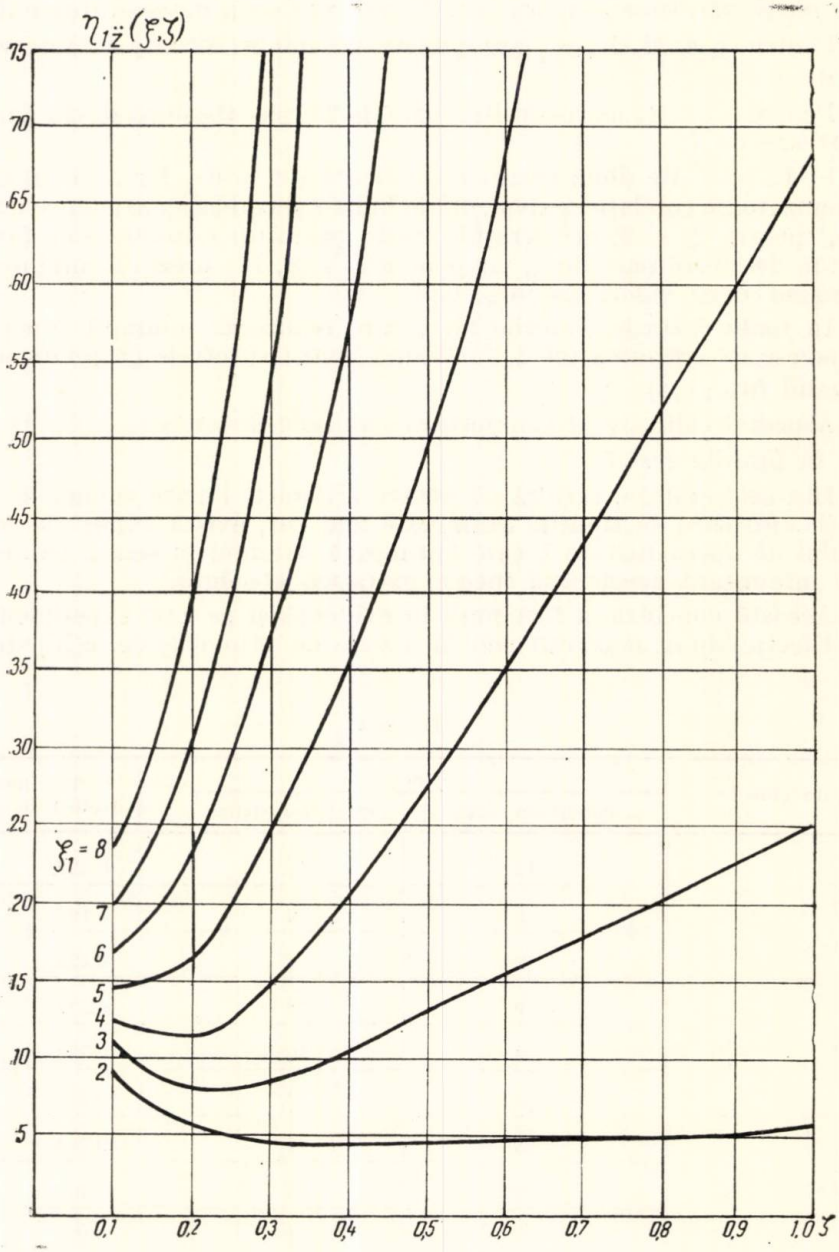

$\eta_{1\ddot{z}}(\xi,\zeta)$
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
$\xi_1 = 8$
7
6
5
4
3
2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
ζ

Fig. 4

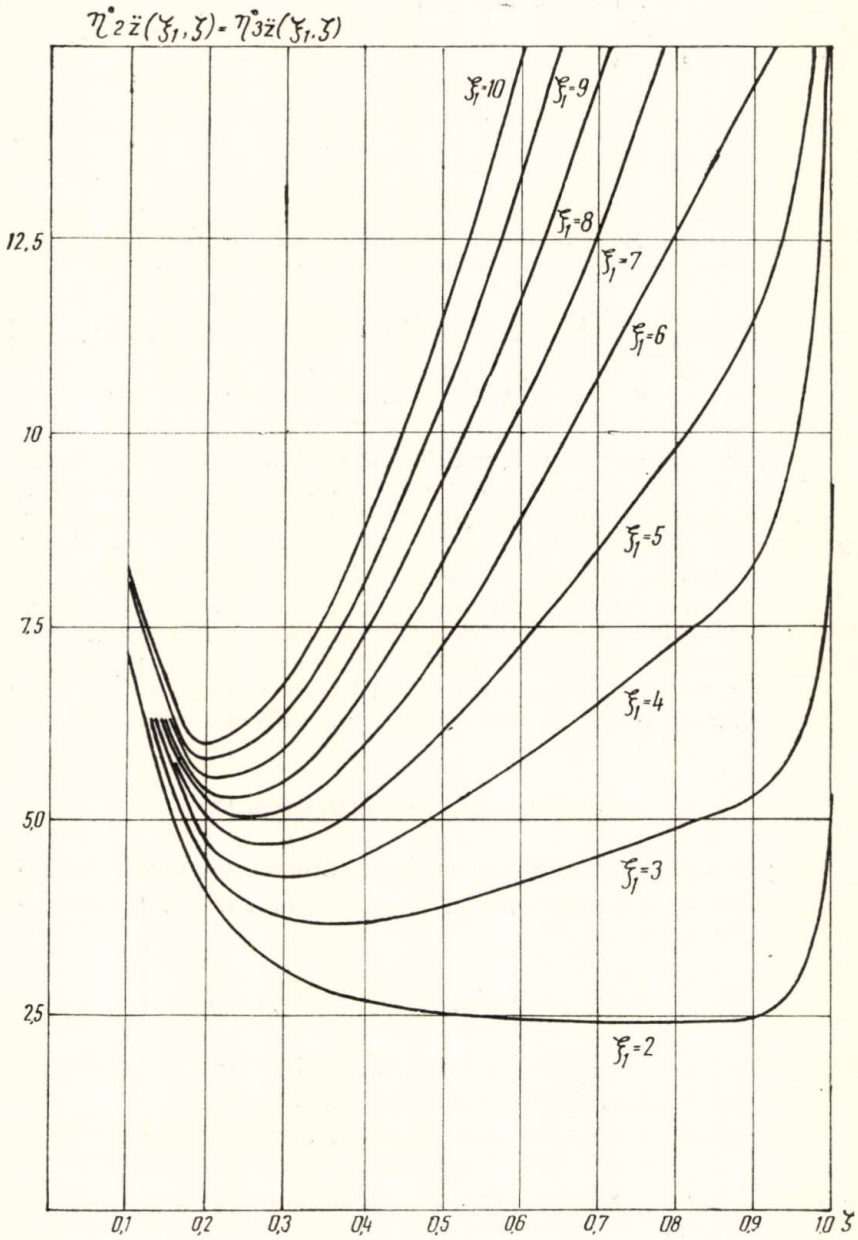

$\eta^{\circ}_{2\ddot{z}}(\xi_1,\zeta) - \eta^{\circ}_{3\ddot{z}}(\xi_1,\zeta)$
$\xi_1=10$
$\xi_1=9$
$\xi_1=8$
$\xi_1=7$
$\xi_1=6$
$\xi_1=5$
$\xi_1=4$
$\xi_1=3$
$\xi_1=2$
12,5
10
7,5
5,0
2,5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
ζ

Fig. 5

În practică există, în general, o grupare a valorilor coeficientului aperiodicitate ζ, asemănătoare grupării rezultate din consideraţiile de mai sus. Pentru comparaţie este dată tabela 7, extrasă din lucrarea lui R. V. ROTENBERG [14].

Tabela 7

	MAZMA MOSKVICI	GAZ M-L	GAZ M-20	GAZ 67-B	FORD PERFECT	FORD EIFEL	FIAT 508	AUSTIN 10	WOKSHELF 10	MORRIS 10	GAZ 10	CHEVRO-LET
ζ faţă	0,467	0,291	0,501	0,400	0,268	0,446	0,411	0,380	0,185	0,295	0,329	0,340
ζ spate	0,430	0,309	0,476	0,506	0,180	0,362	0,331	0,326	0,172	0,215	—	—

Din cele expuse mai sus, rezultă că pentru autovehiculele care sînt destinate să circule pe o mare diversitate de categorii de drumuri, echiparea lor cu amortizoare avînd caracteristică nereglabilă, este în general contraindicată. În ceea ce priveşte criteriul acceleraţiei medii pătratice absolute minime, din măsurările menţionate a rezultat, pe baza comparării datelor experimentale cu senzaţiile subiective, că acest criteriu apare ca indicat pentru caracterizarea confortului în cazul autovehiculelor supuse la vibraţii aleatoare. Adoptarea acestui criteriu are şi avantajul că permite caracterizarea printr-o singură măsură atît a confortului cît şi a suprasolicitărilor dinamice medii la care este supus autovehiculul.

3. OPTIMIZAREA SISTEMULUI NELINIAR

În ipoteza că mărimile $\sigma_{i\ddot{x}}$ corespunzătoare sistemului neliniar sînt egale respectiv cu cele care corespund sistemului liniar echivalent, relaţia (2.5) va fi de forma:

$$F(\xi_1, \zeta, \sigma_{\ddot{x}}(\xi_1, \zeta), \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0, \tag{3.1}$$

unde $\sigma_{\ddot{x}}(\xi_1, \zeta)$ se calculează pentru sistemul liniar (2.6), iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sînt parametrii caracteristicii disipative neliniare $f(\dot{x})$.

Considerăm că sistemul este supus la o perturbaţie de tipul celor analizate în §1, lăţimea benzii spectrale a perturbaţiei fiind ξ_1'.

Pentru această valoare a lui ξ_1 presupunem că există o valoare a lui ζ care minimează acceleraţia medie pătratică absolută a sistemului liniar echivalent, pe care o notăm ζ_0'.

Introducînd în relaţia (3.1) pe ξ_1' ζ_0' şi $\sigma_{\ddot{x}}(\xi_1', \zeta_0')$ se obţine ecuaţia:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0, \tag{3.2}$$

din care se poate determina unul din parametrii $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dacă ceilalți au fost stabiliți pe baza altor criterii.

În unele cazuri se pot determina mai mulți parametri ai caracteristicii neliniare, făcînd raționamentul de mai sus pentru diferite valori ale lățimii benzii spectrale a semnalului respectiv. În acest mod se poate obține o caracteristică disipativă neliniară al cărei echivalent liniar să fie optim pentru diferite lățimi ale benzii spectrale. Dacă dispunem de un număr de parametrii mai mici decît numărul de ecuații de tipul (3.2) pe care vrem să le satisfacem, se pot uneori determina acești parametrii din condiția :

$$\sum_{i=1}^{n} ({}_i^2G\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \min, n > k. \tag{3.3}$$

În acest mod pentru fiecare tip de perturbație (categorie de drum parcurs cu o anumită viteză) și fiecare tip de neliniaritate a caracteristicii disipative (amortizor) se poate alege o caracteristică pentru care sistemul liniar echivalent să fie optimal din punct de vedere al criteriului adoptat. Din cauza ipotezelor făcute pentru a realiza liniarizarea, precum și datorită procesului de liniarizare, nu vom putea afirma că sistemul neliniar este optimal. Ne putem totuși aștepta ca sistemul neliniar determinat în acest mod să fie aproape de cel optimal, astfel încît această metodă poate să constituie o primă aproximație, într-un proces ce urmează să fie verificat și cînd este cazul, îmbunătățit pe cale exprimentală. Trebuie să menționăm, în sprijinul afirmației de mai sus, că în unele cazuri în care s-a putut obține soluția exactă prin integrarea ecuației Foker-Plank, valorile obținute prin cele două metode au fost foarte apropiate (a se vedea de exemplu S. H. CRANDALL [4].

4. OPTIMIZAREA CARACTERISTICII AMORTIZOARELOR HIDRAULICE PENTRU DRUMURI CU CORELAȚIE ARMONICĂ AMORTIZATĂ

Amortizorul hidraulic, plasat între puntea autovehiculului și masa suspendată, generează o forță P, care se opune mișcării masei suspendate în raport cu puntea și care este legată de viteza de deplasare relativă $\dot{x}$, printr-o relație de forma :

$$P = k|\dot{x}|^i, \tag{4.1}$$

unde k este un coeficient de proporționalitate, iar $0 < i \leqslant 3$.

Utilizarea practică a amortizoarelor hidraulice a arătat că cea mai bună caracteristică de amortizare este cea pătratică [5], [6]. Deși nu există însă o justificare teoretică a acestui fapt, vom adopta în cele

ce urmează această concluzie experimentală. În cazul amortizării pătratice, caracteristica hidraulică completă a unui amortizor are expresia:

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} -a_c - b_c \dot{x}^2, & \text{pentru } -\infty < \dot{x} \leqslant -\dot{x}_{kc}, \\ -k_c \dot{x}^2, & \text{pentru } -\dot{x}_{kc} \leqslant \dot{x} \leqslant 0, \\ k_r \dot{x}^2, & \text{pentru } 0 \leqslant \dot{x} \leqslant \dot{x}_{kr}, \\ a_r + b_r \dot{x}^2, & \text{pentru } \dot{x}_{kr} \leqslant \dot{x} < \infty \end{cases}$$

şi este reprezentată în figura 6.

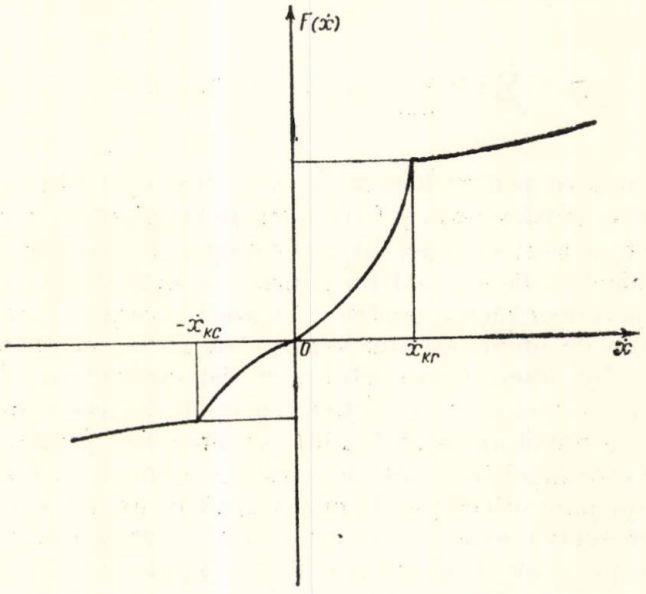


Fig. 6

Punctele de frîngere a diagramei corespund intrării în lucru a unor elemente care limitează creşterea forţei dezvoltate în amortizor (supapele de descărcare), evitînd suprasolicitările în piesele amortizorului, desprinderea roţilor de profilul drumului, precum şi transmiterea unor acceleraţii mari de la punţi la suprastructură. Punctele de frîngere corespund unor viteze de deplasare a pistonului în amortizor, numite viteze critice. Indicele c se referă la cursa de compresie iar indicele r la cursa de recul a pistonului în amortizor.

Din considerente de siguranţă în exploatarea autovehiculului se ia, după cum se remarcă din figura 6, $k_r > k_c$.

În cele ce urmează vom presupune:

$$\frac{k_r}{k_c} = \frac{b_r}{b_c} = \gamma,$$

$$\dot{x}_{kr} = \dot{x}_{kc} = \dot{x}_k. \tag{4.2}$$

Din condiția de legare a porțiunilor caracteristicii în punctele de frîngere, rezultă:

$$a_r = (k_r - b_r)\,\dot{x}_{kr}^2,$$
$$a_c = (k_c - b_c)\,\dot{x}_{kc}^2, \tag{4.3}$$

de unde, ținînd seama de (4.2), se poate scrie:

$$\frac{a_r}{a_c} = \gamma. \tag{4.4}$$

Introducem notațiile:

$$\alpha_r = \frac{2ar}{M},\ \alpha_c = \frac{2ac}{M},\ \beta_r = \frac{2br}{M},\ \beta_c = \frac{2bc}{M},$$
$$\varkappa_r = \frac{2k_r}{M},\ \varkappa_c = \frac{2k_c}{M}, \tag{4.5}$$

unde M este valoarea masei suspendate deasupra punții față sau spate a autovehiculului.

Cu aceste notații, prima relație (4.2) și relațiile (4.3) devin:

$$\frac{\varkappa_r}{\varkappa_c} = \frac{\beta_r}{\beta_c} = \gamma,$$
$$\alpha_r = (\varkappa_r - \beta_r)\,\dot{x}_{kr}^2, \tag{4.6}$$
$$\alpha_c = (\varkappa_c - \beta_c)\,\dot{x}_{kc}^2. \tag{4.7}$$

Din (4.6) și (4.7) rezultă și

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_c} = \gamma. \tag{4.8}$$

Dăm mai jos intervalele de variație ale valorilor parametrilor amortizării pătratice pentru autovehiculele moderne.

$$\varkappa_{\text{med}} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\varkappa_r = (0{,}08 \div 0{,}25)\ \text{cm}^{-1},$$
$$\gamma = 2 \div 5, \tag{4.9}$$
$$\dot{x}_{kr},\ \dot{x}_{kc} = (15 \div 40)\ \text{cm/s}.$$

Ţinînd seama de notaţiile (1.4) şi (4.5) şi de relaţiile (4.6) şi (4.8), caracteristica disipativă $f(\dot{x})$ are următoarea expresie:

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\gamma}(\alpha_r + \beta_r \dot{x}^2), & \text{pentru } -\infty < \dot{x} \leqslant -\dot{x}_k, \\ -\dfrac{1}{\gamma}\varkappa_r \dot{x}^2, & \text{pentru } -\dot{x}_k \leqslant \dot{x} \leqslant 0, \\ \varkappa_r \dot{x}^2, & \text{pentru } 0 \leqslant \dot{x} \leqslant \dot{x}_k, \\ \alpha_r + \beta_r \dot{x}^2, & \text{pentru } \dot{x}_k \leqslant \dot{x} < \infty. \end{cases} \tag{4.10}$$

Introducînd această expresie în formula (2.5) şi efectuînd integrala, se obţine următoarea relaţie între parametrii caracteristici neliniare şi coeficientul liniar echivalent al disipării:

$$(1 - e^{-\frac{\dot{x}_k^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}})\varkappa_r + e^{-\frac{\dot{x}_k^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}}\beta_r = \frac{\omega_n \gamma \sqrt{2\pi}}{\gamma + 1} \cdot \frac{\zeta}{\sigma_{\dot{x}}}. \tag{4.11}$$

Vom considera că acţiunea drumului este reprezentabilă printr-o corelaţie armonică amortizată ai cărei parametrii sînt daţi de (1.15).

Densitatea spectrală corespunzătoare va avea expresia:

$$S_h(\omega) = \frac{2\alpha S_0 (\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}. \tag{4.12}$$

Rezultatele experimentale obţinute prin măsurarea directă a densităţilor spectrale arată că $S_h(\omega) \cong 0$ pentru $\omega > 10\ \omega_n$.

În cazul considerat, pentru viteze v pentru 40 km/h şi 60 km/h, domeniile de variaţie ale parametrilor α şi β sînt:

$$\begin{aligned} \alpha &= (0{,}31 \div 0{,}48)\ \mathrm{s}^{-1}, \\ \beta &= (0{,}45 \div 0{,}7\ )\ \mathrm{s}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ţinînd seama de aceste evaluări, pentru valori mari ale lui ω, densitatea spectrală (4.12) se poate calcula prin formula aproximativă:

$$S_h(\omega) \cong \frac{2\alpha S_0}{\omega^2}. \tag{4.14}$$

În domeniul vitezelor uzuale ale autovehiculelor vom putea scrie:

$$S_h(\omega) < \frac{2S_0}{\omega^2}. \tag{4.15}$$

Pentru $\omega > |0\ \omega_n$, ținînd seama de valoarea lui S_0, dată de (1.15), vom avea

$$S_h(\omega) < 0{,}0013.$$

În cele ce urmează pentru lățimea benzii spectrale vom lua în considerare valorile $\xi_1 = 7, 8, 9, 10$, pentru care funcția (4.9) este bine aproximată de o densitate spectrală cu bandă limitată, atunci cînd $v \geqslant 40$ km/h.

Vitezele v pe care le putem lua în considerare vor fi acelea pentru care $\mu < 0{,}05$, astfel încît să putem afirma că $\eta_{3u} \cong \eta^0_{3u}$. Această condiție conduce la considerarea vitezelor mai mici de 65 km/h.

Vom lua pentru v valorile $v_1=40$ km/h, $v_2=50$ km/h, $v_3=60$ km/h și vom atașa indicii 1, 2, 3, tuturor mărimilor care corespund acestor viteze.

Din (1.15) va rezulta:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0{,}31\ s^{-1}, & \beta_1 &= 0{,}46\ s^{-1}, \\ \alpha_2 &= 0{,}39\ s^{-1}, & \beta_2 &= 0{,}57\ s^{-1}, \\ \alpha_3 &= 0{,}47\ s^{-1}, & \beta_3 &= 0{,}68\ s^{-1}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$S_0 = 6{,}32\ cm^2.$$

În aceste cazuri, avînd $\mu < 0{,}05$, vom putea scrie:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\ddot{x}} &\cong \alpha S_0\, \omega n\ \eta^0_{\dot{x}}, \\ \sigma^2_{\ddot{z}} &\cong \alpha S_0\, \omega_n^3\ \eta^0_{\ddot{z}}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

unde valorile funcțiilor $\eta^0_{\dot{x}}(\xi, \zeta)$ și $\eta^0_{\ddot{z}}(\xi, \zeta)$ sînt date, respectiv, de tabelele 1 și 5.

Deoarece am considerat $\xi_1 > 6$, valoarea optimală a lui ζ va fi 0,2. Pentru $7 \leqslant \xi_1 \leqslant 10$ avem:

$$\begin{aligned} \sigma_{31\dot{x}} &= (28 \div 32)\ \text{cm/s}, \\ \sigma_{32\dot{x}} &= (31 \div 36)\ \text{cm/s}, \\ \sigma_{33\dot{x}} &= (34 \div 39)\ \text{cm/s}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Vom lua valorile medii:

$$\begin{aligned} \sigma_{31\dot{x}} &= 30\ \text{cm/s}, \\ \sigma_{32\dot{x}} &= 33{,}5\ \text{cm/s}, \\ \sigma_{33\dot{x}} &= 36{,}5\ \text{cm/s}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Considerînd că viteza critică $\dot{x}_k$ este 30 cm/s şi luînd $\gamma = 4$, în cele trei cazuri, ecuaţia (4.11), devine:

$$\begin{aligned} 3 \quad & \varkappa_{r1} + 4{,}7 \ \beta_{r1} = 1, \\ 2{,}8 \ & \varkappa_{r2} + 5{,}6 \ \beta_{r2} = 1, \\ 2{,}6 \ & \varkappa_{r3} + 6{,}4 \ \beta_{r3} = 1. \end{aligned} \tag{4.20}$$

O altă relaţie între parametrii $\varkappa_r$ şi β_r se poate obţine, de exemplu, punînd condiţia ca la viteza maximă ($\dot{x}_{\max} > \dot{x}_k$) să avem o reducere a forţei în amortizor într-un anumit raport faţă de forţa care ar fi dată de prima ramură a caracteristicii la aceeaşi viteză, adică o relaţie de forma:

$$\frac{f(\dot{x}_{\max})}{\varkappa_r \dot{x}^2_{\max}} = \nu < 1. \tag{4.21}$$

Ţinînd seama de (4.7) şi (4.10), condiţia (4.21) în cele trei cazuri considerate devine:

$$\frac{\beta_{ri}}{\varkappa_{ri}} = \frac{\nu^2 - \delta^2}{1 - \delta^2} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4.22}$$

unde s-a notat $\delta = \dfrac{\dot{x}_k}{\dot{x}_{\max}}$.

În literatura de specialitate se arată că viteza maximă $\dot{x}_{\max}$ nu depăşeşte 60 cm/s. Vom lua $\nu = 0{,}5$ şi $\dot{x}_{\max} = 60$ cm/s. Obţinem

$$\beta_{ri} = \frac{1}{3} \varkappa_{ri} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.23}$$

Asociind relaţiile (4.23) la relaţiile (4.20) şi rezolvînd sistemele obţinute, rezultă:

$$\begin{aligned} \varkappa_{r1} &= 0{,}22 \ \text{cm}^{-1}, & \beta_{r1} &= 0{,}07 \ \text{cm}^{-1}, \\ \varkappa_{r2} &= 0{,}21 \ \text{cm}^{-1}, & \beta_{r2} &= 0{,}07 \ \text{cm}^{-1}, \\ \varkappa_{r3} &= 0{,}21 \ \text{cm}^{-1}, & \beta_{r3} &= 0{,}07 \ \text{cm}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Prin urmare, vom putea considera:

$$\varkappa_r = 0{,}21 \ \text{cm}^{-1}, \quad \beta_r = 0{,}07 \ \text{cm}^{-1}. \tag{4.25}$$

Introducînd aceste valori în (4.7), obținem și valoarea parametrului α_r:

$$\alpha_r = 126 \text{ cm.s}^{-2}. \tag{4.26}$$

Ținînd seama de valoarea lui γ, se obțin valorile parametrilor pentru cursa de recul:

$$\varkappa_c = 0{,}05 \text{ cm}^{-1}, \quad \beta_c = 0{,}017 \text{ cm}^{-1}, \quad \alpha_c = 31{,}5 \text{ cm.s}^{-2}.$$

În cazul considerat $\varkappa_{med} = 0{,}13 \text{ cm}^{-1}$, valoare ce se încadrează între limitele acceptate pentru autovehiculele moderne.

Parametrii esențiali ai unui amortizor hidraulic sînt viteza critică $\dot{x}_k$ și forța critică corespunzătoare P_k.

Ținînd seama de notațiile (4.5), legătura dintre acești doi parametrii este dată de relația:

$$P_k = k\dot{x}_k^2 = \frac{1}{2} M \varkappa \dot{x}_k^2, \tag{4.27}$$

unde $\varkappa = \varkappa_r$ pentru curse de recul și $\varkappa = \varkappa_c$ pentru cursa de compresie.

În acest mod cunoscînd viteza critică $\dot{x}_k$ și valoarea optimală corespunzătoare a lui $\varkappa$ (pentru o anumită categorie de drum parcurs cu anumite viteze), se poate determina forța critică optimă pentru o anumită valoare a masei suspendate deasupra punții la care se atașează amortizorul.

Așa cum am arătat, această determinare constituie o primă aproximație ce poate fi îmbunătățită pe cale experimentală. Astfel pe lîngă amortizoarele ce realizează forțele critice determinate prin procedeul de mai sus se pot realiza două sau mai multe variante de încadrare și măsura accelerațiile medii pătratice în toate aceste cazuri, atunci cînd vehiculul parcurge același tronson dintr-un drum de categoria considerată, cu aceiași viteză.

Ca aplicație, vom determina forțele critice optime în amortizoarele cu care trebuie echipat un autovehicul ale cărui mase suspendate deasupra punții față și spate sînt respectiv

$M_f = 64 \text{ kgf m}^{-1} \text{ s}^2$, $M_s = 118 \text{ kgf m}^{-1}.\text{s}^2$ (autovehiculul M. 461, încărcat). Din (4.27) obținem:

$$\begin{aligned} P_{fkr} &= 60 \text{ kgf}, \quad P_{skr} = 110 \text{ kgf}, \\ P_{fkc} &= 15 \text{ kgf}, \quad P_{skc} = 27{,}5 \text{ kgf}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Din a doua relaţie (4.14) se pot evalua acceleraţiile medii pătratice absolute pentru sistemul liniar echivalent, atunci cînd acesta este optimal. În cazul nostru, pentru $7 \leqslant \xi, \leqslant 10$ şi 40 km/h $\leqslant v \leqslant 60$ km/h, obţinem :

$$0{,}21\ g \leqslant \sigma_{3\ddot{z}} \leqslant 0{,}27\ g\ (g = 9{,}81\ \text{m/s}^2), \tag{4.29}$$

valori considerate ca foarte bune pentru categoria de drum aleasă.

Primită la redacţie la 11 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Booton, *The analysis of nonlinear control of random inputs*, Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, vol. 2, 369—391 (1953).
2. — *Nonlinear control systems with random inputs*, Trans. IRE, vol. CT-1, 9—18 (1954).
3. S. H. Crandall, W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical System*, New York and London, Academic Pres, 1963.
4. S. H. Crandall, *Random Vibration of Systems with Nonlinear Restoring Forces*, Trudî mejdunarodnovo simpoziuma nelineinîm colebaniam, vol. 1, Kiev 1963.
5. A. D. Derbaremdiker, *O pascete haracteristichi ghidravlicescovo amortizatora s ucetom trenia v podvecshe*, Avtomobilnaia promîşlenosti, *6* (1962).
6. M. I. Hoffman, *Wirksamkeit von Strassendämpfern am Fahrzeug*, A.T.Z., *10*, (1958).
7. I. E. Kazakov, *Priblijennîi metod statisticescovo issledovania nelineinoi sistem*, 1, 394 (1954).
8. — *K vaprosu ob isledovanii rasseivania nelineinîh avtomaticeschih sistem*, Sbornic naucinîh trudov V.V.I.A. im. Iukoskovo, **1**, 95—106, (1954).
9. — *Priblijenîi veroiatnostnîi analiz tocinosti rabotî suscestveno nelineinîh sistem*, Avtomatica i telemehanica **XVII** *5*, 385—1 109 (1956).
10. M. Mitsche, *Nichtlineare Feder-und Dämpferkennungen am Kraftfahrzeug*, Vortäge der Kraftfahrzeug—und Motortechnischen Konferenz, **V** (1967).
11. I. G. Parmilovskii, *Spectralnaia platnosti raspredelenia neravnostei microprofilia dorog i colebania avtomobilia*, Avtomobilia promîşlenosti, *10*, 25—28, (1961).
12. I. M. Pevzner, A. A. Tihonov, *Issledovania statisticeskih svoistov microprofilia osnovîh tipov avtomobilnîh dorog*, Avtomobilna ia promîşlenosti, *1*, 15—18 (1964).
13. V. S. Pugacev, *Teoria sluciainîh funcţii*, Moskva, Gasudarstvennoe izdatelstvo fizico-matematicescom literaturî, 1962.
14. R. V. Rotenberg, *Podveska avtomobilia i ego colebania*, Moskva, Maşghiz, 1960.
15. I. D. Robson, *An introduction to Random Vibration*, Edinburg University Press, 1963.
16. A. A. Svesnicov, *Pricladnîe metodî teorii sluciainîh funcţii*, Leningrad, Gosudarstvennoe soiuznoe izdatelstvo rudostroitelnoi promîslenoşti, 1961.
17. A. A. Silaev, *Spectralnaia teoria podressorivania transportnîh maşin*, Moskva, Gosudarstvennoe Naucinotehnicescoe izdatelstvo maşinostroitelnoi literaturî, 1963.
18. * * * *Vibraţiile sistemelor mecanice, cu aplicaţii la suspensia autovehiculelor. Amortizoare îmbunătăţite pentru autocamioane, autobuze şi autoutilitare*, 1967, lucrare nepublicată.

INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA STABILITĂȚII FUNDAȚIILOR ÎNCASTRATE

ALEX. VAICUM
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

În lucrare se prezintă studii experimentale și teoretice privind influența forței tăietoare asupra capacității portante, rotirilor și poziției axei de rotație a fundațiilor încastrate și necesitatea luării în considerare a acestui aspect la elaborarea unor relații de calcul.

1. INTRODUCERE

Literatura de specialitate privind fundațiile încastrate în pămînt (la stabilitatea cărora se ține seama de aportul favorabil al rezistenței laterale a masivului de pămînt și de forțeie de frecare) nu menționează studii privind influența forței tăietoare asupra capacității portante, a rotirilor, a poziției axei de rotație etc. Majoritatea metodelor elaborate pînă în prezent determină momentul de pierdere a stabilității fundației, fără a interveni în calcul valoarea forței tăietoare. Metoda de calcul aplicată actualmente în Republica Socialistă România pentru fundațiile încastrate ale stîlpilor liniilor electrice aeriene, introduce valoarea forței tăietoare în calcul dar rezultatele studiilor comparative arată o neconcordanță cu cele experimentale.

În vederea obținerii unor clarificări asupra fenomenului fizic și a diferiților factori care-l condiționează, au fost efectuate studii experimentale și teoretice, în scopul fundamentării de ipoteze mai reale ce ar sta la baza unor relații noi de calcul, care să permită obținerea unor rezultate mai apropiate de cele experimentale, ceea ce ar duce la o proiectare mai rațională a acestor fundații [3], [4].

Au fost analizate următoarele aspecte: influența forței tăietoare asupra capacității portante, a rotirilor și deplasărilor fundației, poziției axei de rotație și a formei diagramei de repartiție a presiunilor în masivul de pămînt.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969 p. 901–920

2. STUDII EXPERIMENTALE

Au fost efectuate experimentări în laborator pe modele reduse, în bazinul cu nisip, realizîndu-se la fiecare încercare aceleaşi condiţii de zăcămînt, prin cernere de la o înălţime de 80 cm, a unui nisip de Pantelimon de aceiaşi granulometrie, obţinîndu-se o greutate volumetrică de $\gamma = 1{,}68$ t/m^3 şi un $\varphi = 33°$. Studiile de bază au fost efectuate pe modele reduse, ulterior au fost efectuate şi studii pe modele mari, atît în nisip cît şi în balast în condiţii mai apropiate de pămîntul natural pentru a se observa diferenţele faţă de rezultatele obţinute pe modele reduse. Studiile pe modele mari au fost efectuate tot în laborator, în bazin, iar compactarea s-a făcut manual, în straturi de 20 cm, accetuîndu-se compactarea la suprafaţă.

Modelele reduse erau confecţionate din lemn de fag şi avînd secţiunea transversală de 2×2 cm; 3×3 cm şi 4×4 cm iar înălţimea lor era de 40 cm şi 110 cm. Adîncimea de fundare a fost în jur de $h = 15$ cm. Modelele au fost acţionate de încărcări orizontale (F) de la diferite înălţimi (H) pentru a se urmări efectul forţei tăietoare. Modelele mari erau confecţionate tot din lemn de fag dar aveau secţiunea transversală de 19×19 m iar adîncimea de fundare $h = 65$ cm. Încărcarea modelelor s-a făcut static, prin turnarea apei (cu ajutorul unei biurete realizîndu-se o viteză de 50 gr pe minut) în vasul de încărcare, la experienţele pe modele reduse, iar prin aşezarea de greutăţi la modelele mari.

La fiecare treaptă de încărcare se măsurau deplasările cu ajutorul a două microcomparatoare în două puncte diferite, aşezate pe axa verticală de simetrie a fundaţiei.

2.1. INFLUENŢA FORŢEI TĂIETOARE ASUPRA CAPACITĂŢII PORTANTE

Încărcările care acţionează asupra unei astfel de fundaţie se pot reduce la un moment de răsturnare şi o rezultantă. Forţa tăietoare este dată de componenta orizontală a rezultantei.

Deoarece influenţa forţei tăietoare este în funcţie atît de valoarea ei (adică de înălţimea H la care se aplică componenta orizontală a rezultantei) cît şi de adîncimea de fundare h, se va studia acest aspect în raport de paramertul $\lambda_1 = \dfrac{H}{h}$.

Dacă efectul forţei tăietoare ar fi fost neglijabil, pentru o aceeaşi fundaţie, trebuia ca, indiferent de înălţimea de acţionare a componentei orizontale a rezultantei (forţa tăietoare), valoarea momentului de pierdere a stabilităţii (M_s) a fundaţiei să fie acelaşi în toate experienţele efectuate.

Studiile experimentale au arătat că acest moment nu se menţine întotdeauna constant.

Astfel în figura 2.1.1 au fost trasate diagramele de influenţă pentru trei fundaţii cu secţiunea transversală 2×2; 3×3 şi 4×4 cm. În ordonată s-a trecut momentul de pierdere a stabilităţii fundaţiei (M_s) iar în abscisă valoarea forţei tăietoare (F).

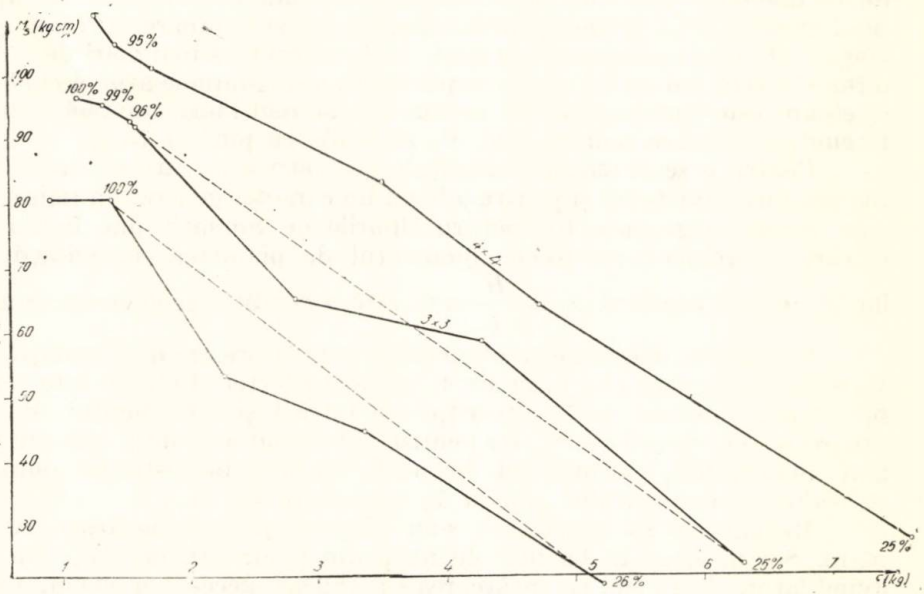


Fig. 2.1.1.

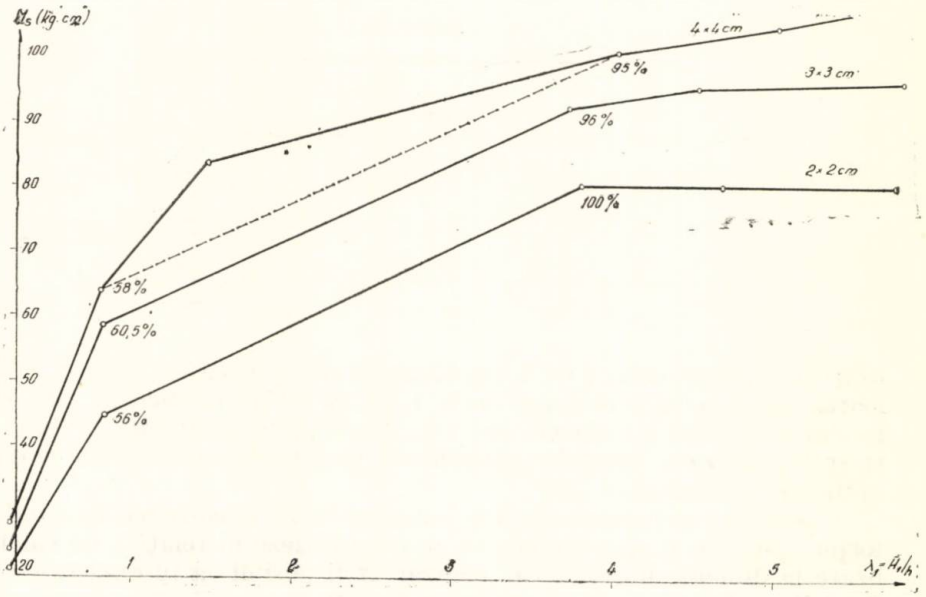


Fig. 2.1.2.

S-a observat că pentru fundațiile studiate de la valori mai reduse a forței tăietoare de 1 260 gr influența ei asupra lui M_s este neglijabilă (mai mică de 5 %). Astfel, pentru valoarea forței tăietoare de 1 000 gr sau 500 gr, M_s este aproximativ același. De la valori însă mai mari de 1 260 gr influența este din ce în ce mai importantă, ajungîndu-se atunci cînd forța tăietoare este maximă (adică acționează la înălțimea minimă — nivelul terenului) valoarea momentului M_s să scadă cu pînă la 75 %.

Pentru a se determina condițiile geometrice în care se dezvoltă influența forței tăietoare și pentru a le da un caracter general, în figura 2.1.2 s-au trasat diagramele tot pentru tipurile de fundație din figura 2.1.1 în care în ordonată s-a trecut momentul de pierderea stabilității (M_s), iar în abscisă raportul $\lambda_1 = \frac{H}{h}$ care este o condiție geometrică generală.

Din aceste diagrame se observă că pentru oricare din fundații, dacă valoarea lui λ_1 este mai mare de 4, influența forței tăietoare este neglijabilă. Dacă valoarea lui λ_1 este cuprinsă între 1 și 4 momentul M_s scade progresiv cu pînă la 25 %, iar pentru valori mai mici de 1 influența este mai importantă, valoarea lui M_s scade cu 75 % (aceasta în comparație cu valoarea momentului pentru λ_1 mai mare de 4).

Rezultatele asemănătoare s-au obținut și prin încercări la scară mare. S-a încercat în bazinul de nisip din laborator, un stîlp din lemn avînd latura de 19 cm, iar încărcarea s-a aplicat succesiv la 50 cm, 150 cm, 250 cm și 300 cm. Se precizează că adîncimea de fundare a fost menținută constantă de 65 cm. După cum se observă din datele cuprinse în tabela 2.1.1 dacă pentru valoarea $\lambda_1 = 3{,}85$ momentul de pierdere a stabi-

Tabela 2.1.1

Nr. crt.	H cm.	Ms		λ_1
		kg.cm	%	
1	300	24 000	100	4,60
2	250	23 750	98,5	3,85
3	150	19 000	79,0	2,32
4	50	11 750	49,0	0,77

lității s-a redus numai cu 1,5 % (față de M_s pentru $\lambda_1 = 4{,}6$), cînd valoarea lui λ_1 este mai mică decît 1 ($\lambda_1 = 0{,}77$), momentul M_s este de numai 49 % adică o reducere de 51 %. Aceste date corespund cu diagramele trasate pe baza rezultatelor încercărilor pe modele reduse, ceea ce dă posibilitatea generalizării lor.

Aceste concluzii ne arată necesitatea luării în considerare a influenței forței tăietoare și care trebuie să se concretizeze în relațiile de calcul utilizate la dimensionare, în caz contrar ar fi posibil ca în exploatare să fie depășit coeficientul de siguranță 1,5—2,0 ce se aplică în mod obișnuit și să se producă pierderea stabilității fundației.

Pentru a se urmări fenomenul fizic și a se vedea ce influență exercită forța tăietoare asupra diagramei de repartiție a presiunilor în pămînt

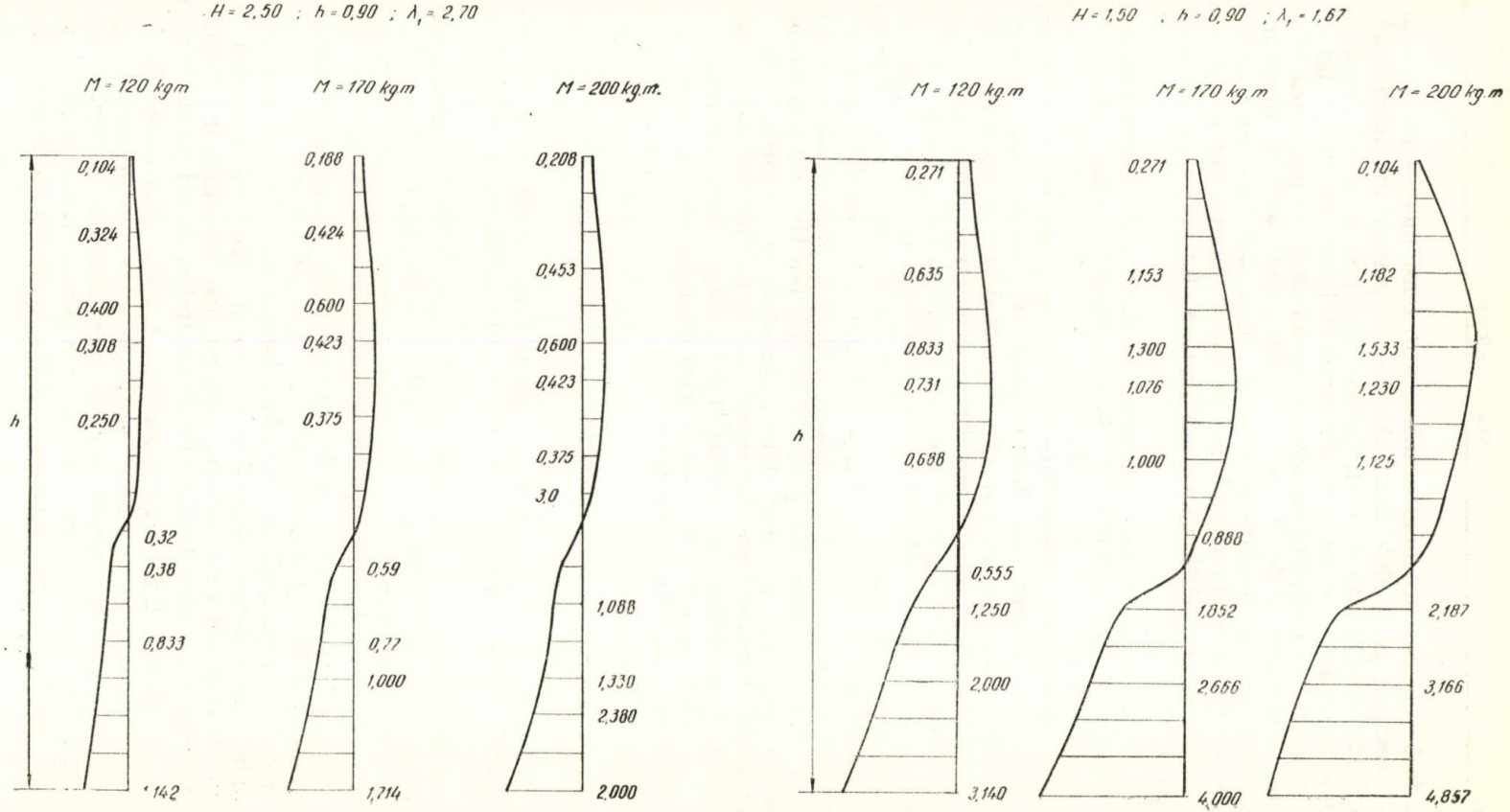

H = 2,50 ; h = 0,90 ; λ1 = 2,70
M = 120 kgm
M = 170 kgm
M = 200 kgm.
h
0,104
0,324
0,400
0,308
0,250
0,32
0,38
0,833
1,142
0,168
0,424
0,600
0,423
0,375
0,59
0,77
1,000
1,714
0,208
0,453
0,600
0,423
0,375
3,0
1,066
1,330
2,380
2.000
H = 1,50 , h = 0,90 ; λ1 = 1,67
M = 120 kg.m
M = 170 kg.m
M = 200 kg.m
h
0,271
0,635
0,833
0,731
0,688
0,555
1,250
2,000
3,140
0,271
1,153
1,300
1,076
1,000
0,888
1,852
2,666
4,000
0,104
1,182
1,533
1,230
1,125
2,187
3,166
4,857

Fig. 2.1,3

au fost efectuate în laborator măsurători tensiometrice cu ajutorul dozelor de presiune, pe modele mari. Au fost amplasate un număr suficient de doze (20) atît în față cît și în spatele fundației. În acest sens au fost efectuate încercări pe o fundație din lemn cu latura de 19 cm, iar adîncimea de fundare s-a menținut constantă, modificîndu-se înălțimea de acționare a încărcării orizontale. Au fost efectuate două serii de încercări, o dată cu adîncimea de fundare de $h = 65$ cm și altă dată cu $h = 90$ cm. În figura 2.1.3 se arată modul de variație a diagramelor de presiune cînd $h = 90$ cm, iar înălțimea de acționare a forței era la $H = 1{,}50$ m și 2,50 m.

Valoarea lui λ_1 este mai mică de 4, deci în ambele cazuri M_s este influențat de forța tăietoare. S-au reprezentat diagramele pentru trei trepte de încărcare : $M_1 = 120$ kgm, $M_2 = 170$ kgm și $M_3 = 200$ kgm. Se precizează că la aceste încercări nu s-a ajuns niciodată la momentul maxim (de pierderea stabilității) deoarece s-ar fi voalat pereții dozelor de presiune care sînt subțiri. Dar M_3 este destul de aproape de momentul real limită, care, pentru condițiile geometrice respective ($\lambda_1 = 1{,}67$), este în jur de 240 kgm. Din aceste diagrame de presiune se observă că pe măsură ce crește efortul (momentul încovoietor) și suprafața diagramelor de presiune este mai dezvoltată. Dar pentru același moment dat de forțele exterioare (M_1, M_2, M_3) diagrama de presiune este cu atît mai dezvoltată cu cît forța tăietoare este mai mare (înălțimea H este mai mică). Aceasta arată că o parte din forțele reactive ale pămîntului (reprezentate prin mărirea suprafeței diagramei de presiune) sînt utilizate pentru echilibrarea forței tăietoare, ceea ce explică reducerea momentului maxim de stabilitate al fundației cînd crește forța tăietoare.

Această observație va sta la baza studiilor teoretice ce se vor efectua privind influența forței tăietoare.

2.2. INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA ROTIRII FUNDAȚIILOR

După cum s-a mai arătat, unele metode de calcul consideră că încărcarea admisibilă a unei fundații încastrate trebuie să fie stabilită în funcție de rotirea ei.

De asemenea, studiul deplasărilor și a rotirilor este extrem de necesară pentru fundațiile lungi, la care pierderea stabilității se face prin formarea unor zone plastice în fața fundației și de aceea nu se poate defini încărcarea limită, din condiția de capacitate portantă decît cu totul aproximativ.

În acest sens, în studiile experimentale efectuate atît în laborator (pe modele reduse și mari) cît și pe teren, s-a urmărit și variația unghiului de rotație a fundației. Acesta a fost determinat printr-un calcul geometric simplu, cunoscîndu-se centrul de rotație și mărimea deplasărilor la o anumită distanță de acest centru, care au fost măsurate în timpul experimentărilor cu ajutorul microcomparatoarelor, în cel puțin două puncte.

În figurile 2.2.1 și 2.2.2 au fost trasate diagramele de variație a rotirilor punîndu-se în abscisă tangenta unghiului de rotire ($\mathrm{tg}\alpha$) iar în ordonată valoarea momentelor de încovoiere la nivelul terenului. În figura 2.2.1 au fost trasate diagramele pentru patru fundații paralelipipedice din lemn avînd secțiunea de 3×3 cm iar adîncimea de fundare

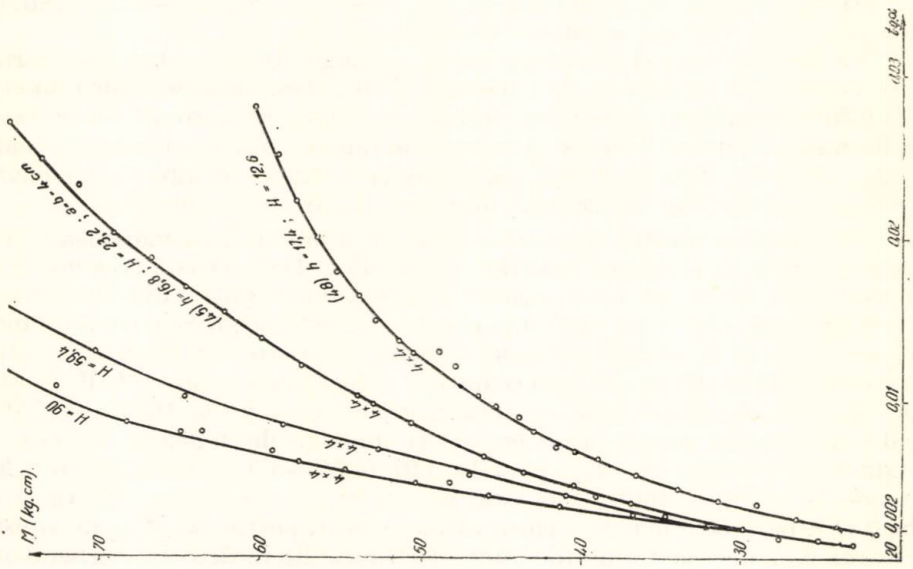


Fig. 2.2.2.

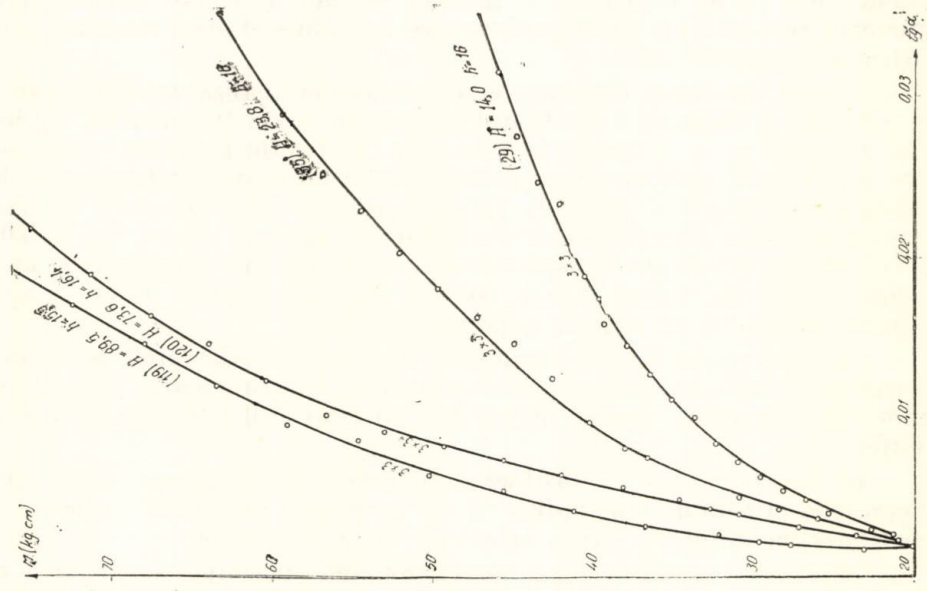


Fig. 2.2.1.

în jur de $h = 16{,}0$ cm. Înălțimea de acționare a încărcării orizontale era variabilă de la aproximativ 90 cm pînă la 14 cm.

În figua 2.2.2, de asemenea, au fost trasate diagrame pentru fundații de același tip, dar cu secțiunea transversală de 4×4 cm.

În tabelele 2.2.1 și 2.2.2 s-au trecut, pe lîngă diferite valori geometrice (λ și λ_1), rotirile în funcție de raportul M/M_s, pentru a se vedea modul cum influențează forța tăietoare cînd acest raport se apropie de unitate. De asemenea, au fost trecute și rapoartele dintre rotirile corespunzătoare și $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}01$ și $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}015$, condițiile (prevăzute în diferite recomandări) pe care trebuie să le îndeplinească încărcarea admisibilă.

Din analiza acestor diagrame și tabele se observă că mărimea forței tăietoare duce la creșterea rotirilor fundațiilor. Dar această creștere este cu atît mai mare cu cît valoarea momentului rezultat din încărcările exterioare este mai mare. Astfel se observă că pentru probele cu secțiunea de 4×4 cm la o aceiași variație a forței tăietoare, în timp ce pentru un moment de 30 000 gr cm ceea ce duce la valori a rapoartelor M/M_{max} mai mici de 0,50 (0,225—0,485), variația rotirilor este de la 100% — 175%, cînd se analizează aceste valori pentru un moment de 60 000 grcm ceea ce conduce la rapoarte M/M_{max} pînă la 0,97 (0,57—0,97), variația rotirilor este de la 100% — 400%. Aceasta ne conduce la concluzia că variația forței tăietoare este mai puternică atunci cînd raportul M/M_{max} depășește valoarea 0,5, deci la fundațiile unde tracțiunea din încărcările permanente depășește 50% din încărcarea maximă admise în exploatare.

Trebuie precizat că aceste rezultate s-au obținut pentru încărcări rapide, deci nu au contribuit la mărirea rotirilor și a deformațiilor, proprietățile reologice ale pămînturilor, care vor aduce și ele o creștere suplimentară a acestei valori.

O altă concluzie ce se poate desprinde din analiza datelor cuprinse în tabelele prezentate, este faptul că pentru cazul încărcărilor rapide, deși raportul λ_1 a variat de la 6 la 0,72, deci influența forței tăietoare este importantă, pentru valoarea momentelor admisibile determinate din condiția de capacitate portantă ($Mr/1{,}5$) rotirile nu au depășit valoarea rotirilor maxime admisibile chiar în condițiile cele mai severe, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01$, prevăzute în literatura de specialitate, decît într-un singur caz, cu o valoare destul de redusă și care poate fi datorită și unor influențe accidentale survenite în timpul experimentărilor.

Se poate considera că rezultatele studiilor experimentale pe modele pot conduce la cîteva concluzii de care trebuie să se țină seama la stabilirea unor relații de calcul pentru fundațiile încastrate utilizate la stîlpi L E A. Astfel:

a) Pentru stîlpii de susținere, indiferent de tensiunea liniei, unde încărcările orizontale sînt reduse și au o durată scurtă de aplicare, se poate neglija influența forței tăietoare asupra rotirilor.

b) Pentru acești stîlpi, valoarea rotirilor în timpul exploatării nu va depăși niciodată valorile admisibile, dacă fundația a fost calculată la starea limită a capacității portante iar la execuție, caracteristicile pămîntului din jurul fundației sînt cel puțin egale cu cele luate în calcul.

c) Pentru fundațiile puternic solicitate, unde valoarea lui λ_1 este mai mică decît 4 trebuie să se ia în considerare influența forței tăietoare,

iar valoarea rotirilor uneori poate depăși în exploatare condițiile maxime de deformație în special cînd încărcările permanente sînt egale sau mai mari de la 50% din sarcina maximă.

În vederea verificării acestor rezultate au fost efectuate studii experimentale în laborator pe modele mari. În general rezultatele obținute pe modele reduse au fost confirmate și de aceste experimentări. Totuși se constată că, atunci cînd caracteristicile masivului de pămînt sînt mai slabe, astfel cum s-au efectuat încercările cînd adîncimea de fundare era de 65 cm, influența forței tăietoare asupra rotirilor este mai importantă cînd valoarea raportului M/M_{max} depășește 0,5, ceea ce poate duce la deplasări mai mari decît cele admisibile.

În tabela 2.2.1. au fost trecute rezultatele acestor încercări, unde pentru trei adîncimi de fundare 40 cm, 50 cm și 65 cm s-a aplicat încărcarea orizontală la cel puțin trei înălțimi diferite.

După cum se observă din analiza acestor rezultate în două cazuri cînd valoarea lui λ_1 a fost mai mică de 1, valoarea rotirilor la un raport M/M_{max} mai mic de 0,66 (această valoare definește sarcina maximă admisibilă din condiția de capacitate portantă) a fost mai mare decît cea admisibilă ($tg\alpha_1 = 0{,}01$) și practic egală cu condiția mai puțin severă ($tg\alpha_2 = 0{,}015$).

Acest lucru ne arată că pentru fundațiile stîlpilor puternic solicitați și unde valoarea lui λ_1 este mai mică decît patru, s-ar putea în exploatare să apară deplasări și rotiri mai mari decît cele admisibile dacă considerăm pentru capacitatea portantă un coeficient de siguranță (sau coeficient echivalent) egal cu 1,5. Concluzia ar fi valabilă pentru fundațiile stîlpilor speciali (colț și terminal).

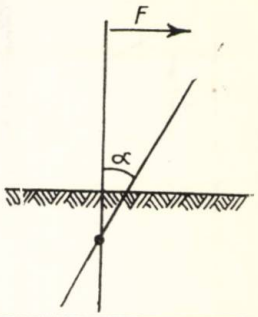
2.3. INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA POZIȚIEI AXEI DE ROTAȚIE

După cum se cunoaște, poziția axei de rotație caracterizează raportul dintre reacțiunile pămîntului în față și în spatele fundației în timpul deplasării și rotirii ei. Factorii care influențează poziția axei sînt multipli : uniformitatea compactării straturilor din masivul de pămînt, natura pămîntului etc. Pentru obținerea unor clasificări s-a studiat fenomenul în laborator pe modele reduse în nisip, unde se puteau realiza straturi mult mai omogene decît în terenul natural. După aceea s-au făcut experiențe asemănătoare pe modele mari.

În figurile 2.3.1 și 2.3.2 s-au trasat diagramele de variație a poziției axei de rotație în funcție de M (momentul încovoietor la suprafața terenului) trecut în abscisă, iar în ordonată au fost trecute valorile lui $\theta = h_0/h$.

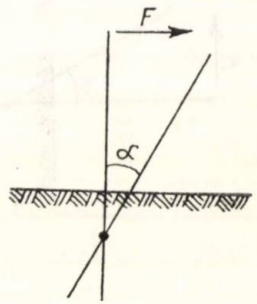
Din analiza rezultatelor prezentate se observă că mărindu-se valoarea forței tăietoare poziția axei de rotație se deplasează înspre baza fundației. Acest lucru este explicabil ținînd seama că valoarea forței tăietoare este echilibrată de o parte din reacțiunea pămîntului din fața fundației și pentru a se păstra egalitatea celor două forțe reactive din fața (parțial) și spatele fundației care vor da cuplu ce echilibrează momentul forțelor exterioare, axul de rotație se deplasează spre partea inferioară a fundației.

				$M = 5000\text{kg} \cdot \text{cm}$							
h	H	$\lambda = h/b$	$\lambda_1 = H/h$	$\frac{M}{Ms}$	tgα		$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}015}$	F		$\frac{M}{Ms}$
cm	cm			%		%	%	%	kg	%	%
40	50	2,1	1,25	61,5	0,006	300	60	40	100	400	92
	100	2,1	2,5	50,0	0,005	250	50	33	50	200	75
	200	2,1	5,0	40,0	0,002	100	20	13	25	100	60,5
50	50	2,63	1,0	47,5	0,0080	1000	80	53	100	400	71,5
	100	2,63	2,0	35,7	0,0020	250	70	13	50	200	53,5
	200	2,63	4,0	24,2	0,0008	100	8	0,5	25	100	35,7
65	50	3,42	0,77	42,5	0,0049	610	49	32,7	100	600	64,0
	150	3,42	2,31	25,2	0,0010	120	10	6,7	33,4	200	38,0
	250	3,42	3,85	21,0	0,00088	110	8,8	5,9	20,0	120	31,6
	300	3,42	4,60	20,8	0,0008	100	8,0	5,3	16,7	100	31,3



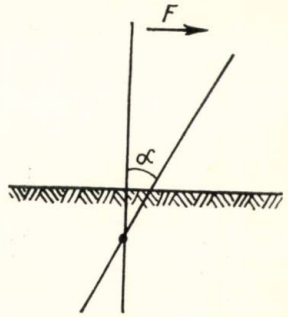
$M = 7\,500$ kg·cm						$M = 10\,000$ kg.cm						
tg α		$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}015}$	F		$\frac{M}{Ms}$	tg α		$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}015}$	F	
	%	%	%	gr	%	%		%	%	%	gr	%
0,038	630	380	252	150	400							
0,031	520	310	206	75	200	100	0,069	345	690	460	100	200
0,006	100	60	40	37,5	100	81	0,02	100	200	133	50	100
0,025	1250	250	167	150	400	95,0	0,059	1970	590	394	200	400
0,008	400	80	53	75	200	71,5	0,016	533	160	106	100	200
0,002	100	20	13	37,5	100	48,0	0,003	100	30	20	50	100
0,0150	313	150	100	150	600	85,0	0,035	390	350	233	200	600
0,008	167	80	53	50	200	50,5	0,015	167	150	100	66,7	200
0,0070	146	70	47	30	120	42,0	0,009	100	90	60	40,0	120
0,0048	100	48	32	25	100	41,6	0,009	100	90	60	33,3	100

Tabela 2.2.2 (I)



					$M = 25\,000$ gr·cm								$M = 30\,000$ gr.cm						
	H	h	$\lambda = \frac{h}{b}$	$\lambda_1 = \frac{H}{h}$	$\frac{M}{M\max}$	tg α			$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}015}$	F		$\frac{M}{M\max}$	tg α		$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg}\,\alpha}{0{,}015}$	F	
	cm	cm	—	—	%		%		%	%	gr	%	%			%	%	gr	%
3×3	89,5	15,5	5,15	5,75	26,0	0,002	100	22 %	20,0	13,4	280	100	31,0	0,0023	100	23	15,3	335	100
	73,6	16,4	5,50	4,50	26,0	0,002	100	253 %	20,0	13,4	340	122	31,8	0,0039	170	39	26,0	410	122
	23,8	16,0	5,33	1,49	39,0	0,0034	170	265 %	34,0	22,5	1050	375	46,5	0,0048	209	48	32	1260	375
	14,0	16,0	5,33	0,88	49,5	0,004	200		40,0	26,6	1785	640	59,0	0,0065	282	65	43	2140	640
4×4	90,0	15,0	3,75	6,00	22,7	0,00128	100	2 %	12,8	8,6	278	100	28,5	0,0020	100	20	13,3	334	100
	59,4	15,6	3,90	3,80	24,7	0,0013	102	4 %	13,0	8,7	420	151	29,8	0,0022	110	22	14,7	505	151
	23,2	16,8	4,20	1,38	28,3	0,00135	106	66 %	13,5	9,0	1080	388	33,8	0,0024	120	24	16,0	1300	388
	12,6	17,4	4,35	0,72	40,5	0,0022	172		22,0	14,6	1985	715	48,5	0,0035	175	35	23,3	2380	715

Tabela 2.2.2. (II)



M = 40 000 gr·cm							M = 50 000 gr·cm							M = 60 000 gr·cm						
M/max	tg α		$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}015}$	F		M/max	tg α		$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}015}$	F		M/max	tg α		$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}01}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{0{,}015}$	F	
%		%	%	%	gr.	%	%		%	%	%	gr.	%	%		%	%	%	gr.	%
41,5	0,0059	100	39	26,0	446	100	51,5	0,0063	100	63	42	500	100	62	0,01	100	100	66,7	670	100
42,5	0,0059	151	59	39,4	542	122	53,0	0,0084	133	84	56	680	122	64	0,012	120	120	80	815	122
62,5	0,0094	240	94	62,5	1680	375	78,0	0,181	288	181	120	2100	375	94	0,029	290	290	192	2520	370
79,0	0,0178	436	170	113	2860	640	98,0	0,042	666	420	280	3570	640	118						
38,0	0,0032	100	32	21,3	445	100	47,5	0,0046	100	46	30,6	555	100	57	0,0066	600	66	44	670	100
39,7	0,0038	118	38	25,3	670	151	49,8	0,0060	130	60	40	840	151	59,7	0,0086	131	86	57	1010	151
45,0	0,0043	134	43	28,5	1720	388	56,5	0,0080	174	80	53	2160	388	68	0,0134	203	134	90	2580	385
65,0	0,0066	206	66	44	3170	715	81,0	0,012	260	120	80	3970	715	97	0,026	400	260	173	4750	710

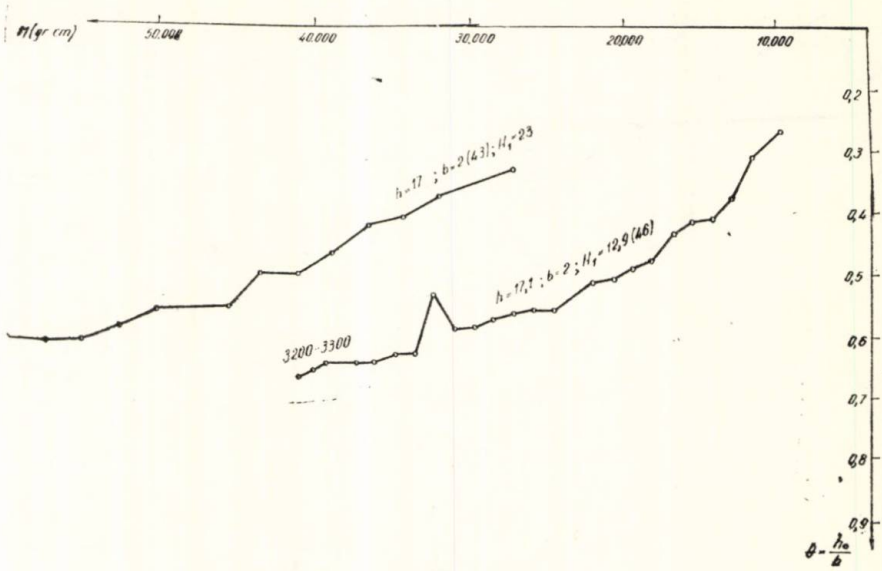


Fig. 2.3.1.

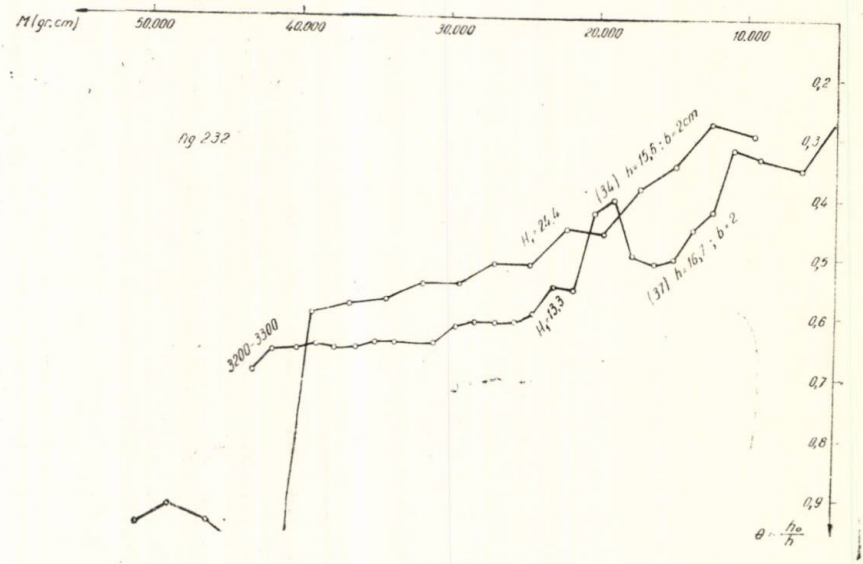


Fig. 2.3.2.

Trebuie menționat că, chiar pe modele reduse, rezultatele nu întotdeauna au confirmat aceste observații uneori obținîndu-se unele abateri tocmai datorită unor neomogenități în compactarea nisipului din bazin.

În tabelele 2.3.1. s-au trecut rezultatele, unor încercări pe modele

Tabela 2.3.1.

Nr. crt.	h cm	H cm	h_0		λ_1	$\theta = \frac{h_0}{h}$
				%		
1	65	50	37,5	100	0,77	0,58
2	65	100	29,2	79	1,54	0,45
3	65	150	34,6	92	2,31	0,53
4	65	200	30,3	81	3,07	0,47
5	65	250	27,2	73	3,84	0,42
6	65	300	33,2	89	4,6	0,51

mari, unde compactarea stratelor era diferită. Se constată uneori mici abateri de la observațiile făcute pentru rezultatele încercărilor pe modele reduse, dar în același timp se vede că la încercările pe modele mari poziția axei de rotație este mai aproape de nivelul terenului și chiar uneori valoarea lui θ este mai mică de 0,5, ceea ce se explică prin compactarea mai puternică a stratelor superioare.

Desigur, în pămînturile naturale, aceste abateri sînt și mai pronunțate.

Aceste rezultate ne arată că în relațiile de calcul a poziției axei de rotație este necesar să apară ca parametri și valoarea forței tăietoare la stadiul de solicitare considerat.

3. STUDII TEORETICE

După cum s-a observat din rezultatele studiilor experimentale valoarea forței tăietoare influențează capacitatea portantă a masivului de pămînt, reducînd-o mai ales cînd valoarea raportului λ_1 este mai mică decît patru. Din analiza suprafețelor diagramelor de presiune se constată că o parte din reacțiunea masivului de pămînt din fața fundației este consumată pentru a echilibra forța tăietoare. Tot pe cale experimentală s-au trasat diagrame care ne arăta modul de reducere a capacității portante. Problema trebuie analizată în complexul ei deoarece aceasta influențează și asupra momentului maxim la care se dimensionează stîlpul și asupra poziției secțiunii cea mai solicitată.

Vom analiza cazul unei fundații fișate (stîlp introdus direct în pămînt) unde această problemă are importanță deosebită, avînd în vedere secțiunea relativ redusă a fundației.

Proiectantul unei astfel de lucrări trebuie să cunoască următoarele elemente pentru a putea face o dimensionare mai riguroasă :

— care este momentul capabil al masivului de pămînt (M_s);

— unde sub nivelul terenului este valoarea momentului maxim în stîlp (y_0);

— care este valoarea momentului maxim care apare în stîlp (M_{st}).

Pentru aceasta considerăm schema de calcul prevăzută în figura 3.1. Se menţionează că se consideră cazul cel mai defavorabil cînd presiunea limită are aceiaşi valoare atît în faţa fundaţiei cît şi în spatele ei, deoarece

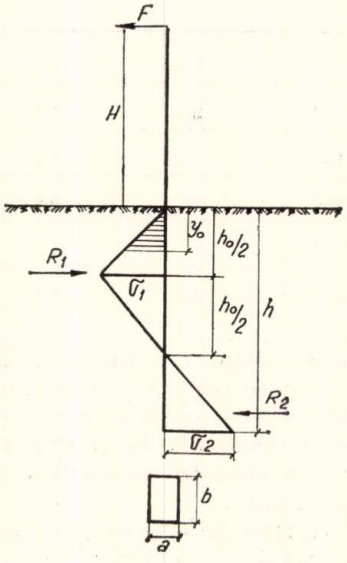


Fig. 3.1

lăţimea fundaţiei fiind redusă la astfel de fundaţii adîncimea critică (h_c) este aproximativ la nivelul $h_0/2$. De asemenea, cînd valoarea forţei tăietoare este apreciabilă în comparaţie cu aceea a momentului şi pierderea stabilităţii are loc prin formarea unor zone plastice puternice în faţă, ceea ce determină atingerea mai întîi a stării limite de deformaţii, deşi în spatele fundaţiei nu s-a atins presiunea limită (în ipoteza că aceasta ar avea o valoare mai mare în spatele fundaţiei decît la nivelul $h_0/2$).

Din aceste considerente se va lua în calcul $\sigma_1 = \sigma_2$.

Se scrie valoarea celor două rezultante a reacţiunii pămîntului, luînd în considerare şi forţele de frecare ce iau naştere pe feţele laterale (a) ale fundaţiei şi care se opun deplasării şi rotirii lor:

$$R_1 = \frac{1}{2}\,\sigma_1 \cdot b \cdot h_0 + 2\,a \cdot h_0 \cdot f_1 = \frac{1}{2}\,h_0 \cdot \sigma_1 \left(b + 4\,a\,\frac{f_1}{\sigma_1}\right),$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\,\sigma_1 \cdot b \cdot (h - h_0) + 2\,a\,f_1\,(h - h_0) = \frac{1}{2}\,(h - h_0)\,\sigma_1 \left(b + 4\,a\,\frac{f_1}{\sigma_1}\right),$$

f_1 = forţa de frecare pe unitatea de suprafaţă (t/m2).

Valoarea lui f_1 se poate lua din prescripțiile de calcul a piloților la încărcări orizontale sau, avînd în vedere aportul relativ redus pe care îl aduce în relația noastră, se poate considera:

— pămînturi argiloase grase	1 t/m2,
— pentru pămînturi argilo-nisipoase	2 t/m2,
— pentru nisipuri argiloase, și nisipuri medii	3 t/m2,
— pentru nisipuri mari (pietriș)	4 t/m2.

După cum se vede, relațiile de mai sus se pot simplifica înlocuind valoarea lui b cu $b_0 = \left(b + 4\,a\,\frac{f_1}{\sigma_1}\right)$ și în calcule vom introduce în loc de b pe b_0 și prin aceasta s-a ținut seama de forțele de frecare pe fețele laterale paralele cu direcția de acționare a forțelor orizontale [1], [2].

Cu aceste observații valorile reacțiunilor sînt:

$$R_1 = \frac{1}{2}\,h_0\,\sigma_1\,b_0\,;\quad R_2 = \frac{1}{2}\,(h - h_0)\sigma_1 \cdot b_0,$$

$$b_0 = \left(b + 4\,a\,\frac{f_1}{\sigma_1}\right).$$

După cum s-a mai arătat înainte, forța tăietoare este echilibrată de o parte din reacțiunea pămîntului din fața fundației, deci se poate scrie valoarea lui F în funcție de R_1.

$$F = K_F\,R_1 = \frac{1}{2}\,K_F\,h_0\,\sigma_1\,b_0,$$

K_F = un coeficient adimensional.

Se scrie ecuația de proiecții pe orizontală de unde rezultă valoarea lui $\theta = h_0/h$.

$$F - R_1 + R_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,K_F\,h_0\,\sigma_1\,b_0 - \frac{1}{2}\,h_0\,\sigma_1\,b_0 + \frac{1}{2}\,(h - h_0)\,\sigma_1\,b_0 = 0.$$

Notăm $h_0 = \theta\,h$, rezultă

$$\frac{1}{2}\,K_F\,\theta h\,\sigma_1\,b_0 + \frac{1}{2}\,h\,\sigma_1\,b_0 - \theta h\,\sigma_1\,b_0 - 0,$$

$$(2 - K_F)\theta = 1\,;\quad \theta = \frac{1}{2 - K_F}, \tag{3.1}$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1843

Se scrie ecuația de momente a tuturor forțelor față de centrul de greutate al reacțiunii R_1. Se obține :

$$F\left(H+\frac{h_0}{2}\right)=R_2\left[\frac{h_0}{2}+\frac{2}{3}(h-h_0)\right].$$

Se înlocuiește $h_0=\theta h$ și valorile lui F și R_2, se obține ecuația :

$$(3K_F-1)\,\theta^2+\left(6K_F\frac{H}{h}+5\right)\theta-4=0. \tag{3.2}$$

Se ajunge la următoarea ecuație în K_F :

$$2\left(3\frac{H}{h}+2\right)K_F^2-2\left(6\frac{H}{h}+7\right)K_F+7=0,$$

$$H/h=\lambda_1$$

$$2\,(3\lambda_1+2)\,K_F^2-2)\,6\,\lambda_1+7)\,K_F+7=0. \tag{3.3}$$

Din această ecuație se obține valoarea coeficientului K_F, care ne arată ce cantitate din volumul forțelor reactive din față a masivului de pământ este cheltuită pentru echilibrarea forței tăietoare

$$K_F=\frac{(6\,\lambda_1+7)-\sqrt{(6\,\lambda_1+7)^2-14\,(3\,\lambda_1+2)}}{2\,(3\,\lambda_1+2)}. \tag{3.4}$$

Pentru a determina valoarea momentului capabil al masivului de pământ, trebuie să determinăm și brațul de pîrghie al cuplului rezistent. Pentru aceasta este necesar mai întîi să determinăm la ce distanță sub nivelul terenului se anulează forța tăietoare și deci unde momentul este maxim pentru stîlp (y_0). Această valoare se determină în funcție de K_F. Scrim că raportul dintre F și R_1 este egal cu coeficientul K_F.

$$F=\frac{1}{2}y_0\cdot\frac{y_0}{h_0/2}\,\sigma_1\cdot b_0=\frac{\sigma_1 b_0}{h_0}y_0^2,$$

$$R_1=\frac{1}{2}\,\sigma_1\,b_0\,h_0,$$

$$K_F=\frac{F}{R_1}=\frac{2\,\sigma_1\,b_0\,y_0^2}{h_0}\cdot\frac{2}{\sigma_1\,b_0\,h_0}=\frac{2\,y_0^2}{h_0^2},$$

$$\frac{K_F}{2}\,h_0^2=y_0^2;\quad y_0=h_0\sqrt{\frac{K_F}{2}}. \tag{3.5}$$

Cunoscînd valoarea lui y_0 să determinăm brațul de pîrghie (d_1) al cuplului.

Să determinăm mai întîi centrul de greutate d_1 al suprafeței diagramei de presiune din fața stîlpului (ținînd seama că o parte a fost utilizată pentru echilibrarea forței tăietoare). Considerînd originea axelor în centrul de rotație rezultă valoarea lui d_1'

$$d_1' = \frac{h_0 (3 - 2\sqrt{2K_F + 2K_F})}{12\left(1 - \sqrt{\frac{K_F}{2}}\right)}. \tag{3.6}$$

Brațul de pîrghie va fi atunci

$$d_1 = \frac{h_0 (3 - 2\sqrt{2K_F} + 2K_F)}{12\left(1 - \sqrt{\frac{K_F}{2}}\right)} + \frac{2}{3}(h - h_0).$$

Făcînd înlocuirea lui h_0 și toate operațiunile corespunzătoare, se obține valoarea lui d_1 în funcție de K_F și h, mărimi cunoscute

$$d_1 = \frac{h}{6}\left[\frac{11 - 6\sqrt{2K_F} + 4K_F\sqrt{2K_F} - 6K_F}{(2 - K_F)(2 - \sqrt{2K_F})}\right]. \tag{3.7}$$

În proiectarea fundațiilor, pentru a nu utiliza această relație greoaie se pot adopta următorii coeficienți aproximativi:

K_F	d_1
0 — 0,1	... $h/2$
0,1 — 0,3	... 0,95 $h/2$
0,5 — 0,6	... 0,90 $h/2$

Se fac interpolări pentru valori ale lui K_F cuprinse între cele trecute în tabelă.

Deci valoarea momentului capabil al masivului de pămînt pentru anumită fundație va fi:

$$M_s = (1 - K_F) R_1 d_1,$$

$$M_s = (1 - K_F)\frac{1}{2}\sigma_1 b_0 h_0 d_1 = \frac{1 - K_F}{2}\sigma_1 b_0 \theta h d_1,$$

$$M_s = \frac{1 - K_F}{2}\sigma_1 b_0 h \frac{1}{2 - K_F} d_1 = \frac{1 - K_F}{2(2 - K_F)}\sigma_1 h b_0 d_1. \tag{3.8}$$

Acesta trebuie comparat cu momentul maxim, din sarcinile exterioare şi care dimensionează stîlpul. Să determinăm acest moment (M_{st})

$$M_{st} = F(H + y_0) - F \times \frac{2}{3} y_0 = F\left(H + \frac{y_0}{3}\right) \tag{3.9}$$

În acest mod au fost determinate elementele necesare proiectării unei fundaţii fişate încastrată în pămînt. Valoarea parametrului σ_1 reprezintă presiunea limită pe care o poate suporta pămîntul.

Menţionăm că aceste relaţii se pot aplica şi la calculul piloţilor supusi la încărcări orizontale.

În concluzie se poate afirma că forţa tăietoare nu poate fi neglijată, ci trebuie să se ţină seama de influenţa ei atît la calculul capacităţii portante cît şi a deformaţiilor.

Primită la redacţie la 26 octombrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. W. A. Jalil, *Sollicitations horizontales des pieux*, Construction, *5*, *7*, *8*, *10* (1967).
2. Y. Kerisel, M. Adam, *Calcul des forces horizontales applicables aux fondations profondes dans les argiles et limons*, Annales de l'I.T.B.T.P., Nov. 1967.
3. Alex. Vaicum, *O nouă metodă de calcul pentru fundaţiile încastrate elastic*, Energetica *11* (1960).
4. Alex. Vaicum, *Studii teoretice şi experimentale privind fundaţiile încastrate în pămînt*, Informaţii documentare I.S.P.E., Bucureşti, 1965.

ASUPRA CONDIȚIILOR DE ETANȘARE ALE SEGMENȚILOR DE PISTON ÎN CAZUL VARIAȚIEI DIAMETRULUI DE MONTAJ

de RODICA MANIȚIU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

În lucrare se analizează influența pe care variația diametrului de montaj al cilindrului o are asupra legii de repartiție a presiunii radiale și asupra contactului segment-cilindru. Segmentul este presupus de presiune variabilă pe contur, repartiția presiunii avînd loc după o lege oarecare.

1. INTRODUCERE

Principalul rol funcțional al segmenților de piston este de a asigura etanșarea spațiului de lucru al cilindrului în care evoluează fluidul motor. Pentru a îndeplini această misiune segmentul este astfel dimensionat încît la montarea în cilindru el să se așeze corect pe întreaga circumferință a acestuia și să exercite în fiecare punct asupra cilindrului o presiune care să varieze după o lege dată.

Există însă numeroase împrejurări cînd dimensiunile grupului segment-cilindru se modifică în funcționare și aceasta are ca urmare modificarea condițiilor de etanșare considerate în calculul segmentului și realizate la montare; printre acestea se citează uzura radială a segmenților și cilindrului, dilatarea termică inegală cauzată de temperaturile diferite ale pistonului pe de o parte și ale cilindrului în vecinătatea punctelor moarte pe de altă parte; de asemeni, o uzinare defectuoasă, folosirea unor cilindri ale căror diametre se găsesc în afara toleranțelor admise sînt cauze care schimbă condițiile de etanșare considerate la proiectare.

Din punctul de vedere al studiului teoretic, cazurile posibile pot fi grupate în două situații caracteristice și anume:

— diametrul cilindrului este mai mare decît diametrul nominal considerat în calculul segmentului;

— diametrul cilindrului este mai mic decît diametrul nominal.

În lucrare se cercetează problema influenței pe care modificarea diametrului cilindrului o are asupra contactului segment-cilindru și asupra legii de repartiție a presiunii în zonele de contact.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 921—932

Sînt analizate ambele situații caracteristice pentru un segment cu repartiția inițială a presiunii după o lege oarecare.

2. CONDIȚIILE DE ETANȘARE ÎN CAZUL MONTĂRII SEGMENTULUI ÎNTR-UN CILINDRU CU DIAMETRUL MAI MARE DECÎT DIAMETRUL NOMINAL

Situația se întîlnește în cazul cilindrilor uzați sau în vecinătatea punctului mort interior, cînd temperatura cilindrului în vecinătatea camerei de ardere este mai mare decît temperatura segmentului; ea apare, de asemeni, în cazul folosirii unor cilindri al căror diametru depășește valoarea prevăzută la proiectare.

În calculele ce urmează s-a afectat indicele 0 mărimilor ce se referă la un segment presupus a fi montat la diametru nominal, pentru a le deosebi de aceleași mărimi ce se realizează atunci cînd segmentul este montat într-un cilindru de diametru diferit de cel nominal.

Fie p_{ψ_0} valoarea presiunii — raportată la fibra medie — pe care segmentul montat trebuie să o exercite în secțiunea ψ asupra cilindrului (fig. 1). Pentru o lege oarecare de variație, p_{ψ_0} poate fi exprimat în formula cea mai generală cu ajutorul seriilor trigonometrice sub forma

$$p_{\psi_0} = p_m \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\,\psi\right). \tag{1}$$

unde p_m reprezintă valoarea medie a acestei presiuni, iar b_m, coeficienți numerici ai seriei.

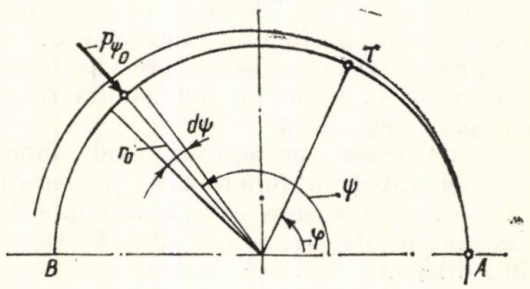


Fig. 1. — Modificarea formei libere a segmentului la montarea sa în cilindru.

Momentul încovoietor produs într-o secțiune oarecare, precizată de unghiul ψ, de forțele datorite presiunii ce acționează pe arcul BT are expresia

$$M_{\varphi_0} = -\,h\,r_0^2 \int_{\varphi}^{\pi} p_{\psi_0} \sin(\psi - \varphi)\,\mathrm{d}\,\psi, \tag{2}$$

unde h este înălțimea segmentului iar $r_0 = \dfrac{D_0 - a}{2}$ este raza fibrei medii a segmentului montat în cilindru.

Momentul încovoietor este considerat pozitiv cînd tinde să mărească raza de curbură a fibrei medii și negativ în caz contrar; potrivit acestei convenții de semne, momentul încovoietor produs de forțele datorite presiunii este negativ.

Dacă în formula (2) se înlocuiește p_{ψ_0} cu expresia sa din (1), se obține după efectuarea calculelor

$$M_{\varphi_0} = -p_m hr_0^2 \left\{(1 + \cos\varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\varphi + (-1)^n \cos\varphi]\right\}. \quad (3)$$

În cazul segmentului montat într-un cilindru al cărui diametru D este mai mare decît diametrul nominal D_0, momentul încovoietor într-o secțiune φ poate fi exprimat sub forma

$$M_\varphi = M_{\varphi_0} + M, \quad (4)$$

unde M_{φ_0} este momentul încovoietor ce ar acționa în secțiunea φ dacă segmentul ar fi montat la diametrul nominal, iar

$$M = EI\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad (5)$$

este momentul încovoietor suplimentar ce apare în secțiunea φ datorită modificării razei fibrei medii de la valoarea r_0 la r; deoarece în acest caz raza de curbură crește, momentul M este pozitiv.

Folosind pentru momentele încovoietoare din formula (4) expresiile din (3) și (5) se obține, în sfîrșit,

$$M_\varphi = -hr_0^2 \int_\varphi^\pi p_{\psi_0} \sin(\psi - \varphi)\, d\psi + EI\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (6)$$

Pentru stabilirea expresiei presiunii pe fibra medie se folosește ecuația diferențială a momentului încovoietor cunoscută din teoria elasticității:

$$M_\varphi + \frac{d^2 M_\varphi}{d\psi^2} = -p_\varphi hr^2. \quad (7)$$

Prezența semnului minus în membrul doi al ecuației ia în considerație faptul că, în mod uzual, presiunea radială a segmentului este considerată pozitivă atunci cînd este îndreptată spre centrul de curbură, în timp ce momentul încovoietor produs de forțele datorite acestei presiuni este, potrivit convenției precedente, negativ.

Dacă se utilizează în ecuația (7) expresia (6) a momentului M_φ, se obține, după efectuarea integrării și transformări convenabile

$$p_\varphi = \beta p_m \left(1 + k + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\varphi\right), \quad (8)$$

unde coeficienții β și k sînt definiți de relațiile

$$\beta = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \tag{9}$$

$$k = \frac{EI(r_0 - r)}{hr_0^3 r p_m}, \tag{10}$$

ce satisfac inegalitățile $\beta < 1$ și $k < 0$.

Din cercetarea formulelor (6) și (8) se desprind următoarele concluzii :

— momentul încovoietor M_φ ce apare într-o secțiune a segmentului montat la un diametru mai mare decît diametrul nominal este mai mic decît cel corespunzător montării la diametrul nominal, cu o valoare constantă ce depinde de diferența celor două diametre ; cum M_{φ_0} este în permanență negativ și se anulează în capătul liber al segmentului, iar M este pozitiv și constant, rezultă că există o secțiune în care momentul încovoietor total se anulează ; această secțiune marchează locul desprinderii segmentului de pe oglinda cilindrului ;

— legea de variație a presiunii pe circumferință se modifică ca urmare a creșterii diametrului de montaj ; într-adevăr, din formula (8), ținînd seama de valorile coeficienților β și k rezultă că presiunea radială scade în fiecare secțiune.

Pentru determinarea unghiului pe care se menține contactul segmentului cu cilindrul, se introduce condiția $M_\varphi = 0$ în formula (6) ; dacă

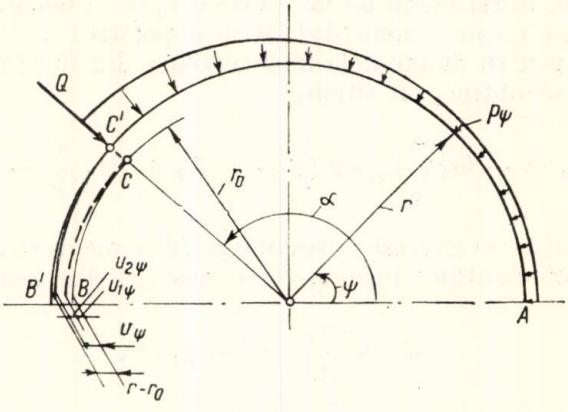


Fig. 2. — Fibra medie a segmentului în cazul montării la diametrul $D > D_0$.

se notează cu α acest unghi (fig. 2), mărimea sa este soluția ecuației trigonometrice

$$1 + \cos\alpha - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\alpha + (-1)^n \cos\alpha] = \frac{EI(r - r_0)}{hr_0^3 r p_m}. \tag{11}$$

Forța de reacțiune Q ce apare în secțiunea de desprindere a segmentului se determină din condiția de echilibru a forțelor ce lucrează asupra seg-

mentului ; proiectînd aceste forțe pe axa ce trece prin deschidere, condiția de echilibru devine

$$\int_0^{\alpha} r\,i \cos \varphi \, d\varphi + Q \cos \alpha = 0.$$

Dacă se înlocuiește în relația precedentă presiunea p cu expresia sa din (8), rezultă pentru forța Q expresia

$$Q = -\beta p_m hr\left\{(1+k)\operatorname{tg}\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2-1}(n \sin n\alpha - \cos n\alpha \operatorname{tg}\alpha)\right\}.$$

Jocul între segment și cilindru, într-o secțiune situată în zona de desprindere, are expresia

$$\Delta_\psi = (r - r_0) - u_\psi, \tag{12}$$

unde u_ψ reprezintă deplasarea fibrei medii a segmentului față de starea circulară de rază r_0. Ea poate fi obținută ca sumă a două deplasări parțiale succesive realizate după cum urmează :

— se aplică segmentului în starea circulară de rază r_0 un moment încovoietor care aduce arcul CB în stare liberă (Fig. 2, curba figurată cu linie întreruptă) ; fie u_{1_ψ} deplasarea radială produsă astfel într-o secțiune ψ ;

— se deplasează punctul C în C' ; în acest fel fiecare punct de pe arcul CB al segmentului liber suferă o deplasare

$$u_{2_\psi} = (r - r_0)\cos(\psi - \alpha), \tag{13}$$

iar arcul respectiv ajunge în poziția $C'B'$.

Expresia deplasării u_{1_ψ} se obține aplicînd principiul deplasărilor virtuale. Fie H o forță virtuală ce lucrează asupra segmentului pe direcția ψ ; deplasarea u_{1_ψ} se exprimă în acest caz sub forma

$$u_{1_\psi} = \frac{1}{EI}\int_\psi^{\alpha} (M_{\varphi_0} - Hr_0 \sin\varphi)\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H} r_0 \, d\varphi,$$

unde

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial H} = -r_0 \sin\varphi.$$

După efectuarea integrării și grupare convenabilă a termenilor se obține

$$u_{1_\psi} = \frac{p_m hr_0^4}{EI}\left\{(\cos\alpha - \cos\psi) - \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\psi}{2}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{b_n}{n^2-1}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2-1} \frac{\cos n\alpha \cos\alpha - n \sin n\alpha \sin\alpha + n \sin n\psi \sin\psi - \cos n\psi \cos\psi}{n^2-1}\right\}. \tag{14}$$

Cu formulele (13) și (14) ale deplasărilor parțiale, expresia (12) a jocului Δ_ψ dintre segment și cilindru devine

$$\Delta_\psi = [1-\cos(\psi-\alpha)](r-r_0) - \frac{p_m h r_0^4}{EI}\left\{\cos\psi - \cos\alpha + \right.$$

$$+ \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\psi}{2}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{b_n}{n^2-1}\right) -$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2-1}\left(\frac{-n\sin n\alpha \sin\alpha + \cos n\alpha\cos\alpha + n\sin n\psi\sin\psi - \cos n\psi\cos\psi}{n^2-1}\right)\right\}.$$

Valoarea maximă a acestui joc se realizează în capătul liber al segmentului; expresia ei se obține operînd în formula precedentă înlocuirea $\psi \to \pi$

$$\Delta_{max} = (1+\cos\alpha)(r-r_0) - \frac{p_m h r_0^4}{EI}\left\{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2-1}\left[(-1)^n \frac{\sin^2\alpha}{2} + \frac{\cos n\alpha\cos\alpha - n\sin n\alpha - (-1)^n}{n^2-1}\right]\right\}.$$

3. CONDIȚIILE DE ETANȘARE ÎN CAZUL MONTĂRII SEGMENTULUI ÎNTR-UN CILINDRU CU DIAMETRUL MAI MIC DECÎT DIAMETRUL NOMINAL

Această situație apare în apropierea punctului mort exterior unde temperatura cilindrului este mai mică decît temperatura capului pistonului și a segmentului, precum și în cazul folosirii unor cilindri cu diametrul mai mic decît cel prescris.

Expresia momentului încovoietor care ar solicita secțiunea φ a segmentului dacă acesta ar fi montat la diametrul nominal este precizată de formula (3). Momentul încovoietor suplimentar M care apare datorită trecerii fibrei medii de la starea caracterizată de valoarea r_0 la o stare r, are expresia (15); deoarece în acest caz raza fibrei medii scade, M este negativ, iar momentul încovoietor total ce lucrează asupra segmentului în noua stare este

$$M_\varphi = -hr_0^2\int_\varphi^\pi p_{\psi_0}\sin(\psi-\varphi)\,d\psi - EI\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \qquad (15)$$

Din analiza formulei (15) rezultă că în cazul montării segmentului într-un cilindru de diametru mai mic, momentul încovoietor este negativ în fiecare secțiune (mai mare în valoare absolută decît cel corespunzător montării la diametrul nominal); el nu se mai anulează în capătul liber al segmentului.

Noua distribuție a momentelor încovoietoare pe conturul segmentului nu mai este compatibilă cu forma circulară de echilibru a fibrei medii; ca urmare, aceasta trece la o nouă formă de echilibru, corespunzătoare distribuției momentelor: segmentul se desprinde de pe cilindru de o parte și de cealaltă a capetelor, care rămîn în continuare în contact cu cilindrul (fig. 3).

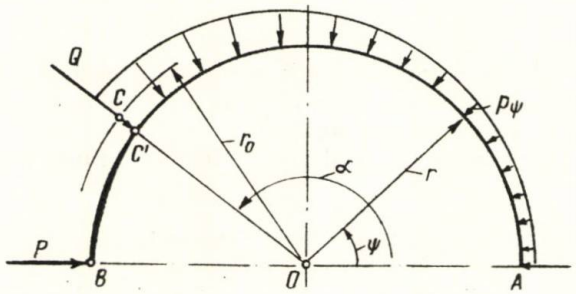


Fig. 3. — Fibra medie a segmentului în cazul montării la diametrul $D < D_0$.

Pentru stabilirea expresiei presiunii pe fibra medie, se integrează ecuația diferențială (7), folosind pentru momentul încovoietor expresia din formula (15); rezultă pentru presiunea radială expresia (8); valorile coeficienților β și k ce corespund formulelor (9) și (10) satisfac de această dată inegalitățile $\beta > 1$ și, respectiv, $k > 0$. Se constată deci că legea de distribuție a presiunii se modifică, presiunea radială crescînd în fiecare din secțiunile ce rămîn în contact cu cilindrul.

Determinarea reacțiunii P din capătul liber al segmentului se face exprimînd momentul încovoietor care lucrează asupra segmentului în secțiunea de desprindere α, în funcție de forța P precum și în funcție de M_{φ_0} și M; din identificarea celor două exprimări rezultă pentru P expresia

$$P = \frac{1}{r \sin\alpha}\left\{ p_m h r_0^2 \left\{ (1 + \cos\alpha) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\alpha + (-1)^n \cos\alpha] \right\} + \right.$$

$$\left. + EI \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right\}. \qquad (16)$$

Reacțiunea Q ce apare în secțiunea de desprindere α se determină din ecuația de echilibru a forțelor ce lucrează asupra segmentului pe direcția axei ce trece prin deschidere

$$\int_0^{\alpha} p_\varphi h r \cos\varphi \, d\varphi + Q \cos\alpha + P = 0,$$

care, rezolvată în raport cu Q, duce la

$$Q = -\beta h r p_m \left\{ (1 + k)\ \mathrm{tg}\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} (n \sin n\alpha \cos \alpha - \cos n\alpha \sin\alpha) \right\} - \frac{P}{\cos \alpha}. \tag{17}$$

Unghiul de desprindere α se stabilește exprimînd deplasarea capătului liber al segmentului, care în acest caz este $r_0 - r$, ca sumă a două deplasări parțiale succesive și anume :

— deplasarea capătului B datorită mutării punctul C în C', care are expresia

$$u_1 = -(r_0 - r) \cos \alpha ;$$

— deplasarea capătului B pe direcția forței P datorită momentului suplimentar ce încarcă segmentul montat la un diametru mai mic

$$u_2 = -\int_{\pi}^{\alpha} (M_\varphi - M_{\varphi_0}) \frac{\partial M_\varphi}{\partial P} r\, \mathrm{d}\varphi.$$

Semnul minus afectat mărimilor u_1 și u_2 ține seama că deplasările se fac spre centrul 0.

Exprimînd pe M_φ cu ajutorul forței P și folosind expresia (16) a acesteia se obține, după efectuarea integrării și prelucrarea rezultatelor,

$$u_2 = -\frac{p_m h r_0^2 r^2}{EI} \left[\frac{\alpha - \pi - \sin\alpha \cos\alpha}{2 \sin \alpha} \left\{ k + 1 + \cos \alpha - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\alpha + (-1)^n \cos \alpha] \right\} + \frac{(1+\cos \alpha)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} \left[\frac{n \sin n\alpha \sin \alpha + \cos n\alpha \cos \alpha + (-1)^n}{n^2 - 1} + (-1)^n \frac{\cos 2\alpha - 1}{4} \right] \right\}.$$

Folosind în egalitatea

$$r_0 - r = u_1 + u_2$$

expresiile precedente pentru u_1 și u_2 se obține relația care leagă unghiul de desprindere α de diferența $r_0 - r$ a razelor fibrei medii, presiunea radială a segmentului și caracteristicile geometrice și mecanice ale secțiunii transversale

$$\frac{(r_0 - r) EI}{p_m h r_0^2 r^2} = \frac{(1 + \cos \alpha)\ (\pi - \alpha - \sin \alpha)}{\alpha - \pi + 2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} - (K_1 + K_2), \tag{18}$$

unde

$$K_1 = \frac{\pi - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\alpha - \pi + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\alpha + (-1)^n \cos\alpha],$$

$$K_2 = \frac{1}{\alpha - \pi + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} \times$$

$$\times \left[\frac{n\sin n\alpha \sin\alpha + \cos n\alpha \cos\alpha + (-1)^n}{n^2 - 1} + (-1)^n \frac{\cos 2\alpha - 1}{4} \right].$$

Din ecuația transcendentă (18) se determină mărimea unghiului de desprindere α; din formulele (16) și (17) se pot stabili apoi reacțiunile P și Q.

4. INFLUENȚA LEGII DE REPARTIȚIE A PRESIUNII ASUPRA CONDIȚIILOR DE ETANȘARE ÎN CAZUL VARIAȚIEI DIAMETRULUI DE MONTAJ

Fie un segment cu legea de repartiție a presiunii de forma $p_\varphi = p_m\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\varphi\right)$, care asigură în regiunea deschiderilor presiuni mai mari decît p_m (fig. 4a, curba figurată cu linie continuă) și un segment cu ace-

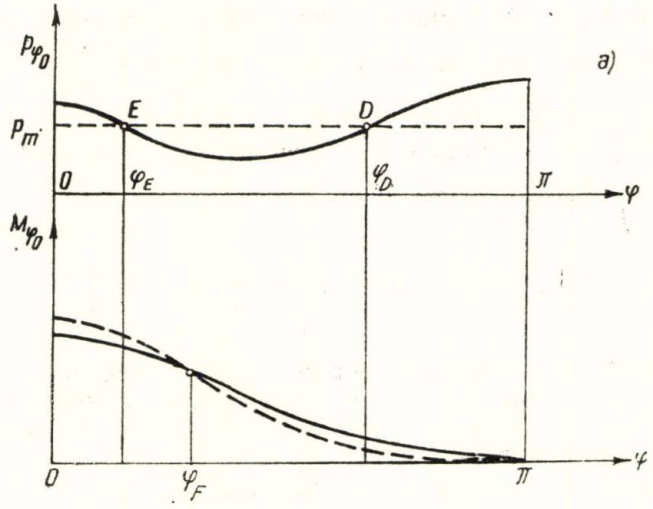


Fig. 4. — Curbele de variație a presiunii radiale și momentului încovoietor pentru un segment de presiune variabilă și un segment de presiune constantă.

leași caracteristici geometrice, dar de presiune p_m, constantă pe periferie (fig. 4a curba figurată cu linie întreruptă); fie de asemeni, curbele cores-

punzătoare de variație ale momentului încovoietor produs de forțele datorite presiunii (fig. 4b). Se constată următoarele:

— în intervalul (φ_D, π) presiunea dezvoltată de segmentul de presiune variabilă și în consecință și momentul încovoietor sînt în orice secțiune mai mari decît cele corespunzătoare segmentului de presiune constantă;

— în intervalul (φ_E, φ_D) presiunea variabilă a segmentului scade sub valoarea p_m și deci momentul încovoietor începe să scadă; cum în secțiunea opusă deschiderii momentul încovoietor este mai mic pentru segmentul de presiune variabilă decît pentru cel de presiune constantă, rezultă că există o secțiune φ_F caracterizată prin aceeași valoare a momentului pentru ambii segmenți și exprimată analitic prin relația

$$p_m h r_0^2 (1 + \cos \varphi_F) = p_m h r_0^2 \left\{ 1 + \cos \varphi_F - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\varphi_F + (-1)^n \cos \varphi_F] \right\},$$

care conduce la ecuația trigonometrică

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} [\cos n\varphi_F + (-1)^n \cos \varphi_F] = 0.$$

Dacă segmenții se montează într-un cilindru de diametru mai mare, momentul încovoietor scade în fiecare secțiune cu valoarea M precizată de relația (5). Curba de variație a momentului rezultant se obține dînd o mișcare de translație abscisei cu valoarea $EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$. Se pot prezenta două situații caracteristice și anume:

1. Momentul corespunzător secțiunii φ_F este mai mare decît $EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$ (fig. 5) adică

$$p_m h r_0^2 (1 + \cos \varphi_F) > EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Unghiurile de desprindere pentru cele două legi de repartiție sînt, respectiv, φ_G și φ_H; cum $\varphi_G > \varphi_H$, rezultă că legea de repartiție variabilă a presiunii e mai avantajoasă deoarece în cazul depășirii diametrului nominal arcul desprins e mai mic.

2. Momentul corespunzător secțiunii φ_F este mai mic decît $EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$ (fig. 6); în acest caz

$$p_m h r_0^2 (1 + \cos \varphi_F) < EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right),$$

iar între unghiurile φ_G și φ_H există relația

$$\varphi_G < \varphi_H ,$$

care arată că legea de repartiție constantă a presiunii este, în acest caz, mai avantajoasă căci asigură un arc desprins mai mic.

Din punctul de vedere al mărimii jocului dintre segment și cilindru pe arcul desprins, se constată că legea de repartiție variabilă a presiunii

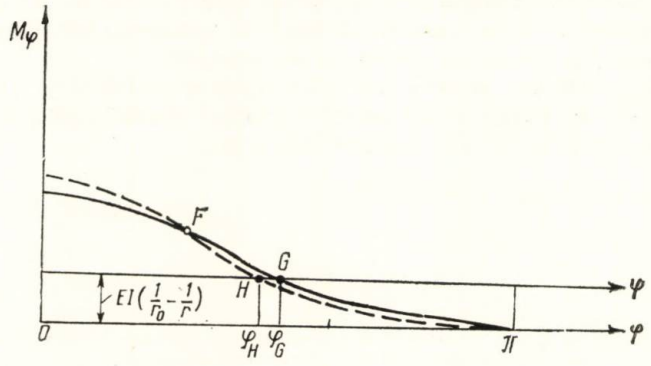


Fig. 5. — Curbele de variație a momentului încovoietor rezultant în cazul $M_F > EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$.

cu valori mai ridicate în regiunea deschiderii este mai avantajoasă, deoarece jocul Δ_ψ este în fiecare secțiune mai mic decît în cazul unui segment cu distribuție uniformă a presiunii. Într-adevăr, din relația (12) rezultă

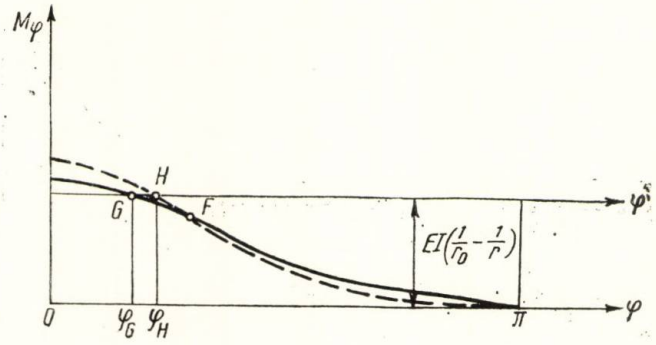


Fig. 6. — Curbele de variație a momentului încovoietor rezultant în cazul $M_F < EI\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$.

că Δ_ψ scade la creșterea deplasării u_ψ; pentru un segment de presiune variabilă, componenta $U_{1\psi}$ a deplasării totale u_ψ este mai mare decît pentru segmentul de presiune constantă, deoarece este mai mare momentul încovoietor în regiunea deschiderii.

5. CONCLUZII

Analiza efectuată dovedește că asigurarea riguroasă a contactului dintre segment și cilindru pe întreaga circumferință precum și a distribuției presiunii radiale presupune respectarea strictă a dimensiunilor de calcul.

Dacă diametrul cilindrului se modifică din cauze funcționale obiective sau datorită nerespectării tehnologiei de montaj, perfecțiunea etanșării este compromisă : segmentul se desprinde parțial de pe cilindru, indiferent de sensul în care variază diametrul nominal, iar legea de repartiție a presiunii, pe zona de contact, se modifică.

Relațiile stabilite permit calculul tuturor mărimilor ce caracterizează condițiile de etanșare în cazul variației diametrului de montaj și evaluarea lor în funcție de această variație.

Primită la redacție la 3 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. H. Arnold, *Berechnung und praktische Verwendung von offenen, ebenen Ringfedern, konstanter und inkonstanter Stärke*, Dissertationsreferat.
2. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964.
3. C. Englisch, *Kolbenringe*, Springer Verlag, Wien, 1958.
4. B. Ghințburg, *Teoria i rasciot porșnevîh kaleț*, Moscva, 1945.
5. G. P. Tolstov, *Serii Fourier*, Edit. tehnică, București, 1955.
6. G. Bărănescu, Rodica Manițiu, C. Dobre, *Asupra dimensionării segmenților de piston*, St. cerc. mec. apl., **27**, 6 (1968).

TEORIA GENERALĂ A FREZELOR MELCATE

de A. ANTAL
Institutul politehnic, Cluj

În lucrare s-a urmărit prezentarea unei metode generale pentru determinarea suprafețelor riglate elicoidale sau plane, care mărginesc dinții frezelor melcate, utilizate la prelucrarea angrenajelor. În acest scop se deduce o relație generală din care, utilizînd condițiile particulare date în tabela 1, se pot obține cu ușurință suprafețele flancurilor dinților frezei, necesare la proiectarea acestora. De asemenea, cu ajutorul tabelei 1 relația generală se poate programa pe mașini electronice de calcul, ușurînd astfel activitatea proiectanților de scule.

Pentru obținerea unui profil evolventic pe dintele roții dințate, cu dinți drepți și înclinați, în secțiune frontală, muchiile așchietoare ale frezei melcate trebuie să se afle pe o suprafață elicoidală evolventică [1], [2]. La prelucrarea roților melcate, freza melc trebuie să fie identică cu melcul și deci muchia așchietoare trebuie să se afle pe o suprafață elicoidală corespunzătoare. Suprafața elicoidală pe care trebuie să se afle muchia așchietoare se va numi suprafață elicoidală înfășurătoare sau melc înfășurător (STAS 3092—67).

În etapa actuală la fabricația roților dințate în majoritatea cazurilor se utilizează frezele melcate cu fața de degajare radială, adică frezele care au unghiul de degajare zero ($\gamma = 0$, STAS 3092—67). Aceasta este un mare neajuns al frezelor melcate deoarece condițiile de așchiere sînt mult înrăutățite.

Prezenta lucrare tratează frezele melcate sub o formă generală, considerînd melcul înfășurător o suprafață elicoidală riglată oarecare, iar fața de degajare o suprafață plană sau elicoidală riglată cu $\gamma = 0$ sau $\gamma \neq 0$.

Ecuația suprafețelor flancurilor spirei înclinată spre dreapta (fig. 1) (generată de dreptele D_s și D_d), în coordonate cilindrice, se exprimă astfel:

$$z_d = z_1 \pm z_2 = h \ (\varphi \mp \beta) \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\,\mathrm{tg}\ \theta_x, \qquad (1)$$

în care

z_d este abscisa punctului considerat;
h — parametrul mișcării de șurub;
φ — unghiul polar;
ρ — raza polară;
r_x — raza cilindrului director;
β — arc cos $\frac{r_x}{\rho}$;
θ_x — unghiul de pantă al dreptei generatoare D, pe cilindrul director.

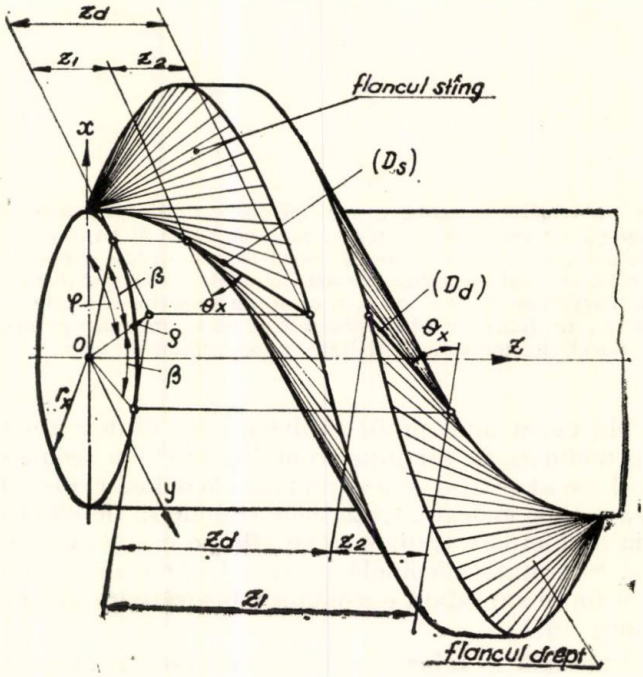


Fig. 1

În relația (1) se ia semnul de sus pentru flancul stîng, iar semnul de jos pentru flancul drept.

Dacă spira melcului este înclinată spre stînga ecuațiile flancurilor se deduc din figura 2. Astfel ecuația generală a flancurilor în acest caz este:

$$z_s = -h\ (\varphi \pm \beta) \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\,\mathrm{tg}\ \theta_x, \qquad (2)$$

unde semnul de sus se ia pentru flancul stîng iar semnul de jos pentru flancul drept.

Fața de degajare în cazul cel mai general poate fi o suprafață elicoidală oarecare. Ecuația feței de degajare al cărei sens de înclinare este funcție de înclinarea spirei melcului se poate obține din ecuația (1) sau (2)

punînd condiţiile : $h = h_c$, $\varphi = \varphi_c$, $\beta = \beta_c$, $\rho = \rho_c$, $r_x = r_c$ şi $\theta_x = \theta_c$. Prin urmare pentru freza melcată cu spira înclinată spre dreapta (fig. 3), ecuaţia feţei de degajare va fi :

$$z_{cs} = -h_c(\varphi_c - \beta_c) - \sqrt{\rho_c^2 - r_c^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_c. \tag{3}$$

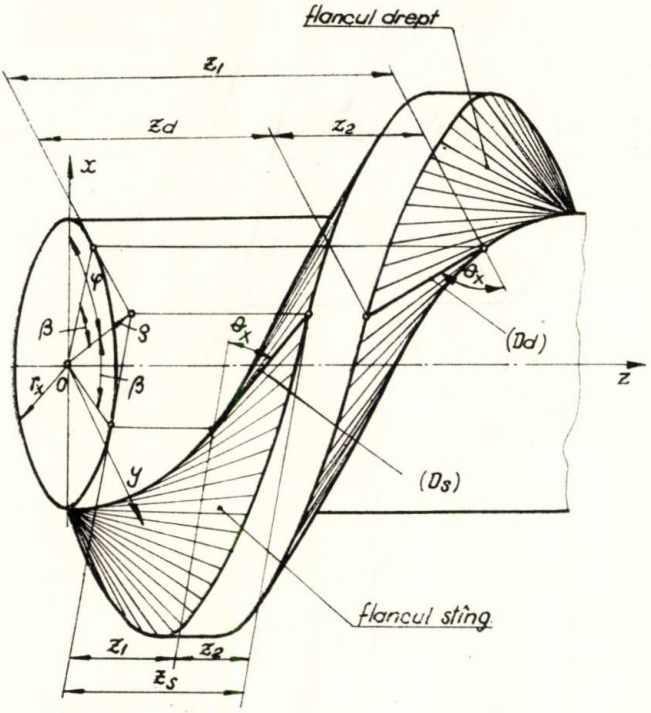


Fig. 2

Pentru spira înclinată spre stînga (fig. 4), ecuaţia feţei de degajare este :

$$z_{cd} = h_c(\varphi_c + \beta_c) - \sqrt{\rho_c^2 - r_c^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_c. \tag{4}$$

Ecuaţiile muchiilor aşchietoare Γ_s şi Γ_d (fig. 3) a frezei melcate, cu spira înclinată spre dreapta, se obţin din egalităţile $\varphi = \varphi_c$, $\rho = \rho_c$, $z_d = z_{cs}$ şi relaţia (3) :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho, \\ \varphi &= \frac{1}{h + h_c}\left(h_c\beta_c \pm h\beta \mp \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_x - \sqrt{\rho^2 - r_c^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_c\right), \\ z_i &= \frac{h_c}{h + h_c}\left(h\beta_c \mp h\beta \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_x - \frac{h}{h_c}\sqrt{\rho^2 - r_c^2}\ \mathrm{tg}\ \theta_c\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Semnul de sus se ia pentru flancul stîng, iar semnul de jos pentru flancul drept.

În mod similar se determină ecuaţiile muchiilor aşchietoare Γ_s şi Γ_d la freza melcată cu spira înclinată spre stînga (fig. 4) ţinînd seamă

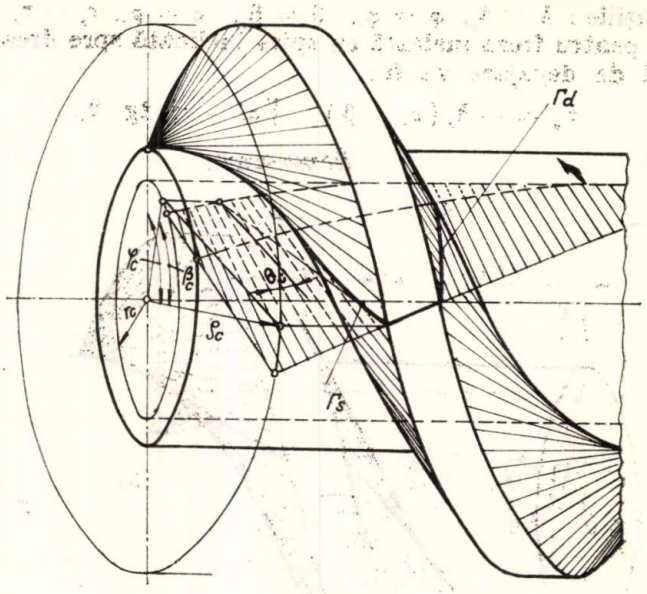

Γ_d
γ_c
β_c
θ_c
r_c
ρ_c
Γ_s

Fig. 3

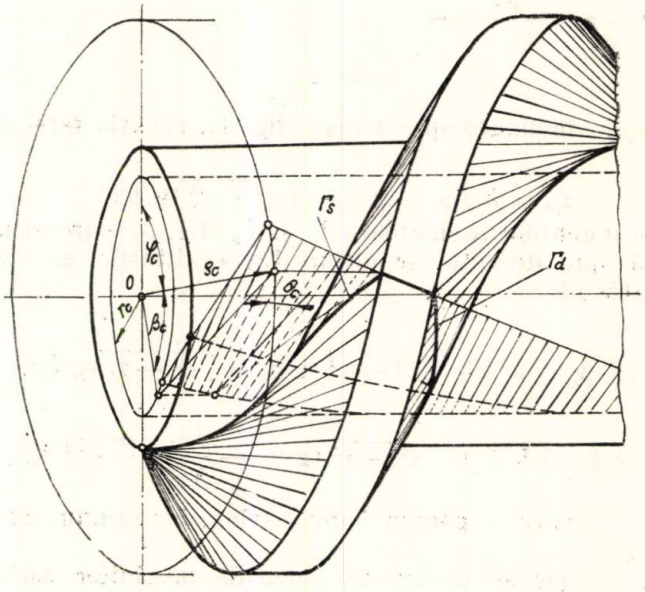

Γ_s
γ_c
ρ_c
Γ_d
0
r_c
β_c
θ_c

Fig. 4

de egalitățile $\varphi = \varphi_c$, $\rho = \rho_c$, $z_s = z_{cd}$ și relația (4):

$$\rho = \rho,$$

$$\varphi = \frac{1}{h + h_c}(-h_c \beta_c \mp h \beta \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\,\mathrm{tg}\,\theta_x + \sqrt{\rho^2 - r_c^2}\,\mathrm{tg}\,\theta_c), \tag{6}$$

$$z_i = \frac{h_c}{h + h_c}(h \beta_c \mp h \beta \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2}\,\mathrm{tg}\,\theta_x - \frac{h}{h_c}\sqrt{\rho^2 - r_c^2}\,\mathrm{tg}\,\theta_c).$$

Semnul de sus se ia pentru flancul stîng iar semnul de jos pentru flancul drept.

Din relațiile (5) și (6) rezultă că abscisele curbelor de intersecție sînt aceleași indiferent că se studiază freza melcată cu spira înclinată spre dreapta sau spre stînga și deci concluziile obținute pentru una din aceste freze se pot aplica și la cealaltă. În baza acestei constatări în continuare se vor deduce relațiile numai pentru freza melcată cu spira înclinată spre dreapta.

Pentru realizarea unghiurilor de așezare pe flancuri necesare în procesul de așchiere, dinții frezei se detalonează. Suprafețele detalonate trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

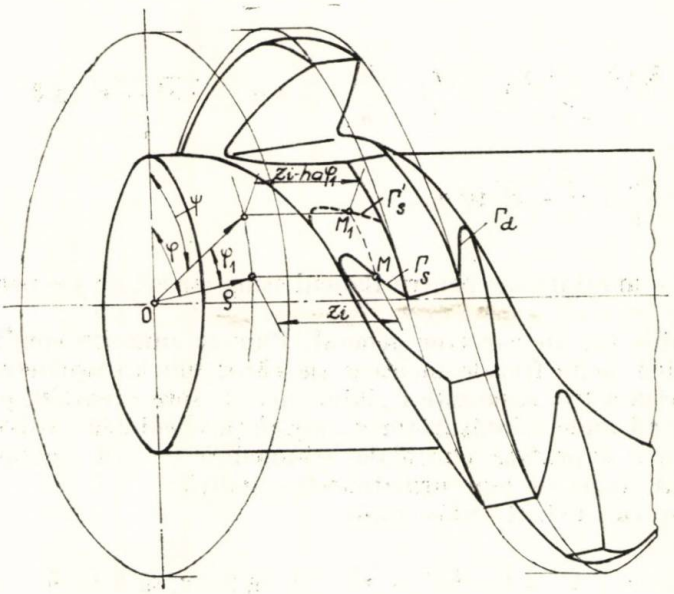


Fig. 5

— să treacă prin muchia așchietoare a dinților frezei obținută prin intersecția melcului înfășurător cu fața de degajare;

— suprafața de detalonare să fie o suprafață elicoidală, pentru ca profilul după reascuțire să nu se modifice.

Cele arătate mai sus sînt respectate atunci cînd muchia așchietoare Γ_s este deplasată pe o suprafață elicoidală (fig. 5).

Presupunînd că după o rotaţie cu unghiul φ_1 curba Γ, ajunge în Γ', iar punctul M în M_1 se poate scrie :

$$x = \rho \cos (\varphi - \varphi_1),$$

$$y = \rho \sin (\varphi - \varphi_1), \tag{7}$$

$$z = z_i - h_a \varphi_1,$$

unde

φ_1 este unghiul de rotaţie la detalonare,
h_a — parametrul mişcării de şurub a suprafeţei elicoidale detalonate (cazul detalonării axiale).

Notînd $\psi = \varphi - \varphi_1$ şi ţinînd seamă de relaţiile (5), ecuaţia suprafeţei elicoidale rezultată în urma detalonării, în coordonate cilindrice va fi :

$$\rho = \rho,$$

$$\psi = \psi,$$

$$z = h_a \psi + \frac{h_c (h - h_a)}{h_c + h} \beta_c + \frac{h_c + h_a}{h_c + h} (\mp h \beta \pm \sqrt{\rho^2 - r_x^2} \operatorname{tg} \theta_x) -$$

$$- \frac{h - h_a}{h_c + h} \sqrt{\rho^2 - r_c^2} \operatorname{tg} \theta_c. \tag{8}$$

Se ia semnul de sus pentru flancul stîng iar cel de jos pentru flancul drept.

Relaţiile (8) au caracter general. Punînd anumite condiţii iniţiale, se pot obţine toate frezele melcate ale căror muchii aşchietoare rezultă din intersecţia a trei suprafeţe riglate. Astfel, spre exemplu, pentru freza melcată avînd melcul înfăşurător o suprafaţă elicoidală evolventică, faţa de degajare o suprafaţă elicoidală arhimedică ($\gamma = 0$, conoid elicoidal) şi detalonat axial se pun următoarele condiţii :

— pentru melcul înfăşurător :

$$r_x = r_b ; \ \theta_x = \theta_b ; \ \sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta ; \ r_b \operatorname{tg} \theta_b = h = h_a.$$

Din relaţia (8) rezultă

$$z = h \ (\psi \pm \operatorname{inv} \beta) ;$$

— pentru faţa de degajare ($\gamma = 0$) ;

$$r_x = 0 ; \ \theta_x = 0 ; \ \beta = 0 ; \ h_a = - h_c ; \ \theta_c = 0 ; \ \beta_c = 0.$$

Din relaţia (8) rezultă

$$z = -h_c \psi;$$

— pentru faţa de aşezare (suprafaţa detalonată);

$$r_x = r_b;\ \theta_x = \theta_b;\ \sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta;\ r_b \operatorname{tg} \theta_b = h,$$

$$\beta_c = 0;\ \theta_c = 0.$$

Din relaţia (8) rezultă

$$z = h_a \psi + \frac{h_c + h_a}{h_c + h} (\pm h \operatorname{inv} \beta).$$

În tabela 1 sînt arătate condiţiile ce se pot pune pentru obţinerea suprafeţelor riglate, care generează dantura frezei melcate de un tip oarecare. Folosind tabela 1 se crează şi posibilitatea programării relaţiei (8) pe maşini electronice de calcul.

Tabela 1

Freza melcată cu spira înclinată pe dreapta

Melcul înfăşurător	Faţa de degajare	Suprafaţa elicoidală detalonată (faţa de aşezare)
Suprafaţă elicoidală arhimedică $h_a = h$; $\beta = 0$ şi $r_x = 0$	Suprafaţă elicoidală arhimedică ($\gamma = 0$); $h_a = -h_c$, $\beta_c = 0$ şi $r_c = 0$	$\beta = 0$; $r_x = 0$; $\beta_c = 0$ şi $r_c = 0$
	Suprafaţa elicoidală arhimedică dreaptă (conoid elicoidal) ($\gamma = 0$): $h_a = -h_c$, $\beta_c = 0$: $r_c = 0$ şi $\theta_c = 0$	$\beta = 0$; $r_x = 0$; $\beta_c = 0$ $r_c = 0$ şi $\theta_c = 0$.
	Plan axial ($\gamma = 0$): $x = 0$	$\beta = 0$; $r_x = 0$; $\beta_c = 0$ $r_c = 0$; $h_c = \infty$ şi $\psi = 0$.
	Suprafaţă elicoidală convolută ($\gamma \neq 0$): $h_a = -h_c$	$\beta = 0$ şi $r_x = 0$
	Suprafaţă elicoidală convolută dreaptă (cilindroid) ($\gamma \neq 0$): $h_a = -h_c$ şi $\theta_c = 0$	$\beta = 0$; $r_x = 0$ şi $\theta_c = 0$.
	Plan paralel cu planul axial ($\gamma \neq 0$): $h_c = \infty$ şi $x = -r_c$.	$\beta = 0$; $r_x = 0$; şi $h_c = \infty$

(*continuare tab. 1*)

Melcul înfășurător	Fața de degajare	Suprafața elicoidală detalonată (fața de așezare)
Suprafață elicoidală convolută, care în funcție de cum se calculează r_x (raza cercului director) poate fi de tip *NG* sau *ND*, în cazul angrenajelor $h_a = h$.	Suprafață elicoidală arhimedică ($\gamma = 0$): $h_a = -h_c$; $\beta_c = 0$ și $r_c = 0$	$\beta_c = 0$; și $r_c = 0$
	Suprafață elicoidală arhimedică (conoid elicoidal) ($\gamma = 0$): $h_a = -h_c$ $\beta_c = 0$; $r_c = 0$ și $\theta_c = 0$	$\beta_c = 0$; $r_c = 0$; și $\theta_c = 0$
	Plan axial ($\gamma = 0$): $x = 0$	$\beta_c = 0$; $r_c = 0$; $h_c = \infty$ și $\psi = 0$.
	Suprafață elicoidală convolută ($\gamma \neq 0$): $h_a = -h_c$	
	Suprafață elicoidală convolută dreaptă (cilindroid) ($\gamma \neq 0$): $h_a = -h_c$ și $\theta_c = 0$.	$\theta_c = 0$
	Plan paralel cu planul axial ($\gamma \neq 0$): $h_c = \infty$ și $x = -r_c$	$h_c = \infty$
Suprafață elicoidală evolventică: $r_x = r_b$ (raza cercului de bază); $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$	Suprafața elicoidală arhimedică ($\gamma = 0$): $h_a = -h_c$; $\beta_c = 0$ și $r_c = 0$	$\beta_c = 0$; $r_c = 0$; $r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$
	Suprafață elicoidală arhimedică dreaptă (conoid elicoidal) ($\gamma = 0$): $h_a = -h_c$ $\beta_c = 0$; $r_c = 0$ și $\theta_c = 0$	$\beta_c = 0$; $r_c = 0$; $\theta_c = 0$ $r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$
	Plan axial ($\gamma = 0$) $x = 0$	$\beta_c = 0$; $r_c = 0$; $h_c = \infty$ $\psi = 0$; $r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$
	Suprafață elicoidală convolută ($\gamma \neq 0$): $h_a = -h_c$	$r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$
	Suprafață elicoidală convolută dreaptă (cilindroid) ($\gamma \neq 0$); $h_a = -h_c$ și $\theta_c = 0$.	$\theta_c = 0$; $r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$
	Plan paralel cu planul axial ($\gamma \neq 0$): $h_c = \infty$ și $x = -r_c$	$h_c = \infty$; $r_x = r_b$; $\sqrt{\rho^2 - r_b^2} = r_b \operatorname{tg} \beta$ și $r_b \operatorname{tg} \theta_b = h$

Primită la redacție la 19 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Maros, D.ș.a., *Angrenaje melcate*. Edit. tehnică, București, 1966, p. 256–259.
2. Siménvi, S., *Hengeres fogaskerekeket lefejtö csigamarók alapcsigájának geometriája*, In : Gép. nr. 4, 1965, p. 143–148.

APARIȚIA ȘI MĂSURAREA RUGOZITĂȚII DE VIBRAȚII LA STRUNJIREA DE ÎNALTĂ PRECIZIE

de P. DODOC
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

În lucrare se explică mecanismul apariției rugozității care apare la strunjirea de înaltă precizie și se indică factorii de influență, modul de măsurare exactă și posibilitățile practice de micșorare a acestei erori de prelucrare.

De aproape trei decenii se știe că la strunjirea de finisare cu viteze mari și avansuri mici rugozitatea suprafeței prelucrate este mai mare decît cea determinată de parametrii geometrici și tehnologici (fig. 1) [1].

Publicații recente [2]—[6] au arătat că această rugozitate „suplimentară" este determinată, în primul rînd, de fenomene dinamice.

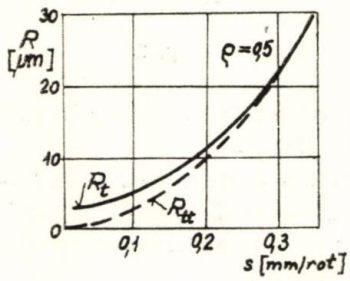


Fig. 1

Cercetări sistematice efectuate de autor [6], [7] asupra cauzelor vibrațiilor și a tipurilor de vibrații care apar la piesă au permis să se stabilească următoarele :

Datorită forței centrifuge axa de rotație a piesei O_d suferă o deplasare dinamică, descriind un cerc cu raza A_n, adică ia naștere o vibrație circulară de amplitudine A_n și de frecvență f_n — în caz că sistemul este izotrop din punct de vedere dinamic. Dacă sistemul este anizotrop, tra-

iectoria menţionată poate fi eliptică, ovală sau o curbă oarecare. În timp ce vectorul amplitudine A_n se roteşte cu frecvenţa f_n, axa de rotaţie a piesei vibrează în frecvenţă proprie translatoric, circular sau eliptic cu amplitudinea A_E şi cu frecvenţa f_E în jurul vîrfului vectorului A_n (fig. 2).

Dacă există mai multe vibraţii cu amplitudinile A_{E1}, A_{E2}, A_{E3}, ... şi, respectiv, cu frecvenţele f_{E1}, f_{E2}, f_{E3}, ... în care $f_{E1} < f_{E2} < f_{E3}$ ...,

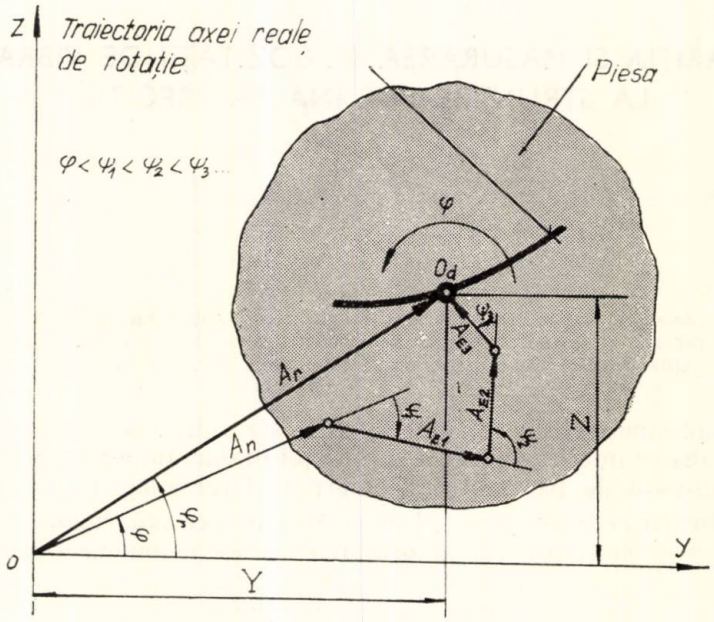


Fig. 2

fiecare dintre vectorii menţionaţi se va roti în jurul vîrfului precedentului cu frecvenţa respectivă (fig. 2).

Vibraţiile în frecvenţă proprie există atît la mersul în gol cît şi în procesul de aşchiere, indiferent de modul de lagăruire şi de poziţia arborelui în spaţiu. Ele apar atît la excitaţia prin dezechilibru cît şi la excitaţii prin şoc sau autoexcitaţii.

Experimental s-a dovedit că dintre vibraţiile proprii, de obicei una are amplitudinea mult mai mare decît amplitudinile celorlalte. Din compunerea acestei vibraţii proprii principale cu vibraţia circulară produsă de forţa centrifugă ia naştere o trocoidă de vibraţii, trocoidă care este chiar traiectoria axei de rotaţie a piesei provocată de vibraţii. Natura acestei trocoide depinde de forma vibraţiei proprii. Dacă aceasta este circulară, traiectoriile de vibraţii pot fi epitrocoide cu ecuaţiile parametrice:

$$\begin{aligned} Y &= A_n [\cos \varphi - m_A \cos (m_f \varphi - \varepsilon)], \\ Z &= A_n [\sin \varphi - m_A \sin (m_f \varphi - \varepsilon)] \end{aligned} \qquad (1)$$

sau hipotrocoide cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{aligned} Y &= A_n [\cos \varphi + m_A \cos (m_f \varphi - \varepsilon)], \\ Z &= A_n [\sin \varphi - m_A \sin (m_f \varphi - \varepsilon)]. \end{aligned} \tag{2}$$

În cazul compunerii vibrației circulare de amplitudine A_n și de frecvență f_n cu o vibrație translatorică proprie sau de alt fel, de ampli-

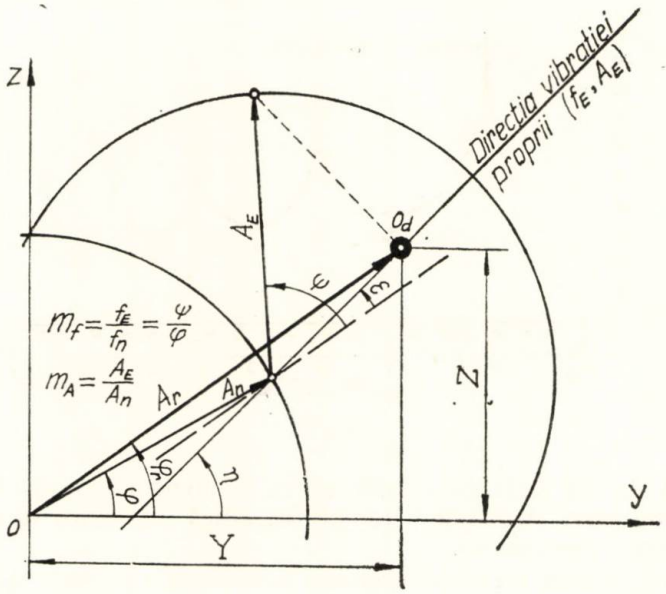


Fig. 3

tudine A_E și de frecvență $f_E > f_n$, poziția momentană a axei de rotație a piesei, respectiv traiectoria ei, poate fi determinată cu ecuațiile următoare (fig. 3):

$$\begin{aligned} Y &= A_n [\cos \varphi + m_A \cos (m_f \varphi - \varepsilon) \cos \eta], \\ Z &= A_n [\sin \varphi + m_A \cos (m_f \varphi - \varepsilon) \sin \eta]. \end{aligned} \tag{3}$$

În ecuațiile (1), (2) și (3) s-a notat cu:

$$m_A = \frac{A_E}{A_n} \text{ — raportul amplitudinilor,} \tag{4}$$

$$m_f = \frac{f_E}{f_n} = \lambda \frac{A_n}{A_E} \text{ — raportul frecvențelor.} \tag{5}$$

ε — diferența de fază dintre cele două vibrații, (6)

η — unghiul dintre direcția vibrației translatorice și abscisa OY, (6')

λ — factor de proporționalitate. (7)

Este vorba de trocoide scurtate pentru $\lambda < 1$, ordinare pentru $\lambda = 1$ și alungite pentru $\lambda > 1$.

Forma trocoidei depinde de m_A și m_f. Dacă m_f este număr întreg, traiectoria constă din $n_E = m_f - 1$ bucle, ramuri sau maxime pentru epitrocoide, respectiv $n_H = m_f + 1$ pentru traiectorii hipotrocoide și circular-translatorice. La rapoarte raționale, buclele se suprapun una pe alta

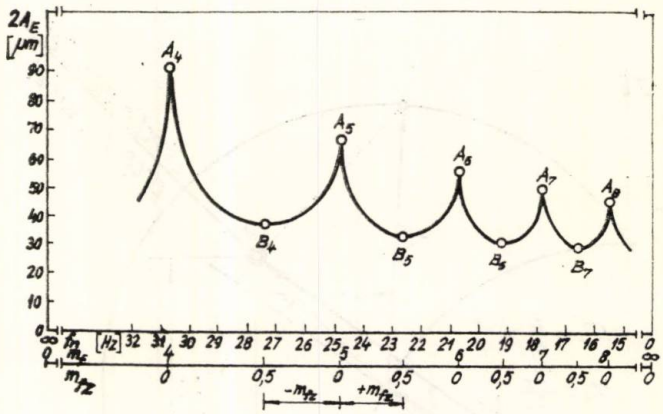


Fig. 4

și, după un număr finit de rotații, revin în poziția inițială. La rapoarte iraționale, numărul de bucle este infinit, adică curba nu se mai închide (mișcarea este aperiodică).

Se menționează faptul că raportul frecvențelor poate fi pus sub forma

$$m_f = m_{fi} + m_{fz}, \tag{8}$$

unde

m_{fi} este număr întreg (1, 2, 3...),

m_{fz} — număr zecimal.

Partea zecimală a raportului frecvențelor nu poate lua decît valorile :

$$m_{fz} = \pm (0{,}0 \ldots 0{,}5). \tag{9}$$

S-a stabilit experimental [6] [7] că amplitudinea A_E este variabilă ; ea devine maximă la valorile întregi ale raportului frecvențelor ($m_{fz} = 0$), adică pentru $m_{fz} = 1$; 2 ; 3... și minimă pentru rapoarte fracționare ca 1,5 ; 2,5 ; 3,5... ($m_{fz} = 0{,}5$), fig. 4.

Figura 5 arată, de exemplu, traiectorii hipo- și epitrocoide, filtrate și nefiltrate pentru $m_f \approx 7$. Traiectoriile filtrate după două și după mai multe rotații ale piesei, pentru $m_f \approx 7$, sînt redate în figura 5*c*.

Alte traiectorii se văd în figura 6.

După cum s-a dovedit [6] [8] [9], transmiterea acestei trocoide de vibrații la suprafața piesei în procesul de așchiere este cauza determinantă

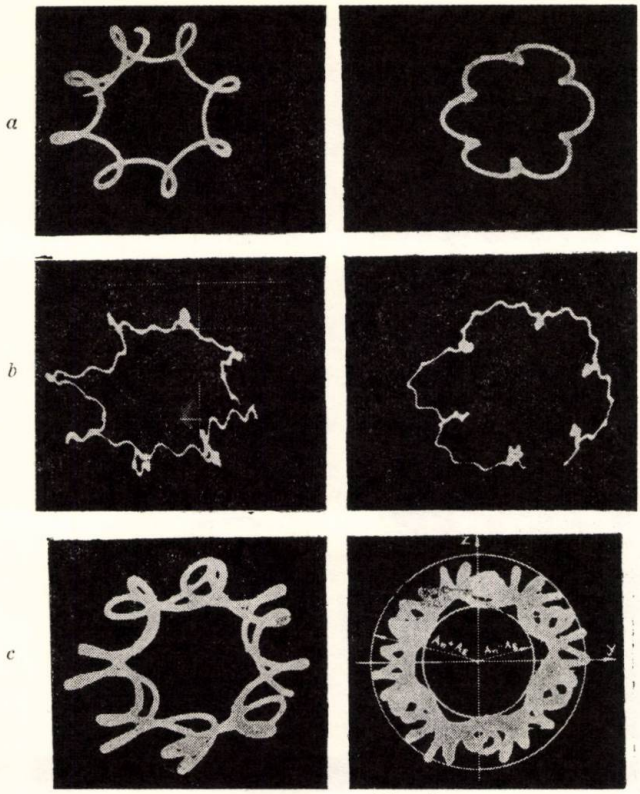


Fig. 5

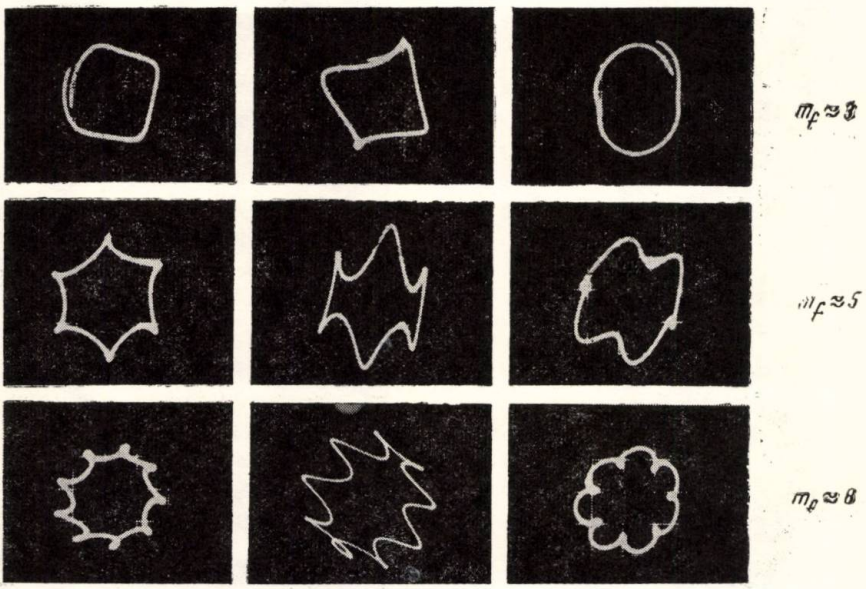
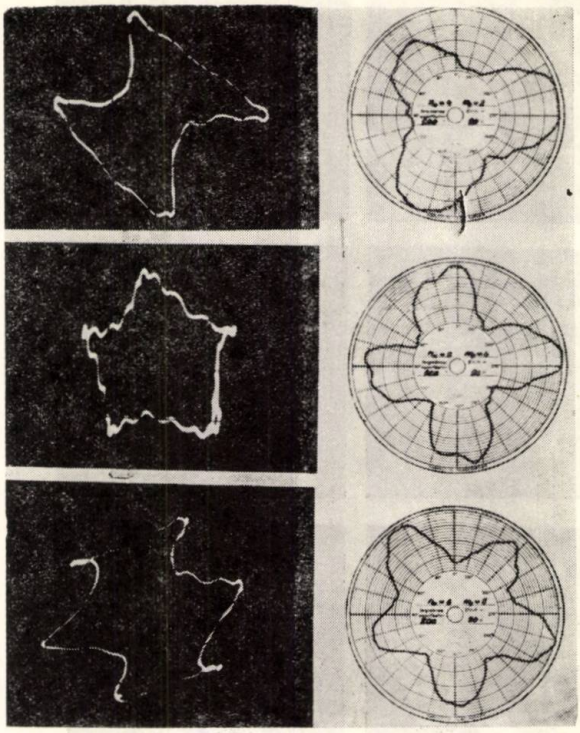
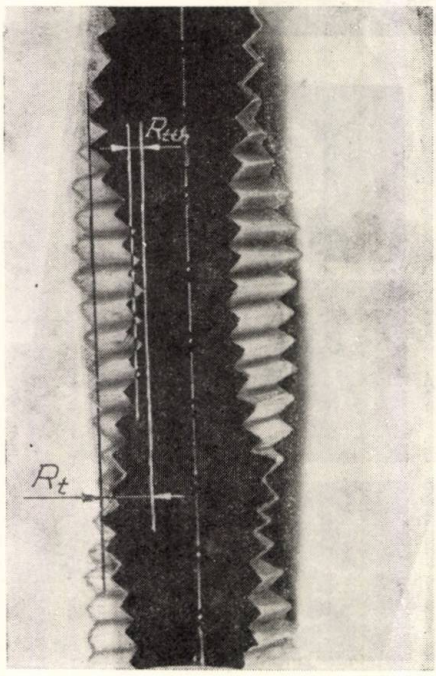
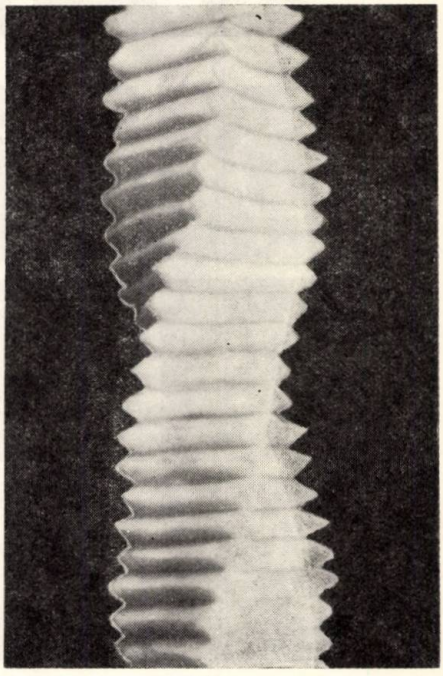


Fig. 6





7a



7b

Fig. 7, *a*, *b*.

a apariției erorilor de prelucrare la strunjirea de finisare. În timp ce erorile de dimensiune, de formă și de poziție iau naștere pentru orice valoare a raportului frecvențelor, rugozitatea de vibrații nu apare decît pentru valori fracționare ale acestuia și iată cum :

Relația (5) mai poate fi scrisă și sub forma următoare :

$$m_f = \frac{Z}{N}, \tag{10}$$

unde Z și N trebuie să fie numere întregi, iar m_f o fracție redusă.

Dacă m_f este un număr întreg, pe conturul piesei apar m_f maxime [8] [9]. După fiecare rotație apare același număr de maxime așezate pe m_f generatoare ale piesei (fig. 7). În acest caz rugozitatea de vibrații este zero (dacă nu există o altă frecvență proprie care să formeze cu frecvența de rotație un raport fracționar). Există numai erori de formă, de diametru și de poziție.

La rapoarte m_f raționale maximele apar rotite unul față de altul, adică apar pe o elice, (fig. 7*a*, *b*), totuși vîrful cuțitului (S) va ajunge după N rotații exact în poziția inițială. În figura 8 se vede, de exemplu, pentru o traiectorie epitrocoidică a axei de rotație a piesei, la un raport al frecven-

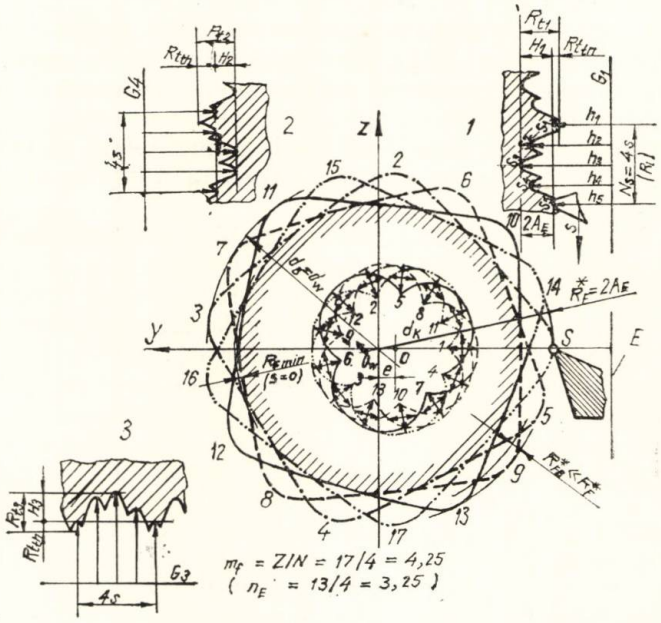


Fig. 8

țelor $m_f = \frac{Z}{N} = \frac{17}{4} = 4,25$ $(n_E = 3,25)$, că vîrful cuțitului S ajunge pe aceeași generatoare (în direcția avansului) exact după ce a străbătut distanța $Ns = 4s$. Pe suprafața piesei apar în această distanță (adică pe suprafața laterală a cilindrului cu înălțimea $Ns = 4s$) $Z = 17$ maxime.

De aici rezultă următoarele :

1) m_f reprezintă numărul de maxime al conturului piesei care apare în timpul unei rotații și care pot fi puse în evidență, dacă se palpează piesa cu un palpator de formă sferică sau de cuțit cu lățimea $b \approx s$ pe traiectoria vîrfului cuțitului. În practică, traiectoria palpatorului se găsește într-un plan perpendicular pe axa piesei, și nu după o elice (ca vîrful cuțitului) și deci va apare o mică eroare (practic neglijabilă).

Dacă m_f este întreg, trebuie ca raza bilei să fie mai mică decît raza de curbură a piesei, adică raza sferei r depinde de m_f și de diametrul piesei. O sferă cu raza $r = 1$ mm poate fi folosită în toate cazurile în care diametrul piesei nu este mai mic decît circa 10 mm. Pentru piese cu diametrul $d < 10$ mm trebuie ca $r \approx 0{,}5$ mm sau mai mică.

Dacă palpatorul este în formă de cuțit, lățimea lui nu are influență asupra rezultatului măsurătorilor.

2) Z arată numărul de maxime de pe periferia piesei care apare în distanța Ns dintre două maxime de același ordin S_1 și S_5, măsurate de-a lungul generatoarei piesei. Numărul total de maxime poate fi determinat numai cu un palpator în formă de cuțit cu lățimea mai mare decît distanța Ns, dar mai mică decît $2Ns$.

Cu cît Z este mai mare, cu atît este mai mare suprafața de contact (suprafața portantă), fapt care prezintă importanță deosebită pentru piesele ce urmează să fie supuse la uzură.

3) N determină numărul de rotații pînă cînd un maxim ajunge pe aceeași generatoare, adică pînă cînd poziția unghiulară și raza se repetă. În figura 8, de exemplu, situația aceasta se realizează după $N = 4$ rotații.

O importanță economică deosebită prezintă acest parametru la strunjirea de retezare și mai ales la strunjirea profilată, unde N reprezintă numărul de rotații necesare la avans radial $s = 0$ pînă ce maximele sînt retezate și reduse la un minimum $R_{F\,\min}$ (fig. 8) care depinde de raportul frecvențelor m_f.

Dacă piesa prelucrată la un raport fracționar al frecvențelor se palpează cu un ac în unul din planele axiale (după generatoare), rezultă „profilul efectiv" al suprafeței, profil care poate fi înregistrat cu un aparat corespunzător, obținîndu-se „rugograma" suprafeței sau rugoprofilul (fig. 7*a* și 8).

Figura 8 arată clar că rugoprofilul efectiv depinde de planul de măsurare (vezi pozițiile 1, 2 și 3).

Astfel, se observă că, în diferite poziții de măsurare 1, 2, 3 etc. există diferite profile efective. Corespunzător acestora există diferite rugozități R_{t_1}, R_{t_2}, R_{t_3} etc.

Aceste rugoprofile sînt influențate și de parametri ca : materialul piesei, materialul sculei, avansul, raza de rotunjire a vîrfului cuțitului, unghiurile de atac χ și χ_1, unghiul de degajare, ș.a. Figura 9 arată, de exemplu, influența unghiului și a razei de rotunjire la vîrful cuțitului asupra rugoprofilului, respectiv asupra rugozității, pentru același raport al frecvențelor m_f.

Influența avansului asupra rugoprofilului se vede în figura 10.

Din figura 8 rezultă că, de exemplu, punctul S (vîrful cuțitului) de pe conturul piesei prelucrate la un raport al frecvențelor $m_f = \frac{Z}{N} = 17/4 = 4{,}25$ are la fiecare rotație a piesei o altă depărtare $h_1 \ldots h_5$ față de rugo-

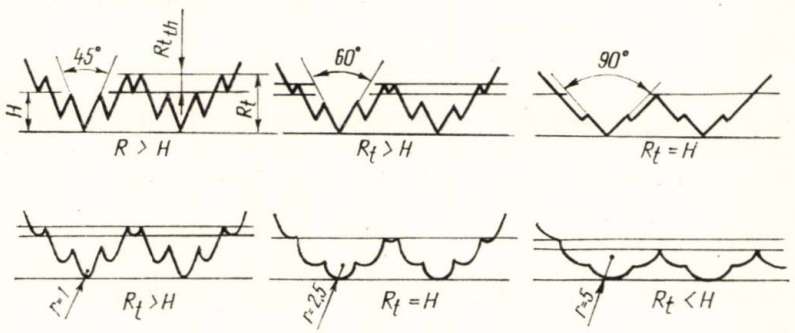


Fig. 9

profilul de referință, adică față de dreapta G. El posedă aceeași depărtare exact după $N = 4$ rotații ale piesei.

Dacă se scrie diferența

$$H = h_{\max} - h_{\min} \tag{11}$$

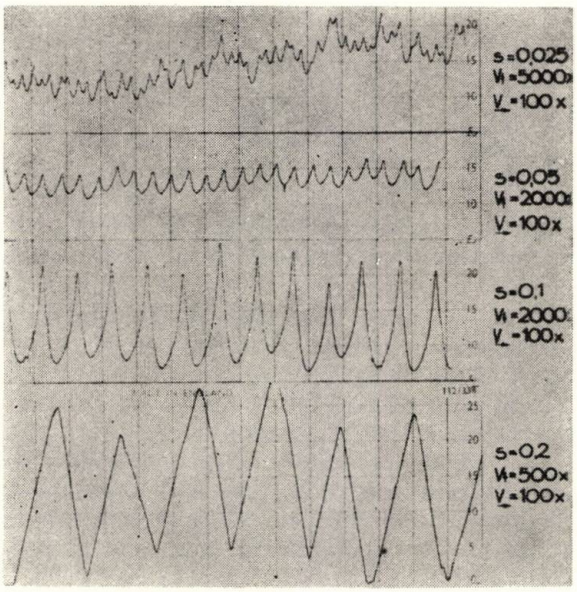


Fig. 10

pentru diferite poziții de măsurare 1, 2, 3 ..., se vor obține diferite depărtări H_1, H_2, H_3... dintre punctul S și dreapta de referință G. Dacă se alege dreapta G în așa fel încît ea să coincidă cu traiectoria vîrfului

cuţitului, atunci mărimea Hy este *drumul relativ* dintre piesă şi sculă, drum determinat de vibraţiile piesei, în direcţia cuţitului. Din figură rezultă că

$$Hy_{\max} = 2A_E \tag{12}$$

şi că între înălţimea profilului efectiv şi rugozitate există relaţia

$$R_t = Hy + R_{tt}, \tag{13}$$

unde R_{tt} este rugozitatea dată de condiţiile de prelucrare susmenţionate.

La strunjirea de finisare mărimea R_{tt} poate fi cîteodată neglijabil de mică în comparaţie cu Hy şi de aceea se poate scrie

$$R_{tt} \approx Hy. \tag{14}$$

De aici rezultă că înălţimea maximă a rugoprofilului efectiv, adică mărimea rugozităţii maxime este

$$R_t \approx 2A_E \approx Hy_{\max}. \tag{15}$$

Din cele de mai sus rezultă că rugozitatea depinde de poziţia de măsurare atît pe circumferinţă cît şi pe generatoare, deoarece A_E variază cu lungimea piesei. Aceste precizări prezintă o importanţă teoretică şi practică deosebită, mai ales în cazul cînd apar conflicte între executant şi beneficiar.

Dacă

$$R_{t_{\max}} \quad \text{sau} \quad R_{t_{\text{mediu}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{t_i}}{n} \qquad (n = 1, \ldots, n)$$

reprezintă rugozitatea, este o problemă încă în discuţie. Numeroşi specialişti sînt de părere că trebuie considerat de la caz la caz, după rolul funcţional al piesei.

Trebuie spus că, fără să cunoască precis cauzele care determină drumul relativ şi mai ales existenţa vibraţiei proprii, Bahmann [5] a cercetat legătura dintre R_t şi Hy, stabilind anumite condiţii tehnologice pentru care $R_t \approx Hy$. Acest rezultat a fost folosit de Dchang [4] pentru recepţia dinamică a strungurilor. După cum s-a dovedit [6] [12] cu această metodă nu se pot obţine rezultate satisfăcătoare, deoarece pentru $R_t \approx Hy \simeq 0$ celelalte erori de prelucrare pot avea valori maxime.

Pentru valorificarea rugogramei, adică pentru determinarea rugozităţii de vibraţii, trebuie să se cunoască rugoprofilul şi lungimea de referinţă.

Deoarece la strunjirea longitudinală profilul geometric ideal este o dreaptă care corespunde direcţiei avansului, rugoprofilul de referinţă pentru determinarea rugozităţii trebuie să fie tot o dreaptă, de aceeaşi direcţie cu rugoprofilul efectiv şi cuprinsă în lungimea de referinţă l_B; el atinge cel mai înalt punct al părţii libere al rugogramei.

În ceea ce privește alegerea lungimii de referință, există păreri diferite. Majoritatea standardelor recomandă lungimile : 0,08 ; 0,25 ; 0,8 ; 2,5 și 8 mm (unele chiar și 25 mm) în funcție de rugozitatea încă necunoscută (STAS, TGL).

O nesiguranță de numai 6% se obține în cazul că se folosește o lungime de referință $l_B = 1000\ R_t$ [10] [11].

În realitate linia de referință depinde de avans și de numărul N de rotații necesar pînă cînd profilul se închide.

Din figura 8 rezultă că profilul se închide după $N = 4$ rotații, adică punctul S_1 ajunge după patru rotații în S_5 pe aceeași generatoare.

Pentru determinarea rugozității R_t trebuie ca lungimea de referință minimă $l_{B\,\min} = 2\ S_1S_5 = 2\ Ns$, deoarece numai în acest caz rugoprofilul cuprinde două maxime.

La avans s constant, l_B depinde numai de partea fracționară a raportului frecvențelor.

După cum s-a menționat în [6] și [7] trebuie ca practic această parte fracționară să aibă valoarea :

$$m_{fz} = \pm\ (0{,}10 \ldots 0{,}50), \tag{16}$$

pentru care corespund numerile de rotații $N_{\max} = 10$ și $N_{\min} = 2$.

Pentru practică lungimea de referință minimă ar trebui să aibă valoarea

$$4\ s < l_{B\,\min} < 20\ s. \tag{17}$$

Deoarece amplitudinea A_E variază ca în figura 4, maximele S_1 și S_5 nu se află exact pe aceeași generatoare, (fig.11). De aceea este necesar să se ia un coeficient de siguranță. Experiența autorului a arătat că o lungime de referință.

$$l_B = 4\ l_{B\,\min}$$

este practic suficientă, adică

$$20\ s < l_B < 100\ s. \tag{18}$$

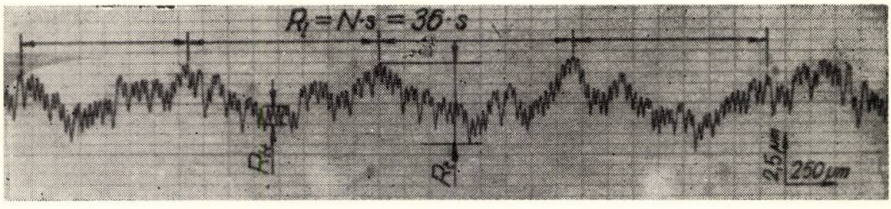


Fig. 11

Dacă se alege $s < 0{,}1$ mm/rot și $t \leqq 0{,}5$ mm și se respectă condiția (16) se poate folosi la strunjirea de finisare o lungime de referință $l_B = 2{,}5$ mm, aleasă reprezentativ dintr-o lungime de palpare $l = 5$ mm (fig. 11).

În figura 8 se vede că rugozitatea depinde de locul de măsurare. Probabilitatea de a palpa generatoarea în care se găsește $R_{t\,\max}$ depinde

de numărul Z și de diametrul piesei d_B. Autorul propune ca numărul minim de locuri de măsurare să se determine cu relația :

$$N_M = \frac{d_B}{Z}, \tag{19}$$

unde d_B se introduce în mm. Acest mod de măsurare a dat rezultate bune. Determinarea exactă a rugozității maxime se face prin palparea piesei în pozițiile maximelor obținute în prealabil cu ajutorul unui aparat de măsurat abaterile de la forma rotundă.

Pentru caracterizarea rugozității la strunjirea de precizie este necesar să se indice doi parametri :

a) înălțimea maximelor $R_{t_{max}}$ sau $R_{t_{max}}$,

b) pasul maximelor $R_1 = Ns$.

Este avantajos ca R_t și R_1 să fie cît mai mici. Cazul cel mai favorabil există atunci cînd $R_1 = R_{1\,min} = 2s$, adică cînd $N = 2$. Pentru această valoare raportul frecvențelor $m_f = 1{,}5\,;\ 2{,}5\,;\ 3{,}5\ldots$ Din figura 4 se vede că pentru aceste valori amplitudinea vibrației proprii principale este aproape nulă și ca urmare și erorile de prelucrare R_t, R_F, R_D, e, e^+ vor fi nule [9]. Totodată este de dorit ca m_f să fie cît mai mare, deoarece la aceste valori influența altor vibrații este de asemeni neglijabilă (vezi fig. 4). Pentru prelucrare se recomandă ca frecvența proprie a sistemului „piesă — dispozitiv de prindere — ax principal", măsurată la piesă, să fie cît mai mare, astfel încît să rezulte pentru turația maximă $m_f > 10$.

Se recomandă ca pentru realizarea unui raport al frecvențelor corespunzător să nu se micșoreze turația, ci să se folosească dispozitive de prindere ușoară. Obținerea valorii dorite a părții fracționare a raportului frecvențelor se poate face prin modificarea masei sistemului în rotație. Menținerea constantă a raportului frecvențelor este posibilă dacă se menține turația la o valoare constantă. Acest lucru se poate realiza cu motoare de antrenare puternice, motoare care să nu „simtă" variația forțelor de așchiere și cu viteze de avans constante în timpul prelucrării.

Primită la redacție la 11 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. H. Moll, *Die Herstellung hochwertiger Drehflächen*, Disertație, T.H. Aachen, 1939.
2. K. E. Wetzel, *Beitrag zur Erfassung und Beurteilung von Schwingbewegungen an Werkzeugmaschinenspindeln*, Disertație T. H. Stuttgart, 1955.
3. P. T. Eisele, R. F. Griffin, *Schwingungserscheinungen auf gedrehten Oberflächen*, Industrie Anzeiger *36* (1956).
4. Dchang, Schj-Ying, *Beitrag zur Aufstellung von Prüfverfahren für die dynamische Einzelabnahme von Drehmaschinen*, Disertație TU Dresen, 1961.
5. N. Bahmann, *Ursachen von Relativbewegungen zwischen Werkstück und Werkzeug und ihre Auswirkungen auf die Gestaltabweichungen des Werkstückes beim Schlicht- und Feindrehen*, Disertație TU Dresen, 1963.
6. P. Dodoc, *Ursachen der dynamischen Verlagerung der Werkstückdrehachse und ihre Auswirkungen auf die Herstellungsgenauigkeit beim Drehen*, Disertație, Tu Dresden, 1967.

7. Dodoc, *Trocoide de vibrații la axele principale ale mașinilor unelte*, Revista Construcția de mașini, *2* (1968) și *3* (1968).

8. — *Mecanismul transmiterii vibrațiilor la suprafața piesei în procesul de strunjire*, St. cerc. mec. apl. *5* (1968).

9. — *Influența vibrațiilor asupra preciziei de prelucrare la strunjire*, St. cerc. mec. apl., *6* (1968).

10. H. Schorsch, *Zu einigen neueren Arbeiten über Oberflächenmessung*, Industrie Anzeiger *4/6* (1962).

11. E. Bickei, *Die Bezugsstrecke oder Bezugslänge für die Rauheitsmessung*, Werkstattstechnik *50* (1960).

12. P. Dodoc, *Determinarea preciziei dinamice a mașinilor unelte*, Referat la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Inst. politehnic „Gheorghe-Gheorghiu-Dej", București, octombrie 1968.

STUDIUL INFLUENȚEI REGIMULUI DE AȘCHIERE ȘI A STRUCTURII MATERIALULUI ASUPRA RUGOZITĂȚII SUPRAFEȚELOR PRELUCRATE PRIN STRUNJIRE

de M. TEODORESCU, C. CIUCĂ, I. TARĂU și E. ȚÂRU
Institutul politehnic, Galați

În lucrare se prezintă rezultatele unor încercări de prelucrabilitate — din punct de vedere al calității suprafețelor — ce au fost făcute pentru un oțel carbon de calitate cu cca. 0,6% C.
Se scoate în evidență influența mare pe care o are starea structurală (constituenții structurali, forma și gradul lor de dispersie) la diferite regimuri de așchiere asupra rugozității suprafețelor prelucrate prin strunjire.

1. INTRODUCERE

Mărimea și variația rugozității suprafețelor obținute prin diferite procedee de prelucrare prin așchiere este unul dintre criteriile utilizate și indicate de mulți cercetători pentru aprecierea prelucrabilității metalelor prin așchiere [1]—[12].

Importanța aprecierii prelucrabilității în funcție de acest criteriu devine tot mai mare, și mai ales la prelucrările de finisare. Rugozitatea suprafețelor este indicată de proiectanți pe desenul de execuție al piesei (prin parametrul R_a — abaterea medie a neregularităților, sau chiar prin parametrul R_z — înălțimea neregularităților, ținînd seama în primul rînd de rolul funcțional al organului de mașină respectiv. Proiectantul trebuie neapărat să aibă în vedere la prescrierea rugozității și posibilitățile tehnologice de obținere a piesei — și mai ales cele mai economice (aceasta ca o condiție de principiu). Tehnologul este acela care, în funcție de condițiile concrete, stabilește tehnologia optimă, care trebuie să asigure cerințele funcționale impuse piesei, precum și economicitatea maximă. Tehnologul trebuie să caute metodele cele mai economice de obținere a produsului în limitele prescrise din punct de vedere dimensional și calitativ.

ST. CERC. MEC. APL,. TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 955—968

Dintre factorii cei mai importanţi care influenţează rugozitatea suprafeţelor prelucrate prin aşchiere se amintesc :

— metoda de prelucrare,
— compoziţia chimică a materialului piesei,
— starea structurală a materialului piesei,
— proprietăţile mecanice ale materialului piesei,
— forma şi dimensiunile piesei,
— modul de fixare al piesei,
— parametrii regimului de aşchiere,
— geometria părţii active a sculei şi starea sa de uzură,
— materialul sculei,
— lichidele de răcire ungere,
— rigiditatea maşinii unelte, şi altele.

Modul de influenţă al unora dintre factorii amintiţi se găseşte indicat în literatură, în cazuri generale, precum şi într-o serie de cazuri concrete (tip de prelucrare, proprietăţile materialului, regim de aşchiere, geometria sculei, etc.) [1], [13] —[15].

Pentru determinarea înălţimii neregularităţilor s-au stabilit o serie de relaţii care, în general, ţin cont de tipul de prelucrare şi parametrii geometrici ai prelucrării.

Astfel, pentru strunjire, literatura de specialitate recomandă următoarele relaţii :

$$H = \frac{s}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x_1} \qquad \text{(pentru } r = 0\text{)}, \tag{1}$$

$$H = \frac{s^2}{8r} \qquad \text{(pentru } s < r;\ r \neq 0\text{)}, \tag{2}$$

$$H = \frac{1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x_1}\left[s - r\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\right] \tag{3}$$

$$\left(\text{pentru } x < \operatorname{arc\,sin}\frac{s}{2r};\ x_1 < \operatorname{arc\,sin}\frac{s}{2r}\right),$$

$$H_{\max} = 0{,}21\,\frac{s^{1{,}07}}{r^{0{,}65}}\ (\text{mm}) \qquad \text{(pentru oţel-după [15])}, \tag{4}$$

unde : s = avansul în mm/rot,
x; x_1 = unghiul de atac principal, respectiv secundar,
r = raza de racordare a vîrfului cuţitului.

Aceste relaţii sînt cu totul aproximative deoarece nu ţin seama de multitudinea de factori ce intervin în procesul de aşchiere şi care influenţează mărimea neregularităţilor suprafeţei prelucrate. Stabilirea teoretică a valorii neregularităţilor pentru anumite condiţii concrete este foarte complicată, deoarece, pe lîngă faptul că însăşi influenţa fiecărui factor

nu a fost încă definitiv precizată și indicată într-o formă matematică, apare și intercondiționarea factorilor de influență care complică și mai mult fenomenul.

Unul dintre factorii a cărui influență asupra rugozității suprafeței este destul de mult dezbătută în literatură [13]—[18], cîteodată, chiar în mod contradictoriu, este regimul de așchiere. Influența mare a vitezei de așchiere este pusă, în general, pe seama apariției tăișului de depunere al sculei, care după unii autori, la viteze foarte mici și la viteze mari, nu apare, ceea ce ar avea ca rezultat obținerea unei rugozități minime. Diferențierea dintre părerile cercetătorilor constă în limitarea vitezelor de la care apare tăișul de depunere.

Influența avansului reiese chiar din relațiile indicate.

Se pare că adîncimea de așchiere nu are o influență importantă asupra mărimii neregularităților suprafeței.

Referitor la influența materialului prelucrat asupra rugozității suprafeței, literatura de specialitate arată că o dată cu creșterea durității acestuia rugozitatea suprafeței scade [14], scădere explicată prin micșorarea deformațiilor plastice și a coeficientului de frecare dintre fața de degajare și așchie. Acest lucru diminuează formarea tăișului de depunere.

În majoritatea cazurilor nu se ia în considerare faptul că o anumită duritate a materialului este legată de o anumită stare structurală a sa, care atrage după sine comportări diferite în timpul așchierii. De asemenea nu se ține aproape deloc seama de corelația : — regim de așchiere — duritate — structură — rugozitatea suprafeței.

2. PREGĂTIREA MATERIALULUI ÎN VEDEREA EXPERIMENTĂRII

Pentru stabilirea unor corelații dintre regimul de așchiere — duritate — structură — rugozitatea suprafeței s-a ales pentru experimentare oțelul OLC 60 STAS 880-66, laminat sub formă de bară cu diametrul de 80 mm, care a fost adus în diferite stări structurale. Acest oțel face parte din grupa oțelurilor de construcție — pentru îmbunătățire, și este des întrebuințat în construcția de mașini, cu tratament termic, pentru piese ce au de preluat eforturi sau sînt supuse la uzuri intense ca : roți dințate, arbori, role, valțuri, pene, cuplaje etc. S-a ales acest material avînd în vedere și faptul că el se găsește la limita dintre oțelurile de construcție și oțelurile de scule.

Compoziția chimică a materialului utilizat pentru experimentări este : C = 0,61%; Si = 0,2%; Mn = 0,6%; S = 0,04%; P = 0,04%, adică face parte din grupa oțelurilor hipoeutectoide, fiind plasat în apropierea oțelurilor eutectoide.

Deoarece acest material are călibilitate relativ redusă, avînd un diametru critic de călire de aproximativ 12 mm [19], pentru experimentare s-au executat epruvete sub formă de bucșe cu grosimea peretelui de 10 mm.

Stările structurale obținute, precum și condițiile de tratament termic sînt indicate în tabela 1.

Drept bază pentru compararea rezultatelor s-a luat starea de recoacere cu recristalizare de fază, stare în care oţelul prezintă o structură tipică de oţel hipoeutectoid, cu ferită în reţea şi perlită lamelară (vezi figura din tabela 1) — cu raportul maxim dintre aceşti doi constituenţi metalografici (0,28) faţă de structurile similare obţinute. Influenţa cantităţii de ferită preeutectoidă asupra rugozităţii suprafeţei s-a analizat pe probe obţinute prin normalizare şi prin răcire în ulei. La normalizare s-a obţinut o finisare a structurii şi o cantitate mai redusă de ferită liberă, în aşa fel încît duritatea a crescut cu 15,5%. În cazul călirii în ulei, ca urmare a eliminării totale a feritei libere din structură, aceasta a corespuns unui oţel cvasieutectoid, duritatea a crescut cu 60,5%. Această creştere a durităţii s-a luat în toate cazurile faţă de valoarea minimă atinsă, prin calcularea coeficientului de creştere procentuală a durităţii:

$$\varepsilon\% = \frac{V_x - V_{\min}}{V_{\min}} \cdot 100, \qquad (5)$$

unde V_x — valoarea curentă a durităţii la epruveta analizată,

$V_{\min}$ — valoarea minimă a durităţii din seria de epruvete luate în considerare.

Materialul netratat termic (în starea de livrare) are o structură foarte grosolană de ferită liberă şi perlită lamelară, ca urmare a condiţiilor în care a avut loc laminarea.

Tratamentul termic de recoacere de temperatură joasă s-a aplicat în scopul eliminării unor instabilităţi structurale ale materialului în starea de livrare, şi pentru obţinerea unei bune stabilităţi dimensionale. În urma acestui tratament s-a obţinut o micşorare a durităţii în raport cu starea de livrare, ca urmare a detensionării în special a feritei libere.

Deoarece recoacerea izotermă se recomandă în scopul reducerii duratei de tratament termic şi măririi productivităţii instalaţiei de încălzire, s-a aplicat şi acest tratament termic în urma căruia s-a obţinut cea mai mare omogenitate structurală.

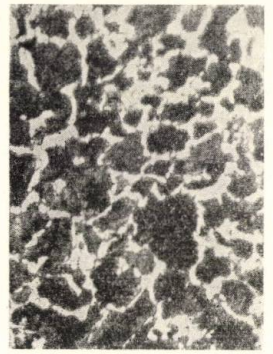
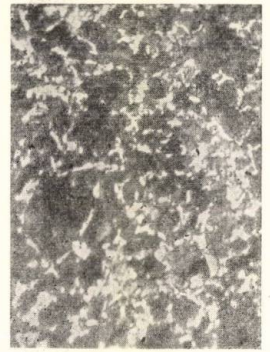
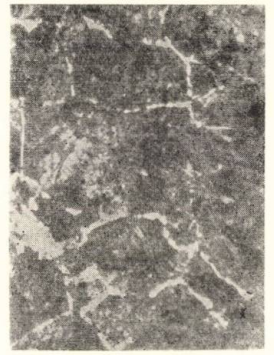
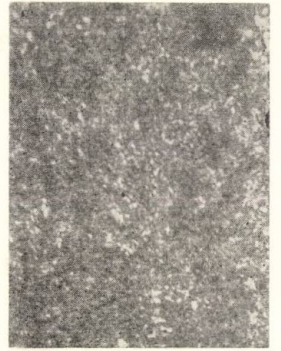
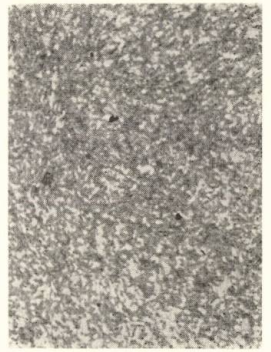
Pentru a obţine o finisare a structurii şi eliminare a macrosegregaţiilor îndeosebi, s-a aplicat tratamentul de recoacere de omogenizare, care poate fi considerat ca tratament termic preliminar atunci cînd oţelul se utilizează în stare îmbunătăţită. În urma acestui tratament termic s-a obţinut duritatea minimă din toată seria de probe luate în considerare.

Pentru a se pune în evidenţă şi influenţa formei şi mărimii fazei de carburi asupra rugozităţii la strunjire s-au pregătit epruvete călite la martensită şi revenite la diferite temperaturi de revenire.

După călire şi revenire la 400, 500 şi respectiv 600°C s-au obţinut structuri de tip sorbitic, gradul de dispersie al amestecului ferito-cementitic scăzînd o dată cu creşterea temperaturii de revenire (vezi figura din tabela 1). În aceste cazuri particulele de carburi au formă globulară, mărimea lor fiind cu atît mai mică, iar numărul lor cu atît mai mare cu cît temperatura de revenire este mai joasă. Duritatea probelor a scăzut o dată cu creşterea temperaturii de revenire.

Tabela 1

Tratamentele termice aplicate; structuri și proprietăți obținute

Nr. de ordine al probei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ratamentul termic	Recoacere de omogenicare la 900°C	Recoacere de la 810...830°C	Recoacere de la 810...830°C	Recopt la 650°C	Normalizat de la 810...830°C	Starea de livrare	Călire de la 810...830°C	Călit și revenit la 600°C/1h	Călit și revenit la 500°C/1h	Călit și revenit la 400°C/1h
Modul de răcire	Continuă	Continuă	Izotermă la 600°C	aer	aer	—	ulei	aer	aer	aer
Microstructura	 (160:1)	(160 : 1)	 (160 : 1)	 (120 : 1)	(270 : 1)	(120 : 1)	(600 : 1)	(600 : 1)	 (600 : 1)	 (600 : 1)
Structura	Ferită + Perlită	Ferită + Perlită	Ferită + Perlită	Ferită + Perlită	Ferită + Perlită	Ferită + Perlită	Perlită	Sorbită	Sorbită	Sorbită
Duritatea	207	210	222	229	239	240	332	305	350	370
Creșterea procentuală a durității ε%	0	1,45	7,25	10,6	15,5	16	60,5	47,5	69	79

3. CONDIȚII DE EXPERIMENTARE

Pentru stabilirea corelației dintre structură, regim de așchiere și rugozitate, epruvetele, în cele 10 stări structurale amintite, au fost prelucrate prin strunjire longitudinală pe strungul SN400 păstrîndu-se același mod de prindere atît pentru piesă cît și pentru sculă (figura 1).

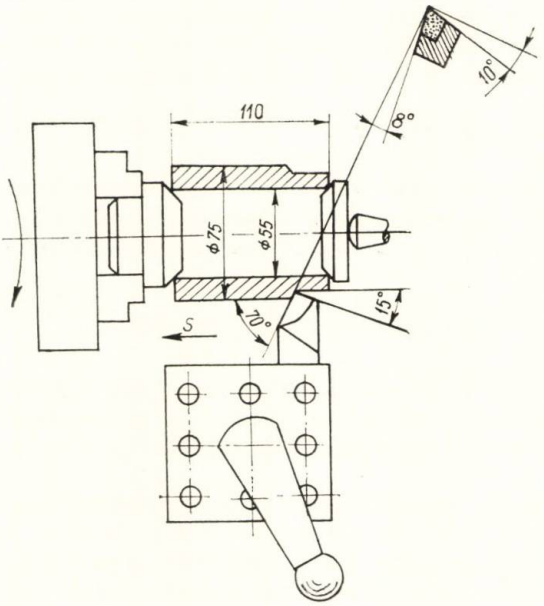


Fig. 1.

Pentru fiecare tip de stare structurală s-au executat treceri păstrînd avansul constant și schimbînd numai viteza.

Regimurile de așchiere utilizate sînt indicate în tabela 2.

Tabela 2

Elementul regimului de așchiere	Trecerea de degroșare	Regimul de experimentare						
t (mm)	1,2	0,8						
S (mm/rot)	0,15	0,12						
		0,20						
		0,30						
v (m/min)	65	40	50	67	83	105	133	170

S-a utilizat ca sculă un cuţit de strung armat cu pastilă P10 cu geometria părţii aşchietoare : $x = 70°$; $x_1 = 15°$; $\gamma = 10°$; $\alpha = \alpha_1 = 8°$; $r = 1{,}0$ mm.

Păstrarea în limite foarte strînse a razei de racordare r, şi a uzurii pe faţa de aşezare h_α (ales drept criteriu de uzură) a fost urmărită cu precizia de 1μm.

Pentru a se păstra aceleaşi condiţii de încercare şi pentru a se înlătura influenţele mutuale, înainte de fiecare încercare s-a făcut cîte o trecere (de degroşa2e) cu regimul indicat în tabela 2.

Pentru experimentare s-a ales adîncimea de aşchiere mai mică decît raza de racordare a vîrfului cuţitului, iar avansurile de valori mici fiindcă s-a urmărit încercarea în condiţiile cele mai grele ce pot apărea la strunjirea de finisare.

În aceste cazuri valoarea teoretică a înălţimilor neregularităţilor se poate calcula cu relaţia 2.

După fiecare strunjire de probă a fost determinată rugozitatea suprafeţelor — prin măsurarea cu microscopul dublu Linnik de construcţie Zeiss (tip Schmaltz) — a înălţimii neregularităţiilor (parametrul R_z).

4. REZULTATELE OBŢINUTE

Cu rezultatele obţinute în urma strunjirii epruvetelor în cele zece stări structurale luate în considerare, pentru regimurile prezentate în tabela 2 s-au trasat diagramele din figurile 2, 3 şi 4 şi profilogramele din figura 5.

În figura 2 s-a reprezentat variaţia rugozităţii suprafeţei în funcţie de viteza de aşchiere la cele trei avansuri considerate. Epruvetele (stările structurale) au fost aranjate după structură în ordinea creşterii durităţii. Astfel primele şapte stări corespund structurilor ferito-perlitice iar ultimele trei structurilor de tip sorbitic.

Experimentările s-au făcut de la viteze ceva mai ridicate deoarece utilizarea economică a cuţitelor armate cu plăcuţă din carburi metalice este justificată pentru viteze mai mari.

Cu toate că o serie de cercetări ale lui Diacenko [13] Isaev [20] ş.a. arată variaţia rugozităţii cu viteza de aşchiere începînd de la valori foarte mici ale vitezelor, totuşi, din punct de vedere economic, aceasta nu are mare importanţă. Important totuşi şi faptul semnalat de aceşti autori că maximele rugozităţilor nu se găsesc întotdeauna numai pentru valori ale vitezei foarte apropiate de $v = 20$ m/min. De altfel vulf [21] prezintă o diagramă din care reiese că pentru perlită globulară acest maxim al rugozităţii în funcţie de viteza de aşchiere este deplasat mai spre stînga, faţă de maximul corespunzător pentru perlită lamelară (la $v = 30$ m/min faţă de $v = 50$ m/min), şi deci asupra acestei poziţii au o influenţă hotărîtoare factorii interni, legaţi de compoziţia şi starea structurală a materialului prelucrat.

Din diagramele prezentate în figura 2 se pot trage o serie de concluzii.

După modul de variaţie al rugozităţii cu viteza de aşchiere se observă că probele se pot împărţi în două clase distincte şi anume epruvetele 1, 2,..., 7 şi epruvetele 8, 9 şi 10 cu stări structurale complet dife-

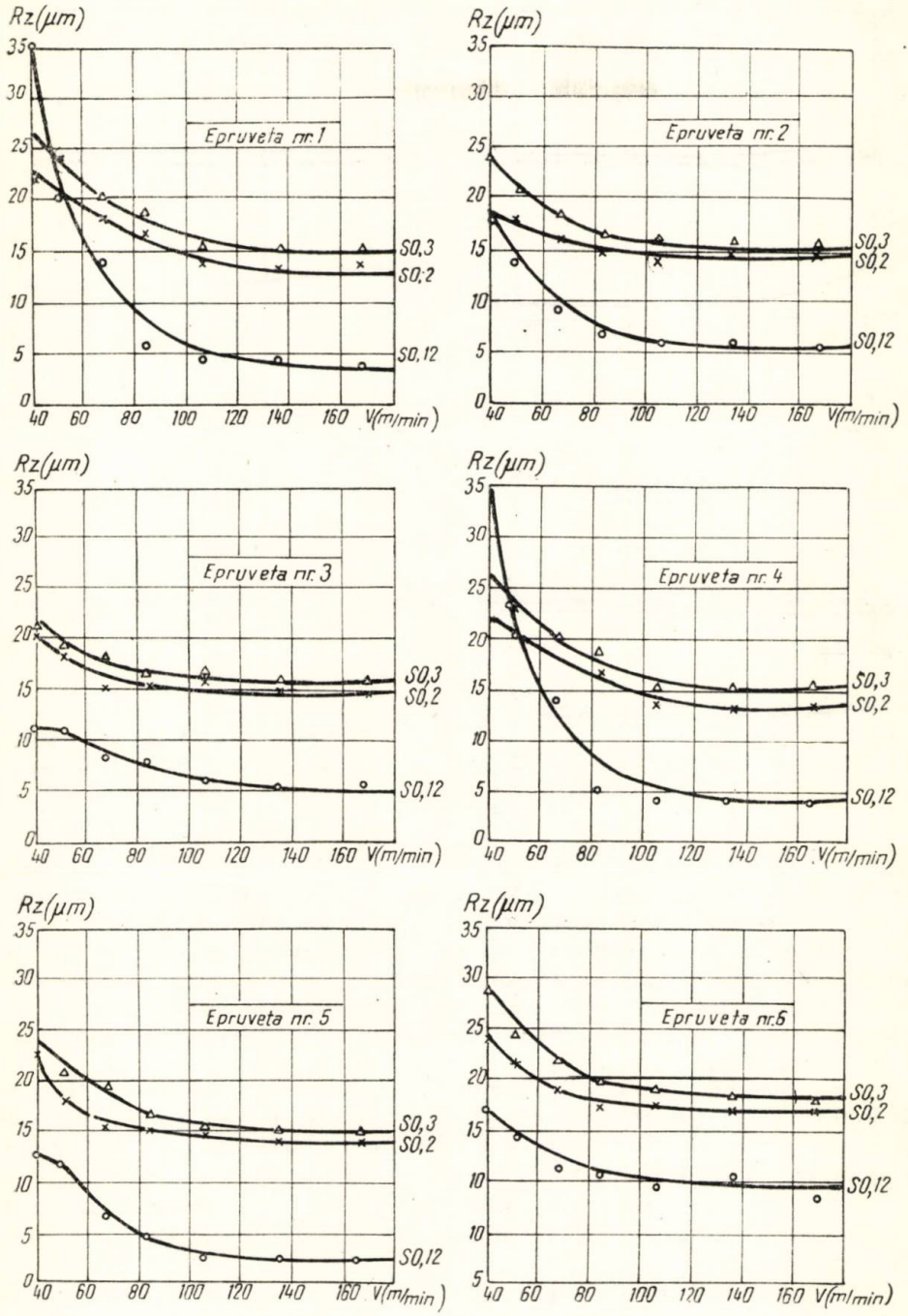


Fig. 2. — Variația rugozității cu regimul de așchiere pentru stările structurale analizate.

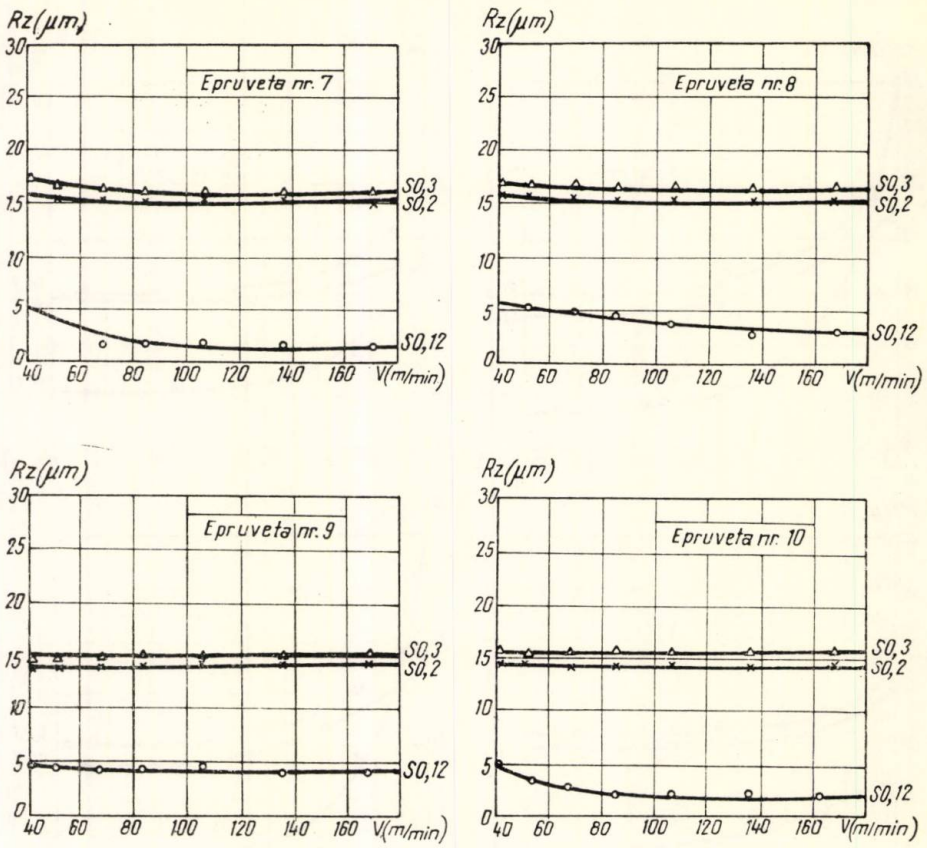


Fig. 2 (continuare)

renţiate. Se observă că la structurile de tip sorbitic viteza are o influenţă aproape neglijabilă asupra mărimii rugozităţii, influenţă foarte mare avînd-o creşterea avansului în domeniul valorilor mici ale acestuia.

În schimb la structurile de tip perlitic se semnalează o variaţie importantă a rugozităţii cu viteza. În general vorbind, pentru aceste stări structurale, viteza are influenţă asupra rugozităţii pînă la valori ale vitezei cuprinse între 80—90 m/min, după care influenţa devine foarte mică (vezi şi fig. 4).

Se observă şi aici că influenţa avansului se face simţită la trecerea de la 0,12 la 0,2 mm/rot şi foarte puţin la trecerea de la 0,2 la 0,3 mm/rot, cu toate că din relaţiile menţionate s-ar părea că avansul ar trebui să aibă o influenţă mult mai mare.

Aceasta se poate explica prin faptul că la avansurile mici, aşchia se îndepărtează după o tasare importantă a materialului în faţa tăişului cuţitului.

Influenţa mare a structurii materialului asupra prelucrabilităţii prin aşchiere, din punctul de vedere al calităţii suprafeţei, reiese analizînd diagramele din figura 3. În primul rînd se observă foarte clar că între

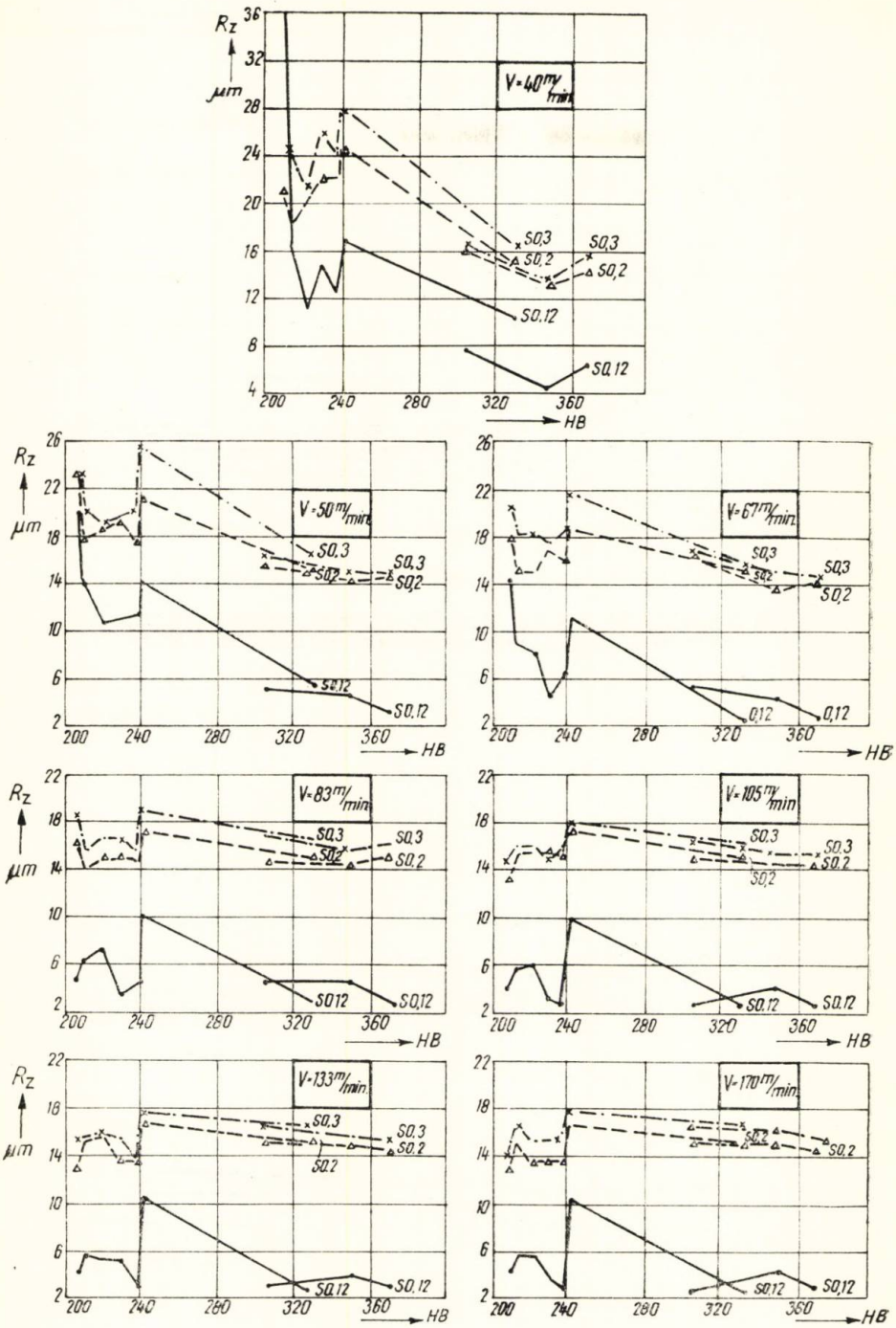


Fig. 3. — Variația rugozității cu duritatea pentru regimurile de așchiere luate în considerare.

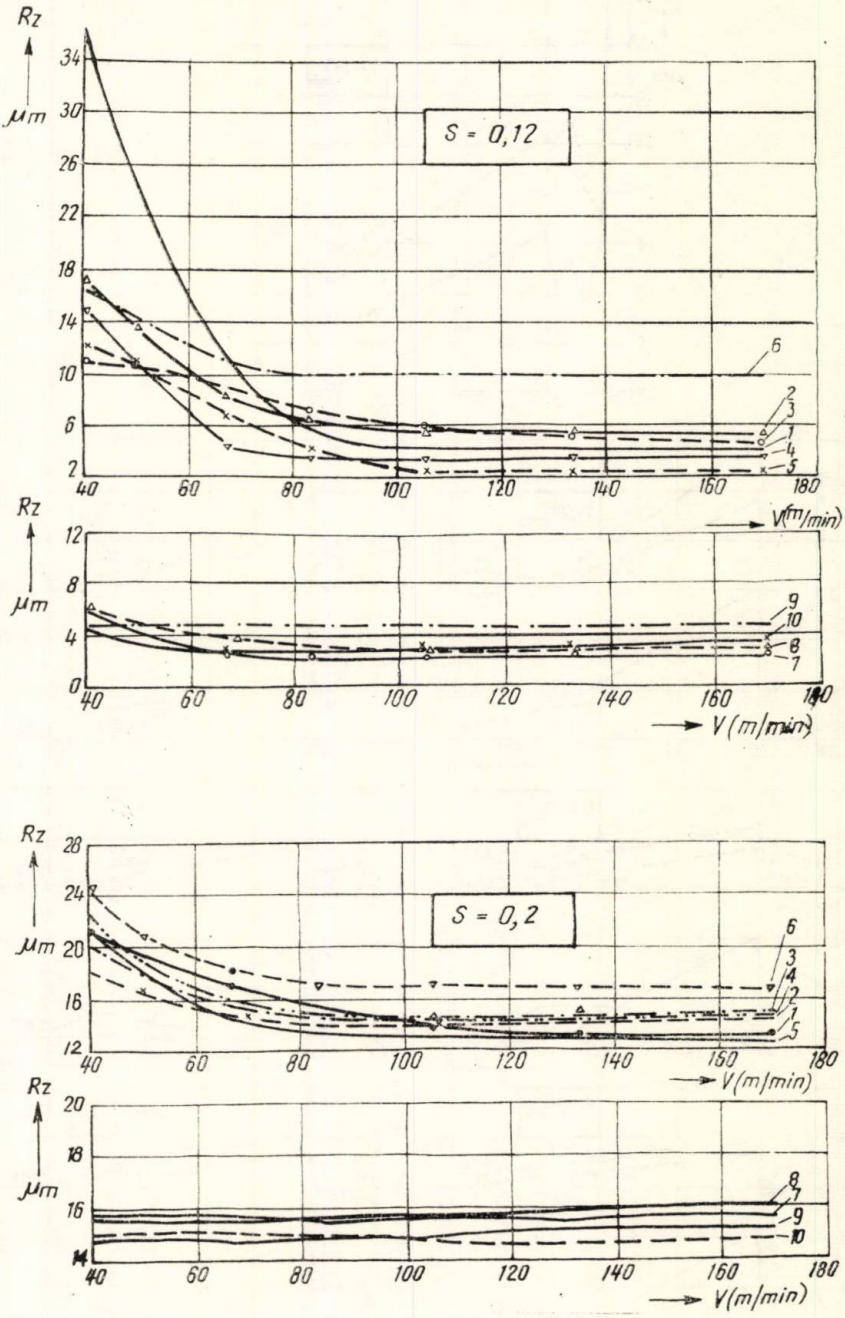


Fig. 4. — Variația rugozității cu viteze de așchiere și starea structurală.

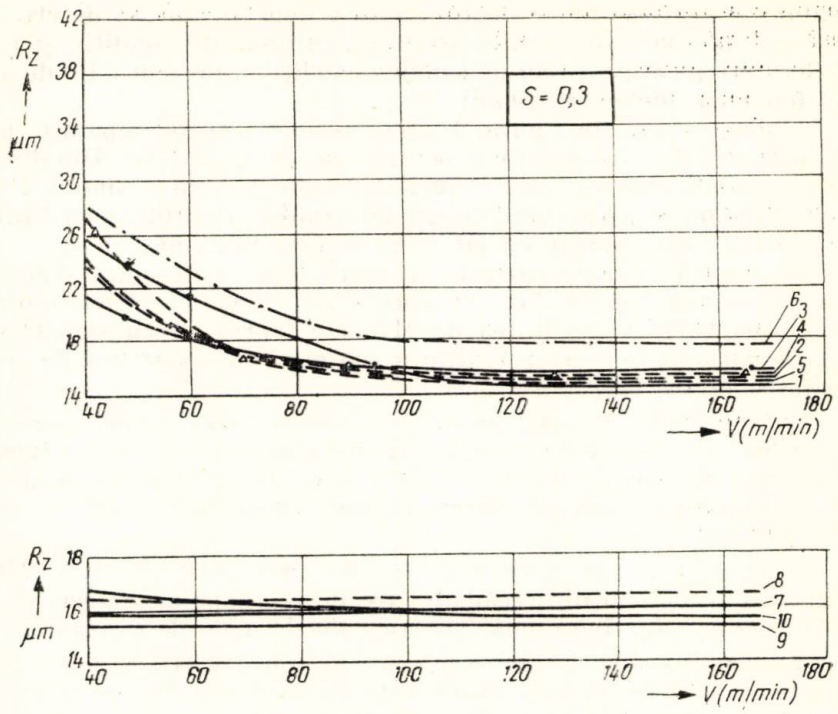


Fig. 4 (continuare)

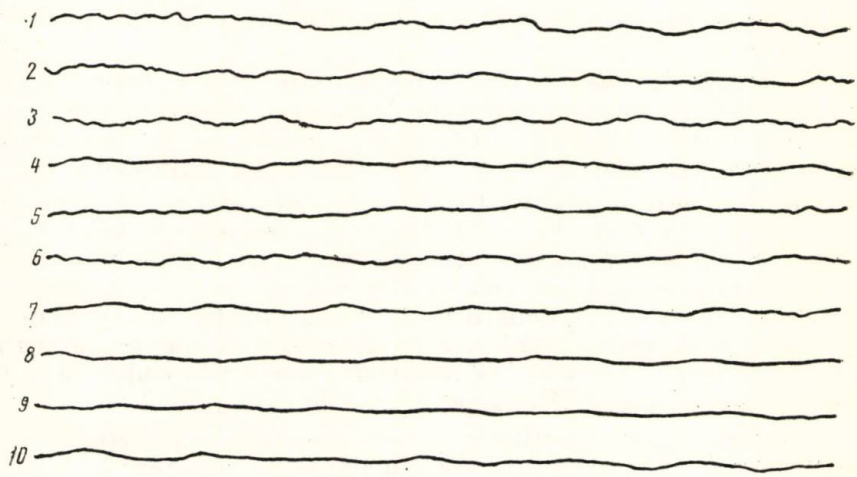


Fig. 5. — Profilogramele obținute pentru stările structurale luate în considerare. Scara 200 : 1.

rugozitate şi duritate nu se poate stabili o dependenţă aşa de clară cum a fost indicată de Isaev pentru Stali 45, în anumite condiţii, şi reluată apoi de mulţi autori, care nu mai indică condiţiile, prezentînd-o de acuma ca un fenomen universal valabil.

În diagramele din figura 3 s-au prezentat curbe separate pentru structurile de tip ferito-perlitic şi pentru cele de tip sorbitic. Din diagrame se poate stabili clar că pentru durităţile cuprinse între 200 şi 240 HB în nici un caz nu se poate stabili o lege de variaţie a rugozităţii cu duritatea, lucru cu atît mai evident cu cît avansul este mai mic.

Se observă în toate cazurile un lucru foarte interesant şi anume că la trecerea durităţii de la HB 239 (epruveta 5 cu structură ferito-perlitică după normalizare) la duritatea de HB 240 (epruveta cu structura cea mai grosolană de tip ferito-perlitic a materialului în starea de livrare) rugozitatea creşte mult.

Aproape în toate cazurile în urma acestui salt, rugozitatea ajunge la o valoare care depăşeşte valorile rugozităţilor pentru durităţi inferioare lui HB 240. În general acest salt este mai important la avansurile mai mici şi are aproape aceeaşi valoare la trecerea de la avansul 0,2 mm/rot la 0,3 mm/rot.

În continuare se observă că la creşterea durităţii peste 240 HB rugozitatea scade simţitor, scădere care de la valori ale vitezei de peste 60—70 m/min intervine numai pentru valorile mici ale avansului.

Analizînd grupa de probe cu durităţi sub 240 HB se poate aprecia că dintre structurile ferito-perlitice, cele obţinute prin recoacere de detensionare (proba 4) şi prin normalizare (proba 5) adică cu un grad de dispersie mai mare şi cu finisarea structurii, dau în general la prelucrarea prin strunjire rugozităţi dintre cele mai scăzute.

În figura 4 s-a reprezentat variaţia rugozităţii cu viteza de aşchiere pentru acelaşi avans la toate structurile luate în considerare. Şi din aceste figuri se observă foarte clar că, cu foarte mici excepţii, structurile de tip ferito-perlitic (şi mai ales acelea cu ferită liberă) au un mod de comportare, iar cele de tip sorbitic, obţinute după tratamentul termic de revenire, se comportă diferit.

Dintre toate probele la cea de tip ferito-perlitic (epruveta 6), corespunzătoare materialului în starea de livrare, cu structura cea mai grosolană şi cu cantitate mare de ferită liberă — dispusă în reţea — se obţine şi rugozitatea cea mai mare la toate avansurile exprimate.

Variaţia mare a rugozităţii cu viteza de aşchiere şi structura se poate explica prin prezenţa feritei libere în structura probelor 1...6 — ferită liberă ce are un rol negativ la aşchiere cu atît mai mult cu cît structura este mai grosolană. Aceasta se face simţită mai ales pînă la viteze de 80 m/min contribuind esenţial la formarea tăişului de depunere. Apariţia tăişului de depunere pînă la aceste viteze duce la micşorarea unghiului de tăiere, lucru ce are influenţă negativă asupra procesului de aşchiere şi deci şi asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate.

Influenţa stării structurale asupra profilului suprafeţei prelucrate se vede analizînd şi profilogramele din figura 5. Se observă că la epruvetele 8, 9, şi 10 profilogramele au forme regulate spre deosebire de celelalte.

5. CONCLUZII

În lucrare s-a stabilit cantitativ corelația dintre prelucrabilitate (prin intermediul rugozității suprafeței), structură și regimul de așchiere la oțelul OLC 60 — strunjit longitudinal de finisare.

Din punct de vedere al influenței durității asupra rugozității lucrarea pune în evidență caracterul complex al acestei dependențe. Astfel în domeniul durităților mici, adică pentru materialele în starea recoaptă rugozitatea este mai mare decît la materialele cu structură pur perlitică sau globulară. Rezultă de aici că ferita preeutectoidă influențează negativ asupra prelucrabilității.

Lucrarea pune în evidență și influența importantă pe care o are mărimea grăuntelui cristalin asupra rugozității în sensul că o dată cu creșterea mărimii grăuntelui cristalin prelucrabilitatea din punct de vedere al rugozității este mai redusă.

De remarcat că structurile de tip globular ale acestui oțel hipoeutectoid duc la mărirea prelucrabilității prin așchiere ca și în cazul oțelurilor hipereutectoide.

Lucrarea mai pune în evidență interdependența corelației dintre rugozitate și duritate de viteza de așchiere.

În privința influenței vitezei de așchiere asupra rugozității se constată că la structurile provenite din descompunerea directă a austenitei subrăcite influența vitezei asupra rugozității crește în domeniul vitezelor mici de așchiere.

La structurile de tip globular rugozitatea este aproape independentă de viteza de așchiere în domeniul vitezelor utilizate în mod curent.

De asemenea, la viteze mici de așchiere există tendința generală de reducerea influenței avansului asupra rugozității.

Influența mare a avansului asupra rugozității suprafeței prelucrate s-a constatat la creșterea avansului în domeniul valorilor mici ale acestuia.

O privire de ansamblu asupra cazurilor analizate arată că, la același avans, influența structurii asupra rugozității este cu atît mai redusă cu cît viteza de așchiere este mai mare.

Primită la redacție la 29 mai 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Z. Duca, *Așchierea metalelor*, Lit. învățămîntului, București, 1957.
2. * * * *Încercări și analize de metale*, Edit. tehnică, București, 1965.
3. G. B. Troupe, *A metallurgical guide to machinability*, Metalworking Production, **108**, *11*, 88—92 (1964).
4. Okushima Keiji, Iwata Kazuaki, *A study of the machinability of metals*, Mem. Fac. Engng, Kyoto-Univ. 25. *1*, 12—32 (1963).
5. K. Mańie, *Machinability rating*, Factory and Plant, **54**, *10*, *24*, *25*, *27*, 29—31 (1966).
6. C. Ciucă, M. Teodorescu, E. Țâru, I. Tarău, *Dependența dintre structură și anumiți indici ai prelucrabilității prin așchiere pentru oțelul OLC 60*, susținută la Sesiunea Științifică Institutul Politehnic Galați, mai 1968.
7. M. Teodorescu, C. Ciucă, E. Țâru, I. Tarău, *Studiul influenței structurii asupra prelucrabilității prin așchiere a oțelului OLC 60*, susținută la Sesiunea științifică Institutul politehnic Timișoara, mai 1968.

8. G. Lorenz, *Machinability testing*, Austral. Mec. Engng. **49**, *9*, 24—31 (1962).
9. J. Szyrajew, *Metody badania skrawalnosci materialów*, Mechanic, **35**, *9*, 483—491 (1962).
10. J. Kaczmarek, *Pojecie i ocena Skrawalnosci*, Mechanik, **35**, *9*, 477—480 (1962).
11. * * * *Usinabilité des aciers en fonction des caractéristiques de métal usine*, Mach.-outil. franc., **27**, *182*, *149*, *151*, *153*, *155* (1962).
12. D. W. Murphy, *Machining performance of steels*, Iron and Steel Engr., **44**, *4*, 123—129 (1967).
13. P. E. Diacenko, M. O. Iacobson, *Calitatea suprafeţelor la prelucrarea metalelor prin aşchiere*, (traducere din l. rusă, Edit. tehnică, Bucureşti, 1954.
14. St. Enache, *Calitatea suprafeţelor prelucrate*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1966.
15. I. D. Lăzărescu, *Teoria aşchierii şi proiectarea sculelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
16. A. G. Arend, *Cutting-speeds during machining*, Mech. World and Engng. Rec. — 142, *3521*, 384—385 (1962).
17. V. B. Serebrovski, *Régimes de coupe et rugosité des surfaces usinées*, Revue polytechnic *1195*, 508—510 (1963).
18. L'Abbé Coyère, *Influence de la vitesse de coupe sur la rugosité de tournage*, La Machine Moderne, *655*, oct. 27—30 (1963).
19. M. E. Blanter, *Fazovîe prevrascenia pri termiceskoi obrabotke stali*, Metallburghizdat, Moskva, 1962.
20. A. I. Isaev, *Proţess obrazovania poverhnostnovo sloia pri obrabotke metallov rezaniem*, Maşghiz, 1950.
21. A. M. Vulf, *Osnovî rezania metallov*, Maşghiz, 1954.
22. S. N. Filonenko, *Rezanie metallov*, Maşghiz, 1963.
23. N. N. Zorev, *Voprosî, mehaniki proţessa rezania metallov*, Maşghiz, 1956.

UTILIZAREA TEXTOLITULUI ÎN CONSTRUCȚIA GHIDAJELOR RECTILINII PLANE. I. COMPORTAREA LA UZURĂ A CUPLURILOR DE FRECARE TEXTOLIT-FONTĂ

de VICTOR CALCAN

Lucrarea își propune să analizeze posibilitățile de utilizare în construcția ghidajelor rectilinii plane a materialelor plastice armate de tip textolit produse curent în țară. Se prezintă rezultatele încercărilor de uzură efectuate pe cupluri de frecare textolit-fontă și fontă-fontă în condiții normale de ungere, la frecare uscată și în cazul solicitărilor mărite, care permit recomandarea utilizării textolitului tip *M* ca material pentru ghidaje. Se confirmă totodată posibilitatea stabilirii unei dependențe matematice între valoarea uzurii și parcursul de frecare.

1. OBIECTUL LUCRĂRII

Cercetările efectuate în diferite țări, confirmate și de rezultatele obținute în exploatare, au demonstrat că numeroși polimeri—poliamidele, politetrafluoretilena, polioximetilena, materialele plastice armate de tip textolit etc., posedă bune proprietăți de antifricțiune, care le recomandă pentru construcția unui important organ de mașină, ansamblul sanie-ghidaj specific mașinilor-unelte.

Principalele condiții tehnice impuse la folosirea polimerilor ca suprafețe de ghidare sînt : stabilitate dimensională maximă la imersiunea în apă, ulei, emulsii și lichide de răcire ; rezistență bună la creșterea temperaturii pînă la 150°C ; coeficient de dilatație liniară mic ; proprietăți mecanice superioare ; coeficient de frecare redus și cît mai independent față de durata contactului fix și variația vitezei de alunecare ; rezistență mare la uzură [1], [2].

Comparativ cu cuplurile de frecare metalice care prezintă o uzură relativ scăzută, se comportă excepțional în condiții normale de funcționare și lamentabil în condiții extreme, polimerii deși manifestă o uzură mai ridicată au avantajul unei comportări superioare în regimuri severe de lucru

[3], [4], [5]. Această calitate are o importanţă deosebită pentru ghidajele maşinilor-unelte grele, la care predomină uzura de adeziune datorită sudării şi ruperii punţilor de sudură între microzonele de contact.

Prezenta lucrare îşi propune cercetarea, sub aspectul uzurii, a posibilităţilor de utilizare în construcţia ghidajelor rectilinii plane a materialelor plastice armate de tip textolit din producţia curentă a Fabricii de cabluri şi materiale electroizolante din Bucureşti, respectiv textolitul tip *M*, cu proprietăţi mecanice ridicate şi proprietăţi electrice normale şi textolitul tip *E*, cu proprietăţi electrice superioare şi proprietăţi mecanice normale.

Modul de obţinere a celor două textolite, caracteristicile materialelor de armare şi condiţiile de presare a plăcilor sînt redate în [6].

Din cercetarea literaturii de specialitate a rezultat că este prima lucrare ce abordează tema enunţată, avînd ca obiect stratificate produse în ţara noastră.

Pentru comparaţie, s-au încercat în paralel epruvete din dytron (textolit tip *F* 2082, produs în R.F. a Germaniei), folosit pentru construcţia ghidajelor rectilinii plane ale unor maşini-unelte grele şi epruvete din fontă cenuşie superioară, calitatea *Fc* 25 (STAS 568—61), utilizată la turnarea batiurilor maşinilor-unelte grele. Compoziţia chimică a fontei: 2,80% C; 0,50% C legat; 1,80% Si; 0,80% Mn; 0,064% S; 0,106% P, iar duritatea 187 HB.

2. INSTALAŢIA DE ÎNCERCARE

Pentru studiul uzurii cuplurilor de frecare textolit-fontă şi fontă-fontă s-a utilizat standul experimental al Laboratorului de organe de maşini din cadrul Institutului de cercetare şi proiectare pentru maşini-unelte şi agregate din Bucureşti, prezentat în figura 1.

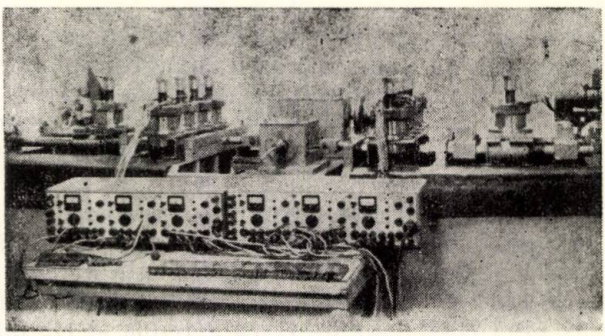


Fig. 1. — Vederea de ansamblu a standului experimental pentru studiul uzurii.

Un reductor şi un variator de viteze amplasate între motorul electric de acţionare şi sistemul bielă-manivelă permit realizarea unei game de viteze de alunecare cuprinse între $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ — 3,330 m/min. Epruvetele de încercat sînt mobile şi se deplasează pe o cursă cu lungimea maximă de 72,5 mm.

Standul este echipat pentru încercări de durată şi are posibilitatea verificării şi corectării presiunii de contact în timpul încercării. Principiul constructiv şi funcţional al standului este explicitat în figura 2, care redă o secţiune printr-un post de lucru, compus din cuplul de frecare, sistemul de ungere, dispozitivul de încărcare a epruvetei şi dispozitivul de măsurare a forţei.

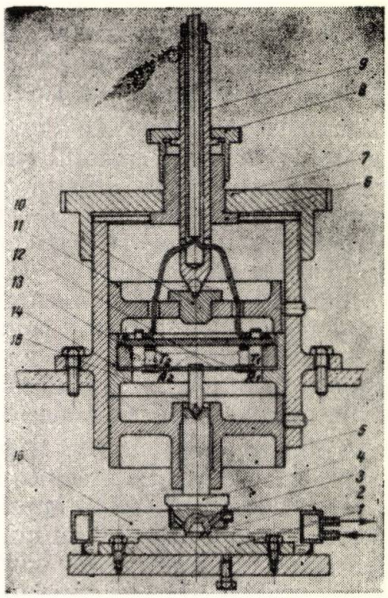


Fig. 2. — Secţiune printr-un post de lucru :

1 — epruvetă fixă; *2* — epruvetă mobilă; *3* — nucă; *4* — poanson port-nucă; *5* — bucşă de ghidare; *6* — şurub de încărcare; *7* — flanşă; *8* — piuliţă de presiune; *9* — tijă de presiune; *10* — piesă de împingere; *11* — bucşă de presiune; *12* — lamă elastică; *13* — piuliţă de strîngere; *14* — corpul traductorului; *15* — poanson de presiune; *16* — baie de ulei cu pereţi dubli.

Forţa se măsoară cu ajutorul traductorului tensometric montat în corpul *14*, pe lama elastică *12* fiind lipite mărcile tensometrice R_1, T_1 şi R_2, T_2, montate în circuitul unei punţi tensometrice. Traductorul permite totodată verificarea constantei sa rcinii pe întreaga cursă a epruvetei mobile şi pe toată durata încercării.

3. MĂSURAREA UZURII

În condiţii de laborator uzura se poate determina prin metode directe — dimensionale şi gravimetrice — sau indirecte — analiza chimică a produselor uzurii regăsite în lubrifiant şi metoda trasorilor radioactivi —. În cazul materialelor plastice, metoda gravimetrică implică dificultăţi experimentale datorită modificărilor în greutate ce intervin la imersiunea materialelor în medii de absorbţie, iar cea a trasorilor radioactivi este inaplicabilă.

Dintre metodele dimensionale s-a ales metoda amprentelor, care prezintă avantajul unei precizii ridicate şi este larg utilizată în cercetările recente. În acest scop, în centrul suprafeţelor de alunecare ale epruvetelor fixe şi mobile s-a imprimat cîte o amprentă la aparatul Brinell, prin compresiunea bilei Ø 2,5 mm cu forţa $N = 100$ kgf. Uzura epruvetelor s-a măsurat cu un optimetru tip TGL 7483/I, la care s-a adaptat un dispozitiv bidirecţional de poziţionare a punctelor de măsurat.

4. STABILIREA CONDIȚIILOR EXPERIMENTALE

La fixarea condițiilor experimentale s-au analizat trei surse principale de informații: valorile admisibile ale presiunii de contact recomandate de literatura de specialitate pentru calculul ghidajelor; parametrii constructivi și funcționali ai ghidajelor mașinilor-unelte grele din fabricația F.M.U.A.B. *); parametrii utilizați în cercetările de laborator efectuate în țară și în străinătate în domeniul uzurii cuplurilor de ghidare metal-metal și material plastic-metal.

Întrucît presiunea de contact reprezintă factorul determinant al procesului de uzură, calculul propriu-zis al ghidajelor constă aproape exclusiv în verificarea acestui parametru. Valorile admisibile indicate în literatură pentru cuplurile de ghidare fontă-fontă și fontă-oțel ale mașinilor-unelte grele sînt 10 kgf/cm² în cazul vitezelor de deplasare mici și 4 kgf/cm² în cazul vitezelor de deplasare mari. [1], [7]. După [3], sarcinile luate în calcul la proiectarea ghidajelor mașinilor-unelte grele sînt cuprinse între 1—4 kgf/cm² pentru viteze de alunecare mici. Precizăm că în literatura de specialitate nu s-au găsit indicații privind diferențierea valorilor admisibile ale presiunii de contact ale cuplurilor de ghidare material plastic-fontă față de cuplurile fontă-fontă.

Parametrii constructivi și funcționali ai ghidajelor mașinilor-unelte fabricate de F.M.U.A.B. prezintă limite mari de variație. Astfel, lungimea cursei organului mobil este cuprinsă între 900—5185 mm iar viteza de alunecare între 0,006—4,0 m/min. Admițînd cazul limită al repartiției triunghiulare a presiunii de contact pe întreaga lungime a ghidajelor organelor mobile, ceea ce presupune

$$p_{N_{max}} = 2p_{N_{med}}, \tag{1}$$

presiunile de contact maxime variază de la 1,12 la 6,06 kgf/cm².

Multitudinea variantelor experimentale adoptate de diferiți cercetători în încercările de laborator ilustrează atît diversitatea materialelor studiate și extinderea domeniului de cercetare, cît și faptul că rezistența la uzură nu constituie o constantă a materialelor, ci depinde în mare măsură de condițiile de lucru ale cuplurilor de frecare. La stabilirea condițiilor experimentale fiecare autor a urmărit reproducerea unor aspecte ale fenomenelor de uzură ce apar în exploatarea mașinilor-unelte, parametrii utilizați putînd fi justificați pentru unele cazuri și infirmați pentru altele. Viteza de alunecare variază între 0,4—69 m/min, presiunea de contact 4—30 kgf/cm², parcursul de frecare 0,5—100 km, ungerea fiind subordonată formei de uzură ce urmează a fi evidențiată. Diferă de asemenea dimensiunile și numărul epruvetelor încercate.

Diversitatea parametrilor încercărilor de uzură face dificilă compararea comportării diferitelor materiale și selecționarea lor judicioasă pentru construcția ghidajelor. Se impune astfel standardizarea unor încercări tip de uzură pentru viteze de alunecare mici și mari, care să

* Fabrica de mașini-unelte și agregate București.

reglementeze atît aparatura de încercare şi dimensiunile epruvetelor, cît şi condiţiile experimentale.

Menţionăm că în prezent este standardizată numai determinarea uzurii materialelor plastice prin abraziune, metoda cu sul abraziv (STAS 7405—66), bazată pe stabilirea uzurii prin pierderea în masă a epruvetelor în comparaţie cu o epruvetă etalon din cauciuc (în lucrarea [8] s-a folosit pentru epruveta etalon sticla organică). Această încercare poate furniza informaţii cantitative, fără valoare practică pentru cuplurile de ghidare.

Admiţînd necesitatea ca încercările de laborator să se efectueze în regimuri de lucru mai severe decît cele din exploatare, se desprinde observaţia că în cazul maşinilor-unelte grele presiunile specifice indicate în lucrările [3] şi [4] sînt prea mici, iar cele din [9] prea mari, valoarea optimă fiind de 10 kgf/cm^2.

În ceea ce priveşte viteza de alunecare, influenţa ei nu este decisivă în procesul de uzură, pe prim plan situîndu-se presiunea specifică şi ungerea suprafeţelor de frecare. În această situaţie, în special pentru încercări de durată, se pot adopta viteze corespunzătoare avansului rapid al maşinilor-unelte. În studiul de faţă s-a ales viteza de alunecare de 3,330 m/min, respectiv viteza de lucru a standului fără solicitarea variatorului de viteze.

O atenţie deosebită se acordă stabilirii parcursului de uzură, care trebuie să depăşească perioada de rodaj şi în acelaşi timp să furnizeze informaţii suficiente pentru precizarea alurii curbei de uzură în funcţie de parcurs. Întrucît rodajul cuplurilor de frecare, material plastic-metal, se termină după 3—5 km, în funcţie de materialele cuplurilor de frecare [3], parcursurile de uzură de 4 km [8] şi 10 km [9] sînt neconcludente. S-a admis ca suficient un parcurs de uzură de 50 km, realizat în 250 de ore de funcţionare continuă a standului.

În procesul de uzură un rol important are ungerea suprafeţelor de frecare, situaţiile posibile din exploatare fiind reproduse şi în încercările de laborator. Pentru modelarea fenomenului de uzură abrazivă s-a încărcat periodic suprafaţa de alunecare cu amestec abraziv, s-a introdus amestecul abraziv direct în baia de ulei şi s-a agitat la intervale egale de timp sau s-a impurificat uleiul cu praf abraziv rezultat la rectificarea unui oţel aliat de mare rezistenţă. Aceste variante realizează într-adevăr o intensificare forţată a uzurii, discutabilă însă sub aspectul proporţiilor cu cazurile din practică. O soluţie mai realistă a fost adoptată în [3], prin utilizarea unui ulei folosit timp de un an la o raboteză. Introducerea anticipată în circuitul de ungere a unor elemente abrazive denaturează influenţa asupra uzurii a produselor de uzură proprii cuplului de frecare cercetat, care nu pot fi neglijate la scara încercării de laborator.

Ţinînd seama de faptul că maşinile-unelte moderne sînt echipate cu sisteme de filtrare continuă a uleiului, influenţa particulelor abrazive şi a impurităţilor poate fi limitată. O referire specială trebuie făcută pentru cuplurile de frecare material plastic-metal, care datorită elasticităţii mari a materialelor plastice şi contactului mai intim realizat între suprafeţele conjugate sînt mai puţin sensibile la acţiunea particolelor abrazive, raportul dintre uzura abrazivă şi uzura de alunecare fiind de 10 : 1 la cuplurile de frecare din metale feroase şi de 1,5 : 1 la cuplurile de frecare

material plastic-metal [3]. Pentru aceste motive, nu s-au prevăzut în mod distinct încercări de uzură cu ulei impurificat cu amestec abraziv.

Dependența redusă a uzurii materialelor plastice față de procedeul de prelucrare mecanică a suprafețelor de alunecare ale cuplurilor de frecare material plastic-metal [3], [4], [8] a eliminat oportunitatea unor încercări de uzură în diferite variante de prelucrare mecanică a suprafețelor, alegîndu-se procedeele uzuale în practică, respectiv frezare fină/rectificare.

Avînd în vedere considerentele expuse, încercările prezentate în această lucrare au urmărit aspectele extreme ale uzurii și au constat din :

— încercări de uzură în perioada de rodaj ;

— încercări de uzură la solicitări de durată, în condiții normale de ungere ;

— încercări de uzură intensivă, în condiții de frecare uscată și de solicitare mărită.

În toate cazurile s-au cercetat patru cupluri de frecare, epruvetele mobile fiind confecționate din textolit tip *M*, textolit tip *E*, dytron și fontă FC 25, iar cele fixe din fontă FC 25. Pentru fiecare cuplu de frecare s-au utilizat patru perechi de epruvete cu dimensiunile : epruveta mobilă Ø 16 mm, epruveta fixă 100 × 20 mm. Epruvetele mobile au fost prelucrate mecanic prin frezare fină, $R_z = 2{,}8$ μ m, iar cele fixe prin rectificare cu periferia pietrei, $R_z = 0{,}8$ μm.

După imprimarea amprentei, epruvetele din textolit au fost menținute în ulei 405 aditivat timp de 24 ore la temperatura ambiantă și prerodate în baie de ulei pe un parcurs $s = 0{,}5$ km, la presiunea de contact $p = 5$ kgf/cm² și viteza de alunecare $v = 3{,}330$ m/min.

5. CONCLUDENȚA MĂSURĂTORILOR

Datorită neregularităților suprafețelor în frecare, determinarea exactă a uzurii medii presupune măsurarea ei într-un număr infinit de mare de puncte, lucru irealizabil practic. Avînd în vedere și dispersia rezultatelor specifică materialelor anizotrope și eterogene cum sînt materialele plastice armate de tip textolit, pentru a avea siguranța unor valori de uzură concludente fiecare valoare a uzurii medii s-a definit prin circa 64 măsurători în cazul epruvetelor din textolit, față de 24 măsurători în cazul epruvetelor din fontă.

Considerînd distribuția normală a frecvențelor valorilor de uzură, s-a folosit metoda recomandată în [10] pentru calcularea mediilor și indicilor de precizie. Abaterile probabile de la media corectată au înregistrat, la un parcurs de uzură de 50 km, următoarele valori : textolit tip *M* ± 0,35 μm ; textolit tip *E* ± 0,45 μm ; dytron ± 0,41 μm ; fontă Fc 25 ± 0,14 μm.

Pentru a ilustra precizia măsurătorilor, se prezintă în figura 3 valorile individuale ale uzurii epruvetelor mobile din textolit tip *M* și fontă Fc 25, mediile corectate și domeniile abaterii probabile ale mediilor la încercările de uzură de durată, în condiții normale de ungere.

Se remarcă faptul că domeniul abaterii probabile creşte o dată cu parcursul de uzură, raportul faţă de valoarea uzurii medii rămînînd însă aproape constant.

În cele ce urmează valorile de uzură se vor referi numai la valori medii corectate.

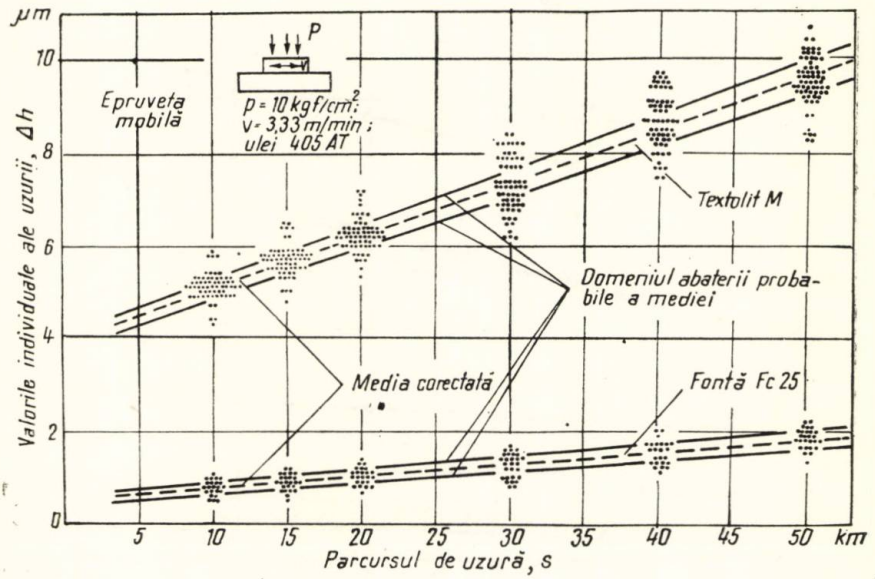


Fig. 3. — Valorile individuale ale uzurii textolitului tip *M* şi fontei Fc 25.

6. UZURA ÎN CONDIŢII NORMALE DE UNGERE

Încercările în perioada de rodaj şi la solicitări de durată s-au efectuat în următoarele condiţii :

— presiunea de contact : $p = 10$ kgf/cm²;
— viteza de alunecare : $v = 3{,}330$ m/min;
— parcursul de uzură :
  a) încercări de rodaj : $s = 15$ km;
  b) încercări de durată : $s = 50$ km;
— ungerea : baie de ulei;
— lubrifiant : ulei 405 aditivat.

6.1. RODAJUL

Rodajul se poate considera terminat după un parcurs de frecare de 3—5 km în cazul epruvetelor mobile şi 5 km în cazul epruvetelor fixe, alura parabolică a curbelor în perioada de rodaj exprimînd complexitatea procesului de uzură pînă la atenuarea asperităţilor suprafeţelor în frecare (figura 4). Prin înscrierea valorilor uzurii în coordonate logaritmice s-au obţinut drepte cu coeficienţi unghiulari diferiţi, fapt care confirmă rezultatele cercetărilor efectuate şi de alţi cercetători pe un mare număr de cupluri de frecare.

6.2. UZURA LA SOLICITĂRI DE DURATĂ

Alura curbelor de uzură la solicitări de durată este prezentată în figura 4.

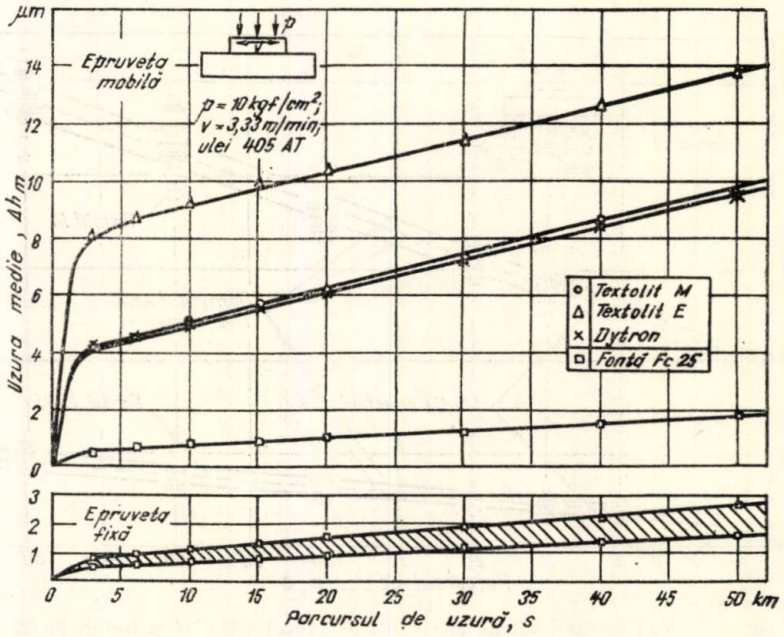


Fig. 4. — Curbele de uzură ale cuplurilor de frecare textolit-fontă.

Dintre materialele plastice încercate, textolitul tip *E* prezintă o uzură ridicată datorită rezistenței mai reduse a materialului de armare

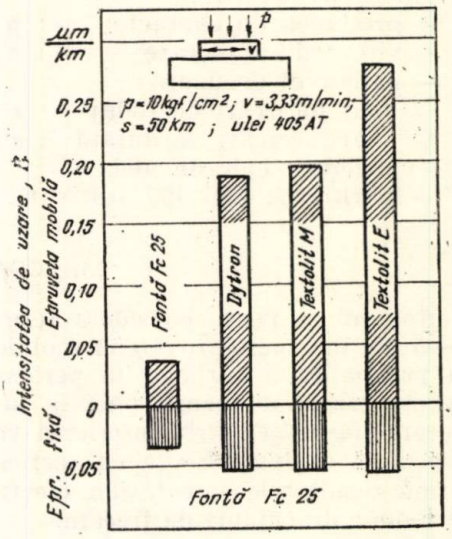


Fig. 5. — Intensitatea de uzare după un parcurs de frecare de 50 km.

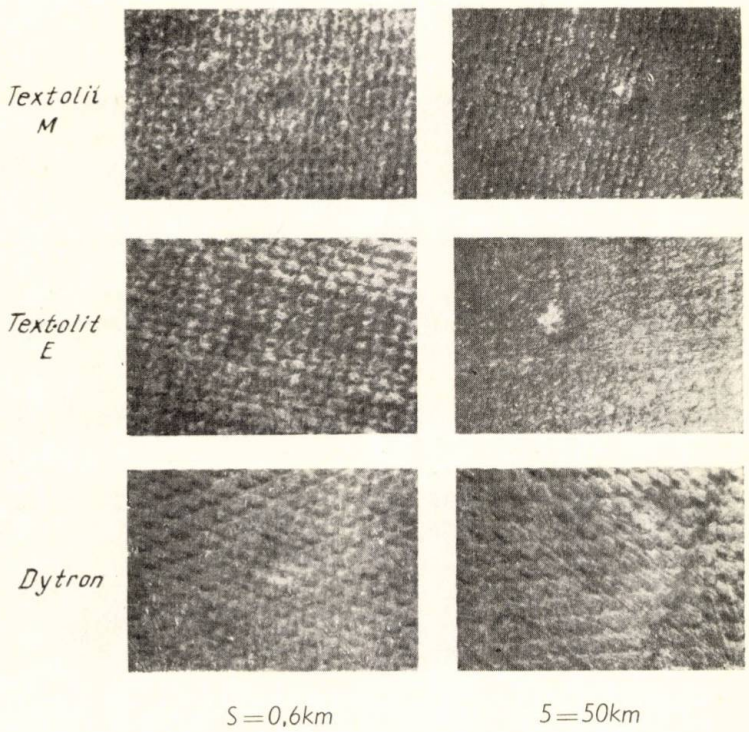


Fig. 6. — Aspectul suprafeţei epruvetelor mobile (4 ×).

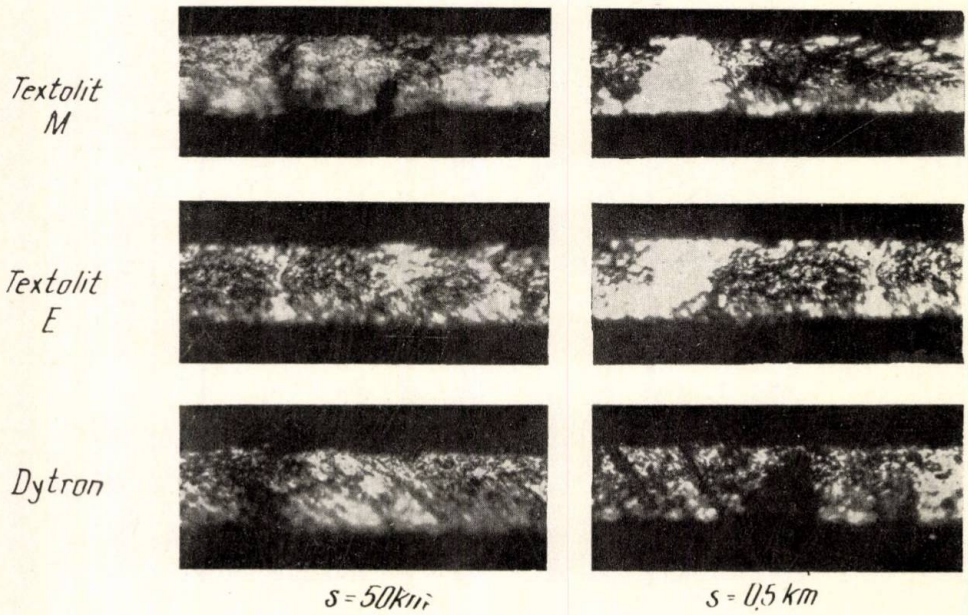


Fig. 7. — Rugozitatea suprafeței epruvetelor mobile (75 ×).

[6], în timp ce între textolitul tip *M* şi dytron nu există diferenţe de comportare. Uzura epruvetelor mobile din fontă Fc 25 este mult mai mică, de 7,4 ori faţă de textolitul tip *E* şi de 5,1 ori faţă de textolitul tip *M* şi dytron.

Uzura epruvetelor fixe din fontă Fc 25, conjugate cu cele trei tipuri de textolit, se situează în partea superioară a domeniului haşurat din figura 4, valorile înregistrate după un parcurs de frecare de 50 km fiind de 2,604, 2,627 şi 2,687 μm în combinaţie cu dytronul, textolitul tip *M* şi textolitul tip *E*; la conjugarea cu fontă Fc 25, uzura corespunde limitei inferioare a domeniului haşurat.

Comportarea la uzură se evidenţiază şi prin intensitatea de uzare a materialelor, figura 5, respectiv prin raportul dintre valoarea uzurii şi parcursul de frecare.

În cazul epruvetelor mobile intensitatea de uzare minimă revine fontei Fc 25, iar cea maximă textolitului tip *E*; în cazul epruvetelor fixe din fontă Fc 25, uzura este practic egală la conjugarea lor cu cele trei tipuri de textolit.

Aspectul suprafeţei epruvetelor mobile înainte şi după încercările de uzură, respectiv după 0,5 km prerodaj şi 50 km parcurs de frecare, este prezentat în figura 6. Suprafeţele iniţiale ale epruvetelor din textolit permit distingerea reţelei inserţiei textile şi a peliculei de răşină; după uzură, efectele procesului de frecare se remarcă printr-o imagine uniform aplatisată şi mai puţin clară a reţelei inserţiei textile, fără a se observa însă vreo deteriorare a suprafeţelor ca sgîrieturi, rizuri etc. La epruvetele din fontă Fc 25 uzura s-a manifestat prin rizuri paralele cu direcţia de alunecare.

Rugozitatea suprafeţei epruvetelor mobile înainte şi după uzură este redată în figura 7.

7. UZURA ÎN CONDIŢIILE FRECĂRII USCATE

Încercările de uzură în absenţa ungerii s-au efectuat în următoarele condiţii:

— presiunea specifică : $p = 10$ kgf/cm^2;

— viteza de alunecare : $v = 3{,}330$ m/min;

— parcursul de uzură : $s = 0{,}5$ km.

Rezultatele obţinute (figura 8) atestă comportarea superioară a materialelor plastice în situaţii grele de lucru.

Uzura epruvetelor mobile din fontă Fc 25 este de 7,4 μm, față de numai 2,4 μm la textolit tip *E* și 1,3 μm la dytron și textolit tip *M*; uzura epruvetelor fixe din fontă Fc 25 conjugate cu epruvete din textolit variază între 0,40—0,46 μm, în timp ce la cuplul de frecare fontă-fontă ajunge la 2,4 μm.

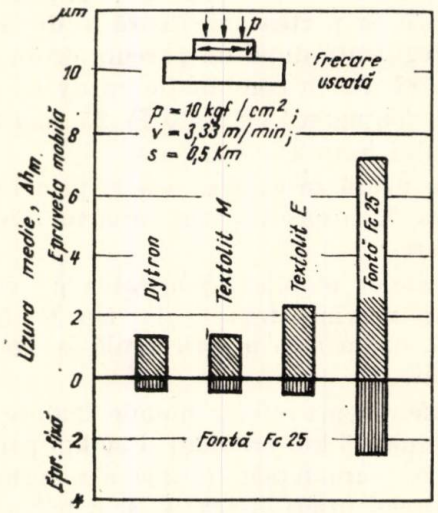


Fig. 8. — Uzura în condițiile frecării uscate.

8. UZURA INTENSIVĂ ÎN CONDIȚII DE FRECARE USCATĂ ȘI SOLICITARE MĂRITĂ

Această încercare particulară de uzură, destinată evidențierii presiunilor de gripare, s-a efectuat în condițiile:

— presiunea de contact : $p = 4$ kgf/cm² (inițial), majorată cu cîte 4 kgf/cm² la fiecare patru curse duble;
— viteza de alunecare : $v = 0{,}01$ m/min;
— cursa epruvetei mobile : $l = 20$ mm;
— parcursul de frecare : $s = 4$ c.d. pentru fiecare presiune de contact.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 1, pentru epruvetele mobile ale cuplurilor de frecare textolit-fontă și fontă-fontă, fiecare valoare a forței de frecare constituind media a circa 60 de măsurători în ambele sensuri ale mișcării de alunecare. În tabelă s-au înscris valorile maxime și minime ale forței de frecare și s-a evidențiat apariția fenomenului de alunecare intermitentă.

Încercările nu au putut fi finalizate pînă la apariția gripării datorită posibilităților experimentale limitate ale standului.

Epruvetele mobile din textolit tip *M*, textolit tip *E* și dytron nu au prezentat urme de uzură, suprafețele de frecare au rămas curate și

Tabela 1

Forţa de frecare la solicitare mărită şi frecare uscată

Presiunea de contact kgf/cm²	Forţa de frecare, kgf			
	Textolit *M*	Textolit *E*	Dytron	Fontă Fc 25
4	1,121	1,148	1,227	1,146
8	2,040	2,000	2,211	2,070
12	2,938	2,885	2,769 3,695	2,992 3,340
16	3,923	3,848	3,371 4,465	3,625 4,635
20	4,982	4,544 5,039	3,938 5,674	4,003 6,310
24	6,056 6,473	5,181 5,985	4,573 6,778	4,915 7,896

netede, iar epruvetele corespondente din fontă Fc 25 au fost uşor lustruite. Epruvetele mobile din fontă Fc 25 au manifestat tendinţa de uzură de la $p = 12$ kgf/cm², tendinţă care s-a accentuat cu creşterea presiunii de contact.

Cea mai bună comportare la uzură s-a înregistrat la textolitul tip *E*, urmat în ordine de textolitul tip *M*, dytron şi fontă Fc 25.

9. DEPENDENŢA DINTRE UZURĂ ŞI PARCURSUL DE FRECARE

S-a arătat că rodajul materialelor plastice armate de tip textolit se poate considera terminat după un parcurs de frecare de 3—5 km, alura curbelor de uzură redate în figura 4 fiind similară pentru toate materialele încercate. Curbele de uzură obţinute permit delimitarea a două domenii, separate de parcursul de rodaj s_R: domeniul de rodaj (I), în care curba are o alură parabolică şi domeniul de uzură normală (II), în care există o dependenţă liniară între valorile uzurii medii şi parcursul de frecare.

Aceste dependenţe, confirmate şi de rezultatele încercărilor efectuate la Şcoala tehnică superioară din Aachen, au fost exprimate de [3] sub forma :

$$\lg \Delta h_{m_I} = \lg a + b \lg s, \tag{2}$$

$$\Delta h_{m_I} = as^b$$

şi

$$\Delta h_{m_{II}} = A + Bs, \tag{3}$$

în care : Δh_{m_I} este uzura medie în perioada de rodaj ;
$\Delta h_{m_{II}}$ — uzura normală medie ;
s — parcursul de frecare ;
a, A — ordonata la origine ;
b, B — coeficientul unghiular al dreptei de uzură.

Mărimile A și B se pot determina cu ajutorul analizei de regresie [11], urmărindu-se ca suma abaterilor dintre valoarea medie a uzurii și valorile individuale ale măsurătorilor de uzură să fie minimă. Este posibil astfel ca pentru fiecare cuplu de frecare să se stabilească o ecuație de gradul I, care definește comportarea materialelor la uzură.

Coeficientul unghiular B caracterizează intensitatea de uzare a materialelor și corespunde relației uzură-parcurs de frecare (VGV) preconizată de [12].

Prin diferențieri și înlocuiri se ajunge în final la :

$$\Delta h_m = \begin{cases} as^b & \text{pentru } 0 \leqslant s \leqslant s_R, \\ abs_R^{b-1} s + a(1-b) s_R^b & \text{pentru } s \geqslant s_R. \end{cases} \tag{4}$$

Exactitatea formulelor este condiționată de gradul de similitudine între condițiile reale de exploatare și parametrii încercărilor de laborator.

10. CONCLUZII

Încercările de uzură efectuate de autor au urmărit studierea posibilităților de utilizare în construcția ghidajelor rectilinii plane a materialelor plastice armate de tip textolit fabricate în țară, respectiv textolit tip M și textolit tip E, condițiile experimentale stabilite fiind corelate atît cu datele furnizate de literatura de specialitate în domeniul cercetării cuplurilor de frecare material plastic-metal, cît și cu parametrii funcționali ai ghidajelor mașinilor-unelte grele din producția F.M.U.A.B.

Rezultatele prezentate în această lucrare conduc la următoarele concluzii :

a. La încercările de durată în condiții normale de ungere textolitele au o uzură de 5—7 ori mai mare decît fonta ; cea mai slabă comportare la uzură s-a înregistrat la textolitul tip E, iar cea mai bună la textolitul tip M și dytron, între care nu există diferențe de comportare.

b. Uzura epruvetelor fixe din fontă conjugate cu cele trei tipuri de textolit cercetate este practic egală și de circa 1,5 ori mai mare decît uzura epruvetelor fixe ale cuplurilor de frecare fontă-fontă.

c. După un parcurs de frecare de 50 km, epruvetele mobile din textolit nu au prezentat urme de uzură, iar epruvetele fixe din fontă au fost lustruite ; la epruvetele mobile din fontă uzura s-a manifestat prin rizuri paralele cu direcția de alunecare.

d. S-a confirmat posibilitatea stabilirii comportării materialelor la uzură în funcție de parcursul de frecare, prin intermediul unor relații matematice.

e. În cazul frecării uscate pe un parcurs de 0,5 km uzura epruvetelor mobile din fontă este de 3—3,5 ori mai mare decît a epruvetelor mobile din textolit; epruvetele fixe ale cuplurilor de frecare textolit-fontă s-au uzat de șase ori mai puțin față de cuplurile fontă-fontă.

f. Încercările la uzură intensivă — frecare uscată și solicitare mărită — au evidențiat comportarea superioară a cuplurilor de frecare textolit-fontă.

g. Încercările au reliefat proprietățile deosebite ale textolitelor în special în condiții extreme de lucru și permit recomandarea textolitului tip *M* pentru construcția ghidajelor rectilinii plane.

Primită la redacție la 29 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. I. Gh. Sandu, V. Moraru, C. Minciu, *Ghidajele mașinilor-unelte*. Edit. tehnică, București, 1967.
2. A. S. Lapidus, E. A. Maiorova, *Nakladnie napravliaiușcie iz kaprona dlia metallorejușcih stankov*, Stanki i instrument, *10*, 19—23 (1965).
3. D. Domrös, *Über das Verschleiss- und Reibungsverhalten von Werkzeugmaschinen — Gleitführungen*, Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation, Aachen, 1966.
4. — *Reibungs- und Verschleissverhalten von Werkzeugmaschinen-Gleitführungen*, Industrie — Anzeiger, **VIII**, *66*, 19—25 (1967).
5. Ș. M. Bilik, *Pari treniia metall-plastmassa v mașinah i mehanizmah*, Mașinostroenie, Moskva, 1966.
6. V. Calcan, C. Obejdeanu, *Modificările dimensionale și variația masei la imersiunea în apă și în ulei a unor materiale plastice armate de tip textolit*, St. cerd. mec. apl., **28**, *1* (1969).
7. I. Diaconescu ș.a., *Mașini-unelte*, II, Edit. transporturilor și telecomunicațiilor, București, 1959.
8. A. S. Lapidus, *Uzura ghidajelor din materiale plastice ale mașinilor-unelte*, *Mașini-unelte și scule*, Caiet selectiv IDT, *3*, 171—183, (1965), trad. Stanki i instrument, *12*, (1964).
9. — *Ghidaje aplicate din mase plastice pentru mașini-unelte*, *Mașini-unelte și scule*. Caiet selectiv IDT. *11*, 17—33 (1955), *12*, 16—34 (1955), trad. Stanki i instrument, *11*, *12* (1955).
10. A. Worthing, J. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale*, Edit. tehnică, București, 1959, p. 160—181.
11. A. Linder, *Statistische Methoden*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1960.
12. G. Vogelpohl, *Verschleiss in Maschinen und die Möglichkeiten seiner Verminderung mit Hilfe der auf Ölprüfgeräten gewonnenen Ergebnisse*, Erdöl und Kohle, *10*, p. 824—830 (1961).

INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA STATICII ȘI DINAMICII PROCESELOR DE CURGERE PRINTR-UN DISTRIBUITOR DE GAZE NATURALE CU COMANDĂ AUTOMATĂ

de I. FĂGĂRĂȘANU și D. N. NESTORESCU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

În lucrare se prezintă influența temperaturii asupra proceselor de curgere printr-un distribuitor de gaze automatizat. Din studiile efectuate se ajunge la concluzia că variația temperaturii locale la distribuitor are o influență neglijabilă asupra stabilității proceselor din distribuitor în zonele de presiuni unde se manifestă pierderea stabilității. În schimb variația temperaturii locale poate mări foarte mult eroarea staționară a debitului gravimetric de gaze cu care se alimentează consumatorul. Din acest motiv regulatoarele sistemelor autoadaptive au fost prevăzute cu dispozitive de prescriere care pot compresa automat aceste erori staționare.

1. GENERALITĂȚI

În lucrări anterioare [1], [2] s-a analizat comportarea unui sistem de transport gaze, din punct de vedere al stabilității sistemului în cazul reglării presiunii diferențiale pe conductele de alimentare, precum și stabilirea erorilor staționare ale debitului pe aceste conducte, la variația presiunii consumatorului.

Studiul s-a efectuat pe ecuațiile diferențiale ale elementului conductă de alimentare — consumator, valabilă prin concentrarea parametrilor acestui element la distribuitor, ecuație care a fost dedusă pe cale experimentală, folosindu-se metodele statistice.

În acest studiu și ecuația conductei principale care alimentează distribuitorul, s-a dedus tot prin localizarea efectelor dinamice ale proceselor din conducta principală la distribuitor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969. p. 983—996

În felul acesta, ecuația diferențială a conductei principale este:

$$\tau \frac{dp_p}{dt} + K_p p_p = \sum_{i=1}^{n} g_i p_{di} + \sum_{i=1}^{n} g_i p_{ci}, \quad (1)$$

unde τ este constanta de timp echivalentă a conductei principale;

K_p — un coeficient de reacție a conductei principale, la acumularea de gaz sau evacuarea de gaz din conductă:

$$p_p = \frac{\Delta P_p}{P_{p0}},$$

P_{p_0} fiind presiunea normală din conducta principală, iar

ΔP_p — variația presiunii în conducta principală de la valoarea P_{p_0};

$$g_i = \frac{G_i}{G} = \frac{Q_{g_i}}{Q_p},$$

G_i fiind cantitatea de gaz ce se află la un moment dat în conducta de alimentare i, iar G — cantitatea de gaz ce se află în același moment pe conducta principală, Q_{g_i} — debitul maxim de gaz în conducta de alimentare i, Q_p — debitul maxim în conducta principală

$$p_{di} = \frac{\Delta P_{di}}{P_{di0}},$$

P_{di0} este presiunea diferențială normală în conducta de alimentare i. P_{di} — variația presiunii diferențiale în conducta de alimentare i, de la valoarea ei normală.

$$p_{ci} = \frac{\Delta P_{ci}}{P_{ci0}},$$

P_{ci0} este presiunea normală a consumatorului, P_{ci} — variația presiunii consumatorului de la valoarea ei normală.

n — numărul de conducte de alimentare racordate la același distribuitor.

Ecuația diferențială a elementului conductă de alimentare-consumator este:

$$T_c \frac{dp_d}{dt} + p_d = 2a p_p - 2a p_e + 2K_{ef} + T_c \frac{dp_e}{dt} + p_e, \quad (2)$$

unde

T_c este constanta de timp a elementului conductă de alimentare-consumator;

a — constanta de amplificare a elementului conductă de alimentare-consumator.

K_0 — constanta de amplificare a elementului de execuție,

$f = \frac{\Delta F}{F_0}$,

F_0 fiind secțiunea normală a supapei elementului de execuție,

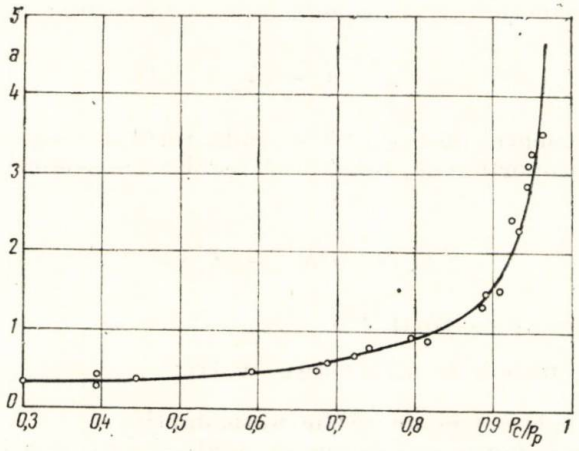


Fig. 1. — Variația coeficientului de amplificare a al elementului conductă de alimentare-consumator cu raportul P_c/P_p.

ΔF — variația secțiunii supapei elementului de execuție de la valoarea normală.

Din ridicările experimentale rezultă că $T_c = T_{c0}\, a$, unde T_{c0} este o constantă ce depinde de conducta de alimentare și consumator.

De asemenea, a (deci și T_c) au o variație cu raportul $\frac{P_c}{P_p}$, dată în graficul din figura 1.

În lucrările anterioare [1], [2] s-au explicat ecuațiile (1) și (2) precum și variația lui a și T_c cu $\frac{P_c}{P_p}$ din punct de vedere fizic.

De asemenea în aceleași lucrări s-a arătat că: în ipoteza liniarizării ecuațiilor (1) și (2), în jurul punctului de funcționare (pentru variații mici ale parametrilor în jurul acestui punct) și considerînd variația secțiunii supapei elementului de execuție de sens contrar cu variația presiunii diferențiale, expresia $K_0 f(s)$ va deveni

$$K_0 f(s) = -\, Y_R(s) p_d(s), \tag{3}$$

unde $Y_R(s)$ este funcția de transfer a dispozitivului de automatizare.

Înlocuind relația (3) și (2) și din aceasta vom extrage valoarea lui $p_d(s)$ în funcție de $p_p(s)$ și $p_c(s)$ iar această valoare înlocuită în (1) găsim:

$$\left(\tau_s + K_p - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i g_i}{T_{ci} s + 1 + 2\, Y_R(s)}\right) p_p(s) = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{a_i - (T_{ci} s + 1) - Y_R(s)}{T_{ci} s + 1 + 2\, Y_R(s) p_{ci}} \cdot \tag{4}$$

Din ecuația (4) se observă că, dacă $K_p < \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i g_i}{T_{ci} s + 1 + 2 Y_R(s)} \right|$, ecuația (4) are un pol în semidrept deci soluția ecuației este instabilă în punctul de funcționare. Pentru ca influența lui p_{ci} să nu se exercite asupra lui p_p, deci dacă se dorește menținerea stabilității sistemului de transport, gaze, este necesar ca

$$Y_{Ri} = a_i — (T_{ci} s + 1). \tag{5}$$

Dacă elementul de execuție și traductorul se aleg astfel încît ele să fie elemente proporționale, rezultă că regulatorul trebuie să aibă funcția de transfer

$$Y_R(s) = K_R — (T_d s + 1), \tag{6}$$

adică un regulator de tipul PD.

K_R și T_d trebuie să aibă aceeași variație cu $\frac{P_c}{P_p}$ ca și a și T_c, deci sistemul de reglare trebuie să fie autoadaptiv.

Dacă se folosește un sistem de reglare autoadaptiv de reglare a presiunii diferențiale pe conducta de alimentare și dacă se prescrie o asemenea presiune diferențială ca :

$$P_d P_c = \text{const}, \tag{7}$$

atunci eroarea staționară a debitului pe conducta de alimentare

$$q_{st} = \frac{\Delta Q_g \text{ st}}{Q_{g_0}} = 0, \tag{8}$$

unde Q_{g_0} este debitul normal pe conducta de alimentare,

Q_{gst} — variația debitului de la valoarea normală după stabilizarea sistemului.

2. INFLUENȚA VARIAȚIEI TEMPERATURII ASUPRA STABILITĂȚII SISTEMULUI DE TRANSPORT GAZE ȘI ASUPRA ERORII STAȚIONARE A DEBITULUI PE CONDUCTA DE ALIMENTARE

Ridicarea experimentală a caracteristicilor elementului conductă de alimentare-consumator s-a efectuat în perioada de vară, timp în care nu s-au înregistrat variații importante ale temperaturii. Variațiile compoziției gazului transportat au fost de asemenea neglijabile.

Influența variației temperaturii și a compoziției gazului s-ar putea manifesta asupra dinamicii sistemului de transport gaze în sensul pierderii stabilității acestui sistem.

Parametrii caracteristici ai elementului conductă de alimentare-consumator sînt coeficientul de amplificare a și constanta de timp T_c.

După cum s-a arătat $T_c = T_{c_0}\, a$, unde T_{c_0} este o constantă de timp ce depinde de parametrii constructivi ai conductei de alimentare și ai consumatorului. Rezultă că este suficient să se analizeze influența temperaturii numai asupra coeficientului de amplificare a.

Relația care indică dependența vitezei de deplasare a gazului față de presiunea diferențială este :

$$w = \left(\frac{2\,P_d}{\rho}\right)^{0.5}, \tag{9}$$

în care

w este viteza de curgere a gazului și
ρ — densitatea gazului.

Densitatea se poate exprima sub forma :

$$\rho = \frac{P}{z\,R\,T}, \tag{10}$$

unde

P este presiunea statică a gazului,
R — constanta gazului (amestecului de gaze),
T — temperatura absolută a gazului și
z — coeficientul de abatere a comportării gazului sau a amestecului de gaze de la legea gazelor perfecte (factor de compresibilitate).

Înlocuind (10) în (9), rezultă :

$$w = \left(2\,\frac{P_d}{P}\,z\,RT\right)^{0.5}. \tag{11}$$

Cum din relația (2) rezultă că $2a$ este raportul în regim staționar dintre presiunea relativă diferențială și cea statică (fie $p_{p_{st}}$ pentru conducta principală și $p_{c_{st}}$ pentru consumator), avem

$$\left|\frac{p_{d_{st}}}{p_{\rho_{st}}}\right| = 2\,a,$$

$$\left|\frac{p_{d_{st}}}{p_{c_{st}}}\right| = 2\,a, \tag{12}$$

din relația (11) rezultă

$$\frac{P_{d_{st}}}{P_{st}} = \frac{1}{2}\,w_{st}^2\,\frac{1}{2\,R\,T}. \tag{13}$$

Cum din relațiile (12)

$$a = \frac{\frac{P_{st}}{P_{ast}} \frac{P_{d_0}}{P_0}}{2}, \text{ pentru } P_{ast} = P_{d_0} \text{ și } P_{st} = P_0, \tag{14}$$

$a_0 = \frac{1}{2}$ (valoare ce corespunde celei ridicate experimental în figura 1).

Introducînd (13) în (14), găsim:

$$\frac{1}{a} = 2 \frac{P_{d_0}}{P_0} \frac{R}{w_{st}^2} z\, T = \alpha_p\, zT, \tag{15}$$

unde α_p este o constantă a punctului de funcționare corespunzător lui w_{st_p} adică vitezei staționare de curgere a gazului, corespunzătoare ansamblului $Pa_{st} - P_{st}$.

Dezvolzînd în serie Taylor relația (15), rezultă:

$$\Delta a = a_p \left| \frac{\Delta z}{z_p} + \frac{\Delta T}{T_p} \right|, \tag{16}$$

unde

$$a_p = \alpha_p\, z_p\, T_p.$$

În calculul lui z în funcție de P și T, putem să utilizăm relația lui Berthelot valabilă pentru gazul natural:

$$z = 1 + \frac{9}{128} \frac{P}{P_K} \frac{T_K}{T} \left(1 - \frac{6T_K^2}{T^2}\right), \tag{17}$$

unde

P_K și T_K sînt presiunea și temperatura critică a gazului.

Din tabela 1 rezultă valorile lui P_K și T_K pentru diferite gaze naturale

Tabela 1

Componența	T_K °K	T_K·bari
Metan	190,66	46,4
Etan	305,43	48,62
n-Propan	370	42,65
n-Butan	425,17	37,96
n-Pentan	469,78	33,74

Dependența reală a lui z cu $T_r = \frac{T}{T_K}$ avînd pe $P_r = \frac{P}{P_K}$ ca parametru, este dată de curbele din figura 2.

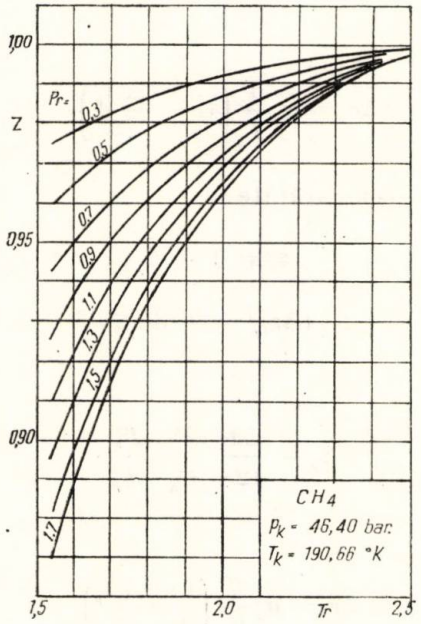


Fig. 2. — Variația coeficientului z cu presiunea și temperatura redusă.

Comparînd valorile lui z extrase din graficul din figura 2 și comparîndu-le cu cele rezultate din relația (17) (valorile T_K și P_K sînt luate din tabela 1), rezultă

P_r	T_r	z (Berthelot)	z grafic	Eroarea relativă
0,9	1,7	0,96	0,95	+1%
0,9	1,9	0,975	0,97	+0,5%
1,3	1,6	0,9232	0,91	+1,32%

Deci este justificată aplicarea relației lui Berthelot în zona studiată.

Din relația (17) neglijînd termenul $\frac{9}{128}\frac{P}{P_K}\frac{T_K}{T}$ care este mai mic de 10% față de ceilalți termeni, urmează că

$$z = -(\Delta z)_p \frac{\Delta T}{T_0}, \tag{18}$$

unde

$$(\Delta z)_p = \frac{162}{128} \frac{P}{P_K} \frac{T_K^3}{T_p^3}, \tag{19}$$

deci

$$\Delta a = a_p \frac{T}{T_p}\left(1 - \frac{(\Delta z)_p}{z_p}\right). \tag{20}$$

Ținînd cont de cele arătate:

$$z_p = 1 - \beta_p, \tag{21}$$

$$(\Delta z)_p = + 3\beta_p, \tag{22}$$

unde

$$\beta_p = \frac{54}{128} \frac{P}{P_K} \frac{T_K^3}{T_p^3}. \tag{23}$$

Deci

$$\Delta a = a_p \frac{T}{T_p}\left(\frac{1 - 4\beta_p}{1 - \beta_p}\right).$$

Pentru că $a = f\left(\frac{P_c}{P_p}\right)$, vom aduce relația (23) la o formă convenabilă, unde să intre raportul $\frac{P_c}{P_p}$. Deci

$$\beta_p = \frac{54}{128} \frac{\frac{P_c}{P_p} P_p}{P_K} \frac{T_K^3}{T_p^3}. \tag{24}$$

Vom scrie relația (24) sub o formă normalizată $P_p = 100$ bari.

În felul acesta, pentru alte valori ale lui P_p, vom înmulți β_p cu raportul $\frac{P_{p\,\text{real}}}{100}$, iar valoarea inițială a lui a o vom raporta la $\frac{P_{c\,\text{real}}}{P_{p\,\text{real}}}$. Considerînd $T_p = 20°\text{C} = 293°\text{K}$ și preluînd din tabela 1 valorile pentru T_K și P_K, pentru metan (care reprezintă peste 99% din compoziția gazului nostru natural), iar valoarea lui a_p de pe curba din figura 1 (corespunzătoare raportului $\frac{P_c}{P_p}$ ales), rezultă

Tabela 2

$\frac{P_c}{P_p}$	a_p	β_p	$\frac{1-4\beta_p}{1-\beta_p}$	$\Delta a \left(\text{pentru } \frac{T}{T_p}\right)$					
				10%	20%	30%	40%	50%	60%
0,3	0,45	0,077	0,75	0,0338	0,0676	0,1014	0,1252	0,169	0,2028
0,5	0,45	0,1165	0,605	0,0272	0,0544	0,0816	0,1088	0,136	0,1632
0,7	0,65	0,1631	0,415	0,027	0,054	0,081	0,108	0,135	0,162
0,9	1,5	0,2097	0,204	0,0306	0,0612	0,0918	0,1224	0,153	0,1836
0,95	3,25	0,221	0,15	0,049	0,098	0,147	0,196	0,245	0,294

Curbele lui $a = f\left(\frac{P_c}{P_p}\right)$ pentru diferiți $\frac{T}{T_p}$ sînt reprezentate în figura 3.

În concluziile ce se desprind din analiza tabelei 2 și figura 3, vom considera numai temperaturi mai mari ca cele inițiale, deoarece temperaturi sub 5°C nu pot fi admise din considerente tehnologice, deci în cazul cînd ar putea să se producă o răcire a gazului sub această temperatură, este necesar a se introduce o instalație specială de încălzire.

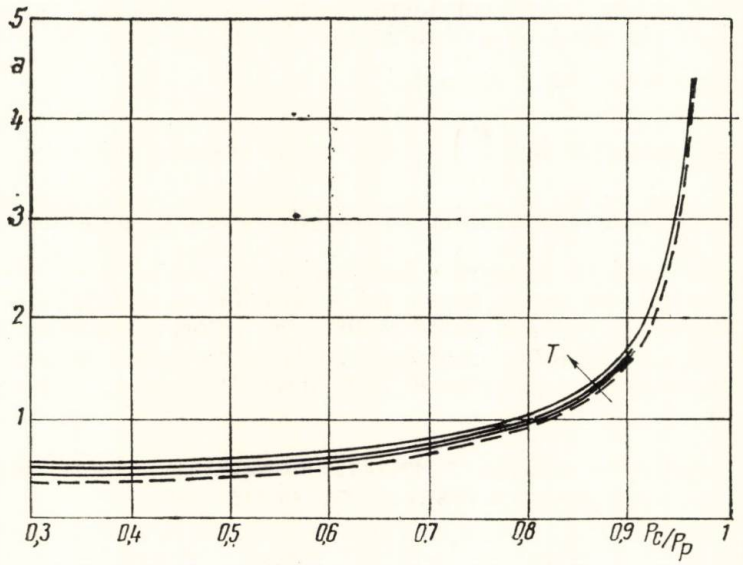


Fig. 3. — Influența temperaturii asupra coeficientului de amplificare a a elementului conductă de alimentare-consumator.

Așa cum se observă din tabela 2 și graficul din figura 2 urmează că variația dinamică a lui a cu raportul $\frac{P_c}{P_p}$ pentru valori ale lui $\frac{P_c}{P_p} =$ $= 0,9$, este mult mai mare decît variația dinamică a lui a.

De exemplu pentru cazul cînd $\left(\frac{P_c}{P_p}\right)_p = 0{,}9$, în cazul variației $\frac{\Delta\left(\frac{P_c}{P_p}\right)}{\left(\frac{P_c}{P_p}\right)_p} = 20\%$, urmează o variație $\frac{\Delta a}{a_p} = 50\%$, pe cînd în cazul aceleași variații a raportului $\frac{T}{T_p}$ (adică $\frac{\Delta T}{T_p} = 20\%$), raportul $\frac{\Delta a}{a_p}$ variază numai cu 10%.

Pentru $\left(\frac{P_c}{P_p}\right)_p = 0{,}95$, pentru aceeași variație de 20% $\frac{\Delta\left(\frac{P_c}{P_p}\right)}{\left(\frac{P_c}{P_p}\right)_p} =$

$= 20\% \frac{\Delta a}{a_p} = 500\%$, pe cînd pentru

$$\frac{\Delta T}{T_p} = 20\%, \quad \frac{\Delta a}{a_p} = 8\%.$$

În felul acesta putem considera că variația dinamică a lui a (deci și a lui T_c), care pot produce destabilizarea sistemului, este datorită numai variației raportului $\frac{P_c}{P_p}$ și nu a lui T.

Pentru valori ale lui $\left(\frac{P_c}{P_p}\right)_p < 0{,}9$, unde variația lui a (și a lui T_c) cu raportul $\frac{P_c}{P_p}$ este comparabilă cu variația acelorași parametri în funcție de T, pericolul de pierdere a stabilității sistemului de transport gaze, practic nu există. De aceea, fără a mări pericolul de instabilitate al sistemului de transport gaze, se poate să luăm ca valori a parametrilor dinamici a și T_c, cele stabilite experimental la temperatura inițială, fără a mai face o corecție a parametrilor K_R și T_a ai regulatoarelor, cu temperatura.

3. INFLUENȚA VARIAȚIEI TEMPERATURII GAZULUI ASUPRA ERORII STAȚIONARE A DEBITULUI GRAVIMETRIC DE GAZE

Așa cum am arătat în condițiile folosirii sistemelor autoadaptive și presupunînd debitul gravimetric de gaz $Q_g = K\sqrt{P_a P_c}$, s-a demonstrat că pentru ca eroarea staționară a debitului să fie nulă, trebuie ca să se prescrie regulatorului o presiune diferențială rezultată prin păstrarea constantă a produsului $P_a P_c$.

În realitate expresia debitului gravimetric de gaz este

$$Q_g = 3600\ A\sqrt{\frac{2}{R}}\ \sqrt{\frac{P_a P_c}{zT}} \tag{25}$$

sau

$$Q_g = K\sqrt{\frac{P_d P_c}{zT}}. \tag{26}$$

Așa cum se observă din curbele arătate în figura 2, z variază foarte puțin cu P_g (circa 9% în medie), variația lui z cu T este importantă (circa

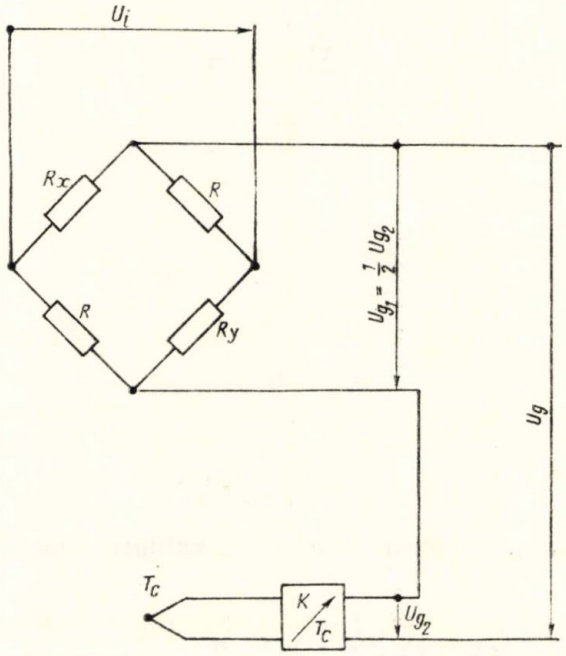


Fig. 4. — Elementul de prescriere pentru micșorarea erorii staționare a debitului de gaze

16%) (ne referim la curba corespunzătoare lui $P_r = 1{,}1$ și T_r variind între 1,5 și 2).

Avînd în vedere din relația (17) că z variază aproximativ invers proporțional cu cubul temperaturii $\left(z = k_z \frac{1}{T^3}\right)$, urmează că relația ce va da debitul gravimetric va fi

$$Q_g = K_g T\sqrt{P_d P_c}. \tag{27}$$

Deci

$$q_{st} = \frac{\Delta Q_{gst}}{\Delta Q_{gp}} = \theta_{st} + \frac{1}{2}(p_d p_c)\ st, \tag{28}$$

unde

$$\theta_{st} = \frac{(\Delta T)_{st}}{T_p}.$$

Aceasta se poate realiza prin următorul dispozitiv de prescriere (figura 4), unde R_x este o rezistență ca o variație proporțională cu P_d, R_y o rezistență ce variază proporțional cu P_c iar T_c un termen cuplu.

La ieșirea din termocuplu avem un amplificator cu coeficient de amplificare variabil K_{Tc}, astfel ca tensiunea $U_{\varphi 2}$ să fie dublă față de tensiunea $U_{\varphi 1}$.

În realitate, așa cum se poate observa și din relația (4),

$$p_{p\,st} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i \, \Delta a_i \, p_{ci\,st}}{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i \, a_i}, \tag{29}$$

unde :

$$\mathcal{P}_i = \frac{g_i}{2\,K_{Ri} + 1}.$$

iar

$$p_{di\,st} = Q_i \, p_{p\,st}, \tag{30}$$

unde

$$Q_i = \frac{2a_i}{2\,K_{Ri} + 1}.$$

Deci $p_{di\,st} \sim p_{ci\,st}$ factorul de proporționalitate depinzînd de raportul $\frac{\Delta a_i}{a_i}$.

După cum se observă din tabela 2,

$$\max \frac{\Delta a_i}{a_i} = \frac{0{,}2028}{0{,}45} = 0{,}41 \quad \left(\frac{P_c}{P_p} = 0{,}3\,;\ \frac{T}{T_p} = 0{,}6\right),$$

adică se poate să avem o eroare staționară a lui $p_{p\,st}$ de maximum 45% din eroarea staționară a lui $p_{ci\,st}$. Dar pentru acea valoare $Q_i = 0{,}66$. Așa că cea mai mare eroare staționară a debitului este mai mică de 30% din variația presiunii consumatorului, dacă se utilizează dispozitivele de prescriere arătate.

În afară de această eroare sistematică, mai pot apare erori sistematice datorită erorii de construcție a dispozitivului de prescriere, care însă sînt de asemenea mici.

4. CONSIDERAȚII TEHNICE-ECONOMICE

În prezent, cele mai multe distribuitoare care lucrează în condiții climaterice diferite, cu variații mari ale temperaturii de la iarnă la vară, sau de la zi la noapte, sînt prevăzute cu o baterie de cazane pentru în-

călzirea gazului. Această baterie include o instalație de încălzire, prevăzută cu un cazan de abur precum și cu aparatură automată pentru menținerea temperaturii constante și pentru protecție automată.

Încălzitorul folosește numai pentru menținerea temperaturii la valori superioare de formare a criohidraților sau a dopurilor de parafină. Acest încălzitor nu are nici un efect asupra posibilității de supraîncălzire a gazului, care are loc datorită strangulării conductei din cauza aparaturii de măsură și reglare aflat la distribuitor. Datorită acestui fapt, este necesar ca atunci cînd se observă o variație importantă a temperaturii medii a gazului, să se utilizeze un dispozitiv de prescriere similar celui arătat în figura 4. Trebuie menționat că termocuplul trebuie să aibă teaca introdusă în interiorul conductei astfel încît să fie capabilă să măsoare temperatura medie a gazului. Nu ar fi nevoie de dispozitivul de prescriere propus, dacă s-ar utiliza un schimbător de căldură care ar permite menținerea constantă a temperaturii la valoarea inițială, ceea ce considerăm că este o soluție mult mai complicată, decît cea prezentată în lucrare.

5. CONCLUZII

a. Datorită variației temperaturii, pentru menținerea unei erori staționare mici, trebuie să utilizăm pentru reglarea debitului gravimetric regulatoare autoadaptive cu dispozitive de presiune arătate în figura 4.

b. Variația temperaturii nu modifică condițiile de stabilitate ale sistemului de transport gaze, deci putem lua în considerație pentru stabilirea variației parametrilor regulatorului T_d și K_R, valorile lui a și T_c, determinate experimental la temperatura inițială.

c. Utilizarea sistemelor de încălzire a gazului nu se justifică, decît numai dacă temperatura gazului coboară sub limita la care apar inconveniente de ordin tehnologic.

Primită la redacție la 11 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. N. Nestorescu, *Studiul unui sistem electric autoadaptiv pentru automatizarea alimentării cu gaze a sondelor în erupție artificială (cu extindere la stabilizarea în condiții optime a transportului de fluide compresibile pe conducte ramificabile)*, Teza de doctorat. Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", 1966.
2. — *Folosirea unui sistem autoadaptiv pentru stabilizarea alimentării cu gaze a sondelor în erupție artificială continuă în condiții optime*, Automatica și Electronica, *6*, 247 (1967).
3. Norman Woodruff, *Computer Regulates Gas-flow*, O.G.J., *18*, 90 (1964).
4. G. L. Giles, J. R. Foster, C. K. Justus, *Computer evoluates Gas-gathering System*, O.G.J., *13*, 93 (1965).
5. B. W. Walters, *Computers in Compressor design Operation and Maintenance*, O.G.J., *13*, 96 (1965).
6. J. F. Wilkinson, D. V. Holliday, E. F. Batey, *Transient Gas-flow in Pipe-Line*, O.G.J., *2*, 94 (1965).
7. A. Davloff, *Gas pipe line's performance improved with aid of computer*, O.G.J., *9*, 102 (1965).

8. K. S. Hagius, *C.J.G. closed-loop control lacks only sophisticated programs*, O.G.J., *21*, 187 (1966).
9. G. David Rabb, *Test field equipment survives nuclear blates*, O.G.J., *1*, 71 (1966).
10. Charless T. Charter, *Control of pipe line by computer tightens operations, cuts cost*, O.G.J., *38*, 130 (1966).
11. Don Davison, Jim Collins, *Computer cases dispatching load*, O.G.J., *33*, 76 (1966).
12. A. T. Gribschaw, *Solving gathering system flow in gas-storage fields*, O.G.J., *52*, 199 (1966).
13. I. Frank, Jr. Borr, *Gas-flow measurement instantaneus and accurate*, O.G.J., *19*, 86 (1966).
14. Ted Armstrong, *Pipe-line carries signals in new-low cost telemetry system*, O.G.J., *7*, 96 (1966).
15. *** *68 Stations, 524 compressors are under remate control*, O.G.J., *7*, 98 (1966).
16. W. Brauch, *Konstruktion und Gebrauch einer Adoptivreglers*, Regelungstechnik Praxis, *1*, 43 (1967).
17. H. Pascal, *Curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.
18. W. A. Finke, *Adaptive-Störung der Regleireismtellung mit einfachen Mitteln*, Regelungstechnik — Praxis, *6*, 274 (1967).

AL TREILEA CONGRES UNIONAL DE MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ (MOSCOVA, 25 IANUARIE—1 FEBRUARIE 1968)

de D. MANGERON

Cel de al treilea Congres Unional de Mecanică teoretică şi aplicată se caracterizează printr-un diapazon extrem de larg şi bogat în rezultate de anvergură al lucrărilor dezbătute. În afară de numeroşi oameni de ştiinţă şi de cercetători veniţi să participe sau să ia parte activă la lucrările Congresului din toate colţurile U.R.S.S., au participat activ oameni de ştiinţă din Anglia, Bulgaria, Danemarca, Franţa, Republica Federală a Germaniei, India, Japonia, Olanda, România şi Statele Unite ale Americii, delegaţia din această din urmă ţară fiind deosebit de numeroasă.

În imposibilitate de a expune cît de cît ordonat vastul ansamblu de lucrări prezentate la Congres, Ref. se mărgineşte la o trecere în revistă parţială a conţinutului lucrărilor oamenilor de ştiinţă cu care întreţine legături de colaborare ştiinţifică.

1. S. A. Ambarţumian (Erevan) trece în revistă particularităţile specifice ale teoriei învelişurilor din materiale de construcţii actuale, ca, de exemplu, plăci armate şi nearmate, diferite polimere, materiale poroase etc. Ţinînd seama de atare particularităţi, care includ într-însele anizotropie, neomogenitate, module joase de forfecare, mare capacitate de deformaţie, fluaj pronunţat, îmbătrînire, diversificare a modelelor etc., autorul schiţează direcţiile principale de dezvoltare actuală a teoriei corespunzătoare.

2. I. S. Arjanîh (Taşkent) expune trei direcţii de dezvoltare a Mecanicii analitice şi anume : 1. Se adînceşte studiul ecuaţiilor de mişcare a sistemelor anholonome şi neconservative pentru elucidarea în continuare a deosebirilor calitative între aceste sisteme şi sisteme holonome şi conservative; 2. Se arată că ecuaţia lui Schrödinger este o consecinţă a unei ecuaţii mai generale a undelor, ce se deduce nemijlocit din ecuaţia lui Hamilton-Jacobi şi se consideră drept ecuaţia caracteristică pentru un proces ondulatoriu şi 3. Se introduc impulsurile canonice în sensul lui Volterra şi se extind astfel metodele mecanicii analitice la teoria cîmpului. Se extind, de asemenea, la teoria cîmpului şi metodele analogiei optico-mecanice din domeniul mecanicii cuantice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969. p. 997 —1000

3. I. I. Artobolevski, V. A. Zinoviev şi N. V. Umnov (Moscova) determină ecuaţiile mişcării pentru un sistem mecanic cu variator. Sistemul luat în studiu se consideră ca fiind dotat de o legătură neolonomă. Soluţia problemei se găseşte cu ajutorul unei MEC analoge.

4. V. G. Babski, N. D. Kopacevski, A. D. Myşkis, L. A. Temkin, G. V. Scerbin (Harkov) studiază micile mişcări ale unui fluid cu suprafaţă liberă în condiţiile apropiate de imponderabilitate.

5. E. A. Barbaşin (Minsk) dă o clasificare a traiectoriilor unui sistem dinamic, descris de un sistem de ecuaţii diferenţiale conţinînd coordonate unghiulare. Aspectele calitative ale fenomenelor considerate se reprezintă în spaţiul de fază cilindric.

6. E. A. Beilin, Ia. G. Panovko (Leningrad) expune dezvoltarea teoriei tijelor cu pereţi subţiri în U.R.S.S. în anii din urmă, trecîndu-se în revistă rezultatele obţinute în domeniu, consemnate în circa 500 articole publicate.

7. V. V. Beleţki, G. L. Grozdovski, Iu. N. Ivanov, A. I. Kurianov, D. E. Ohoţimski, A. K. Platonov, V. A. Sarâcev, V. V. Tokarev şi V. A. Iaroşevski (Moscova) discută multilateral problematica mecanicii zborului cosmic oprindu-se îndeosebi asupra problemei de optimizare a mişcării centrului de masă şi a corecţiei optime a zborului vehiculelor cosmice.

8. I. I. Blechman (Leningrad) reuşeşte să dea o formulare generală a problemei de sinteză a formelor oscilaţiilor sistemelor elastice şi să enumere o serie de probleme nerezolvate. Autorul a ţinut cont de şirul de lucrări datorite lui G. Iu. Djanelidze, B. P. Lavrov, R. F. Nagaev, V. I. Poleahov, A. D. Rudin, K. Ş. Hodjaev.

9. B. Budiansky şi J. R. Fitch (Cambridge, Mass.) determină valorile critice ale presiunii normale în învelişuri sferice supuse la acţiunea unei sarcini axialsimetrice.

10. Iu. A. Buevici (Moscova) expune bazele mecanicii nenewtoniene a suspensiilor, în particular prezintă teoria statistică a microstructurii fluxurilor sistemelor disperse cu două componente.

11. I. N. Vekua (Tbilisi) expune o generalizare a teoriei clasice a membranelor elastice. Modelul matematic este un sistem eliptic de ecuaţii de ordinul al 12-lea ce constituie sistemul variaţional Euler-Lagrange pentru o funcţională integrală non negativă, numită de autor energie potenţială a învelişului elastic. Coincidenţa cu realitatea este fără îndoială mai bună.

12. Th. Vogel (Marseille) expune problema stabilităţii sistemelor mecanice evolutive prezentînd jocuri.

13. Iu. S. Vorobiev, P. P. Gontarovski şi A. P. Filippov (Harkov) studiază oscilaţiile tijelor în lumina teoriilor actuale corectate. Rezultatele se referă îndeosebi la tije sau vergele de formă constructivă complicată.

14. I. I. Vorovici (Rostov-na-Donu) şi V. K. Prokopov (Leningrad) prezintă rezultate noi în domeniul teoriei tridimensionale a elasticităţii. Se ţine seamă de lucrările lui A. I. Lurie, M. M. Filonenko-Borodici, A. L. Goldenweiser şi B. L. Abramean.

15. R. F. Ganiev, V. O. Kononenko (Kiev) studiază mai multe probleme neliniare referitoare la stabilitate spaţială a echipajelor de zbor. În particular se determină criteriile de instabilitate a stării de echilibru pentru sateliţii artificiali ai Pământului.

16. Ia. L. Gueronimus (Harkov) reduce unele probleme de teoria reglării automate la problema momentelor a lui Markov-Achieser-Krein sau la problema generalizată a lui Korkim-Zolotarev și prin aceasta reușește să le rezolve pînă la capăt.

17. M. F. Dimentberg (Moscova) expune un număr de probleme inverse de dinamica sistemelor cu parametri cu variație aleatorie.

18. V. V. Dobronravov și G. N. Kosmodemianskaia (Moscova) studiază unele mișcări dirijate sferice ale solidului, în particular se determină o anume mișcare lipsită de nutație și se dau soluții pentru mișcarea giroscoapelor Euler-Wagner, cu legătură neolonomă ce constă în invariabilitatea vectorului de rotație unghiulară în sistemul mobil de coordonate.

19. V. I. Zubov (Leningrad) dezvoltă, continuîndu-și seria de lucrări cristalizată într-un număr de volume traduse și în S.U.A., problematica referitoare la stabilitatea orbitelor.

20. A. A. Iliușin (Moscova) expune o metodă generală de rezolvare a problemelor de plasticitate în cazul sarcinilor complexe.

21. A. Iu. Ișlinski (Moscova) expune o trecere în revistă a lucrărilor mecanicienilor sovietici în domeniul teoriei giroscoapelor.

22. H. Cabannes (Paris) studiază scurgerea lentă în jurul unei sfere goale în magnetohidrodinamica fluidelor.

23. N. A. Kilcevski (Kiev) expune teoria proceselor dinamice nestaționare a învelișurilor și face un studiu comparativ al rezultatelor în domeniu ce se datoresc diferitelor colective.

24. A. E. Kobrinski și Iu. A. Stepanenko (Moscova) elaborează o introducere în teoria manipulatorilor în legătură cu sistemele actuale constituite din „operator-manipulator-obiect de manipulare".

25. S. N. Kojevnikov (Kiev), urmînd ordinea de idei a unei serii de lucrări, publicate în colaborare cu D. Mangeron și bazate inițial pe lucrările lui D. Mangeron referitoare la teoria generală a acceleraților reduse de ordin și de specie oarecare (DAN SSSR, 1955, t. 102, fasc. 4 și 5), prezintă teoria și practica efectelor dinamice ale acceleraților în sisteme mecanice. Sînt formulate condițiile inițiale ale tachigramei mișcării date care corespund la influența minimă a acceleraților de ordin superior.

26. M. Kozarov (Sofia) studiază problema de stabilitate a învelișurilor cilindrice ortotrope umplute cu material elastic și supuse la sarcină și temperatură combinate.

27. F. L. Litvin (Leningrad) propune o metodă de angrenare aproximativă și expune problematica referitoare la sinteza corespunzătoare.

28. M. Z. Litvin-Sedoi (Moscova) prezintă o metodă de reglare netedă apropiată de optimală în ceea ce privește timpul de execuție pentru sisteme neliniare.

29. L. G. Loițeanski (Leningrad) prezintă pe larg, într-o sinteză remarcabilă, problematica stratului-limită.

30. A. I. Lurie (Leningrad) expune un număr de probleme de teoria elasticității neliniare, oprindu-se îndeosebi asupra „efectelor de ordinul al doilea" și a determinării parametrilor de sarcină cu bifurcație.

31. N. I. Levitski și L. P. Soldatkin (Moscova) propune o metodă de sinteză a mecanismelor de transmisie cu tije și cu două grade de liber-

tate ținîndu-se cont de condiția de reproducere aproximativă a unei funcții date cu două variabile independente, precum și de unghiurile de transmisie.

32. D. Mangeron (Iași) și Gh. Silaș (Timișoara) prezintă studiul dinamic al sistemelor de vibropercuție ținîndu-se seama de faptul că durata de șoc nu este instantanee.

33. F. I. Niordson (Copenhaga) expune problema inversă referitoare la valorile proprii ale sistemelor elastice.

34. Y. Ohashi și T. Nishitani (Nagoya) studiază deformația curgerii lente într-o placă semiinfinită supusă la sarcina unei matrițe elastice plane. Se folosește metoda primului dintre autori, numită metoda studiului fotoreologic (Brit. J. Appl. Phys., 1965, 16, p. 985).

35. Iu. A. Mitropolski și V. N. Șevelo (Kiev) expun șirul de criterii de oscilație sau non oscilație a soluțiilor ecuațiilor diferențiale neliniare neautonome de ordin superior cu argument întîrziat.

36. G. N. Savin și L. P. Horoșun (Kiev) expun contribuții la teoria deformației și rezistenței a materialelor compuse.

37. V. A. Sapa și G. A. Usenko (Alma-Ata) expun problema de integrare a ecuațiilor de mișcare a unui solid cu masă variabilă cu lichid, avînd un punct fix, în caz de rejecție și adiție a particulelor.

38. S. V. Serensen expune, cu contribuții remarcabile proprii, mecanica degradării metalelor sub acțiunea sarcinilor ciclice.

39. A. D. Pater (Delft) trece în reviste rezultatele recente în domeniul oscilațiilor neliniare ale vehiculelor.

40. R. F. Probstein (Cambridge, Mass.) expune unele probleme hidrodinamice de desalinizare.

41. L. I. Sedov (Moscova) prezintă modelări matematice ale mediilor continue cu grade de libertate interioare.

42. B. R. Seth (Dibrugarh) prezintă problematica trecerii regimului laminar în turbulent. Referentul menționează că o serie de rezultate și mai adîncite autorul le-a expus ulterior în cursul seminariilor științifice ținute în martie 1968 la Universitatea din Alberta, Canada. Cu acest prilej autorul a menționat o serie de lucrări elaborate în colaborare cu D. Mangeron și publicate în BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI.

43. F. Schultz-Grunow (Aachen) reduce curgerea laminară automodelată în stratul-limită pe o suprafață curbă în prezența sucțiunii (sugerii) sau injectării de-a lungul unui perete plan.

Primit la redacție la 24 decembrie 1968

AL IX-lea CONGRES IUGOSLAV DE MECANICĂ TEORETICĂ ŞI APLICATĂ (SPLIT, 3—8 IUNIE 1968)

de D. MANGERON

Lucrările celui de al IX-lea Congres de Mecanică teoretică şi aplicată, desfăşurate la Split (3—8 iunie 1968) sub egida Societăţii iugoslave de Mecanică din Belgrad (preşedinte de onoare acad. Anton Bilimović, profesor pensionar şi preşedinte activ acad. Anton Kuhelj, prof. la Universitatea din Ljubljana) s-au bucurat de o participare activă masivă a aproape 200 de specialişti din 14 ţări : Algeria, Bulgaria, Cehoslovacia, Canada, Franţa, RDG, RFG, Italia, Iugoslavia, Polonia, România, SUA, Ungaria, URSS.

După prezentarea unei serii de conferinţe generale, programate judicios în diferite zile ale Congresului, dintre care citäm : D. Bazijanać (Zagreb), „Asupra rolului mecanicii în explorarea contemporană a universului" ; L. G. Loiţeanski, „Asupra noilor metode de calcul a straturilor-limită laminar şi turbulent" ; E. A. Eichelbrenner, „Stratul-limită compresibil în trei dimensiuni în regim laminar" ; Lj. Radosavljević, „Asupra mişcării generale a navei pe cale maritimă" ; M. Vukobratović, „Aplicarea analizei sensibilităţii la probleme de mecanică tehnică", în paralel, în cîte trei săli de comunicări, lucrările propriu-zise ale participanţilor activi la Congres. Dintre acestea din urmă menţionăm pe scurt conţinutul următoarelor comunicări :

1. At. Ancev (Sofia) expune problema echilibrului relativ al unui satelit prevăzut cu rotori. Se indică cu acest prilej şi regimul de mişcare al rotorilor care asigură păstrarea unei orientări date a satelitului, corespunzătoare unor poziţii de echilibru.

2. R. Ašković (Belgrad), continuîndu-şi seria de lucrări începute la Québec sub conducerea prof. E. A. Eichelbrenner şi publicate în parte în „Buletinul Institutului politehnic din Iaşi", expune o metodă de studiu a stratului limită periodic tridimensional pe un corp în mişcare armonică într-o scurgere.

3. L. Berka (Praga) determină timpurile de relaxare a materialelor liniare viscoelastice.

4. D. Blagojević (Belgrad) prezintă soluții generale în teoria materialelor elastice de gradul doi.

5. M. Bouadef (Alger) expune studiul său referitor la scurgere radială permanentă a unui fluid vîscos incompresibil între două plane paralele fixe în prezența unui cîmp magnetic transversal. Modelarea matematică a fenomenului fiind dată prin ecuațiile lui Navier-Stokes, autorul caută soluția în cazul magnetohidrodinamic considerat sub forma unei dezvoltări în serie de puteri după $1/r$. Influența diferiților parametri este discutată.

6. Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Rades (București) expun problema semnificației fizice a modulelor elastice dinamice și prezintă metode de măsurare a lor. Se ține seama atît de literatura în domeniu la nivel mondial cît și de experiența personală a autorilor.

7. N. Cućuz (Belgrad) consideră, din punctul de vedere al teoriei neliniare, comportarea dinamică a unui vehicul cu două axe de cale ferată pe trasee curbilinii. Modelarea matematică a fenomenului și-a găsit soluție cu aproximație dorită cu ajutorul unei MEC „Elliott-803B" aparținînd Institutului de cercetări al Căilor Ferate din Belgrad.

8. W. Derski (Poznań), lărgind concepția teoriei consolidării datorită lui Biot și adăugînd supoziții adiționale în legătură cu structura discontinuă a solurilor actuale, autorul prezintă unele probleme privitoare la cupluri de tensiune în teoria consolidării.

9. D. Drăghicescu (București) obține, în cadrul teoriei elasticității, sisteme bidimensionale care generalizează acelea referitoare la teoria fără momente și la teoria clasică a învelișurilor, precum și acelea privitoare la teoria plăcilor sau torsiunea grinzilor.

10. E. A. Eichelbrenner (Québec; astăzi Paris), ținînd seama de lucrările lui Maskell, Oudart, Shanebrook, Aśković ș.a., autorul reușește să prezinte o teorie pertinentă, valabilă atît în problemele interne sau externe referitoare la stratul-limită compresibil cu trei dimensiuni în regim laminar. O parte a rezultatelor sale în domeniu s-au publicat cu totul recent în „Buletinul Institutului politehnic din Iași".

11. J. Förste (Berlin), extinzînd rezultatele lui E. N. Lightfoot, prezintă rezultatele studiilor sale referitoare la absorpția unei bule gazoase într-un fluid.

12. K. V. Frolov (Moscova) consideră oscilațiile parametrice ale unor sisteme mecanice ținîndu-se seama de proprietățile izvorului de energie.

13. H. Gaewski (Berlin) rezolvă o clasă de probleme convexe de minim referitoare la teoria plasticității.

14. St. Gheorghiță (București) consideră, în cadrul studiului mișcării fluidelor vîsco-plastice în medii poroase, mișcarea plană a unui fluid incompresibil sub un baraj impermeabil, în ipoteza că există un gradient inițial și legătura liniară între v și grad$H$. Lucrarea se încheie printr-o expunere succintă a mișcării neliniare cea mai generală în medii neomogene.

15. Ia. S. Hodorkovski (Leningrad) expune considerații interesante referitoare la metodă de modelare și de calcul în consecință, în etapa actuală a dezvoltării construcției de nave, a rezistenței în apă întîmpinată de navă.

15. C. Jacob (București) expune o teoremă ce se referă la biunivocitatea transformării lui Ceaplîghin. Această teoremă comportă numeroase aplicații în Aerodinamica subsonică.

16. V. Jarić (Zagreb), prezintă o metodă de calcul al oscilațiilor proprii ale hidrogeneratorilor de mari gabarite, precum și indicații asupra modului de experimentare în timpul funcționării acestora.

17. B. Lilić (Belgrad) demonstrează că pentru modelarea matematică a mișcării spațiale generale a unui solid liber se poate forma patru clase diferite de sisteme echivalente de cîte șase ecuații de mișcare, iar pentru mișcări plan-paralele trei atare sisteme.

18. D. Mangeron și N. Irimiciuc (Iași) expun noi rezultate în domeniul unor noi ecuații de mecanică analitică, stabilite de către primul dintre autori și folosite apoi sistematic de acad. B. Dolaptschiew (Sofia), S. Niang (Dakar), E. Tokaci (Petroșani), V. V. Dobronravov (Moscova) ș.a. și dau o nouă prezentare a Mecanicii analitice ce a constituit subiectul tezei de doctorat susținută cu succes deosebit de către cel de-al doilea autor.

19. S. N. Oka (Belgrad) se ocupă de problema stabilirii ecuațiilor universale privitoare la stratul-limită laminar al unui fluid compresibil pe o suprafață cu o temperatură arbitrară prescrisă.

20. T. Petrila (Cluj) studiază mișcarea generală a unui profil într-un fluid, în prezența unui perete arbitrar. Rezultatele obținute se compară cu studiul analog făcut de G. Couchet.

21. J. L. Peube (Poitiers) prezintă rezultatele cercetărilor sale privitoare la scurgerea radială a unui fluid vîscos incompresibil între două plane paralele.

22. I. Pop (Cluj) expune problema curgerii unui fluid vîscos incompresibil între un disc oscilant prin torsionare și un disc poros staționar. Rezultatele obținute sînt prezentate în formă grafică. Ele se leagă de unele cazuri studiate de Banny (1965) și de metoda exprimării componentelor vitezei dată de Lighthill (1954). Rezultatele obținute de autor pot fi și mai mult lărgite folosind seria de lucrări elaborate în ultimul deceniu în cadrul tezei sale de doctorat de prof. C. Ciobanu și publicate în „Buletinul Institutului politehnic din Iași".

23. I. L. Popescu (București) studiază scurgerea nepermanentă a unui fluid perfect incompresibil printr-o grilă, în ipoteza teoriei liniare.

24. Simona Popp (București) dă soluții exacte și aproximative pentru scurgeri plane ale fluidelor incompresibile limitate prin pereți solizi și prin linii libere.

25. Gh. Silaș și H. J. Klepp (Timișoara) expun o metodă de aproximație în studiul oscilatorilor autoexcitați, continuîndu-și astfel șirul de lucrări, elaborate în colaborare, sub conducerea primului dintre autori, cu I. Groșanu, L. Brîndeu și H. Hegedüș. Unele aspecte în această ordine de idei au fost prezentate, în colaborare cu D. Mangeron, la recentul Congres de Mecanică teoretică și aplicată din Delhi (India).

26. A. Turcu (Cluj) studiază vibrații subarmonice ale ecuației lui Duffing, stabilind cînd soluția găsită este sau nu asimptotic stabilă.

27. H. Zorski (Varșovia) expune stadiul actual al teoriilor statistice referitoare la dislocație. Pentru modelări matematice proprii autorul folosește procedura statistică a lui Kirkwood.

28. J. Zivojinov (Beograd) expune cercetările sale referitoare la studiul echilibrului mercurului ca cristal și vapor și ca lichid și vapor. Rezultatele obținute constituie o continuare a lucrărilor autorului expuse recent la Paris, încadrîndu-se totodată în linia de preocupări ale d.sale și ale școlii pe care o conduce, publicate în parte în „Buletinul Institutului politehnic din Iași".

Primită la redacție la 24 decembrie 1968.

RECENZII

V. N. CONSTANTINESCU, *Aplicații industriale ale lagărelor cu aer*, Edit. Academiei, 1968, 284 p., 184 fig.

Vitezele foarte mari au devenit în procesele tehnologice cerințe tot mai stringente ale tehnicii față de mașinile moderne, pentru a le mări productivitatea și precizia de prelucrare, precum și a îmbunătăți finețea suprafețelor produselor. Părțile componente ale mașinilor care asigură într-un proces tehnologic acești parametri fiind lagărele și ghidajele, numai lubrifierea acestora cu gaze poate rezolva în prezent cerința contradictorie a realizării unor viteze mari cu frecări reduse. Studiile teoretice în această direcție, a căror dezvoltare și închegare se datoresc tot autorului lucrării de față, au relevat în mod pregnant avantajele lubrificației cu medii compresibile deschizînd drumul către realizarea la mașini a vitezelor ridicate, drum aproape barat de frecările mari produse de lubrifianții obișnuiți. Ceea ce a mai frînat dezvoltarea mașinilor cu vitezele ridicate cerute de tehnică, după ce s-a produs fundamentarea teoretică a acestui gen de lubrificație a fost, și continuă în oarecare măsură să mai fie și în prezent, precizia mare de prelucrare a lagărelor și realizarea unor materiale adecuate pentru construcția acestora. Cu toate acestea, însuși faptul că această lucrare apare, trebuie considerat că aceste dificultăți au început să fie învinse și faza introducerii în tehnică a lagărelor cu aer a fost trecută cu succes. Despre dezvoltarea rapidă în viitor a fabricației de mașini cu lagăre cu aer nu mai poate exista dubiu.

O contribuție de seamă la potențarea în continuare a climatului favorabil dezvoltării acestor tipuri de mașini cu performanțe superioare o aduce lucrarea de față a dr. ing. V. N. Constantinescu. După ce în cap. I prezintă în paralele fenomenele de bază ale lubrificației cu lichide și cu fluide compresibile, autorul analizează particularitățile acestor două feluri de lubrifiere, ceea ce poate contribui în proiectare la evitarea unor eventuale împrumutări de elemente de calcul și de construcție necomparabile. Analiza cuprinde parametrii de bază ca: mărimea și distribuția presiunilor, influența forțelor de inerție, a regimului de scurgere turbulent, vibrațiile și stabilitatea etc. și se extinde asupra tuturor tipurilor de lagăre. Totodată se prezintă o clasificare — 44 de variante — a lagărelor cu aer de tipurile alimentate sub presiune, autoportante, vibrante și magnetogazodinamice. Spinoasa problemă a construcției acestor lagăre, în ceea ce privește materialele și uzinarea (cap. II), este văzută de autor în punctele ei esențiale: proprietăți de stabilitate chimică și antigripaj pentru materiale și precizia geometrică, microgeometria corespunzătoare a suprafețelor și montajul pentru operațiile tehnologice. Sînt prezentate peste 40 de asocieri de materiale folosite în prezent, din categoriile feroase, neferoase, ceramice, metaloceramice, carbonul și materiale plastice, precum și metodele de prelucrare pentru cuzineți, fusuri, sectoare de lagăre radiale, realizarea orificiilor de alimentare, echilibrarea dinamică a rotorilor, metode de control etc.

Multiplele și variatele realizări pînă în prezent în domeniul lagărelor cu aer sînt prezentate în celelalte 9 capitole ale cărții. Astfel, din realizările în ramura mașinilor unelte sînt înfățișate 29 de tipuri constructive mai caracteristice pentru cele mai variate operații tehno-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, Nr. 4, 1969, p. 1005–1009

logice ca : rectificare plană şi rotund, găurire şi frezare, agregate-turbine pentru astfel de operaţii cu turaţii pînă la 500 000 rot/min. În domeniul maşinilor electrice rezultă că s-au fabricat motoare cu puteri de la 30 w la 60kw, cu turaţii depăşind 20000/min. Agregatele de filat pentru industria textilă ating 30.000 rot/min, iar centrifugele de tot felul se construiesc pentru mai mult de 100000 rot/min. Performanţe deosebite se arată că au fost atinse, graţie lagărelor cu aer, la aparatele giroscopice şi simulatoare, apoi la instrumentele şi aparatele de măsură de precizie ca pentru grosimi, variaţii de volum, la debitmetre, balanţe aerodinamice şi maşini de echilibrat dinamic. De asemenea se prezintă aplicaţiile de la maşinile electronice de calcul şi dispozitivele magnetice de înregistrare, aplicaţii din domeniul aparatelor medicale, al dispozitivelor de transport, precum şi realizările importante de la maşinile rotative cu palete ca ventilatoare şi mai ales compresoare, la care construcţiile au ajuns pînă la puteri de 250 cp. şi turaţii pînă la 14000/min, iar la turbomaşini 800 cp şi 12000 rot/min.

Ţinînd seama şi de cele 268 referiri bibliografice din lucrare, care indică autori, firme industriale şi chiar foruri ştiinţifice, trebuie conchis că această prezentare reflectă stadiul cel mai recent al aplicaţiilor lagărelor cu gaze. Trebuie admis de asemenea că răspunsurile atît de ample ale instituţiilor ştiinţifice şi chiar ale firmelor producătoare din toată lumea, la apelul pentru astfel de realizări, reflectă totodată poziţia de prestigiu pe care o ocupă autorul în domeniul lubrificaţiei cu gaze.

Gh. Vasilca

CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*. Edit. Academiei, 1967, 370 p.

Faţă de monografiile de specialitate, lucrarea de faţă, apărută în Editura Academiei reprezintă o sinteză a principiilor şi metodelor de bază — cum se specifică în titlu — în analiza mecanismelor.

Cu o organizare întru totul originală a materialului, această carte constituie redactarea experienţei de specialitate şi a numeroase cercetări personale ca şi ale şcolilor moderne şi a celei româneşti, care în această direcţie este în continuă afirmare pe plan internaţional.

Pentru edificare este util să redăm pe scurt cuprinsul :

— Primele două capitole prezintă sub forma unui memorator capitolele de matematică modernă vectorială şi matricial-tensorială, care stau la baza studiului grafo-analitic al mecanismelor.

— Capitolul III cuprinde expunerea de sinteză a geometriei şi cinematicii împărţită pe mişcarea punctului (uni-bi-şi tridimensională), mişcarea rigidului şi mişcarea relativă a punctului şi a rigidului.

— Cap. IV privind teoria centroidelor cuprinde între altele, bazele matematice ale numerelor complexe, proprietăţile centroidelor, razele de curbură, derivatele superioare ale legii spaţiilor şi mişcărilor reciproce, utile de altfel şi în sinteza mecanismelor.

— Cap. V prezintă teoriile moderne de structură a mecanismelor atît sub forma grupelor structurale cît şi a grafelor.

— Capitolele VI—VIII se referă la cinematica mecanismelor plane exprimînd atît metodele grafo-analitice cît şi pe cele pur grafice sau analitice şi numerice, de analiză a mecanismelor printre care se dau rezultatele recente ale cercetărilor româneşti (analiza armonică, acceleraţiile reduse, metoda solidarizării preconizată de autor, ca şi teoria multipolilor cinematici etc.).

— Cap. IX expune bazele mecanicii în mişcările spaţiale sintetizate în teoria axoidelor, iar

— Cap. X—XII sînt consacrate structurii şi analizei cinematice a mecanismelor spaţiale, printre metode dîndu-se o importanţă deosebită procedeelor vectoriale şi matricial-tensoriale.

Lucrarea apare astfel ca o sinteză a teoriilor matematice şi mecanice la un nivel de ultimă actualitate şi de prezentare ştiinţifică de cea mai înaltă valoare, fiind de folos atît în studiul mecanismelor cît mai ales în lucrările de cercetare din specialitate.

Este totuşi regretabil că domeniul extins pe care-l îmbrăţişează, cu deosebite calităţi de sinteză de altfel, este cuprins într-un volum de pagini prea restrîns, ceea ce face ca în multe părţi (în special cele de nivel superior, neobişnuite în studiile curente, ca şi capitolele consacrate mecanismelor spaţiale), lucrarea să fie mai greu de urmărit datorită redactării prea concise. În acest sens o editare pe un volum mult sporit de pagini ar contribui ca, în afara valorii de sinteză actuală pe care o reprezintă, să facă lucrarea mai uşor accesibilă proceselor de şcolarizare post universitare şi inginerilor din proiectarea construcţiilor de maşini.

Avînd în vedere valoarea lucrării, considerăm că o reeditare pe părţi sub o formă mai extinsă ar fi de o deosebită utilitate în ridicarea nivelului de studiu al mecanismelor.

E. Bugaiewski

V. GAVREAU, *Elemente constructive pentru maşini automate. Comandă directă, servomotoare, programare numerică*, Editions Eyrolles, Paris, 1967, 115 p.

Scopul pentru care a fost scrisă această lucrare este în primul rînd de a servi la proiectarea în construcţia de maşini automate. Problemele de automatizare ale proceselor industriale cer, după cum se ştie efectuarea unei documentaţii şi a unor studii cu totul particulare luate pentru fiecare caz în parte. Aceste etape pot fi uşurate şi simplificate prin cunoaşterea procedeelor şi dispozitivelor care au fost utilizate deja cu succes în cazuri analoge. În acest scop autorul prezintă în cartea sa, într-o manieră simplă şi foarte clară, o descriere a diferitelor elemente mecanice, pneumatice, electro-mecanice şi electronice folosite în automatizare precum şi unele montaje şi ansamble uzuale formate din aceste elemente.

Instrumentul matematic în lucrare este concentrat la strictul necesar pentru înţelegerea problemelor fundamentale de automatizare, în schimb capitolele privind alcătuirea diverselor scheme de montaj pentru linii automate sînt dezvoltate pe larg. Sînt expuse pe larg în capitole separate problemele de comandă continuă directă precum şi mijloacele de realizare, came, motoare cu colector fix; probleme de comandă continuă prin servomotor cu referire detaliată la funcţionarea servomotoarelor electrice de mică şi mare putere, construcţia şi funcţionarea selsinelor, a releurilor şi diverselor montaje cu releu. O atenţie deosebită se acordă expunerii problemelor de comandă numerică. Sînt descrise mijloacele pentru măsurarea deplasărilor şi a rotaţiilor, numărătoare electronice de impulsuri, programe şi memorii, calculatoare electronice, diferite sisteme de comandă numerică a maşinilor unelte.

În lucrare sînt expuse unele definiţii şi precizări privind sensul unor noţiuni de bază ale automatizării industriale cum ar fi aceea de „comandă prin program", „servomotor" etc.

Cartea lui V. Gavreau, în felul în care a fost concepută, ajută pe proiectanţi şi tehnicieni la realizarea comenzilor automate conţinînd indicaţii preţioase, recomandări concrete şi direct utilizabile asupra diferitelor mijloace de automatizare în industrie, prin procedee mecanice, electrice şi electronice.

La sfîrşitul lucrării sînt prezentate un număr însemnat de scheme de montaj pentru diverse scopuri practice cît şi o listă de brevete pentru maşini automate ale firmelor franceze şi din alte ţări.

Lucrarea poate fi folosită de proiectanţii de linii automate cît şi de studenţi pentru realizarea diverselor proiecte de automatizare a proceselor industriale.

L. Calmaciuc

E. RAUSCH, *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*, Ergänzungsband zur 3. Auflage 1959, Düsseldorf, VDI—Verlag GmbH, 1968

Specialiştilor în probleme de fundaţii de maşini din ţara noastră le este bine cunoscut tratatul profesorului Rausch — prima carte care a fundamentat această nouă disciplină a inginerului mecanic şi constructor — apărut în a treia ediţie în anul 1959.

După aproape 10 ani, autorul publică un „volum suplimentar", în care se aduc completări la ultima ediţie.

Ca mod de prezentare, acest volum este paginat în contiunarea celui din 1959, iar în cuprinsul său, la fiecare problemă tratată, se arată cărui capitol şi paragraf din ediţia 1959 îi corespunde.

Completările aduse în acest volum se referă, în linii mari, la : aşezarea maşinilor pe fundaţii, calculul la şocuri, oboseala materialelor de fundaţii, proprietăţile elastice ale plutei, rezemări pe perne de aer, calculul fundaţiilor de ciocane, fundaţii de maşini de extracţie, exemple de calcul de fundaţii pentru compresoare, rotativă de imprimerie, gater, turbine de aburi, maşini unelte, efectul vibraţiilor asupra omului, vibraţiile coşurilor şi turnurilor, vibraţiile construcţiilor hidrotehnice, efectele exploziilor asupra construcţiilor.

De asemenea, volumul, totalizînd 150 pagini, conţine o amplă listă bibliografică.

Noua carte a profesorului Rausch reprezintă o valoroasă contribuţie în acest domeniu, deosebit de utilă specialiştilor care întîlnesc aceste probleme.

Gh. Buzdugan

A. K. MALMEISTER, V. P. TAMUJ, G. A. TETERS, *Rezistenţa materialelor polimere rigide* Riga, Editura „Zinatne", 1967, 397 p.

Cartea recenzată constituie una din primele încercări de a studia totalitatea teorilor şi metodelor de calcul utile şi necesare pentru considerarea specificului materialelor polimere. Ea este bazată pe o amplă literatură (bibliografia conţine 242 titluri), dintre care un mare număr de lucrări se datoreşte autorilor monografiei, cît şi colegiilor lor de la Institutul de mecanica polimerilor al Academiei de Ştiinţe a R. S. S. Letone.

Primul capitol dă sub formă condensată noţiunea de mărimi tensoriale, toată construcţia ulterioară a teoriei generale a stării de tensiune şi deformaţie fiind expusă folosind simbolica tensorială.

Al doilea capitol, prin proporţiile sale este cel mai mare — mai mult de o treime din întreaga carte. În el sînt studiate diferite relaţii între tensiuni şi deformaţii în cazurile corpului elastic anizotrop, corpului elastic-neliniar, precum şi ecuaţiile de bază ale teoriei plasticităţii, bazele teoriei plasticităţii, construite pe concepţia caracterului local al deformaţiilor, legătura între tensiuni şi deformaţii în medii armate. La discuţia materialelor cu proprietăţi reonome se

acordă multă atenție așa-numitului corp reologic „standard" sau „tipic". Se dă o deducere interesantă a ecuațiilor reologice din ipotezele statistice asupra structurii materialelor polimere.

Trezește mult interes teoria deformațiilor locale. Aici sînt expuse bazele teoriei statistice a plasticității, dezvoltată cu succes sub îndrumarea lui A. K. Malmeister în Institutul de mecanica polimerilor al Academiei RSS Letone. Această teorie, apărută acum 10 ani, și-a găsit aplicare cu perspectivă în problemele solicitării complexe a materialelor cu limită de curgere exprimată neexplicit, în particular la rezolvarea problemelor de pierdere de stabilitate a învelitorilor polimere.

Merită atenția abordarea bazată pe introducerea tensorilor elasticității de ranguri superioare, deși rezolvarea problemelor la limită neliniare cu utilizarea tensorilor de ranguri superioare este destul de complicată.

Al treilea capitol este consacrat problemelor de rezistență a materialelor polimere. Este studiat detaliat tensorul rezistenței, care definește suprafața de rezistență a materialului anizotrop la încărcare simplă. Se face o comparație cu funcțiile propuse de E. K. Aşkenazi, I. I. Goldenblat, V. A. Kopnov și alți autori, iar în paragraful consacrat rezistenței de durată sînt utilizate rezultatele experimentale ale lui A. M. Skudrî.

La cercetarea rezistenței la oboseală se subliniază posibilitatea ruperii termice a structurii polimere la vibrații, însă se remarcă că în fibrele de sticlă (steklotextolit) factorul principal care determină durabilitatea, în afară de temperatură îl constituie acumularea ireversibilă a deteriorărilor (vătămărilor).

Capitolul IV și V sînt consacrate problemelor determinării stării de tensiune-deformație a barelor, grinzilor, plăcilor și învelitorilor. Pe exemple caracteristice este arătată influența anizotropiei și proprietăților reonome ale materialelor polimere asupra stării de tensiune-deformație a elementelor constructive respective. Este subliniată necesitatea considerării rigidității de forfecare mici a materialului.

În capitolul VI sînt studiate problemele stabilității barelor plăcilor și învelitorilor obișnuite și cu pereți subțiri, ținînd seama de particularitățile caracteristice ale materialelor polimere. Este analizat rolul rigidității mici dintre straturi a plăcilor armate, al anizotropiei, influența deformațiilor plastice, a proprietăților reonome etc. Toate exemplele se rezolvă pe baza teoriei plasticității și fluajului ale căror funcții de bază au fost date în capitolele precedente. Se arată, de asemenea, aplicarea localității deformațiilor, tratată puțin pînă în prezent în literatură.

Cartea reprezintă o remarcabilă contribuție într-un domeniu de o mare actualitate științifică și practică al mecanicii — mecanica polimerilor.

Ea se adresează unui larg cerc de cititori, cercetători științifici, cadrelor didactice din învățămîntul superior, aspiranților, inginerilor, studenților.

L. Librescu

HENRYK ZALUCKI, *Dictionary of Russian technical and scientific abbreviations*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, London, New York, 1968, 10+187 p.

În limba rusă se utilizează foarte multe abreviații, numărul acestora fiind deosebit de mare în tehnică și în știință. Pentru un străin, descifrarea acestora prezintă dificultăți evidente și din acest motiv un dicționar poate fi util. Lucrarea, îngrijit întocmită, dă la fiecare abreviație denumirea completă în limba rusă, precum și traducerea ei în limbile engleză și germană.

T. Oroveanu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Aerodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, sectorul 7.

ELIE CARAFOLI, ŞTEFAN STAICU

ASUPRA SEPARAŢIEI CURENTULUI LA BORDURILE ARIPII DELTA ANTISIMETRICE ÎN REGIM SUPERSONIC

În lucrarea prezentă se studiază scurgerea supersonică în jurul aripii delta subţiri torsionată antisimetric, luînd în consideraţie desprinderea curentului la bordurile de atac subsonice.
Considerînd o aripă fictivă subţire, echivalentă cu cea reală din punct de vedere aerodinamic, se determină distribuţia de presiuni şi caracteristicile aerodinamice ale aripii.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 771—790
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

N. N. PATRAULEA

ASUPRA DETERMINĂRII FIGURII DE ECHILIBRU A UNEI PLASME ROTITOARE

Autorul discută condiţiile de echilibru relativ al unui sistem de ioni în raport cu un sistem de referinţă rotitor şi dă o metodă de construire a figurii de echilibru. Metoda este bazată pe conceptul de sarcină fictivă, în sistemul relativ de referinţă, introdus de autor într-o lucrare precedentă.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 791—801
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

RADU VOINEA, V. DROBOTĂ

STUDIUL GRINZILOR CONTINUE DE DESCHIDERI EGALE CU AJUTORUL ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE

În lucrare este prezentat un nou mod de calcul al momentelor pe reazeme la grinzile continue cu deschideri egale, pentru diverse încărcări, grinzile putînd avea capetele rezemate libere, încastrate, console sau combinaţii ale acestora.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 803—820
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU

UTILIZAREA CALCULATOARELOR ELECTRONICE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE, ALCĂTUITE DIN BARE, ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

Lucrarea are drept scop automatizarea completă a calculului unei structuri static nedeterminate, formate din bar în domeniul elasto-plastic. Se calculează sarcina de rupere şi diagrama de eforturi corespunzătoare, ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice şi verificarea în fiecare etapă a deschiderii articulaţiilor plastice.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 821—844
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, 15

VALERIU PETCU

TEORIA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE MOMENTE A STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT

În lucrare se prezintă o teorie a calculului plastic al structurilor continue de beton armat bazată pe ideea maximizării valorilor momentelor plastice în vederea minimizării redistribuției de momente pentru toate schemele posibile de încărcare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 845—865
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

MIRCEA RADEȘ

LUNGIMEA DE ÎNCASTRARE LA FLAMBAJ

Pentru bara comprimată axial, liberă la un capăt și încastrată elastic la celălalt, se determină lungimea porțiunii ce trebuie introdusă în mediu elastic de încastrare (Winkler) astfel ca sarcina critică de flambaj să poată fi calculată cu relația lui Euler.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 867—874
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

F. DINCĂ, T. SIRETEANU

VIBRAȚII ALEATOARE ÎN DINAMICA AUTOVEHICULELOR

În lucrare sînt studiate o serie de probleme privind vibrațiile aleatoare ale unui autovehicul care merge cu viteză constantă pe un drum cu denivelări.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 875—900
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

ALEX. VAICUM

INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA STABILITĂȚII FUNDAȚIILOR ÎNCASTRATE

În lucrare se prezintă studii experimentale și teoretice privind influența forței tăietoare asupra capacității portante, rotirilor și poziției axei de rotație a fundațiilor încastrate și necesitatea luării în considerare a acestui aspect la elaborare a unor relații de calcul.

St. cerc. mec., apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 901—920
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

RODICA MANIȚIU

ASUPRA CONDIȚIILOR DE ETANȘARE ALE SEGMENȚILOR DE PISTON ÎN CAZUL VARIAȚIEI DIAMETRULUI DE MONTAJ

În lucrare se analizează influența pe care variația diametrului de montaj al cilindrului o are asupra legii de repartiție a presiunii radiale și asupra contactului segment-cilindru. Segmentul este presupus de presiune variabilă pe contur, repartiția presiunii având loc după o lege oarecare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 921—932
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

A. ANTAL

TEORIA GENERALĂ A FREZELOR MELCATE

Lucrarea prezintă o metodă generală pentru stabilirea suprafețelor care determină dantura frezei melcate. Cu ajutorul expresiei (8) și utilizînd tabela 1, se pot obține ecuațiile diferitelor suprafețe riglate care mărginesc dinții frezei. Tabela 1 și expresia (8) permit și programarea pe mașini electronice de calcul.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 933—940
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

P. DODOC

APARIȚIA ȘI MĂSURAREA RUGOZITĂȚII DE VIBRAȚIE LA STRUNJIREA DE ÎNALTĂ PRECIZIE

În lucrare se explică mecanismul apariției rugozității care apare la strunjirea de înaltă precizie și se indică factorii de influență, modul de măsurare exactă și posibilitățile practice de micșorare a acestei erori de prelucrare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 941—953
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

M. TEODORESCU, C. CIUCĂ, I. TARĂU și E. ȚÂRU

STUDIUL INFLUENȚEI REGIMULUI DE AȘCHIERE ȘI A STRUCTURII MATERIALULUI ASUPRA RUGOZITĂȚII SUPRAFEȚELOR PRELUCRATE PRIN STRUNJIRE

În lucrare se prezintă rezultatele unor încercări de prelucrabilitate, din punct de vedere al calității suprafețelor, ce au fost făcute pentru un oțel carbon de calitate cu circa 0,6% C.
Se scoate în evidență influența mare pe care o are starea structurală (constituienții structurali, forma și gradul lor de dispersie) la diferite regimuri de așchiere asupra rugozității suprafețelor prelucrate prin strunjire.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 955—968
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

VICTOR CALCAN

UTILIZAREA TEXTOLITULUI ÎN CONSTRUCȚIA GHIDAJELOR RECTILINII PLANE. I. COMPORTAREA LA UZURĂ A CUPLURILOR DE FRECARE TEXTOLIT-FONTĂ

Lucrarea își propune să analizeze posibilitățile de utilizare în construcția ghidajelor rectilinii plane a materialelor plastice armat de tip textolit produse curent în țară. Se prezintă rezultatele încercărilor de uzură efectuate pe cupluri de frecare textolit-fontă și fontă-fontă în condiții normale de ungere, la frecare uscată și în cazul solicitărilor mărite, care permit recomandarea utilizării textolitului tip *M* ca material pentru ghidaje. Se confirmă totodată posibilitatea stabilirii unei dependențe matrice între valoarea uzurii și parcursul de frecare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 969—981
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

I. FĂGĂRĂȘANU, D. N. NESTORESCU

INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA STATICII ȘI DINAMICII PROCESELOR DE SCURGERE PRINTR-UN DISTRIBUITOR DE GAZE NATURALE CU COMANDĂ AUTOMATĂ

În prezenta lucrare se arată influența temperaturii asupra parametrilor statici și dinamici printr-un distribuitor automatizat. Se ajunge la concluzia că temperatura nu dăunează în aceeași proporție ca presiunea asupra stabilității proceselor din distribuitor. În schimb ea are o influență importantă asupra erorii staționare a sistemelor de reglare a debitului de gaze. Pentru compensarea acestei erori se propune anexarea la regulatorul autoadaptiv, din sistemul de reglare a presiunii diferențiale, a unui dispozitiv de prescriere special.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 983—996
Redacția: București, str. Const. Mille, 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 5 1969

SUMAR

STUDII

Pag.

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Mişcarea fluidului într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde 1013

S. GĂLETUŞE, Asupra lubrificaţiei lagărelor de alungire redusă funcţionînd în regim turbulent 1029

M. PASCOVICI, Asupra influenţei transferului căldurii la mişcarea fluidelor în filme subţiri 1041

ALEXANDRU NICA, GHEORGHE MARIN, Cercetări experimentale asupra distribuţiei de temperaturi în lagărele circulare cu alunecare 1053

GEORGE BĂRĂNESCU, GHEORGHE ZĂTREANU, Îmbunătăţirea echilibrajului momentelor forţelor de inerţie prin plasarea cilindrilor în două linii prevăzute fiecare cu un arbore cotit 1063

M. M. NIŢĂ, Ecuaţiile neliniare ale mişcării perturbate a vehiculului orbital staţionar la o latitudine arbitrară 1081

RADU C. BOGDAN, SERGIU CONONOVICI şi DAN LARIONESCU, Calculatorul analogic în cercetarea mecanismelor 1093

IOSIF EGRI, Calculul randamentului şi bilanţul energetic al transmisiilor prin curele 1123

ION LĂZĂRESCU şi EUGEN PAY, Contribuţii la determinarea influenţei regimului de lucru asupra preciziei grosimii dintelui la frezarea danturii roţilor dinţate cilindrice 1147

N. D. POPESCU, Stabilitatea dinamică la încovoiere a consolelor 1159

FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul spaţial al structurilor multietajate simetrice cu etaj constant, alcătuite cu diafragme. I 1167

VICTOR GIONCU, Calculul plăcilor curbe subţiri cu dublă curbură pozitivă rezemate pe arce cu tiranţi 1191

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

I. SAVA, Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. I 1213

Pag.

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE

CHR. PELECUDI, A 10-a Conferință de mecanică a Asociației americane a inginerilor mecanici 1245
D. MANGERON, Din problematica de mecanică a Conferinței Societății naționale de matematică industrială și aplicată (SIAM) (11—14 iunie 1968, Toronto, Ontario, Canada) 1247
D. MANGERON, Din problematica de mecanică aplicată expusă la Conferința de teorie calitativă a ecuațiilor neliniare diferențiale și integrale (Universitatea din Wisconsin, Madison, 19—23 august 1968) 1251
D. MANGERON, Din problematica de mecanică a Congresului estiv anual al Societății matematice americane și al Asociației de matematică din America 1255

RECENZII 1259

MIŞCAREA FLUIDULUI ÎNTR-UN MEDIU POROS NEOMOGEN DETERMINATĂ DE UN SISTEM ARBITRAR DE SONDE

de VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se formulează problema matematică a mişcării plane într-un mediu neomogen cu permeabilitate continuă oarecare şi se aplică rezultatul la cazul mişcării produse de un sistem arbitrar de sonde de injecţie şi de extracţie plasate în planul complex. Se compară rezultatele cu cele obţinute în cazul mediului omogen sau în cazul mediului neomogen cu neomogenităţi particulare.

INTRODUCERE

În cadrul problemei scurgerii fluidelor prin medii poroase, un loc important îl ocupă cazul în care mediul este considerat neomogen. Această ipoteză, care ţine seama că, în general, caracteristicile mediilor poroase sînt variabile de la un punct la altul, este în deplină concordanţă cu realitatea.

Studiile efectuate asupra acestui grup de fenomene sînt îngreuiate în special de faptul că problema matematică la care conduc este complicată. Din cauza dificultăţilor matematice, majoritatea problemelor de scurgere prin medii poroase neomogene au primit soluţii aproximative, integrarea exactă a ecuaţiilor de mişcare efectuîndu-se numai într-un număr limitat de cazuri particulare. Rezolvarea problemei în aceste cazuri este legată în general de anumite configuraţii geometrice particulare ale domeniului de mişcare şi de repartiţii particulare ale permeabilităţii în aceste domenii (neomogenitate liniară sau radială, neomogenitate cu variabile separate, neomogenităţi care satisfac condiţii suplimentare [1]).

Faţă de această situaţie ne propunem să studiem problema mişcării plane în mediul neomogen în care permeabilitatea este dată de o funcţie $k(x,y)$ supusă condiţiei $k(x,y) > 0$, fără celelalte restricţii amintite. Pentru aceasta vom formula problema matematică a mişcării într-un alt mod decît cel obişnuit, care permite exprimarea soluţiei în cazul general şi poate fi particularizată la cazuri concrete de mişcări prin condiţii la limită adecvate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1013–1027.

În mod special ne vom ocupa de problema mişcării plane într-un mediu neomogen în prezenţa unui sistem arbitrar de n sonde de injecţie şi m sonde de extracţie. Rezultatele obţinute în studiul acestei probleme sînt o generalizare a celor din cazul mediului omogen, pe de o parte, şi a celor din cazul mediului neomogen, pe de altă parte, obţinute pe alte căi în cazuri mai particulare (cazul unei singure sonde în care permeabilitatea are variabile separate).

Soluţia acestei probleme va fi obţinută utilizînd ecuaţiile de mişcare scrise în formă complexă, care permite abordarea altor probleme de mişcare în medii neomogene, mai complicate decît cele studiate pînă în prezent, în care soluţia poate fi exprimată în formă finită. Faţă de aceste probleme, mişcarea în mediul neomogen în jurul unui sistem de sonde de injecţie şi de extracţie joacă un rol secundar, deşi ea nu a fost soluţionată pînă în prezent. De aceste rezultate ne vom folosi într-o altă lucrare.

I. PROBLEMA MATEMATICĂ

Ne vom ocupa în acest capitol de problema scrierii ecuaţiilor de mişcare în formă complexă, pe care o vom utiliza în mod constant de aici înainte. Ca o verificare a celor obţinute în această parte a lucrării, vom compara rezultatele deduse cu cele obţinute pe alte căi în cazuri mai particulare de mişcări în medii neomogene. La baza calculelor ulterioare stă teoria funcţiilor analitice generalizate.

1. *Ecuaţiile generale de mişcare.* Presupunem că permeabilitatea mediului $k(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul întîi, continue în domeniul de mişcare. Fluidul care saturează mediul poros este presupus omogen de viscozitate μ; adoptăm legea de mişcare a lui Darcy :

$$\overline{V} = -\frac{k(x,y)}{\mu} \nabla p(x,y). \tag{1}$$

Viteza $\overline{V}$ satisface în plus ecuaţia de continuitate

$$\nabla \overline{V} = 0. \tag{2}$$

Din relaţiile precedente rezultă că funcţia $p(x,y)$ satisface în domeniul de mişcare ecuaţia

$$\triangle p + \nabla f \cdot \nabla p = 0, \tag{3}$$

în care s-a introdus notaţia

$$f(x,y) = \ln k(x,y),$$

după cum rezultă aplicînd ecuaţiei (1) operatorul ∇ şi ţinînd seama de (2). Problema revine deci la determinarea cîmpului de presiuni $p(x,y)$ care rezultă din rezolvarea ecuaţiei (3), cu condiţiile la limită impuse de

fiecare caz particular studiat. Deoarece integrarea ecuației (3) este foarte dificilă sub această formă, o vom scrie în formă complexă, mai convenabilă pentru modul în care intenționăm să abordăm problema. Pentru aceasta vom introduce notațiile

$$u = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad U(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y). \tag{3'}$$

Funcția $U(x,y)$ este complexă, neolomorfă, depinzînd de variabilele z și $\bar{z}$, deoarece în $U(x,y)$ se poate face substituția

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Cu notațiile făcute, ecuația (3) se scrie

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

Funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ satisfac, evident, relația

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

dedusă din primele două relații (3') prin derivare în raport cu y, respectiv x.

Remarcăm că sistemul format de ecuațiile (4) și (5), pe care îl satisfac funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$, generalizează în acest caz relațiile lui Cauchy-Riemann din cazul funcțiilor olomorfe.

Înmulțind ecuația (5) cu i și adunînd-o la relația (4), se obține

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + \overline{A}\overline{U}, \tag{6}$$

unde am notat

$$A(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tag{6'}$$

și am ținut seama de operatorul

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ecuația (6) poate fi adusă la o formă mai simplă cu ajutorul schimbării de funcție

$$U = V\,\mathrm{e}^{\omega(z)},$$

unde

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\xi,\eta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta,$$

D fiind domeniul de mişcare şi $\zeta = \xi + i\eta$. Funcţia $\omega(z)$ satisface relaţia [2]

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = A(z). \tag{6''}$$

Cu ajutorul acestei substituţii, ecuaţia (6) devine

$$\frac{\partial V(z)}{\partial\bar{z}} = B(z)\,\overline{V}(z), \tag{7}$$

ţinînd seama că

$$B(z) = \overline{A(z)}\,e^{\overline{\omega(z)}-\omega(z)}.$$

Din relaţiile (6') şi (6'') rezultă

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = A(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$$

şi după integrare

$$\omega(z) = -\frac{1}{2}\,f(z) + g(z),$$

unde $g(z)$ este o funcţie olomorfă în D. Din relaţia precedentă, ţinînd seama că funcţia $f(z)$ este reală, rezultă că partea imaginară a funcţiei $\omega(z)$ este armonică în domeniul considerat, fapt care poate fi verificat şi pe altă cale.

Din relaţia care defineşte pe $\omega(z)$ se deduce

$$g(z) = \frac{1}{2}\,f(z) + \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

Din expresia scrisă remarcăm că, oricare ar fi funcţia de variabilă complexă $f(z)$, relaţia de mai sus defineşte o funcţie olomorfă în D.

Revenind la ecuaţia (7), putem spune că problema studiului mişcării se reduce la integrarea acestei ecuaţii ţinînd seama de condiţiile la limită pe care le satisface funcţia $V(z)$. Această problemă este solubilă formal.

2. *Soluţia ecuaţiei de mişcare.* Notînd cu D domeniul de mişcare, soluţia generală a ecuaţiei (7) este

$$V(z) = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(\zeta,z)\,\Phi(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \iint_D \Gamma_2(\zeta,z)\,\overline{\Phi(\zeta)}\,d\xi\,d\eta \tag{8}$$

($z = x + iy$; $\zeta = \xi + i\eta$). În relația de mai sus, $\Gamma_1(\zeta,z)$ și $\Gamma_2(\zeta,z)$ au expresiile

$$\Gamma_1(\zeta,z) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(\zeta,z); \quad \Gamma_2(\zeta,z) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j-1}(\zeta,z), \tag{8'}$$

unde

$$K_1(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - z} e^{\bar{\omega}-\omega}$$

.....

$$K_n(\zeta,z) = \iint_D K_1(\zeta_1, z)\, \overline{K_{n-1}(\zeta, \zeta_1)}\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

($\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$), obținute prin aplicarea metodei aproximațiilor succesive [2], [3].

În soluția (8) a ecuației (7) apare funcția $\Phi(z)$, olomorfă în D și care urmează să fie determinată din condițiile la limită ale fiecărui caz în parte. Aceste condiții, impuse pentru presiune sau pentru derivata ei normală pe diferite porțiuni ale frontierei L a domeniului D, se transpun pentru funcția $V(z)$ ținînd seama de substituțiile efectuate. Nu insistăm asupra acestei probleme generale, cele arătate pînă acum fiind suficiente pentru ceea ce ne interesează.

În cele ce urmează vom aplica rezultatele generale obținute mai sus la cazuri mai simple de mișcări, în care au fost obținute soluții exacte pe alte căi nu pentru a da noi metode de rezolvare acestor probleme, ci pentru a verifica metoda expusă și a arăta coincidența soluțiilor. Particularizările se referă, în primul rînd, la variația unidimensională a permeabilității și o anumită regularitate și simetrie a domeniului de mișcare și, în al doilea rînd, așa cum am amintit în introducere, la anumite condiții suplimentare pe care trebuie să le satisfacă permeabilitatea în domeniul de mișcare.

3. *Cazul scurgerii liniare.* În acest caz presupunem că mișcarea are loc într-un plan orizontal între doi pereți paraleli de ecuații $x = x_s$ și $x = x_c$, pe care sînt date presiunile p_s și respectiv p_c, presupuse constante. Mediul poros neomogen cuprins în banda dintre cele două drepte va avea permeabilitatea dependentă numai de x. Datorită condițiilor impuse, mișcarea se va efectua numai după traiectorii paralele la axa ox, iar presiunea nu va depinde de y.

În conformitate cu teoria generală putem scrie pentru acest caz relațiile

$$f(x) = \ln k(x); \quad v = 0; \quad U \equiv u = \text{real},$$

din care se deduce imediat

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Datorită faptului că $U(z)$ este o funcţie reală, ecuaţia pe care o satisface se scrie acum

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 2\,AU. \tag{9}$$

Ecuaţia obţinută este un caz particular al ecuaţiei (6). Datorită faptului că în membrul drept al ei nu figurează conjugata funcţiei necunoscute, soluţia generală are o formă simplă, şi anume [2]

$$U(z) = \varphi(z)\, e^{\omega(z)}, \tag{10}$$

unde $\varphi(z)$ este o funcţie olomorfă în domeniul D în care este dată ecuaţia, iar $\omega(z)$ este funcţia continuă în D:

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{2A(\xi,\eta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

În cazul nostru, domeniul D este banda verticală $x_s \leqslant x \leqslant x_c$; $-\infty \leqslant y \leqslant +\infty$, iar funcţia $A(\xi, \eta)$, ca urmare a modului în care a fost definită, va fi dată de expresia

$$A = -\frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Să calculăm funcţia $\omega(z)$ pentru cazul de care ne ocupăm:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_s}^{x_c}\frac{df}{d\xi}\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{x_s}^{x_c}\frac{df}{d\xi}\,d\xi\int_{\xi=\text{const}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

În ceea ce priveşte valoarea integralei

$$I = \int_{\xi=\text{const}}\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

ea depinde de poziţia dreptei $\xi = \text{const}$ faţă de punctul z. Calcule imediate arată că

$$I = \begin{cases} -i\pi, & \xi < x, \\ 0, & \xi = x, \\ i\pi, & \xi > x \end{cases}$$

și de aceea funcția $\omega(z)$ se scrie

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_s}^{x} \frac{df}{d\xi}(-i\pi)\, d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{x}^{x_c} \frac{df}{d\xi}(i\pi)\, d\xi =$$

$$= -f(x) + \frac{1}{2}[f(x_c) + f(x_s)].$$

Datorită calculelor efectuate mai sus, putem scrie soluția problemei sub forma

$$U \equiv u(x) = \varphi(z)\, e^{-\ln k(x)}\, e^{\ln\sqrt{k(x_s)k(x_c)}}.$$

Deoarece ambii membri ai relației precedente nu depind decît de x, funcția $\varphi(z)$ va trebui să fie reală și independentă de y. Singurele funcții olomorfe care îndeplinesc condițiile de mai sus sînt constantele reale și soluția se scrie

$$u(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{C_1}{k(x)} \tag{11}$$

sau

$$p = C_1 \int \frac{dx}{k(x)} + C_2, \tag{12}$$

soluție care, după determinarea constantelor, devine identică cu cea dată în [1] și [4].

4. *Cazul scurgerii radiale.* Într-un mod asemănător putem rezolva și problema mișcării radiale într-o coroană circulară situată între circumferințele concentrice de raze r_s și r_c ($r_s < r_c$) pe care sînt date presiunile constante p_s și, respectiv, p_c. Dacă permeabilitatea depinde numai de raza r, nu și de unghiul θ, presiunea va depinde de asemenea numai de r, iar viteza nu va avea decît componentă radială.

Rezultatele obținute la teoria generală se transpun cu ușurință la acest caz:

$$U = u + iv; \qquad u = \frac{\partial p}{\partial x}; \qquad v = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

sau, în coordonate polare,

$$u = \frac{dp}{dr}\cos\theta; \qquad v = -\frac{dp}{dr}\sin\theta; \qquad U = \frac{dp}{dr}e^{-i\theta}.$$

Coeficientul A din ecuația (6) se scrie ($f(r) = \ln k(r)$)

$$A = -\frac{1}{4}\left(\frac{df}{dr}\cos\theta + i\frac{df}{dr}\sin\theta\right) = -\frac{1}{4}\frac{df}{dr}e^{i\theta},$$

după care ecuaţia amintită devine

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{df}{dr}\cdot\frac{dp}{dr}.$$

Ţinînd seama de expresia lui U ca funcţie de r şi θ scrisă mai sus, ecuaţia precedentă ia forma

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{df}{dr}e^{i\theta}\,U,$$

de acelaşi tip cu (9), obţinută în cazul mişcării liniare, dar definită acum în coroana circulară dată. Soluţia ei va avea deci aceeaşi formă (10), $\omega(z)$ avînd acum expresia

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{df}{d\rho}\frac{e^{i\alpha}\,\rho\,d\rho\,d\alpha}{\rho e^{i\alpha} - re^{i\theta}}$$

($\zeta = \rho e^{i\alpha}$; $z = re^{i\theta}$). Calculul integralei duble de mai sus se efectuează cu uşurinţă dacă o punem sub forma

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_s}^{r_c}\frac{df}{d\rho}\,d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\rho e^{i\alpha}\,d\alpha}{\rho e^{i\alpha} - re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_s}^{r_c}\frac{df}{d\rho}\,d\rho\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

unde C_ρ este o circumferinţă concentrică cu conturele de alimentare şi de recuperare de rază ρ.

Integrala

$$J = \int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

este nulă dacă z nu se află în interiorul circumferinţei de integrare, adică dacă $|z| > \rho$, şi este egală cu $2\pi i$ dacă $|z| < \rho$. De aceea expresia pentru $\omega(z)$ se scrie

$$\omega(z) = \int_r^{r_c}\frac{df}{d\rho}\,d\rho = f(r_c) - f(r) = \ln\frac{k(r_c)}{k(r)},$$

iar funcţia $U(z)$ se calculează cu formula

$$U = C_1\,\varphi(z)\,\frac{1}{k(r)}, \tag{13}$$

în care notaţia C_1 este evidentă. Dacă ţinem seama de expresia lui $U(z)$ în coordonate polare, relaţia (13) ia forma

$$\frac{dp}{dr}e^{-i\theta} = C_1\,\varphi(z)\,\frac{1}{k(r)}.$$

Pentru omogenitate, în variabilele independente r și θ va trebui să luăm în rolul lui $\varphi(z)$ funcția

$$\varphi(z) = \frac{C_2}{z} = \frac{C_2 e^{-i\theta}}{r},$$

în care C_2 este o constantă reală oarecare. Funcția astfel aleasă este, evident, olomorfă în coroana circulară considerată, iar expresia gradientului de presiune în direcție radială se scrie

$$\frac{dp}{dr} = \frac{C_3}{r\,k(r)},$$

unde $C_3 = C_1 \cdot C_2$ este o constantă reală nedeterminată. De aici se deduce imediat

$$p(r) = C_3 \int \frac{dr}{r\,k(r)} + C_4. \tag{14}$$

Constantele C_3 și C_4 se determină impunînd presiunii condițiile:

$$p = p_s \text{ pentru } r = r_s; \quad p = p_c \text{ pentru } r = r_c.$$

Pentru a economisi spațiu nu vom mai scrie forma finală a soluției, coincidența ei cu cea dată în [1, p. 94] putîndu-se vedea din formula (14).

5. *Cazul permeabilității care satisface relația* $\Delta \sqrt{k(x,y)} = 0$. Acest caz particular, deși restrictiv, se bucură în literatura de specialitate de atenție deosebită, prin faptul că reduce ecuația de mișcare (3) la ecuația lui Laplace. Păstrînd ipoteza făcută asupra permeabilității, ecuația de mișcare scrisă sub forma complexă (6) capătă de asemenea o formă mai simplă, corespunzătoare ecuației lui Laplace din cazul formei reale a ecuației.

În formă complexă, expresia

$$\Delta \sqrt{k(x,y)} = 0$$

se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} \sqrt{k(x,y)} = 0, \tag{15}$$

care arată că derivata în raport cu z a funcției $\sqrt{k(x,y)}$ este olomorfă în domeniul considerat. Dacă facem substituția

$$p(x,y) = \frac{1}{2k\sqrt{(x,y)}} R(x,y),$$

funcţia $U(z)$ definită mai sus de relaţiile (3') capătă forma

$$U(z) = u(x, y) + iv(x, y) = -R(x, y)\frac{1}{k(x, y)}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Notînd

$$U_0(z) = \frac{\partial R}{\partial z}$$

şi avînd în vedere că funcţia $U(z)$ satisface ecuaţia (6), deducem ecuaţia pe care o satisface $U_0(z)$:

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = R(x, y)\frac{1}{\sqrt{k(x, y)}}\frac{\partial^2\sqrt{k}}{\partial z\,\partial\bar{z}}.$$

Ţinînd seama de (15), în relaţia de mai sus aceasta devine

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = 0,$$

adică $U_0(z)$ este o funcţie olomorfă în D, de unde rezultă

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial\bar{z}} = 0,$$

ceea ce înseamnă că $R(x,y)$ este o funcţie armonică, rezultat obţinut şi în [1] şi [4].

II. MIŞCAREA ÎN JURUL UNUI SISTEM DE SONDE ÎN MEDIUL OMOGEN

Ecuaţiile de mişcare scrise sub forma (6) sau (7) permit scrierea soluţiei generale în acest caz de mişcare, de care ne vom ocupa în acest capitol al lucrării.

1. *Determinarea potenţialului de mişcare.* Presupunem dat în planul complex un sistem de n sonde de injecţie plasate în punctele z_i, care introduc fiecare un debit Q_i^+, şi m sonde de extracţie, plasate în punctele ζ_j de debite Q_j^-. Şi în acest caz potenţialul de mişcare va rezulta din rezolvarea ecuaţiei (7), definită în tot planul complex E. În acest caz, $\omega(z)$ va avea expresia

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

Ca şi în I. 1, putem scrie

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}},$$

de unde prin integrare deducem

$$\omega(z) = -\frac{1}{2} f(z) + g(z),$$

în care $g(z)$ este o funcţie olomorfă în tot planul complex fără singularităţi, deoarece $\omega(z)$ şi $f(z)$ sînt continue în tot planul. Conform teoremei lui Liouville, $g(z)$ se reduce la o constantă reală $\frac{\alpha}{2}$. Într-adevăr, $\omega(z)$ este nulă la infinit şi, cum funcţia $f(z)$ este reală, constanta nu poate fi decît reală. În acest caz, funcţia $\omega(z)$ este de asemenea reală şi vom avea

$$\overline{\omega(z)} - \omega(z) = 0.$$

Coeficientul $B(z)$ va avea expresia

$$B = \overline{A} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ţinînd seama de cele de mai sus, rezultă că potenţialul mişcării în acest caz, pe care îl notăm cu $V_0(z)$, satisface ecuaţia

$$\frac{\partial V_0}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \overline{V_0(z)}, \tag{16}$$

definită în tot planul complex. După cum se ştie [2] [3], soluţia ecuaţiei (16) este

$$V_0(z) = \Phi(z) + \iint_E \Gamma_1(z, \zeta)\, \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta + \iint_E \Gamma_2(z, \zeta)\, \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta, \tag{17}$$

unde $\Gamma_1(\zeta, z)$ şi $\Gamma_2(\zeta, z)$ au expresiile (8′), în care domeniul de integrare este tot planul complex.

În relaţia (17) figurează funcţia $\Phi(z)$, olomorfă în tot planul în afară de singularităţile din sonde. Pentru determinarea ei sînt în general necesare condiţii la limită, dar în cazul nostru, în care mişcarea are loc în tot planul complex, o vom deduce din comportamentul ei în jurul sondelor. Pentru aceasta vom porni de la comportarea presiunii în jurul unei sonde de injecţie z_i. Considerăm un cerc cu centrul în punctul z_i de rază ρ suficient de mică pentru ca în interiorul cercului să nu existe o altă sondă şi vom calcula debitul, care, în conformitate cu ipotezele, trebuie să fie

$$Q_i^+ = \int_C \overline{V}\, \overline{n}\, ds = -\int_C \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \rho}\, ds = -\frac{\rho}{\mu} \int_0^{2\pi} k(\rho, \theta) \frac{\partial p}{\partial \rho}\, d\theta.$$

Evident, debitul trebuie să fie acelaşi pentru orice valoare a lui ρ atîta timp cît cercul include numai sonda considerată; vom impune, aşadar,

condiția ca ultima integrală din relația precedentă să nu depindă de ρ. Se obține prin anularea primei derivate în raport cu ρ

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(k+\rho\frac{\partial k}{\partial \rho}\right)\frac{\partial p}{\partial \rho}+k\rho\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right]\mathrm{d}\theta=0.$$

Deoarece această egalitate trebuie satisfăcută pentru orice $k(\rho,\theta)$, urmează

$$\left(k+\rho\frac{\partial k}{\partial \rho}\right)\frac{\partial p}{\partial \rho}+k\rho\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}=0$$

sau, după integrare,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\,\frac{C(\theta)}{k(\rho,\theta)},$$

unde $C(\theta)$ este o funcție arbitrară de θ, continuă în intervalul $[0,2\pi]$. Din relația de mai sus rezultă că gradientul presiunii se comportă în vecinătatea punctului z_i ca $\frac{1}{\rho}$ ceea ce arată că funcția $\Phi(z)$ va trebui să aibă în jurul punctului z_i dezvoltarea

$$\Phi(z)=\frac{A_i}{z-z_i}+a_0^i+a_1^i(z-z_i)+a_2^i(z-z_i)^2+\dots$$

Într-adevăr, din comportarea lui $k\frac{\partial p}{\partial \rho}$ în jurul acestui punct rezultă că funcția $k(z)\cdot U_0(z)$ va avea o singularitate de același ordin. Singularitatea se răsfrînge asupra funcției $V_0(z)$, legată de $U_0(z)$ prin relația cunoscută. Rezultă din această relație că $\Phi(z)$, care determină singularitățile lui $V_0(z)$, va avea dezvoltarea arătată.

Într-un mod cu totul asemănător se deduce comportarea funcției $\Phi(z)$ în jurul punctului ζ_j (sondă de extracție):

$$\Phi(z)=-\frac{B_j}{z-\zeta_j}+b_0^j+b_1^j(z-\zeta_j)+b_2^j(z-\zeta_j)^2+\dots$$

diferența de semn datorîndu-se semnului schimbat al debitului unei sonde de extracție față de o sondă de injecție. Constantele A_i și B_j vor trebui determinate din condiția ca debitul calculat al fiecărei sonde să fie cel impus.

Funcția $\Phi(z)$, avînd singularitățile puse în evidență mai sus, se va scrie sub forma

$$\Phi(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}-\sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z-\zeta_j}+h(z),$$

funcția $h(z)$ înglobînd părțile regulate ale dezvoltărilor în jurul lui z_i și ζ_j. Prin faptul că $h(z)$ trebuie să fie o funcție olomorfă în tot planul, rezultă că ea se reduce la o constantă c_0. Deoarece în punctul de la infinit $V_0(z) = c_0$, rezultă că c_0 trebuie să fie nulă, căci în caz contrar avem presiune infinită la infinit conform relației

$$|U_0| = |\operatorname{grad} p|.$$

Urmează că $\Phi(z)$ are expresia

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - \zeta_j}. \tag{18}$$

Cu aceasta soluția ecuației (16) se scrie imediat prin înlocuirea funcției $\Phi(z)$ determinată mai sus în relația (17).
Se obține

$$V_0(z) = \iint_E \Gamma_1(z, \zeta)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\zeta - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{\zeta - \zeta_j}\right] d\xi\, d\eta +$$

$$+ \iint_E \Gamma_2(z, \zeta)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A}_i}{\bar{\zeta} - \bar{z}_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{B}_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j}\right] d\xi\, d\eta + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - \zeta_j}. \tag{19}$$

Cu ajutorul relației dintre $V_0(z)$ și $U_0(z)$ se deduce expresia

$$U_0(z) = \frac{1}{\sqrt{k(z)}}\, e^{\frac{\alpha}{2}} V_0(z), \tag{20}$$

în care s-a ținut seama de egalitatea

$$\omega(z) = -\frac{1}{2}[f(z) - \alpha] = -\frac{1}{2}[\ln k(z) - \alpha],$$

iar $V_0(z)$ are expresia dată de (19).

2. *Determinarea debitelor.* Vom determina în primul rînd expresia debitului ce traversează conturul C_p care înconjură punctul z_p. Se deduce cu ușurință relația

$$Q_p = \int_{C_p} \overline{V} \cdot \overline{n}\, ds = \int_{C_p} V_x\, dy - V_y\, dx = \int_{C_p} k(u\, dy + v\, dx).$$

Ținînd seama de relații cunoscute, expresia de mai sus se scrie

$$Q_p = \frac{1}{2}\int_{C_p} k\left[(U_0 + \overline{U}_0)\frac{dz - \overline{dz}}{2i} + \frac{U_0 - \overline{U}_0}{i}\frac{dz + \overline{dz}}{2}\right]$$

și, după reducerea termenilor, se obține

$$Q_p = \frac{1}{2i}\int_{C_p} k\,(U_0\,dz - \overline{U}_0\,\overline{dz}) = \int_{C_p} k\,\mathrm{Im}\,(U_0\,dz).$$

Deoarece $k(z)$ este o funcție reală, deducem

$$Q_p = \mathrm{Im}\int_{C_p} k\,U_0\,dz.$$

Dacă ținem seama de expresia lui $U_0(z)$, debitul care traversează curba C_p va fi dat de relația

$$Q_p = e^{\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{Im}\int_{C_p}\sqrt{k(z)}\left[\iint_E \Gamma_1(z,\zeta)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\zeta - z_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{\zeta - \zeta_j}\right)d\xi\,d\eta + \right. \tag{21}$$

$$\left. + \iint_E \Gamma_2(z,\zeta)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{A}_i}{\overline{\zeta} - \overline{z}_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{B}_j}{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}_j}\right)d\xi\,d\eta + \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z - z_j} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z - \zeta_j}\right] dz,$$

unde $Q_p = Q_i^+$ dacă $p = 1,2\ldots,n$ și $Q_{p-n} = Q_j^-$ dacă, $p = n+1,\ldots,$ $n+m$. Scrierea relației precedente pentru fiecare dintre punctele singulare ne furnizează un sistem de $n+m$ relații, din care vom determina constantele A_i și B_j în număr de $n+m$. Acestea trebuie să fie reale; așa cum va rezulta din cele ce urmează (21′) și (22) prin comparație cu rezultatele cunoscute din cazul mediului omogen. Pentru a nu introduce noi mărimi, păstrăm pentru aceste constante reale tot notațiile A_i și B_j. În acest fel, formulele (19) și (21) generalizează, cu transformările necesare, expresia potențialului respectiv al debitului din mișcarea unui fluid într-un mediu poros omogen. Într-adevăr, dacă în expresiile de mai sus facem $k = \mathrm{const}$, deducem, după cum se verifică ușor,

$$\Gamma_1(z,\zeta) \equiv 0\,; \quad \Gamma_2(z,\zeta) \equiv 0$$

și expresiile amintite devin

$$V_0(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z - \zeta_j}, \tag{19′}$$

$$Q_p = k\,\mathrm{Im}\int_{C_p}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z - \zeta_j}\right]dz, \tag{21′}$$

deoarece

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\ln k(z)|_{z=\infty},$$

după cum s-a arătat mai înainte.

Din (21′) rezultă

$$A_p = \frac{Q_p^+}{2\pi k}; \quad B_p = -\frac{Q_p^-}{2\pi k}, \tag{22}$$

deoarece

$$\int_{C_p}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{z-z_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{z-\zeta_j}\right]dz = 0$$

dacă $i \neq p$ și $j \neq p$.

Din relația (21) se pot deduce coeficienții A_i și B_j. Sistemul amintit se scrie

$$Q_p e^{-\frac{\alpha}{2}} = \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{Im}\int_{C_p}\sqrt{k(z)}\left[\frac{1}{z-z_i} + \iint_E \Gamma_1(z,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z_i} + \right.$$

$$\left. + \iint_E \Gamma_2(z,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}_i}\right]dz - \sum_{j=1}^{m} B_j \operatorname{Im}\int_{C_p}\sqrt{k(z)}\left[\frac{1}{z-\zeta_j} + \right. \tag{23}$$

$$\left. + \iint_E \Gamma_1(z,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - \zeta_j} + \iint_E \Gamma_2(z,\zeta)\frac{d\xi\,d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j}\right]dz$$

($p = 1,2,\ldots, n+m$). Dacă în (23) facem $k(z) = \text{const}$, se vede imediat că obținem valorile (22). Coeficienții necunoscutelor A_i și B_j sînt constanți, independenți de curbele de integrare C_p, care înconjură numai punctul z_p, deoarece ei intervin în expresia debitului sondei din z_p cînd celelalte sonde nu există. Așadar, în expresia (19) a lui $V_0(z)$, coeficienții A_i și B_j trebuie înlocuiți cu soluția sistemului (23).

Cu aceasta problema propusă este rezolvată, iar rezultatele obținute pot fi aplicate la diferite cazuri particulare de mișcări.

Într-o altă lucrare noi le vom utiliza la studiul dislocuirii integrale a fluidelor nemiscibile în medii neomogene.

Primită la redacție la 9 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, București, Edit. Academiei, 1963.
2. F. D. Gahov, *Kraevie zadaci*, Moscova, Gostehizdat, 1963.
3. I. N. Vecua, *Obobșcenie analiticeskie funkții*, Fizmatiz, 1959.
4. St. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, București, Edit. Academiei, 1966.

ASUPRA LUBRIFICAȚIEI LAGĂRELOR DE ALUNGIRE REDUSĂ FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TURBULENT[1])

de S. GĂLETUȘE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Pentru lagărele de alungire finită fiind necesar să se ia în considerație mișcarea laterală a lubrifiantului, s-a obținut într-o lucrare anterioară legea de variație a parametrului adimensional al gradientului de presiune după direcția laterală în funcție de numărul Reynolds, ambii definiți cu viteza medie.
Folosindu-se apoi această lege și aproximațiile permise de faptul că alungirea lagărului este redusă, s-a dedus distribuția de presiuni și rezultanta presiunilor pentru lagăre plane și circulare. În comparație cu rezultatele anterioare deduse în ipoteza variației liniare a parametrului adimensional al gradientului de presiune cu viteza medie laterală, rezultatele obținute se prezintă calitativ asemănătoare, avînd însă deosebiri cantitative, și a ieșit în evidență o influență pronunțată a alungirii lagărului asupra rezultantei presiunilor.

Într-o lucrare anterioară s-a examinat mișcarea turbulentă a unui fluid real între plăci paralele, utilizîndu-se ipoteza lungimii de amestec a lui Prandtl, pentru exprimarea cvasifrecării [1], [2] datorită turbulenței și s-a dedus legea de variație a gradientului de presiune în funcție de numărul Reynolds, care va fi utilizată în prezenta lucrare. Studiul lubrificației lagărelor de alungire finită în regim turbulent prezintă o oarecare dificultate datorită complexității problemei și nu s-au obținut soluții decît pentru anumite cazuri, cum ar fi cazul considerării viscozității lubrifiantului, variabilă proporțional cu variația grosimii stratului de lubrifiant, și cazul lagărelor de alungire redusă.

În ambele cazuri soluționate [3] s-a utilizat o lege de variație liniarizată a gradientului de presiune lateral în funcție de viteza medie laterală. Pentru cazul lagărelor de alungire redusă se pot obține soluții privind distribuția de presiuni și rezultanta presiunilor, luîndu-se pentru variația gradientului de presiune lateral cu viteza medie laterală o lege neliniarizată.

---

[1]) Lucrare elaborată în cadrul tezei de doctorat a autorului, conducător științific acad. E. Carafoli.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1029–1040

În cele ce urmează se va utiliza sistemul de coordonate $Oxyz$, avînd axa Ox cuprinsă în întregime pe suprafața mobilă (se neglijează curbura suprafeței față de grosimea stratului de fluid h), axa Oy dirijată după normala la aceeași suprafață și axa laterală Oz perpendiculară pe planul primelor două.

Se va pleca de la ecuația de continuitate,

$$\frac{\partial}{\partial x}(U_{\text{med}}\, h) + \frac{\partial}{\partial z}(W_{\text{med}} \cdot h) = 0, \tag{1}$$

sau, punînd în evidență debitul datorat mișcării de tip Couette, $\frac{Vh}{2}$, unde viteza V este viteza suprafeței mobile,

$$U_{\text{med}}\, h = \frac{Vh}{2} + u_{\text{med}}\, h,$$

ecuația (1) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{\text{med}}\, h) + \frac{\partial}{\partial z}(W_{\text{med}} \cdot h) = -\frac{V}{2}\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

Vitezele medii care apar în partea stîngă a ecuației (2) sînt funcții de gradienții de presiune după direcțiile x și respectiv z.

Ocvirk și Dubois [4] au arătat că, pentru lagăre de alungiri reduse, primul termen din ecuația (2), termen care depinde de derivata presiunii în raport cu x, se poate neglija, așa încît ecuația (2) devine

$$\frac{\partial}{\partial z}(W_{\text{med}} \cdot h) = -\frac{V}{2}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{3}$$

sau, după o primă integrare în raport cu z,

$$W_{\text{med}}\, h = -\frac{V}{2}\frac{\partial h}{\partial x} z + C. \tag{4}$$

Dacă se aleg axele de coordonate la mijlocul lagărului, atunci din motive de simetrie

$$W_{\text{med}} = 0, \text{ pentru } z = 0,$$

astfel încît $C = 0$, iar ecuația (4) se scrie

$$W_{\text{med}} \cdot h = -\frac{V}{2}\frac{\partial h}{\partial x} z. \tag{5}$$

În cazul lagărelor de alungire redusă este unanim admisă aproximația că scurgerea pe direcția z este o scurgere de tip Poiseuille atît pentru regimul laminar [4], [5], cît și pentru regimul turbulent [3], [6], [7].

În lucrarea [10] s-a determinat legea de variație a gradientului de presiune sub formă adimensională $\mathcal{B}_z$ în funcție de numărul Reynolds:

$$\mathcal{B}_z = 12 + 0{,}024\ \mathcal{R}e^{0{,}84}, \tag{6}$$

în care

$$\mathcal{B}_z = -\frac{h^2}{\mu W_{med}}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \mathcal{R}e = \frac{\rho W_{med} h}{\mu}. \tag{7}$$

Valorile calculate cu această relație (6) au fost reprezentate în figura 1 cu linie continuă, iar cu linie întreruptă au fost trecute rezultatele obținute de Ng [12] și liniarizarea folosită de Tao [6].

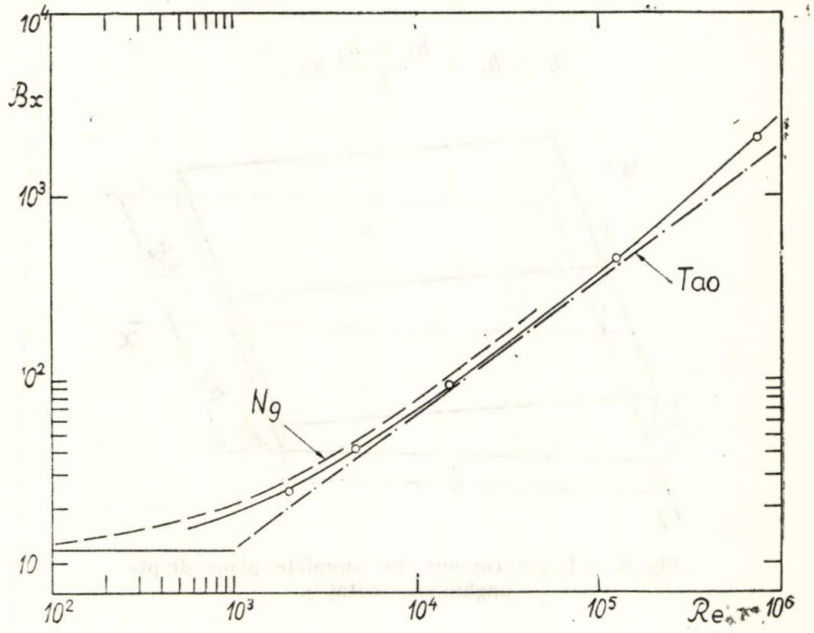


Fig. 1. — Variația parametrului adimensional al gradientului de presiune $\mathcal{B}_z$ funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e$.

Pornind de la relația (6), se obține expresia gradientului de presiune în funcție de debitul lateral $W_{med.}\,h$, după înlocuirea expresiilor (7):

$$-\frac{h^2}{\mu W_{med}}\frac{\partial p}{\partial z} = 12 + 0{,}024\left(\frac{\rho W_{med} h}{\mu}\right)^{0{,}84}, \tag{8}$$

iar după înlocuirea debitului lateral $W_{med} \cdot h$ cu expresia (5) se obține

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{6\mu V}{h^3}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)z\left[1 + 0{,}002\,\overline{\mathcal{R}e}^{*0{,}84}\left(-\frac{1}{2h_2}\frac{\partial h}{\partial x}z\right)^{0{,}84}\right], \tag{9}$$

unde

$$\overline{\mathcal{R}e}^{*} = \frac{\rho V h_2}{\mu},$$

V fiind viteza suprafeței mobile și h_2 înălțimea minimă dintre cele două suprafețe.

Relația pentru gradientul de presiune (9) va fi utilizată în continuare la calculul caracteristicilor lagărelor plane și circulare, cu observația că se consideră înălțimea h ca avînd variație numai după direcția x.

Lagăre plane. Se va considera un lagăr compus din suprafețe plane ca în figura 2, pentru care variația înălțimii h este liniară :

$$h = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}x, \tag{10}$$

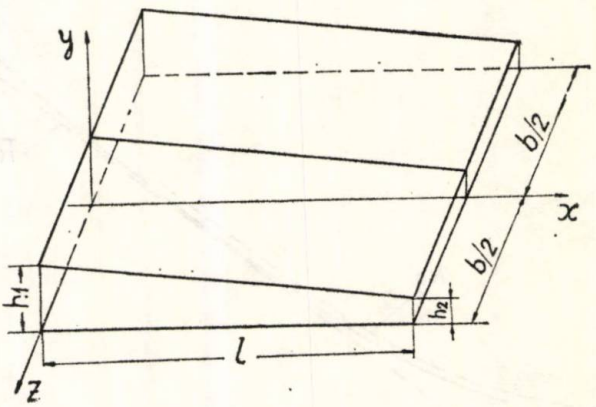


Fig. 2. — Lagăr compus din suprafețe plane dreptunghiulare (notații).

sau, cu notațiile adimensionale

$$\overline{h} = \frac{h}{h_m}, \qquad h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}, \qquad \overline{x} = \frac{x}{l}, \qquad K = \frac{h_1}{h_2}, \tag{11}$$

legea de variație a înălțimii se scrie

$$\overline{h} = \overline{h}_2\,[K - (K - 1)\,\overline{x}]. \tag{12}$$

Integrînd în raport cu $\bar{z}$ ecuația (9), se obține distribuția presiunii :

$$p = p_0 + \frac{3\mu\, Vb^2}{4l\, h_m^2} \frac{1}{\bar{h}^3}\left(-\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)\left[(1-\bar{z}^2) + \right.$$

$$\left. + 0{,}00141\, \bar{\mathcal{R}}e^{*\,0{,}84}\left(\frac{b}{4l}\right)^{0{,}84}\left(-\frac{1}{\bar{h}_2}\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^{0{,}84}(1-\bar{z}^{2{,}84})\right], \tag{13}$$

unde s-a utilizat variabila adimensională

$$\bar{z} = \frac{2z}{b}$$

și s-a pus condiția la limită $p = p_0$ pentru $\bar{z} = 1$.

Rezultanta presiunilor se scrie sub formă adimensională

$$\zeta^* = \frac{Ph_2^2}{2\mu Vl^2 b} \tag{14}$$

pentru viscozitate constantă, iar rezultanta P este

$$P = 2\int_0^l \int_0^{b/2} (p - p_0)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z. \tag{15}$$

Dacă se înlocuiește expresia (13) în (15) și se integrează, se obține

$$\zeta^* = \frac{\lambda^2}{8}\frac{K^2-1}{K^2}\left[1 + 0{,}00156\left(\frac{K-1}{4}\bar{\mathcal{R}}e^*\,\lambda\right)^{0{,}84}\right], \tag{16}$$

unde λ este alungirea lagărului :

$$\lambda = \frac{b}{l}. \tag{17}$$

În mod asemănător se obține pentru presiuni expresia

$$p = p_0 + \frac{3}{4}\frac{\mu_1 Vb^2}{lh_m^2\,\bar{h}_1}\cdot\frac{1}{\bar{h}^2}\left(-\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)\left[(1-\bar{z}^2) + \right.$$

$$\left. + 0{,}00141\, \bar{\mathcal{R}}e_1^{*0{,}84}\left(\frac{b}{4l}\right)^{0{,}84}\left(-\frac{K}{\bar{h}}\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^{0{,}84}(1-\bar{z}^{\,2{,}84})\right] \tag{18}$$

în cazul viscozității variabile după legea în mod obișnuit întrebuințată în lubrificație:

$$\mu = \mu_1 \frac{\bar{h}}{\bar{h}_1}, \tag{19}$$

unde μ_1 este viscozitatea corespunzătoare înălțimii maxime h_1 iar numărul Reynolds $\overline{\mathcal{R}e}_1^*$ este definit în funcție de această viscozitate:

$$\overline{\mathcal{R}e}_1^* = \frac{\rho V h_2}{\mu_1}.$$

Pentru rezultanta presiunii adimensionale $\bar{\zeta}^*$ se deduce în acest caz expresia

$$\bar{\zeta}^* = \frac{\lambda^2}{4} \frac{K-1}{K^2} \left[1 + 0{,}000855 \frac{K^{1{,}84} - 1}{K-1} \left(\frac{K-1}{4} \overline{\mathcal{R}e}_1^* \lambda \right)^{0{,}84} \right]. \tag{20}$$

Variația coeficientului $\bar{\zeta}^*/\lambda^2$ cu K pentru cazurile cînd viscozitatea este constantă sau variabilă după legea (19) este prezentată în figura 3.

Se constată că dispare punctul de maxim care există în cazul laminar și coeficientul $\bar{\zeta}^*/\lambda^2$ depinde de variația grupului $\overline{\mathcal{R}e}^* \lambda$, respectiv $\overline{\mathcal{R}e}_1^* \lambda$. Trebuie remarcat însă că rezultatele obținute sînt aplicabile pentru lagăre de alungire suficient de redusă, deoarece legile de variație a presiunii (13), (18) nu îndeplinesc condițiile la limită $p = p_0$ la $\bar{x} = 0$ și la $\bar{x} = 1$.

Lagăre circulare. În cazul lagărelor circulare, grosimea h este dată de expresia

$$h = c\ (1 + \varepsilon \cos\ \theta),$$

unde ε este excentricitate relativă $\varepsilon = e/c$, c jocul radial, iar θ se măsoară începînd de la linia centrelor.

Integrînd în acest caz ecuația (9), se obține distribuția presiunii pentru viscozitate constantă:

$$p = p_0 + \frac{3\mu\omega\ \lambda^2}{\psi^2} \left(-\frac{1}{\bar{h}^3} \frac{d\bar{h}}{d\theta} \right) \left[(1 - \bar{z}^2) + \right.$$
$$\left. + 0{,}00141\ (\mathcal{R}e^*\ \lambda)^{0{,}84} \left(-\frac{d\bar{h}}{d\theta} \right)^{0{,}84} (1 - \bar{z}^{2{,}84}) \right], \tag{21}$$

unde s-au întrebuințat notațiile adimensionale

$$\bar{h} = \frac{h}{c}, \quad \bar{z} = \frac{2z}{b},$$

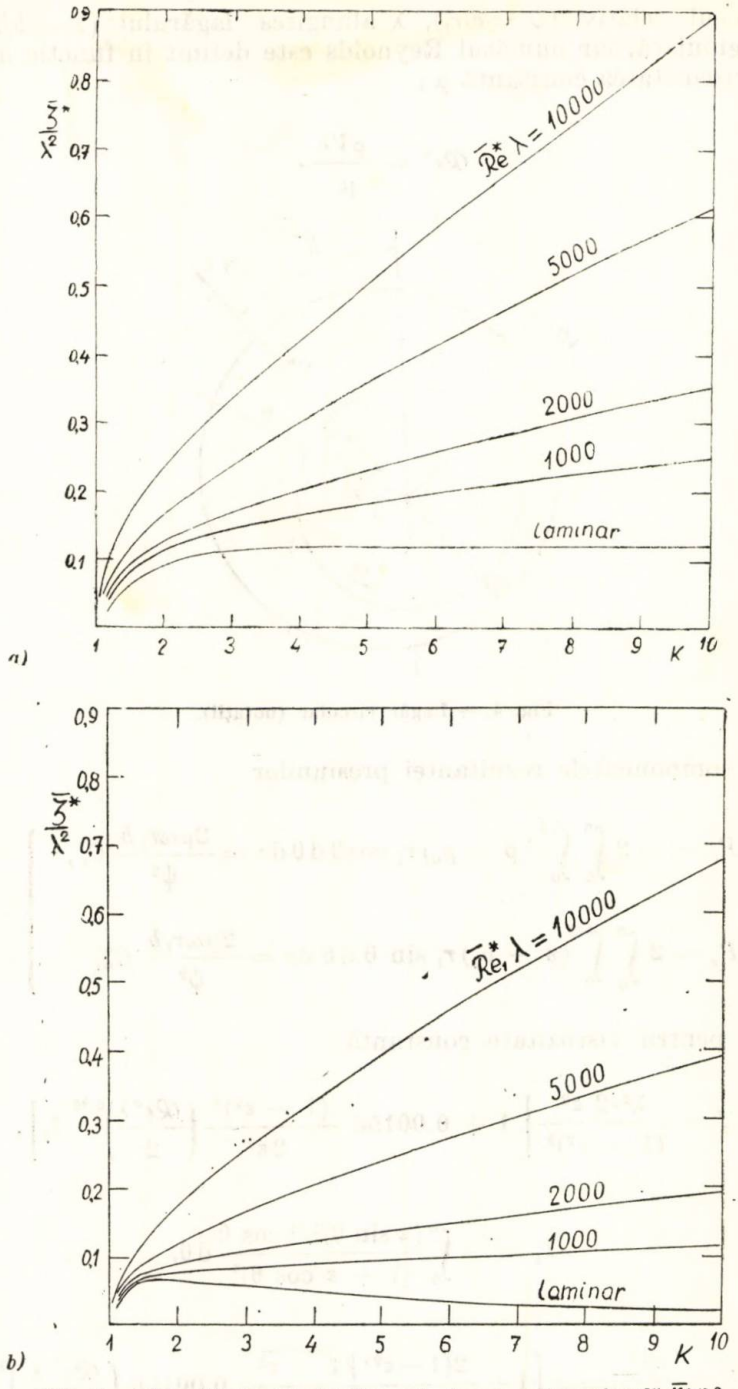


Fig. 3. — Rezultanta presiunilor sub forma adimensională $\bar{\zeta}^*/\lambda^2$ pentru lagăre plane de alungire redusă : *a* — viscozitate constantă ; *b* — viscozitate variabilă.

ψ fiind jocul relativ ($\psi = c/r_1$), λ alungirea lagărului ($\lambda = b/2\,r_1$), ω viteza unghiulară, iar numărul Reynolds este definit în funcție de jocul radial și viscozitatea constantă μ :

$$\mathcal{R}e^* = \frac{\rho V c}{\mu}.$$

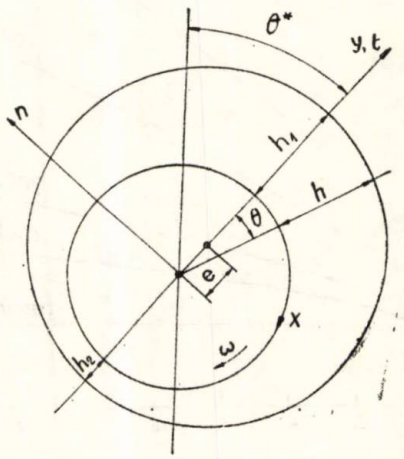


Fig. 4. — Lagăr circular (notații).

Definind componentele rezultantei presiunilor

$$\left.\begin{aligned} P_t &= -2\int_0^{\pi}\int_0^{l/2}(p-p_0)\,r_1\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{2\mu\omega r_1 b}{\psi^2}\,C_t^*, \\ P_n &= 2\int_0^{\pi}\int_0^{b/2}(p-p_0)\,r_1\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{2\mu\omega r_1 b}{\psi^2}\,C_n^*, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

se obține pentru viscozitate constantă

$$C_t^* = \frac{\lambda^2\cdot 2\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[1 + 0{,}00156\,\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\mathcal{R}e^*\lambda}{2}\right)^{0{,}84} I_1\right], \tag{23}$$

unde

$$I_1 = -\int_0^{\pi}\frac{(\varepsilon\sin\theta)^{1{,}84}\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\,\mathrm{d}\theta, \tag{24}$$

și

$$C_n^* = \frac{\pi}{2}\,\frac{\varepsilon\lambda^2}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[1+\frac{2(1-\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi\varepsilon}\,0{,}00156\left(\frac{\mathcal{R}e^*\lambda}{2}\right)^{0{,}84} I_2\right], \tag{25}$$

unde

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{(\varepsilon \sin\theta)^{1,84} \sin\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^3} \, d\theta. \tag{26}$$

În cazul viscozității variabile $\mu = \mu_1 (h/h_1)$ se va utiliza numărul Reynolds definit în funcție de viscozitatea μ_1 corespunzătoare înălțimii maxime h_1 :

$$\mathcal{R}e_1^* = \frac{\rho V c}{\mu_1}$$

și distribuția de presiuni se scrie

$$p = p_0 + \frac{3\mu_1 \omega \lambda^2}{\psi^2} \frac{1}{1+\varepsilon}\left(-\frac{1}{\bar{h}^2}\frac{d\bar{h}}{d\theta}\right)\Big[(1-\bar{z}^2) + \\ + 0{,}00141\,(\mathcal{R}e_1^*\lambda)^{0,84}(1+\varepsilon)^{0,84}\left(-\frac{1}{\bar{h}}\frac{d\bar{h}}{d\theta}\right)^{0,84}(1-\bar{z}^{2,84})\Big]. \tag{27}$$

Introducînd această expresie (27) în relațiile (22) și integrînd, se obține pentru cazul viscozității variabile

$$C_t^* = \frac{\lambda^2}{1+\varepsilon}\left(\frac{2}{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\left\{1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)} \times \right. \\ \left. \times 0{,}00156\,[(1+\varepsilon)\mathcal{R}e_1^*\lambda]^{1,84} I_3\right\}, \tag{28}$$

unde integrala I_3 este

$$I_3 = -\int_0^{\pi} \frac{(\varepsilon \sin\theta)^{1,84}\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{2,84}} \, d\theta, \tag{29}$$

și componenta normală

$$C_n^* = \frac{\lambda^2 \pi (1 - \sqrt{1-\varepsilon^2})}{\varepsilon(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{1 + \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}\, 0{,}00156 \times \right. \\ \left. \times [(1+\varepsilon)\mathcal{R}e_1^*\lambda]^{0,84} I_4\right\}, \tag{30}$$

unde integrala I_4 este

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{(\varepsilon \sin\theta)^{1,84} \sin\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^{2,84}} \, d\theta. \tag{31}$$

Integralele I_1, I_2, I_3 și I_4 au fost calculate grafic pentru diferite valori ale excentricității relative ε și au fost reprezentate în figura 5.

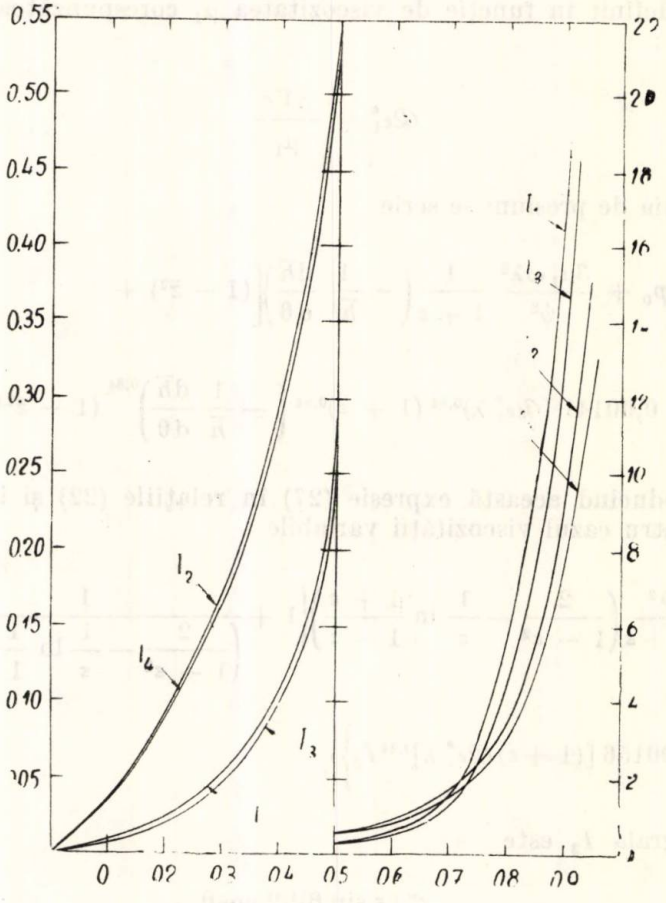


Fig. 5. — Integralele I_1, I_2, I_3 și I_4 în funcție de ε.

Rezultanta presiunilor se calculează apoi cu ajutorul relației

$$\zeta^* = \frac{P \psi^2}{2 \mu_1 \omega r_1 b} = \sqrt{C_n^{*2} + C_t^{*2}}, \tag{32}$$

iar unghiul θ^* pe care-l face rezultanta cu linia centrelor se deduce din relația

$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{P_n}{P_t} = \frac{C_n^*}{C_t^*}. \tag{33}$$

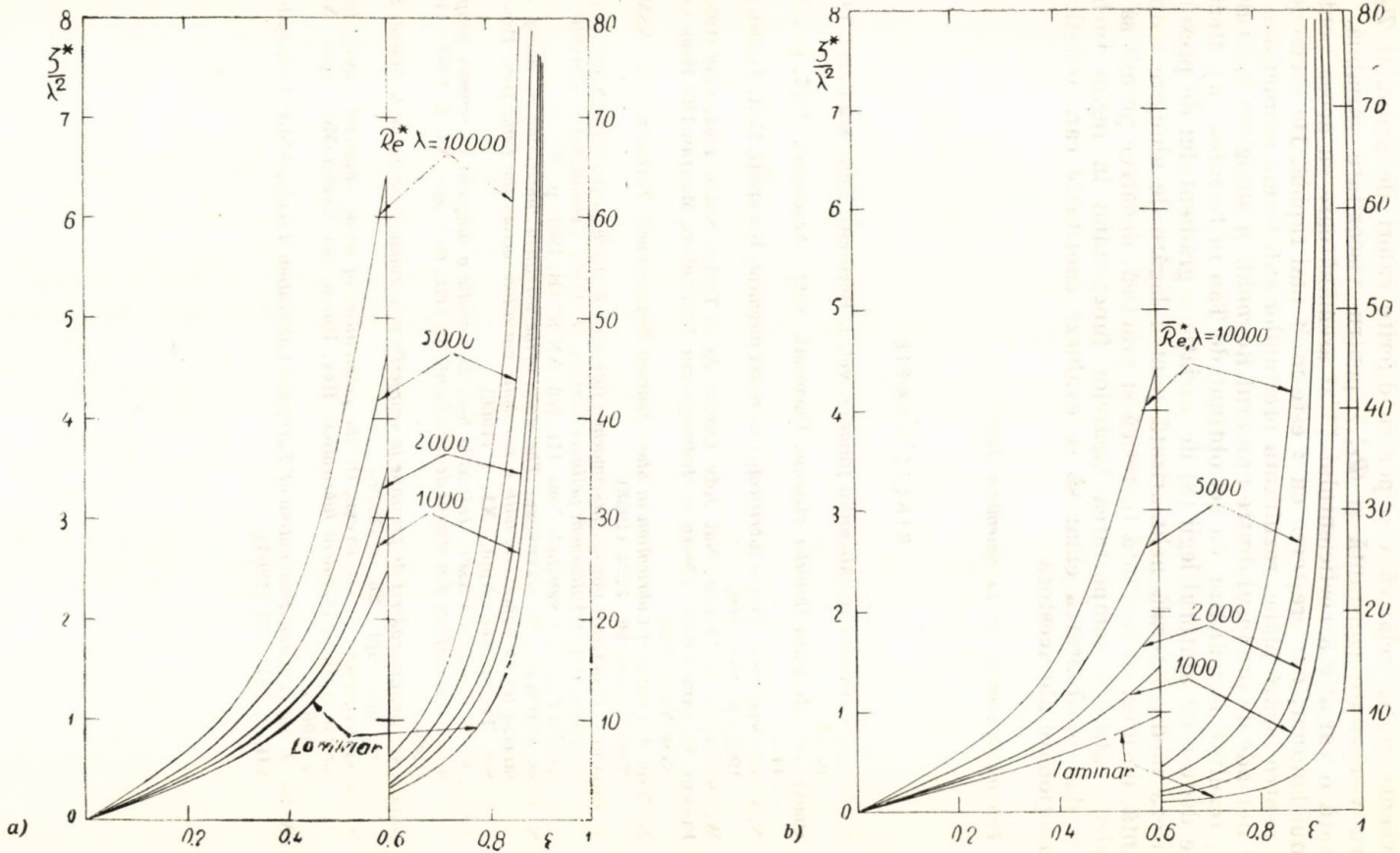


Fig. 6. — Rezultanta presiunilor sub forma adimensională ζ^*/λ^2 pentru lagăre circulare de alungire redusă : *a* — viscozitate constantă ; *b* — viscozitate variabilă.

În figura 6 s-a reprezentat variația coeficientului ζ^*/λ^2 în funcție de excentricitatea relativă ε și pentru diferite valori ale grupului $\mathcal{R}e^*\lambda$ pentru viscozitate constantă și $\mathcal{R}e_1^*,\lambda$ pentru viscozitate variabilă. Se constată o variație a coeficientului ζ^*/λ^2 asemănătoare cu aceea pentru regimul laminar, dar creșterea cu ε este mult mai rapidă. De asemenea, ca și pentru lagăre plane, rezultanta presiunilor sub forma adimensională ζ^*/λ^2 depinde de produsul dintre numărul Reynolds și alungirea lagărului, $\mathcal{R}e^*\lambda$, rezultat asemănător cu cel obținut de Tao în lucrarea [6]. Rezultatele deduse cu ajutorul legii (8) de variație a gradientului de presiune cu viteza medie laterală neliniarizată pentru lagăre de alungire redusă prezintă, desigur, importanță teoretică și practică, deoarece permit să se aprecieze calitativ comportarea lagărelor funcționînd în regim turbulent și dau posibilitatea chiar să se evalueze cantitativ caracteristicile de funcționare ale acestora.

Primită la redacție la 11 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, vol. I, București, Edit. Academiei, 1955, p. 14.
2. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, București, Edit. Academiei, 1967, p. 395—443.
3. V. N. Constantinescu, *Teoria lubrificației în regim turbulent*, București, Edit. Academiei, 1965, p. 145—166.
4. F. W. Ocvirk, G. B. Dubois, Nat. Adv. Comm. Aero. Techn. Notes, *2808*, *2809* (1952).
5. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
6. L. N. Tao, *A Theory of Lubrication in Short Journal Bearings with Turbulent Flow*, ASME Transaction, **80**, 1734 (1958).
7. A. I. Golubev, *O dvijenii viazkoi nesjimaemoi jidkosti v koritkih podșipnikovîh șceliah pri laminarnom i turbulentnom pejimah teceniia*, în *Trudî Vsesoiuznoi Konferenții po treniiu i iznosi v mașinah*, tom. III, Izd. AN SSSR, 1960, p. 30—38.
8. V. N. Constantinescu, S. Găletușe, *The study of the turbulent lubrication by using the mixing-length hypothesis with a parabolic variation across the film*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XI**, *2* (1966).
9. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *Influența legii de variație a lungimii de amestec asupra mișcării turbulente din stratul de lubrifiant*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *5*, 1091—1101 (1960).
10. S. Găletușe, *Asupra căderii de presiune la scurgerile prin conducte în regim turbulent*, St. cerc. mec. apl., **28**, *3* (1969).
11. V. N. Constantinescu, S. Găletușe, *On the possibilities of using universal velocity laws for the study of turbulent lubrication*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XII**, *4* (1967).
12. C. W. Ng, *Fluid Dynamic Foundation of Turbulent Lubrication Theory*, ASLE Transaction, **VII**, *4*, 311—321 (1964).

ASUPRA INFLUENȚEI TRANSFERULUI CĂLDURII LA MIȘCAREA FLUIDELOR ÎN FILME SUBȚIRI

de M. PASCOVICI
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Se studiază distribuția de temperaturi și de viteze pe grosimea filmului mărginit de suprafețe plane paralele cu luarea în considerare a unei viscozități variabile cu temperatura de forma $\eta = \eta_0^* e^{\beta T}$ (problema plană). Se pun condiții la limită legate de fluxurile de căldură, ceea ce permite aflarea valorilor absolute a temperaturilor din film.

NOTAȚII

x, y — coordonatele geometrice ale filmului fluid;
T — temperatura în film;
η — viscozitatea dinamică a fluidului;
η_0^* — viscozitate dinamică a fluidului la 0°C;
β — coeficientul de variație a viscozității cu temperatura;
λ_u — conductibilitatea termică a fluidului;
h — grosimea filmului de fluid;
u — viteza în film după direcția x;
V — viteza peretelui mobil;
$\lambda_{1,2}$ — conductibilitățile termice ale pereților;
$\delta_{1,2}$ — grosimile pereților;
T_1', T_1, T_2, T_2' — temperaturi ale pereților cu semnificațiile din figura 1;
T_{01}, T_{02} — temperaturile constante ale mediilor exterioare;
α_{01}, α_{02} — coeficienți de convecție perete-mediu exterior;
A — echivalentul caloric al lucrului mecanic;
C_1, C_2, C_3 — constante de integrare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1041–1051

A. VISCOZITATEA FLUIDULUI VARIABILĂ CU TEMPERATURA

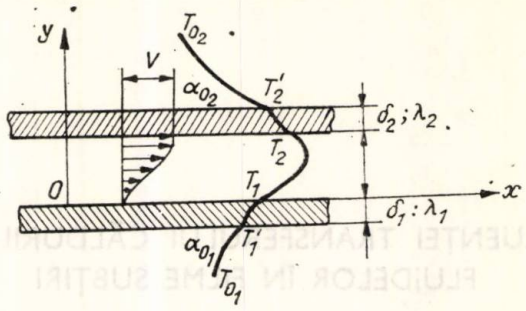


Fig. 1.

În ipotezele uzuale pentru studiul filmelor fluide subțiri în regim laminar și considerînd constante temperaturile T_{0_1} ; T_{0_2}, (fig. 1), precum și coeficienții de convecție α_{0_1}, α_{0_2}, ecuațiile de mișcare și de bilanț energetic vor fi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) = 0 ; \quad \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = C_1, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\lambda_u \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right) + A\eta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 0, \tag{2}$$

unde

$$\eta = \eta_0^* \, \mathrm{e}^{-\beta T}. \tag{3}$$

Relația (3) arată modul de variație a viscozității fluidului cu temperatura. Considerînd conductibilitatea termică a uleiului λ_u constantă, din relațiile precedente se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2 \beta T}{\mathrm{d}y^2} + \frac{A\beta C_1^2}{\eta_0^* \lambda_u} \cdot \mathrm{e}^{\beta T} = 0. \tag{4}$$

Soluția acestei ecuații este [1]

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{A\beta C_1^2}{\eta_0^* \lambda_u}} \sqrt{C_2 - \mathrm{e}^{\beta T}}, \tag{5}$$

$$C_2 \, \mathrm{e}^{-\beta T} = \mathrm{ch}^2 \frac{1}{2} \sqrt{C_2} \sqrt{2 \frac{A\beta C_1^2}{\eta_0^* \lambda_u}} (\mathrm{y} - C_3). \tag{6}$$

Cu notațiile din figura 1, condițiile la limită sînt

$$y = 0: u=0;\ T = T_1;\ \lambda_u \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(T_1 - T_1') = \alpha_{0_1}(T_1' - T_{0_1}), \quad (7)$$

$$y = h: u = V;\ T = T_2;\ \lambda_u \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=h} = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(T_2 - T_2') = \alpha_{0_2}(T_2' - T_{0_2}), \quad (8)$$

$$y = y_m: T = T_m = T_{max},\ \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=y_m} = 0. \quad (9)$$

Determinarea distribuției de temperaturi și de viteze implică cunoașterea constantelor C_1, C_2, C_3 și a temperaturilor T_1, T_2 și T_{max}. Temperaturile T_1, T_2 și T_{max} impuse de unii autori [2], [3] sînt determinate în prezenta lucrare din condițiile la limită legate de transferul de căldură.

Ecuația (1) împreună cu relațiile (5) și (6) și condițiile la limită (7), (8) și (9) duc la sistemul

$$V\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} \cdot e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]} = \operatorname{sh}\left[\operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_2)} - \operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)}\right] \pm$$

$$\pm \frac{\lambda_u}{\beta}\left[\operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_2)} - \operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)}\right]\sqrt{1-e^{-\beta(T_{max}-T_1)}} = K_i(T_i - T_{0i}), \quad (10)$$

unde

$$K_i = \frac{\lambda_i \alpha_{0i}}{\lambda_i + \delta_i \alpha_{0i}}, \qquad i=1,\ 2.$$

Rezolvarea sistemului permite aflarea lui T_1, T_2 și T_{max}.

Relația (5), cu condiția la limită (9), stabilește

$$C_2 = e^{\beta T_{max}}. \quad (11)$$

Constanta C_1 se află din integrarea ecuației (1), cu considerarea relației (6) și a condițiilor la limită (7) și (8) :

$$C_1 = \frac{\operatorname{Arsh} V\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}}\, e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]}}{h \cdot e^{\frac{\beta T_{max}}{2}}\sqrt{\frac{A\beta}{2\eta_0^*\lambda_u}}}. \quad (12)$$

În fine, C_3 se stabileşte din relaţiile (6), (11), (12) şi condiţiile la limită (7):

$$C_3 = -h \frac{\operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)}}{\operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]}} \cdot \tag{13}$$

În condiţiile de mai sus, distribuţia de temperaturi şi de viteze este dată de relaţiile

$$e^{\beta(T_{max}-T_1)} = \operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{y}{h} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)}}{\operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]}} \right\} \operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]}, \tag{14}$$

$$u = \frac{e^{\frac{\beta T_{max}}{2}}}{\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}}} \left\{ \operatorname{th} \left\{ \frac{y}{h} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)}}{\operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]}} \right\} \operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{th} \operatorname{Arch} e^{\frac{\beta}{2}(T_{max}-T_1)} \right\} \tag{15}$$

sau

$$u = \frac{e^{\frac{\beta}{2}[(T+T_1)-T_{max}]}}{\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}}} \cdot \operatorname{sh} \frac{y}{h} \operatorname{Arsh} V \sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}} e^{\frac{\beta}{2}[T_{max}-(T_1+T_2)]} \cdot \tag{15'}$$

Cazul I. Pereții au același coeficient global de transfer de căldură în medii exterioare cu temperaturi egale. Din considerente de simetrie, în cazul de față $T_1 = T_2$, $C_3 = \frac{h}{2}$, iar ecuațiile (10) iau forma

$$\frac{2\sqrt{D\,(e^{\beta T_1} + D)}}{e^{\beta T_1}} = \operatorname{sh}\sqrt{e^{\beta T_1} + D} \cdot \frac{Kh\,(T_1 - T_0)}{\sqrt{2D}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u}, \tag{16}$$

$$e^{\beta T_{max}} = e^{\beta T_1} + D, \tag{17}$$

unde

$$D = \frac{AV^2\,\beta\eta_0^*}{8\,\lambda_u}.$$

Ecuația (16) permite aflarea lui T_1, iar ecuația (17) stabilește pe T_{max}. Variația temperaturii și a vitezei pe grosimea filmului va fi stabilită de relațiile

$$e^{\beta\,(T_{max} - T)} = \operatorname{ch}^2 e^{\frac{\beta T_{max}}{2}} \cdot \frac{Kh\,(T_1 - T_0)}{\sqrt{2D}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u}\left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\right), \tag{18}$$

$$u = \frac{e^{\frac{\beta T_{max}}{2}}}{\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}}} \cdot \operatorname{the}^{\frac{\beta T_{max}}{2}} \cdot \frac{Kh\,(T_1 - T_0)}{\sqrt{2D}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u}\left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\right) + \frac{V}{2}. \tag{19}$$

Cazul II. Unul dintre pereți izolant perfect. Fie $K_1 = 0$; în acest caz $T_{10} = T_{max}$, $C_3 = 0$. Relațiile anterioare devin

$$\frac{\sqrt{D'}}{\sqrt{D' + e^{\beta T_2}}} = \operatorname{th}\frac{\sqrt{D' + e^{\beta T_2}}}{\sqrt{D'}} \cdot \frac{Kh(T_2 - T_0)}{\sqrt{2D'}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u}, \tag{16'}$$

$$e^{\beta T_1} = e^{\beta T_2} + D', \tag{17'}$$

unde

$$D' = \frac{A\,V^2\,\beta\,\eta_0^*}{2\lambda_u},$$

care duc la ecuația distribuției de temperaturi

$$e^{\beta(T_1 - T)} = \operatorname{ch}^2 e^{\frac{\beta T_1}{2}} \frac{Kh\,(T_1 - T_0)}{\sqrt{2D'}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u} \cdot \frac{y}{h} \tag{18'}$$

şi la relaţia pentru distribuţia de viteze

$$u = \frac{e^{\frac{\beta T_1}{2}}}{\sqrt{\frac{A\beta\eta_0^*}{2\lambda_u}}} \cdot \text{the}^{\frac{\beta T_1}{2}} \cdot \frac{Kh\,(T_1 - T_0)}{\sqrt{2D'}} \cdot \frac{\beta}{\lambda_u} \cdot \frac{y}{h}. \tag{19'}$$

Dacă peretele doi este izolant perfect ($K_2 = 0$), relaţia (13) devine $C_3 = h$; în relaţiile (16') — (18'), indicele 1 se înlocuieşte cu indicele 2, iar în relaţiile (18') şi (19') $\frac{y}{h}$ se înlocuieşte cu $\left(\frac{y}{h} - 1\right)$.

B. VISCOZITATEA FLUIDULUI CONSTANTĂ PE GROSIMEA FILMULUI ($\eta = \eta_{med}$)

În acest caz, variaţia vitezei pe grosimea filmului este liniară, iar distribuţia de temperaturi este dată de relaţia (3)

$$T = A\frac{\eta V^2}{2\lambda_u} \cdot \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) + (T_2 - T_1)\frac{y}{h} + T_1. \tag{20}$$

Punînd condiţiile la limită (7), (8), (9), se poate scrie (pentru $T_{01} = T_{02} = T_0$)

$$T = T_0 + A\frac{\eta V^2}{2h}\left[\frac{h}{\lambda_u} \cdot \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{K_1 - K_2}{\frac{\lambda_u}{h}(K_1 + K_2) + K_1K_2}\frac{y}{h} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\frac{\lambda_u}{h} + K_2}{\frac{\lambda_u}{h}(K_1 + K_2) + K_1K_2}\right], \tag{21}$$

T_{max} şi $T_{1,2}$ vor fi stabilite de relaţiile

$$T_{max} = T_0 + A\frac{\eta V^2}{2h}\left\{\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{K_2 - K_1}{(K_1 + K_2) - \frac{h}{\lambda_u}K_1K_2}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\lambda_u} \cdot \frac{2\frac{\lambda_u}{h} + K_2}{(K_1 + K_2) + \frac{h}{\lambda_u}K_1K_2}\right\}, \tag{22}$$

$$T_{1,2} = T_0 + \frac{A\frac{\eta V^2}{2h}\left(2\frac{\lambda_u}{h} + K_{1,2}\right)}{\frac{\lambda_u}{h}(K_1 + K_2) + K_1K_2}. \tag{23}$$

În ipoteza $K_1 = K_2$ (cazul I de mai sus),

$$T = T_0 + A\,\frac{\eta V^2}{2}\left[\frac{1}{\lambda_u}\cdot\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)+\frac{1}{K\cdot h}\right], \tag{24}$$

$$T_{max} = T_1 + \frac{A\eta V^2}{8\,\lambda_u}, \tag{25}$$

iar în ipoteza $K_1 = 0$ (cazul II de mai sus)

$$T = T_0 + A\,\frac{\eta V^2}{2}\left[\frac{1}{\lambda_u}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)+\frac{2}{K_2\cdot h}\right], \tag{26}$$

$$T_1 = T_2 + \frac{A\,\eta\,V^2}{2\,\lambda_u}\cdot \tag{27}$$

Pentru calculul concret al distribuției de temperaturi trebuie precizată valoarea $\eta = \eta_{med}$ care intră în relațiile de mai sus. În acest scop este necesar să stabilim expresia lui T_{med} conform relației de definiție

$$T_{med} = \frac{1}{h}\int_0^h T\ dy. \tag{28}$$

Pentru cazul general,

$$T_{med} = T_0 + \frac{A\,\eta\,V^2}{2}\left[\frac{1}{6\lambda_u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{K_1-K_2}{\lambda_u(K_1+K_2)+K_1K_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\,\lambda_u + K_2\,h}{\lambda_u\,(K_1+K_2)\,h + K_1\,K_2\,h^2}\right], \tag{29}$$

pentru cazul I

$$T_{med} = T_0 + \frac{A\eta V^2}{2}\left[\frac{1}{6\lambda_u}+\frac{1}{Kk}\right] \tag{30}$$

și

$$T_{med} = T_0 + A\eta V^2\left[\frac{1}{3\lambda_u}+\frac{1}{K_2 h}\right] \tag{31}$$

pentru cazul II.

Cunoscînd funcția de variație a viscozității dinamice cu temperatura $\eta = f(T)$ și funcția $T_{med} = f(\eta)$, respectiv relațiile (29) — (31), se va afla grafic sau prin încercări valoarea $\eta = \eta_{med}$ care să satisfacă ambele funcții.

OBSERVAȚII

1. În toate relațiile de față s-a considerat pereții plani paraleli. Cazul filmului mărginit de suprafețe cilindrice concentrice infinite poate fi tratat pe aceeași cale dacă grosimea filmului de lubrifiant este foarte mică în raport cu razele cilindrilor, ceea ce este conform cu realitatea în marea majoritate a problemelor de ungere. Este totuși necesară modificarea condițiilor la limită (7) și (8).

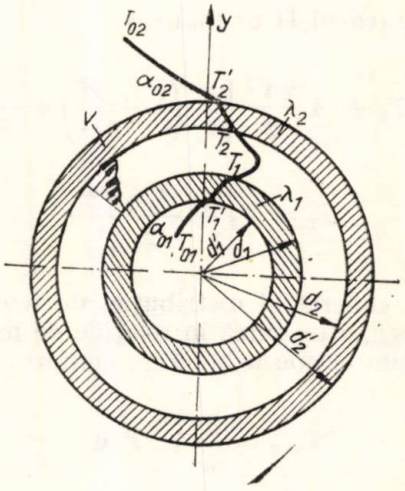


Fig. 2.

Pentru cazul din figura 2 (arbore tubular), acestea devin

$$y = 0: \quad u = 0;\ T = T_1;\ \pi\, d_1\, \lambda_u \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = 2\,\pi \frac{\lambda_1}{\ln \dfrac{d_i'}{d_1}} (T_1 - T_1') =$$

$$= \pi\, d_1'\, \alpha_{0_1} (T_1' - T_{0_1}), \tag{7'}$$

$$y = h: \quad u = V;\ T = T_2;\ \pi\, d_2\, \lambda_u \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=h} = 2\pi \frac{\lambda_2}{\ln \dfrac{d_2'}{d_2}} (T_2 - T_2') =$$

$$= \pi d_2'\, \alpha_{0_2} (T_2' - T_{0_2}), \tag{8'}$$

n consecință

$$K_i = \frac{\lambda_i\, \alpha_{0i} \dfrac{d_i'}{d_i}}{\lambda_i + \alpha_{0i}\, d_i' \ln \dfrac{d_i'}{d_i}} \qquad (i = 1,\ 2).$$

2. Formulele (17), (17'), (25) și (27) arată în mod neașteptat că în cazurile considerate $T_{max} = T_{max}(T_1)$ este independentă de valoarea lui h. Analiza dimensională a ecuației de bilanț energetic (2) confirmă acest lucru [4].

3. Stabilirea distribuției de temperaturi și de viteze, fără a pune însă condiții la limită legate de transferul de căldură, pentru aceeași lege de variație a viscozității cu temperatura a fost făcută de R. Nahme în 1940 [2].

4. În urma tratării acestei probleme pentru gaze [5] se ajunge la concluzia că în acest caz „transferul de căldură are o influență secundară asupra mișcării și că pentru calculul distribuției temperaturilor se poate considera cu suficientă aproximație $\eta = \text{const}$; $\lambda = \text{const}$ chiar pentru diferențe de temperaturi destul de mari".

APLICAȚII NUMERICE

Aplicațiile numerice s-au făcut atît pentru cazul viscozității fluidului variabilă cu temperatura, cît și pentru viscozitate constantă. Fluidul considerat a fost ulei 305 (STAS 1195/50). Valorile numerice ale parametrilor care intervin au fost:

$$\eta_0^* = 1{,}2 \times 10^{-1} \left[\frac{\text{kgfs}}{\text{m}^2}\right],$$

$$\beta = 0{,}0515 \left[\frac{1}{°\text{C}}\right],$$

$$\lambda_u = 3{,}33 \times 10^{-5} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m s°C}}\right],$$

$$K \cdot h = 10^{-6};\ 10^{-5};\ 10^{-4} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m s°C}}\right],$$

$$\left.\begin{matrix} D = 1;\ 5;\ 10;\ 50 \\ D' = 4, 20, 40 : 200 \end{matrix}\right\}, \text{respectiv } V = 4{,}3;\ 9{,}6;\ 13{,}6;\ 30{,}3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right],$$

$$T_{0_1} = T_{0_2} = T_0 = 20\ [°\text{C}].$$

Distribuția temperaturii pentru cazul pereților cu același coeficient global de transfer de căldură în medii exterioare cu temperaturi egale atît pentru viscozitate variabilă, cît și pentru viscozitate constantă este prezentată în figura 3. În figura 5 s-a prezentat același rezultat în coordonate adimensionale.

Repartiția vitezei pentru acest caz este dată de figura 7.

Distribuția temperaturii pentru cazul unui perete perfect izolant este dată în figura 4. Același rezultat în coordonate adimensionale apare

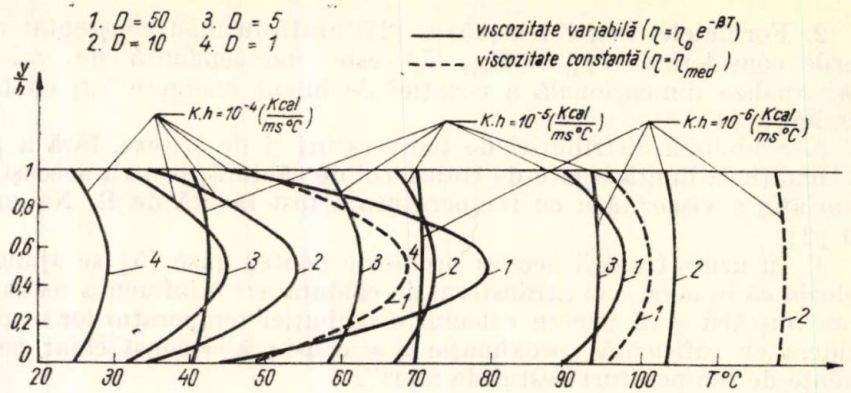


Fig 3

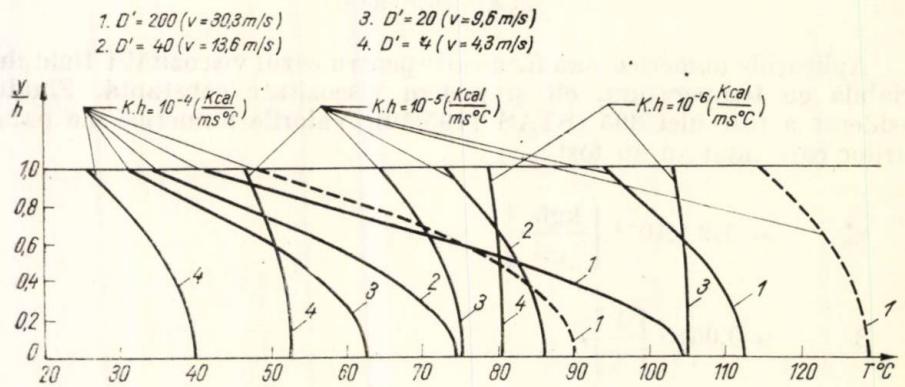


Fig. 4

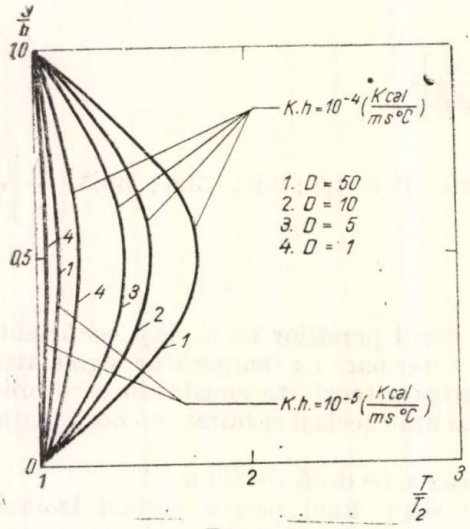


Fig. 5

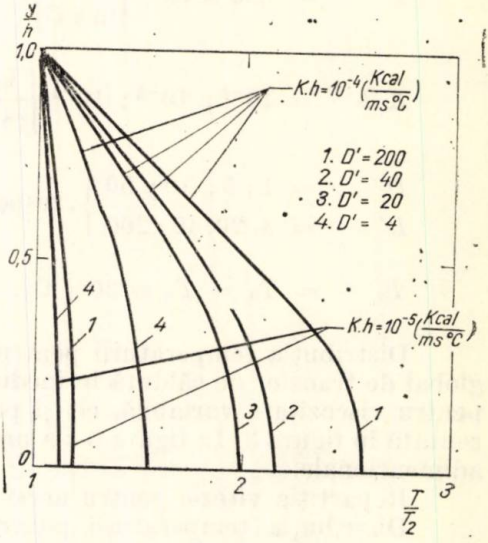


Fig. 6

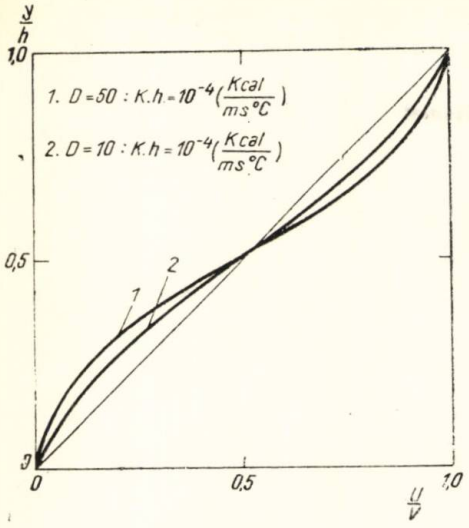


Fig. 7

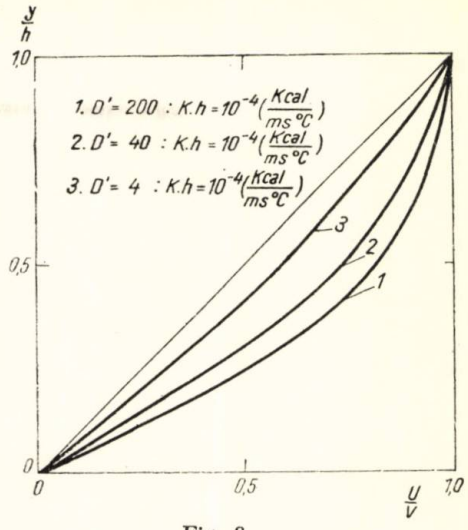


Fig. 8

în figura 6. În fine distribuția vitezei pentru cazul de față este reprezentată de figura 8.

Urmărind aceste rezultate, constatăm

— valori mari ale gradienților de temperaturi pe grosimea filmului în situații care se pot întîlni în practică;

— pentru fluidul ales, luarea în considerație a unei viscozități constante ($\eta = \eta_{med}$) nu duce la o modificare apreciabilă a distribuției de temperaturi nici ca alură, nici ca valori absolute;

— abateri însemnate ale variației vitezelor pe grosimea stratului față de variația liniară, în special pentru cazul unui perete perfect izolant.

Primită la redacție la 23 aprilie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. E. Камке, *Справочник по обыкновенных дифференциальным уровнениям*, Москва, Узд. „Наука", 1965, p. 589.
2. G. Vogelpoht, *Der Übergang der Reibungswärme von Lagern aus der Schmierschicht in die Gleitflächen*, V.D.I. Forschungsheft, *425* (1949).
3. H. Schlichting, *Einige exakten Lösungen für die Temperatur verteilung in einer laminaren Strömung*, Z.A.M.M., *31* (1951).
4. Mayo Dyer Hersey, *Theory and Research in Lubrication*, New York—Londra—Sydney, John Wiley Sons, Inc., 1966.
5. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra influenței transferului de căldură în mișcarea gazelor în straturi subțiri*, Comunicările Academiei *VI*, *8* (1956).

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA DISTRIBUȚIEI DE TEMPERATURI ÎN LAGĂRELE CIRCULARE CU ALUNECARE

de ALEXANDRU NICA și GHEORGHE MARIN
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Se prezintă evoluția cercetării experimentale a regimului termic din lagărele cu alunecare atît în lumina cercetărilor realizate de autori, cît și în aceea a lucrărilor aparținînd altor cercetători. În continuare se expun o serie de rezultate noi privind distribuția de temperaturi în lagăre și variația debitului de lubrifiant în funcție de parametrii caracteristici, scoțîndu-se în relief influența zonei divergente asupra posibilităților de evacuare a căldurii din lagăr; se studiază totodată și dependența regimului termic de timp.

Determinarea distribuției reale de temperaturi în lagărele cu alunecare prezintă o deosebită importanță din punct de vedere atît teoretic, cît și practic. Într-adevăr, tratarea analitică a problemei termice a lagărelor obligă la anumite simplificări privind variația viscozității în pelicula lubrifiantă, și, cum în cele din urmă nu se obțin în general decît valori medii pentru temperaturi, este evident că variația reală a viscozității în lagăr nu poate fi dedusă decît prin măsurarea efectivă a variației de temperaturi.

Cunoașterea valorilor reale ale viscozității este neapărat necesară în cazul lagărelor cu parametri funcționali ridicați, deoarece valorile medii pot fi foarte aproape de limita admisibilă, ceea ce conduce la ruperea peliculei în zonele în care se depășesc aceste limite. Totodată, cunoașterea valorilor maxime și minime ale temperaturilor, respectiv ale viscozității, sînt indispensabile pentru selecționarea materialelor de lagăre, pentru stabilirea modificărilor în macrogeometria lagărului [1], [2] și pentru determinarea grosimii minime a peliculei lubrifiante [3], astfel ca lagărul să nu lucreze în condiții periculoase.

În fine, determinarea variației reale a temperaturilor în lagăr constituie o posibilitate de verificare a soluțiilor teoretice atît pentru calculul termic al lagărelor, cît și al celorlalți parametri funcționali, strîns legați de temperatura stabilită în lagăr.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1053–1062

Măsurători efective de temperatură în lagărele cu alunecare au fost realizate încă din 1903 de către Lasche, care a stabilit relaţii privind transferul de căldură citate şi în prezent [4]. Muskat şi Morgan (1943) au efectuat măsurători pe lagăre lucrînd la viteze periferice reduse [5], iar McKee (1940), Clayton — Wilkie (1948) [4], Hanocq (1947) [6], şi Özdas şi Ford (1955) [7] pentru viteze relative medii (pînă la 8 m/s). Determinări ale valorilor medii pentru temperaturi în cazul lagărelor lucrînd la viteze ridicate (pînă la 50, respectiv 65 m/s) au fost realizate de Cameron (1951) [8] şi de Stephan (1953) [4].

Dintre cei citaţi, doar Clayton — Wilkie şi Stephan au examinat distribuţia de temperaturi în lagăre, ceilalţi cercetători determinînd numai valori medii. Un interesant studiu privind distribuţia de temperaturi în pelicula lubrifiantă, gradientul de temperatură după normala la suprafeţele lubrificate şi stabilirea regimului de temperatură în timp a fost realizat de către Cole (1957) [4], care în plus face şi unele comparaţii cu valori teoretice.

Studii privind distribuţia de temperaturi în lagărele circulare cu alunecare au fost publicate de N. Tipei împreună cu colaboratorii încă în 1959 [9], [10], deducîndu-se o lege pentru variaţia reală a viscozităţii în lagăr şi, ţinînd seama de aceasta, parametrii funcţionali ai lagărelor [11], respectiv calculul lor termic [3]. În cadrul acestor studii s-au considerat unele probleme, ca influenţa geometriei şi a poziţiei orificiului de alimentare cu lubrifiant asupra distribuţiei de temperaturi în lagăr, variaţia temperaturii în sens axial, precizarea noţiunilor de temperatură medie şi la intrarea în lagăr etc. Totodată, s-au confruntat rezultatele măsurătorilor experimentale cu datele teoretice pentru distribuţia de temperaturi obţinute prin considerarea ecuaţiilor energiei şi presiunilor, obţinîndu-se astfel un tablou cuprinzător al problemei termice a lagărelor [12] — [15].

Apropierea dintre valorile teoretice şi cele experimentale a fost bună în cadrul acestor verificări, reieşind astfel că premisele şi simplificările utilizate în tratarea analitică au fost corecte, respectiv acceptabile.

Cazul lagărelor din mase plastice a fost luat în consideraţie de Gh. Manea şi colaboratorii, prezentîndu-se o metodă de stabilire a temperaturii de lucru [16]; se determină totodată variaţia temperaturii la un lagăr experimental.

Cercetările realizate pînă în prezent au lăsat să se întrevadă efectul considerabil pe care îl poate exercita asupra regimului termic din lagăr şi modul de alimentare cu lubrifiant, pe lîngă caracteristicile constructive ale lagărului şi parametrii săi funcţionali. În această direcţie, de o importanţă deosebită s-au dovedit a fi fenomenele din zona divergentă a lagărului, aspect puţin studiat pînă în prezent, deşi pus în evidenţă de mai mult timp [17].

Cunoaşterea mai bună a acestui mecanism şi utilizarea lui în consecinţă pot fi de o mare utilitate în construcţia lagărelor caracterizate prin viteze şi încărcări ridicate, deci lucrînd cu regimuri termice severe şi necesitînd prin aceasta soluţii inedite în vederea unei răciri eficiente.

De asemenea stabilirea gradientului de temperaturi în funcţie de timp (studiat în linii mari de Cole (1957) [4]) este utilă pentru cunoaşterea mecanismului de răcire în cazul perioadelor de tranziţie în funcţio-

narea lagărelor sau în cazul unei funcționări de scurtă durată cu parametri de lucru severi.

Aceste considerente și progresele realizate în tehnica măsurătorilor de temperatură în lagăre [15] au condus la realizarea unei noi serii de cercetări experimentale în vederea aprofundării aspectelor amintite, care deocamdată nu pot fi abordate prin mijloace pur analitice.

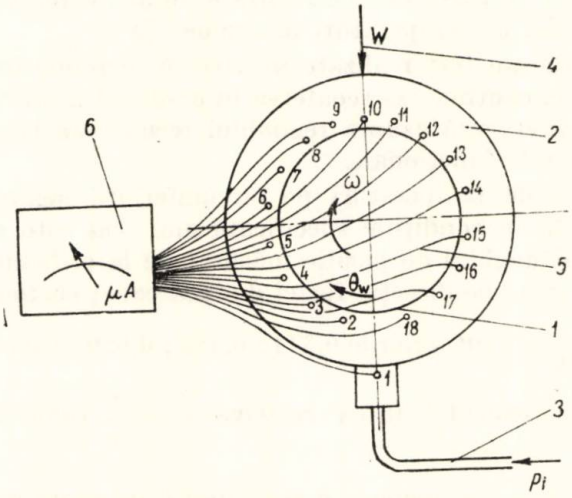


Fig. 1. — Schema instalației experimentale : *1* — fus ; *2* — cuzinet ; *3* — conducta d alimentare ; *4* — direcția sarcinii ; *5* — termocuple ; *6* — galvanometru ultrasensibil.

Instalația experimentală consta (fig. 1) dintr-un lagăr circular cu alunecare prevăzut cu mecanismele necesare pentru variația vitezei și a încărcării, dispozitive auxiliare pentru alimentarea cu lubrifiant în condiții controlate (pentru presiune și temperatură la intrare) și aparatură de măsurat temperaturi pe cale electronică.

Lagărul experimental avea următoarele caracteristici : lățimea $b = 18$ mm, diametrul fusului $2\,r_1 = 36$ mm, jocul relativ $\psi = \frac{c}{r_1} = 2{,}1‰$ (c fiind jocul radial), iar cuzinetul a fost fabricat din aliajul Bz14T ; viteza periferică V a avut valori cuprinse între 1,14 și 5,33 m/s, iar încărcarea W a variat între 0 și 500 kgf.

Alimentarea cu lubrifiant avea loc în partea descărcată printr-un orificiu cu diametrul $b_i = 4$ mm (deci $k_b = \frac{b_i}{b} = 0{,}22$) cu ulei tip 305 Stas, presiunea putînd varia între 0 și 5 kgf/cm², iar temperatura sa la intrare fiind menținută constantă cu ajutorul unui sistem de răcire adaptat la baia de ulei.

Aparatajul de măsură consta dintr-un amplificator cu punte electronică și galvanometru supersensibil „Multiflex", la care se înregistra instantaneu valoarea temperaturilor în 18 puncte de investigație prin

determinarea rezistenței electrice a termocuplelor respective. Cele 18 puncte experimentale erau dispuse pe circumferința lagărului din 20 în 20°, distanța dintre termocuple și suprafața de lucru a cuzinetului fiind cea mai mică cu putință (circa 1 mm); avînd în vedere conductibilitatea termică bună a materialului lagărului, s-a apreciat că temperaturile măsurate pot fi considerate ca aparținînd suprafeței de lucru a lagărului, fapt confirmat și de măsurătorile realizate de alți cercetători în privința gradientului radial de temperaturi în cuzinet [4].

Măsurătorile au fost realizate în diverse regimuri funcționale între limitele amintite, căutîndu-se scoaterea în evidență a influenței pe care o exercită zona divergentă asupra regimului termic din lagăr, deci asupra caracteristicilor sale funcționale.

Distribuția de temperaturi pe circumferința lagărului (în planul median) obținută în condițiile specificate mai sus este reprezentată în figura 2, θ_w fiind unghiul de poziție măsurat de la orificiul de alimentare cu lubrifiant, așezat pe direcția forței de încărcare; coeficientul de încărcare $\zeta = \frac{W\psi^2}{2\mu_1 Vb}$ a avut valorile 0,344; 0,482; 0,620; 0,890; 1,170, corespunzînd pentru excentricitatea relativă $\varepsilon = \frac{e}{c}$ valorile 0,57; 0,62; 0,75; 0,83.

În felul acesta s-a acoperit o zonă destul de vastă de condiții funcționale, punîndu-se în evidență influența zonei divergente asupra temperaturii din lagăr, respectiv eficiența unui aport sporit de lubrifiant determinat de creșterea valorilor ε, adică de mărirea distanței dintre suprafețe în zona divergentă. Acest fenomen se observă între valorile $\varepsilon = 0{,}57$ și $\varepsilon = 0{,}68$ (respectiv $\zeta = 0{,}344$ și $\zeta = 0{,}620$), cînd temperatura scade cu creșterea solicitărilor în lagăr, respectiv cu mărirea distanței dintre suprafețe în zona divergentă; evident, această evoluție nu poate depăși o anumită limită, de la care mărirea frecărilor în lagăr, respectiv a căldurii degajate, nu mai poate fi compensată prin creșterea debitului de lubrifiant, astfel încît temperaturile încep să crească o dată cu ζ.

Influența pe care o poate exercita umplerea cu lubrifiant a spațiului divergent este însă evidentă; se poate afirma deci că în cazul lagărelor de la mașinile moderne lucrînd la viteze foarte ridicate, la care efectele termice sînt deci severe, se poate obține un bun efect de răcire printr-o corectă geometrie și poziționare a orificiului de alimentare cu lubrifiant, astfel ca și spațiul divergent să poată contribui cu maximum de eficiență la evacuarea căldurii.

De altfel, păstrînd condițiile de alimentare cu lubrifiant neschimbate, din figura 3 se poate observa că debitul de lubrifiant prin lagăr crește cu ζ (respectiv cu ε); desigur, cînd $\varepsilon \to 1$, se plafonează această tendință, dar studierea corespunzătoare a geometriei de alimentare poate ridica mult limita superioară, cu efecte directe asupra evacuării căldurii din lagăr.

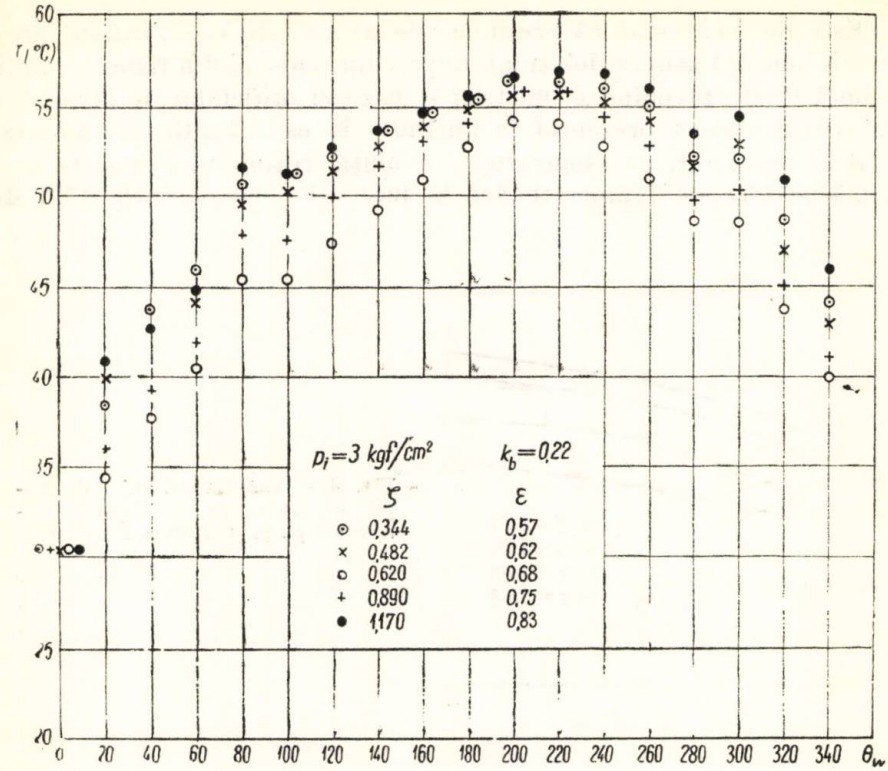
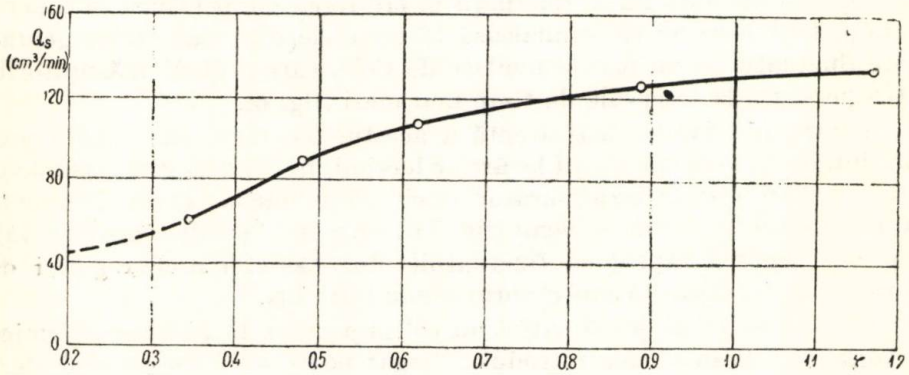


Fig. 2. — Distribuţia circumferenţială de temperaturi în funcţie de coeficientul de încărcare ζ (excentricitatea relativă ε).



F .3. — Variaţia debitului de scăpări laterale Q_s în funcţie de coeficientul de încărcare

Este de menţionat că presiunea de alimentare cu lubrifiant are o influenţă limitată asupra debitului, după cum reiese şi din figura 4, influenţa hotărîtoare revenind geometriei şi poziţiei orificiului de alimentare cu lubrifiant, aspect prezentat în amănunt în cadrul altor lucrări [18].

S-a considerat, de asemenea, şi evoluţia regimului termic în timp prin măsurători ale temperaturilor la intervale foarte scurte (5″) din

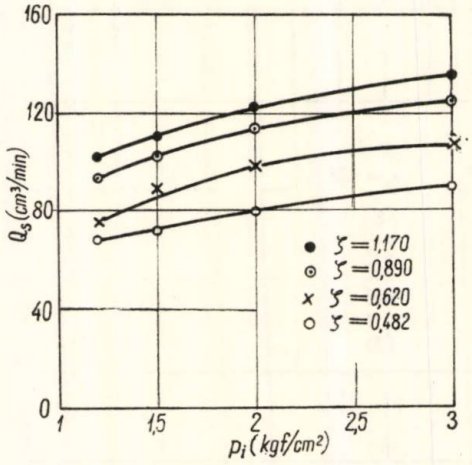


Fig. 4. — Variaţia debitului de scăpări laterale Q_s cu presiunea de alimentare p_i pentru diverse valori ζ.

momentul punerii lagărului în funcţiune. Măsurătorile s-au efectuat simultan pentru fascicule de cîte patru puncte caracteristice (situate la 60, 180, 200 şi 320° faţă de poziţia orificiului de alimentare cu lubrifiant, respectiv direcţia sarcinii). Rezultatele obţinute sînt prezentate în figura 5 şi se poate observa că, mai ales punctele situate în zona divergentă sau în apropiere, prezintă unele fluctuaţii în creşterea temperaturii în funcţie de timp, fapt care nu se semnalează la punctele din zona convergentă; aceste fluctuaţii nu au fost semnalate de Cole, care a făcut măsurătorile de temperatură la intervale de timp mai mari (fig. 6).

Pentru observarea mai atentă a acestui fenomen, care poate prezenta interes în vederea răcirii lagărelor lucrînd, în condiţii grele, perioade scurte de timp, s-au făcut măsurători în cîteva puncte ale zonei divergente atît în regiunea de intrare în lagăr (fig. 7*a*), cît şi în aceea de ieşire (fig. 7*b*). Se poate remarca faptul că fluctuaţiile sînt caracteristice regiunii de intrare în lagăr, datorită lubrifiantului nou introdus.

Zona divergentă joacă astfel un rol important în procesele termice din lagăr; lubrifiantul nou introdus în lagăr poate avea un sensibil efect moderator în creşterea temperaturii din lagăr, în regiunea de intrare temperatura rămînînd la un nivel inferior faţă de aceea din regiunea de ieşire,

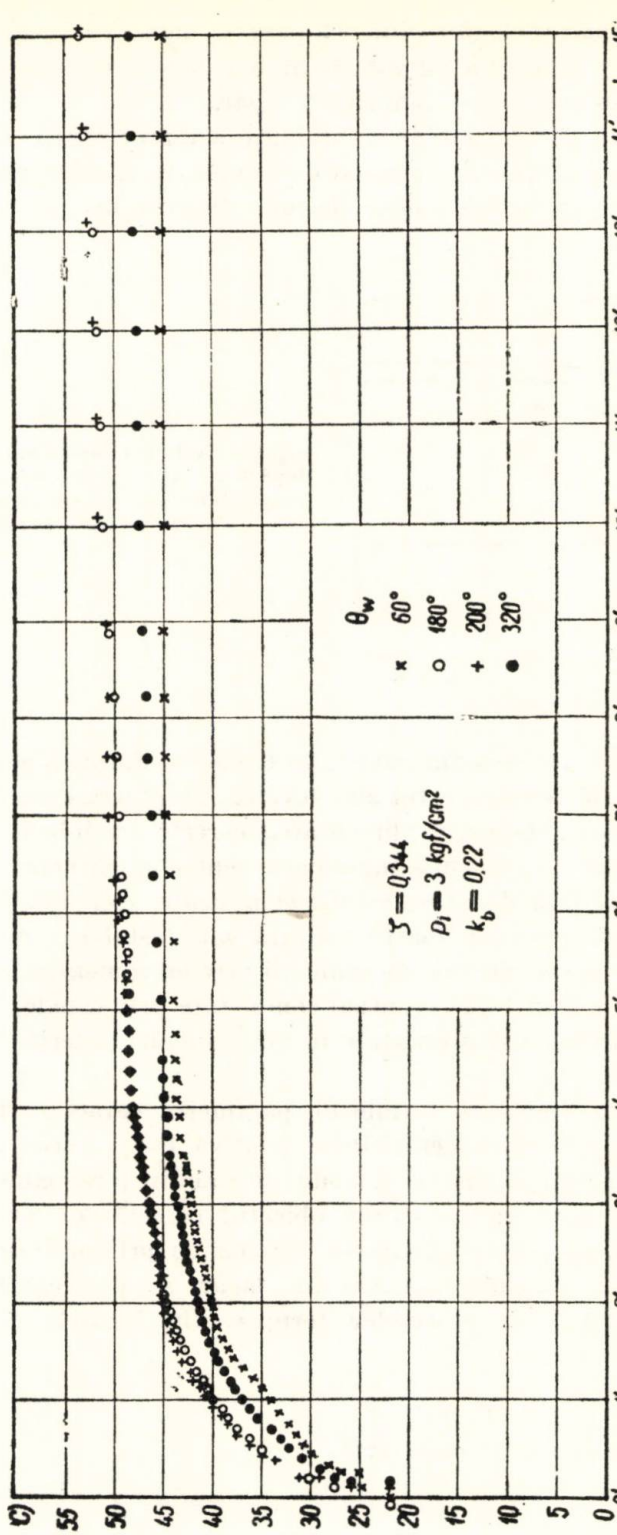


Fig. 5. — Evoluția temperaturii suprafeței active a cuzinetului în raport cu timpul pentru patru puncte caracteristice ($\theta_w = 60$, 180, 200 și 320°).

după cum se poate constata din compararea figurilor 7*a* şi 7*b*. Reiese deci că o umplere corectă cu lubrifiant a zonei divergente poate avea efecte pozitive în evacuarea căldurii din lagăr.

Cunoaşterea mecanismului de stabilire a temperaturii în lagăr şi a factorilor care o pot influenţa permite deci exploatarea unor resurse intrinseci ale lagărului în vederea unei cît mai eficiente evacuări a căldurii,

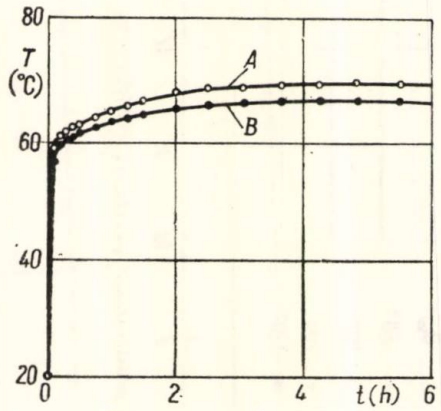


Fig. 6. — Evoluţia temperaturii cu timpul după Cole [4]: *A* — temperatura medie a cuzinetului; *B* — temperatura debitului de scăpări laterale.

element esenţial în construcţia modernă de maşini, datorită condiţiilor de lucru — solicitările termice — tot mai severe. Adoptarea unor soluţii constructive judicioase, respectiv alimentarea corectă cu lubrifiant a lagărelor, poate dovedi o eficienţă superioară pentru menţinerea unui nivel termic acceptabil faţă de unele soluţii complicate, constînd în aducerea lubrifiantului sub presiune foarte ridicată sau instalarea unor circuite suplimentare de răcire. O serie de indicaţii privind dimensionarea corectă a orificiului sau a orificiilor (eventual completate prin canale) de alimentare cu lubrifiant au fost prezentate în unele lucrări anterioare [3], [18] — [20].

Dependenţa regimului termic de parametrii caracteristici al lagărului (încărcare, viteză, excentricitate relativă etc.), variaţia debitului de lubrifiant cu aceşti parametri şi modul de stabilire a regimului termic în timp, probleme care au constituit obiectul cercetărilor prezentate în lucrarea de faţă, au permis enunţarea concluziilor privind influenţa zonei divergente asupra evacuării căldurii din lagăr şi pot contribui la o mai bună cunoaştere a proceselor termice din lagărele circulare cu alunecare.

Primită la redacţie la 17 martie 1969

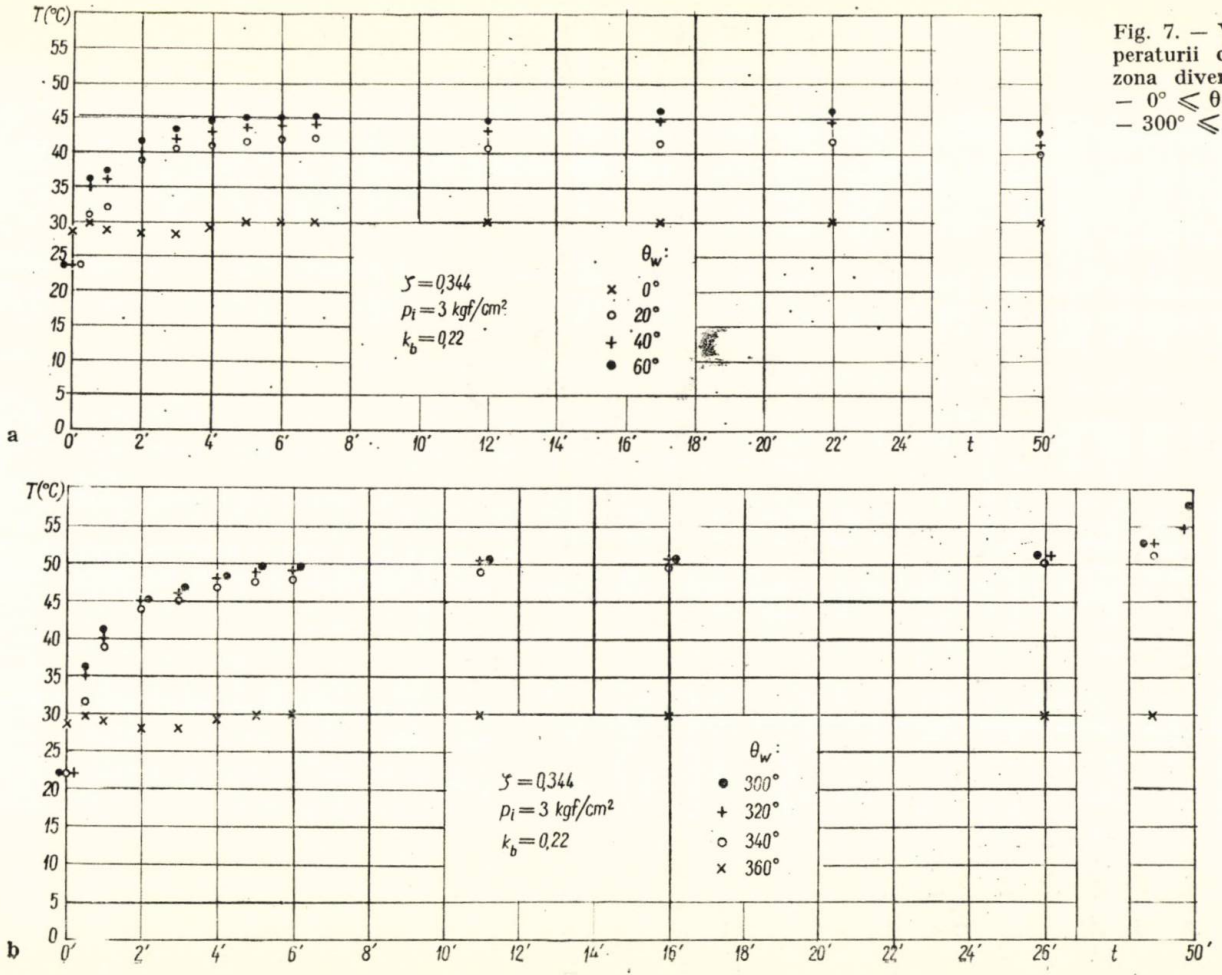


Fig. 7. — Variația temperaturii cu timpul în zona divergentă: *a* — $0° \leqslant \theta_w \leqslant 60°$; *b* — $300° \leqslant \theta_w \leqslant 360°$.

BIBLIOGRAFIE

1. AL. NICA, *Contributions to the Determination of the Real Clearance in Sliding Bearings*, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, **87**, *3* (1965).
2. — *Contribuții la determinarea jocului real în lagărele cu alunecare*, St. cerc. mec. apl., **20**, *5*, (1965).
3. N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, O. BIȚĂ, *Lagăre cu alunecare*, București, Edit. Academiei, 1961.
4. J. A. COLE, *An Experimental Investigation of Temperature Effects in Journal Bearings*, Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear, Londra, 1957.
5. M. MUSKAT, F. MORGAN, *Temperature Behaviour of Journal Bearings Systems*, Journal of Applied Physics, **14** (1943).
6. C. HANOCQ, *Research into the Laws of Heat Dissipation in Journal Bearings*, Engineers' Digest, **8** (1947).
7. N. ÖZDAS, H. FORD, *Oil Transfer and Cooling in Ring-Oiled Bearings*, Engineering, **180** (1955).
8. A. CAMERON, *Heat Transfer in Journal Bearings : A Preliminary Investigation*, Proceedings of the General Discussion on Heat Transfer, Londra, 1951.
9. N. TIPEI, AL. NICA, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor.* I : *Influența variației viscozității*, St. cerc. mec. apl., **X**, *3* (1959).
10. GH. MARIN, *Aparat pentru măsurat temperaturi*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
11. N. TIPEI, AL. NICA, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor*, II, *Caracteristicile globale în cazul viscozității variabile*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
12. N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, *Cercetări asupra transferului de căldură în lubrificația hidrodinamică, cu aplicații la calculul lagărelor de turbină*, Protocol I.M.A., 1962.
13. N. TIPEI, AL. NICA *On the Field of Temperatures in Lubricating Films*, Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, **89**, *4*, (1967).
14. — *Cîmpul de temperaturi în stratul Lubrifiant al lagărelor cu alunecare*, St. cerc. mec. apl., **21**, *2* (1966).
15. AL. NICA, *Contribuții la studiul hidro-termodinamic al lagărelor circulare cu alunecare*, teză de doctorat, București, 1968.
16. GH. MANEA, M. R. MUSTAFA, M. PASCOVICI, *Asupra temperaturii lagărelor radiale cu alunecare și efectul izolant al cuzineților din mase plastice*, Buletinul Inst. Politehnic București, *5* (1965).
17. E. WENGER, *Die Schmierölzufuhr an Gleitlagern mit Losring und Festring und ihr Einfluss auf das Lauferhalten*, Schmiertehnik, **3**, *3* (1956).
18. N. TIPEI, AL. NICA, *Influența condițiilor de alimentare cu lubrifiant asupra funcționării lagărelor cu alunecare*, Metalurgia și construcția de mașini, **XI**, *10* (1959).
19. — *On the Boundary Conditions and Oil Flow in Complete Journal Bearings*, Revue de Méc. Appl., **II** *1* (1957).
20. AL. NICA, *Sisteme de lubrificație*, București, Edit. Academiei, 1967.

ÎMBUNĂTĂȚIREA ECHILIBRAJULUI MOMENTELOR FORȚELOR DE INERȚIE PRIN PLASAREA CILINDRILOR ÎN DOUĂ LINII PREVĂZUTE FIECARE CU UN ARBORE COTIT

de GEORGE BĂRĂNESCU
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

GHEORGHE ZĂTREANU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Sînt cercetate pentru motoarele cu două linii de cilindri posibilitățile de echilibrare a momentului extern rezultant, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de orice armonică a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.
Sînt stabilite în plus momentele rezultante care se echilibrează simultan, condițiile care asigură echilibrajul optim al momentelor rezultante, momentele rezultante echilibrate prin adoptarea repartiției uniforme a aprinderilor pentru întregul motor și modul de limitare a mărimii momentelor rezultante cînd echilibrarea lor nu este posibilă.

1. INTRODUCERE

În fabricația de motoare cu ardere internă se adoptă plasarea cilindrilor în două linii, prevăzute fiecare cu un arbore cotit, cînd se urmărește realizarea unei construcții compacte, cu încărcări mici ale arborilor cotiți, precum și simplificarea fabricației.

În favoarea unor astfel de motoare pledează și argumente de natură dinamică. Față de motorul în linie apare un mijloc suplimentar de îmbunătățire a caracteristicilor dinamice ale motorului, și anume modificarea poziției relative a celor două linii de cilindri.

În lucrare se studiază posibilitățile de echilibrare pentru ansamblul celor două linii de cilindri a momentelor externe produse în fiecare linie de către forțele de inerție. Este analizat numai echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, deoarece momentele externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație urmează regimul de echilibrare al momentului extern al armonicii întîi a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Momentul extern pentru ansamblul celor două linii de cilindri, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de armonica de ordinul p, este numit în continuare momentul rezultant de ordinul p.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1063—1080

Se consideră cazul general al motoarelor la care planele determinate de axele cilindrilor din fiecare linie (numite în continuare planele liniilor de cilindri) fac între ele un unghi oarecare γ. Cei doi arbori cotiți sînt presupuși identici, cu axele de rotație paralele, distanțele dintre manivelele consecutive ale aceluiași arbore cotit fiind egale. Se mai consideră că arborii cotiți se rotesc în același sens, aprinderile în fiecare linie fiind uniform repartizate.

Pentru fiecare linie se numerotează cilindrii consecutivi cu 1, 2, 3,..., $\frac{i}{2}$, începînd de la una dintre extremitățile motorului; aceleași numere sînt atribuite și manivelelor care deservesc cilindrii respectivi. Față de un observator care privește motorul de la extremitatea de unde începe numerotarea cilindrilor, indicii s și d precizează linia din stînga și, respectiv, din dreapta.

Se alege ca sens pozitiv pentru măsurarea unghiurilor sensul de rotație al arborilor cotiți.

2. DETERMINAREA MOMENTULUI REZULTANT DE UN ORDIN OARECARE

Fie $\mathfrak{F}_p$ armonica de ordinul p a forței de inerție a maselor cu mișcare de translație corespunzătoare unui cilindru și F_p vectorul care interpretează această armonică [1]. Momentul vectorilor F_p dintr-o linie este reprezentat printr-un vector M_p de mărime constantă, care se rotește în sensul de rotație al arborilor cotiți cu viteza unghiulară $p\omega$. Avînd în vedere legătura dintre vectorii $\mathfrak{F}_p$ și F_p, momentul $\mathfrak{M}_p$ al forțelor $\mathfrak{F}_p$ dintr-o linie este egal cu proiecția vectorului M_p pe un plan normal la planul Q care conține axa de rotație a arborelui cotit și este paralel cu planul liniei de cilindri considerate [1]; sensul pozitiv al momentului $\mathfrak{M}_p$ este sensul în care înaintează un burghiu manevrat de o persoană care are în dreapta cilindrul numărul 1.

Momentele M_{p_s} și M_{p_d} depind de particularitățile mecanismelor bielă-manivelă și de dispunerea manivelelor în jurul și în lungul axelor de rotație ale arborilor cotiți respectivi; întrucît aceste mecanisme sînt identice, iar arborii cotiți de asemenea identici, rezultă $M_{p_s} = M_{p_d} = M_p$. Pentru o linie de cilindri, mărimea momentului $\mathfrak{M}_p$ depinde de poziția vectorului rotitor M_p; prin urmare, cînd există un decalaj funcțional între liniile de cilindri, momentele $\mathfrak{M}_{p_s}$ și $\mathfrak{M}_{p_d}$ au mărimi deosebite în același moment de timp.

Se presupune că aprinderile alternează de la o linie la cealaltă. Se numerotează aprinderile consecutive din fiecare linie cu I, II, III,... K... $\frac{i}{2}$, numerele I fiind atribuite aprinderilor din cilindrii 1. Se consideră cuplajul $I_s \rightarrow K_d$ al aprinderilor; pentru realizarea acestui cuplaj, între arborii cotiți trebuie să existe decalajul $\psi - \zeta$, unde

$$\psi = (K_d - 1)\frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} \tag{1}$$

[1]) Dacă motorul este echipat cu mecanisme bielă-manivelă normale și axate, planul Q se confundă cu planul liniei de cilindri respective.

este unghiul cu care arborele cotit din dreapta trebuie rotit în sensul, comun de rotație pentru declanșarea simultană a aprinderilor I_s și K_d, τ numărul de timpi, iar ζ decalajul dintre aprinderile I_s și K_d [2].,

Întrucît vectorii M_p din cele două linii se rotesc cu o viteză unghiulară de p ori mai mare decît viteza unghiulară a arborilor cotiți, decalajului $\psi - \zeta$ dintre arborii cotiți îi corespunde decalajul $p\ (\psi - \zeta)$ dintre vectorii M_p.

Se alege ca origine momentul de timp în care manivela 1_s se află în poziția corespunzătoare punctului mort interior. Se notează cu $\theta^{(0)}_{p_{I_s}}$ unghiul pe care vectorul M_p al liniei din stînga îl face în acest moment de timp cu direcția $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_s}$. Fie $\theta^{(0)}_{p_{k_d}}$ unghiul care precizează poziția vectorului M_p al liniei din dreapta în același moment de timp față de direcția $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$; acest unghi are mărimea

$$\theta^{(0)}_{p_{k_d}} = p\,(\psi - \zeta) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}.$$

După ce arborii cotiți au parcurs unghiul $\alpha = \omega\, t$, unghiurile care precizează poziția vectorilor M_p din cele două linii față de direcțiile $+ + \overline{\mathfrak{M}}_{p_s}$ și $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$ sînt (fig. 1)

$$\theta_{p_{I_s}} = p\,\alpha + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}$$

și, respectiv,

$$\theta_{p_{k_d}} = p\,\alpha + \theta^{(0)}_{p_{k_d}} = p\,(\alpha + \psi - \zeta) + \theta^{(0)}_{\alpha_{I_s}}.$$

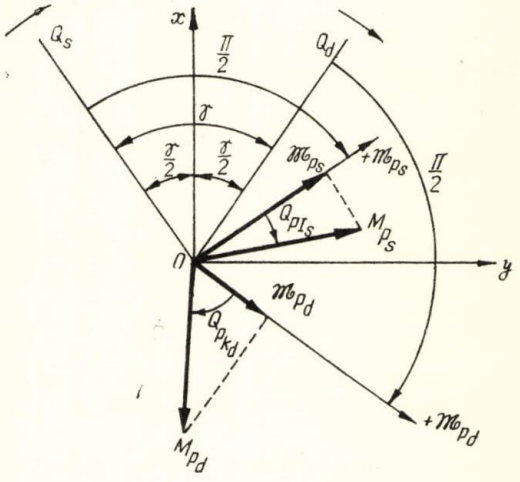


Fig. 1. — Schema compunerii vectorilor care reprezintă momentele produse de o armonică a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Momentele produse în cele două linii de cilindri de către forțele $\mathfrak{F}_p$ sînt

$$\mathfrak{M}_{p_s} = M_p \cos\,[p\,\alpha + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}]$$

şi

$$\mathfrak{M}_{p_d} = M_p \cos [p(\alpha + \psi - \zeta) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}].$$

Alegînd ca axe de coordonate bisectoarele unghiului dintre planele Q_s şi Q_d şi proiectînd pe aceste axe vectorii $\mathfrak{M}_{p_s}$ şi $\mathfrak{M}_{p_d}$, se obţine

$$X_{\mathfrak{M}_p} = M_p \{\cos [p\alpha + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}] - \cos [p(\alpha + \psi - \zeta) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}]\} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = M_p \{\cos [p\alpha + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}] + \cos [p(\alpha + \psi - \zeta) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}]\} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

După transformări, relaţiile precedente devin

$$X_{\mathfrak{M}_p} = 2 M_p \sin p \frac{\psi - \zeta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \left[p\left(\alpha + \frac{\psi - \zeta}{2}\right) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}\right],$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = 2 M_p \cos p \frac{\psi - \zeta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \left[p\left(\alpha + \frac{\psi - \zeta}{2}\right) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}\right].$$

Cu notaţiile

$$A_{\mathfrak{M}_p} = 2 M_p \sin p \frac{\psi - \zeta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}_p} = 2 M_p \cos p \frac{\psi - \zeta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

se obţin formulele

$$X_{\mathfrak{M}_p} = A_{\mathfrak{M}_p} \sin \left[p\left(\alpha + \frac{\psi - \zeta}{2}\right) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}\right],$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = B_{\mathfrak{M}_p} \cos \left[p\left(\alpha + \frac{\psi - \zeta}{2}\right) + \theta^{(0)}_{p_{I_s}}\right],$$

din care rezultă

$$\frac{X^2_{\mathfrak{M}_p}}{A^2_{\mathfrak{M}_p}} + \frac{Y^2_{\mathfrak{M}_p}}{B^2_{\mathfrak{M}_p}} = 1. \tag{3}$$

Expresia (3) arată că, la motoarele cu două linii de cilindri ai căror arbori cotiţi se rotesc în acelaşi sens, momentul rezultant de ordinul p este reprezentat printr-un vector rotitor aplicat într-un punct situat pe linia de intersecţie a planelor Q_s şi Q_d; mărimea acestui vector variază după o elipsă care are ca axe bisectoarele unghiului dintre planele Q_s şi Q_d.

3. ECHILIBRAREA MOMENTELOR REZULTANTE

3.1. CONDIȚII GENERALE DE ECHILIBRARE

Momentul rezultant de un ordin oarecare se poate echilibra prin alegerea corespunzătoare a unghiurilor γ, ψ și ζ.

Astfel, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p se obține dacă $A_{\mathfrak{M}_p} = 0$ și $B_{\mathfrak{M}_p} = 0$; ținînd seama de expresiile (2), aceste egalități sînt satisfăcute dacă se îndeplinesc simultan condițiile

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 0, \qquad \cos p \frac{\psi - \zeta}{2} = 0 \tag{4}$$

sau

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 0, \qquad \sin p \frac{\psi - \zeta}{2} = 0, \tag{5}$$

care arată că echilibrarea este posibilă numai la motoarele cu două linii paralele de cilindri sau la motoarele cu două linii opuse de cilindri.

Din formulele (2) se constată că adoptarea acestor poziții relative ale liniilor de cilindri conduce la valori maxime pentru toate momentele rezultante neechilibrate.

3.2. CAZUL MOTOARELOR CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI

3.2.1. **Condițiile de echilibrare a momentului rezultant de ordin oarecare.** Conform relațiilor (4), pentru echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 trebuie îndeplinite condițiile

$$\gamma = 0, \tag{6}$$

$$\psi - \zeta = \pm (2\lambda_0 - 1) \frac{\pi}{p_0}, \tag{7}$$

unde factorul λ_0 poate lua numai anumite valori întregi, precizate în continuare.

Deoarece s-a presupus că în fiecare linie de cilindri aprinderile sînt uniform repartizate, unghiul ζ trebuie să fie cuprins în intervalul

$$\zeta = \psi - (2\lambda_0 - 1) \frac{\pi}{p_0}. \tag{8}$$

Valorile posibile ale factorului λ_0 depind de succesiunea aprinderilor dintre liniile de cilindri. Se pot prezenta două alternative:

a) Pentru $K_a > 1$, din formula (1) se deduce $\psi > \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$ și deci, ținînd seama de (8), rezultă $\psi - \zeta > 0$; în această alternativă, relația (7) devine

$$\zeta = \psi - (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{p_0}. \tag{9}$$

Înlocuind în (9) valoarea unghiului ψ dată de formula (1) și avînd în vedere condiția (8), se obține

$$(K_a - 2)\frac{\tau p_0}{i} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_a - 1)\frac{\tau p_0}{i} + \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Există cel puțin un număr K_a care conduce la o valoare a factorului λ_0 care satisface condiția (10), fiindcă problema admite totdeauna o soluție. Într-adevăr, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată dacă vectorii M_{p_0} din cele două linii sînt permanent în opoziție. Deoarece liniile de cilindri sînt paralele și vectorii M_{p_0} se rotesc cu o viteză unghiulară de p_0 ori mai mare decît viteza unghiulară a arborilor cotiți, opoziția de fază a vectorilor M_{p_0} reclamă decalarea arborilor cotiți cu unghiul $\frac{\pi}{p_0}$ sau un multiplu impar al acestui unghi.

Limitele domeniului (10) diferă între ele prin $\frac{\tau p_0}{i}$. În consecință, există o soluție pentru orice valoare supraunitară a lui K_a dacă $\frac{\tau p_0}{i} \geqslant 1$, deci cînd $p_0 \geqslant \frac{i}{\tau}$.

b) Pentru $K_a = 1$, $\psi = 0$, relația (7) ia forma

$$\zeta = (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{p_0}; \tag{11}$$

în această alternativă, din (8) și (11) se deduce

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\tau p_0}{i} + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Din cele de mai sus rezultă următoarea concluzie: la motoarele cu două linii paralele de cilindri ($\gamma = 0$), valorile unghiului ζ care asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se obțin din (9) sau (11), unde factorul λ_0 ia valori întregi cuprinse în domeniul (10), respectiv (12).

Adoptarea decalajului ζ care asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 are ca urmare creşterea anumitor momente rezultante. Astfel, înlocuind în (2) condiţiile (6) şi (7), se obţine

$$B_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \cos\left[\pm\frac{(2\lambda_0 - 1)\,p}{2p_0}\pi\right]. \tag{13}$$

Unele dintre momentele rezultante care se majorează în condiţiile specificate ajung la valoarea maximă; într-adevăr, dacă $\frac{(2\lambda_0 - 1)\,p}{2p_0} = \mu$ ($\mu = 1,2,3, \ldots$), adică

$$p = 2\mu\frac{p_0}{2\lambda_0 - 1}, \tag{14}$$

formula (14) conduce la egalitatea

$$|B_{\mathfrak{M}_p}| = 2M_p,$$

care arată că momentele rezultante ale căror ordine îndeplinesc condiţia (14) au valoare maximă.

★

Dacă se presupune că s-a realizat echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 prin îndeplinirea condiţiei (9) sau (11), se pot pune următoarele probleme:

— precizarea momentelor rezultante care se echilibrează o dată cu momentul rezultant de ordinul p_0;

— stabilirea condiţiilor care conduc la cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante;

— determinarea momentelor rezultante care pot fi echilibrate cînd se adoptă repartiţia uniformă a aprinderilor pentru întregul motor.

Aceste probleme sînt analizate în continuare.

3.2.2. **Precizarea momentelor rezultante care se echilibrează simultan.** Se presupune că s-a realizat echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 prin alegerea decalajului ζ dintre aprinderile consecutive I_s şi K_d, corespunzător relaţiei (9) sau (11). Pentru toate ordinele p care satisfac egalitatea

$$\frac{2\nu - 1}{p} = \frac{2\lambda_0 - 1}{p_0},$$

unde ν este un număr întreg, formulele (9) sau (11) conduc tot la valoarea adoptată a unghiului ζ, ceea ce înseamnă că o dată cu momentul rezultant de ordinul p_0 se echilibrează şi momentele rezultante, ale căror ordine sînt

$$p = \frac{2\nu - 1}{2\lambda_0 - 1}p_0. \tag{15}$$

În legătură cu condiția (15) sînt posibile două situații :

a) numerele p_0 și $2\lambda_0 - 1$ nu au divizori comuni ; în această situație, îndeplinirea condiției (15) presupune satisfacerea egalității

$$2\nu - 1 = \xi(2\lambda_0 - 1),$$

în care factorul ξ este, evident, un număr impar. Drept urmare, o dată cu echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se echilibrează și momentele rezultante care au ordinele

$$p = \xi\, p_0 ; \tag{16}$$

b) numerele p_0 și $2\lambda_0 - 1$ admit divizori comuni. Notînd cu d cel mai mare divizor comun, relația (15) poate fi scrisă sub forma

$$p = (2\nu - 1)\frac{\frac{p_0}{d}}{\frac{2\lambda_0 - 1}{d}},$$

care arată că ν ia numai valorile ce rezultă din egalitatea

$$2\nu - 1 = \rho\frac{2\lambda_0 - 1}{d},$$

ρ fiind ca și d un număr impar. În această situație, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 antrenează echilibrarea momentelor rezultante care au ordinele

$$p = \rho\frac{p_0}{d}. \tag{17}$$

3.2.3. **Stabilirea condițiilor care conduc la cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante.** Deoarece o dată cu echilibrarea momentului rezultant al unei armonici se echilibrează și momentele rezultante ale șirului de armonici precizate de formula (16), respectiv (17), cel mai bun echilibraj al momentelor forțelor de inerție se obține dacă se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul cel mai mic, care, de regulă, are amplitudinea cea mai mare.

a) De pildă, la o succesiune a aprinderilor corespunzătoare condiției $K_a > 1$, se deduce din (9) pentru $p_0 = 1$

$$\zeta = \psi - (2\lambda_0 - 1)\pi, \tag{18}$$

unde valorile factorului λ_0 sînt precizate de relația

$$(K_a - 2)\frac{\tau}{i} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_a - 1)\frac{\tau}{i} + \frac{1}{2}, \tag{19}$$

obținută prin introducerea condiției $p_0 = 1$ în relația (10). Astfel, pentru a echilibra momentul rezultant de ordinul întîi și implicit momentele rezultante precizate de formula (16), în care $p_0 = 1$, adică toate momentele rezultante impare, este necesar să se adopte unul dintre decalajele ζ deduse din formula (18), unde λ_0 are valorile care îndeplinesc condiția (19).

În privința valorilor posibile ale factorului λ_0 se observă că limitele precizate de relația (19) cuprind cel puțin un număr întreg, oricare ar fi valoarea numărului K_d, cînd $\frac{\tau}{i} \geqslant 1$, deci cînd $i \leqslant \tau$. La motoarele considerate, fiecare linie are cel puțin doi cilindri, deci $i \geqslant 4$. În consecință, sînt posibile toate valorile lui K_d numai la motorul în patru timpi cu patru cilindri; în acest caz însă, problema echilibrării momentelor rezultante nu se pune dacă arborii cotiți sînt construiți cu plan central de simetrie, deoarece astfel se asigură echilibrarea tuturor momentelor externe din fiecare linie de cilindri.

b) În alternativa $K_d = 1$, decalajul ζ este determinat de relația (11), care ia forma

$$\zeta = (2\lambda_0 - 1)\pi, \tag{20}$$

unde λ_0 se deduce din (12) cu ajutorul condiției $p_0 = 1$:

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\tau}{i} + \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Adoptarea succesiunii $K_d = 1$ este posibilă numai la anumite motoare. Într-adevăr, condiția (8) arată că valoarea maximă a unghiului ζ este 2π la motoarele în patru timpi și π la motoarele în doi timpi. Deoarece, conform expresiei (20), unghiul ζ nu poate fi decît un multiplu impar de π, valoarea maximă a acestui unghi este $\zeta = \pi$, deci este posibilă numai valoarea $\lambda_0 = 1$. Înlocuind $\lambda_0 = 1$ în (21), rezultă că succesiunea considerată nu poate fi folosită decît cînd $i \leqslant 2\tau$, adică la motoarele în patru timpi cu patru, șase și opt cilindri și la motorul în doi timpi cu patru cilindri. Cum s-a arătat anterior, problema nu se pune la motorul în patru timpi cu patru cilindri dacă arborii cotiți au plan central de simetrie; din același motiv este neinteresant și cazul motorului în patru timpi cu opt cilindri.

3.2.4. **Determinarea momentelor rezultante care pot fi echilibrate cînd se adoptă repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor.** Dacă se realizează repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor, unghiul ζ ia valoarea

$$\zeta = \frac{\tau\pi}{i}. \tag{22}$$

Înlocuind în (9) și (11) valoarea (22), se deduc ordinele momentelor rezultante a căror echilibrare este asigurată de această repartiție în cele două alternative de succesiune a aprinderilor între liniile de cilindri ($K_d > 1$ și, respectiv, $K_d = 1$).

În prima alternativă, rezultă, ţinînd seama de formula (1),

$$p_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{\frac{i}{\tau}}{2K_d - 3}, \tag{23}$$

iar în a doua alternativă se obţine

$$p_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{i}{\tau}. \tag{24}$$

Ordinele rezultate din (24), fiind multipli de $\frac{i}{\tau}$, nu intră în discuţie, deoarece armonicile respective nu produc momente [2]; drept urmare, posibilităţile de echilibrare oferite de repartiţia uniformă a aprinderilor pentru întregul motor corespund succesiunilor aprinderilor care respectă condiţia $K_d > 1$.

Deoarece unghiul ζ este o mărime esenţialmente pozitivă, se poate scrie din formula (9)

$$\psi > (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{p_0};$$

ţinînd seama de (1) şi de faptul că valoarea maximă a lui K_d este $\frac{i}{2}$, se deduc valorile pe care le poate lua factorul λ_0 din (23):

$$\lambda_0 < \left(\frac{i}{2} - 1\right)\frac{\tau p_0}{i} + \frac{1}{2}.$$

Din analiza formulei (23) se constată următoarele. La motoarele în patru timpi, dacă $\frac{i}{\tau}$, deci $\frac{i}{4}$, nu este un număr întreg, formula (23) nu se aplică, fiindcă nu conduce la valori întregi pentru ordinul p_0. Dacă $\frac{i}{\tau} = \frac{i}{4}$ este un număr întreg, $\frac{i}{2}$ este par şi, în consecinţă, momentele externe ale tuturor armonicilor pot fi echilibrate folosind arbori cotiţi cu plan central de simetrie. Considerînd adoptată această măsură la motoarele respective, rezultă că repartiţia uniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii nu influenţează echilibrajul momentelor forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie la nici un motor în patru timpi.

La motoarele în doi timpi, formula (23) devine

$$p_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{\frac{i}{2}}{2K_d - 3}, \tag{25}$$

fiind posibile două situații :

a) dacă numerele $\frac{i}{2}$ și $2K_a - 3$ nu au divizori comuni, formula (25) este satisfăcută cînd $2\lambda_0 - 1$ este un multiplu de $2K_a - 3$. În această situație, din (25) se obțin ordine multipli impari de $\frac{i}{2}$, adică ordine ale armonicilor care nu produc momente, ceea ce înseamnă că echilibrajul studiat nu este influențat de repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor ;

b) dacă numerele $\frac{i}{2}$ și $2K_a - 3$ au divizori comuni, care nu pot fi decît numere impare, se obține din (25)

$$p_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{\frac{\frac{i}{2}}{\delta}}{\frac{2K_a - 3}{\delta}}, \tag{26}$$

δ fiind cel mai mare divizor comun. Ținînd seama de condiția necesară în această situație :

$$2\lambda_0 - 1 = \sigma\frac{2K_a - 3}{\delta}, \tag{27}$$

în care σ este evident un număr impar, din (26) se deduce

$$p_0 = \sigma\frac{\frac{i}{2}}{\delta}. \tag{28}$$

Pentru

$$\sigma = \chi\delta, \tag{29}$$

unde χ este un număr impar, formula (28) conduce la ordine aparținînd unor armonici care nu produc momente ; ordinele momentelor rezultante care se echilibrează în cazul repartiției uniforme a aprinderilor pentru întregul motor sînt deci precizate de formula (28), în care σ ia toate valorile din (27), cu excepția valorilor ce rezultă din (29).

3.3. CAZUL MOTOARELOR CU DOUĂ LINII OPUSE DE CILINDRI

3.3.1. **Condițiile de echilibrare a momentului rezultant de un ordin oarecare.** Considerînd relațiile (5), se constată că echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată prin satisfacerea condițiilor

$$\gamma = \pi, \tag{30}$$

$$\psi - \zeta = \pm 2\lambda_0\frac{\pi}{p_0}, \tag{31}$$

unde factorul λ_0 poate lua numai anumite valori întregi; aceste valori se stabilesc în continuare în funcție de succesiunea aprinderilor dintre liniile de cilindri, fiind distincte două alternative:

a) Conform celor arătate la punctul 3.2.1, pentru $K_d > 1$ rezultă din (1) și (8) $\psi - \zeta > 0$, deci în această alternativă relația (31) ia forma

$$\zeta = \psi - 2\lambda_0 \frac{\pi}{p_0}. \tag{32}$$

Introducînd în (32) expresia (1) a unghiului ψ și ținînd seama de condiția (8), se deduce

$$(K_d - 2)\frac{\tau p_0}{i} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_d - 1)\frac{\tau p_0}{i}. \tag{33}$$

Și la această dispunere a liniilor de cilindri ($\gamma = \pi$) se poate adopta cel puțin un număr K_d care să permită echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, întrucît opoziția necesară de fază a vectorilor M_{p_0} din cele două linii este totdeauna realizabilă. Avînd în vedere poziția relativă a liniilor de cilindri, rezultă că rezolvarea problemei comportă decalarea arborilor cotiți cu unghiul $\frac{2\pi}{p_0}$ sau cu un multiplu al acestui unghi.

Deoarece diferența dintre valorile extreme ale domeniului (33) este $\frac{\tau p_0}{i}$, există o soluție pentru orice valoare supraunitară a lui K_d cînd $\frac{\tau p_0}{i} \geqslant 1$, deci cînd $p_0 \geqslant \frac{i}{\tau}$.

b) Pentru $K_d = 1$ ($\psi = 0$), relația (31) devine

$$\zeta = 2\lambda_0 \frac{\pi}{p_0}; \tag{34}$$

ținînd seama de (8), se obține în această alternativă

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\tau p_0}{i}. \tag{35}$$

În concluzie, la motoarele cu două linii opuse de cilindri ($\gamma = \pi$), echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se realizează pentru toate valorile unghiului ζ precizate de formulele (32) sau (34), unde λ_0 este orice număr întreg care aparține domeniului (33), respectiv (35).

Prin alegerea unui decalaj ζ care conduce la echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, se obține majorarea momentelor rezultante de anumite ordine. Într-adevăr, pentru valorile γ și $\psi - \zeta$ exprimate de relațiile (30) și respectiv (31), se deduce din (2)

$$A_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \sin\left[\pm \frac{2\lambda_0 p}{p_0}\frac{\pi}{2}\right]. \tag{36}$$

Pentru $\frac{2\lambda_0 p}{p_0} = 2\mu - 1$ $(\mu = 1,2,3,\ldots)$, deci pentru

$$p = (2\mu - 1)\frac{p_0}{2\lambda_0 - 1}, \tag{37}$$

relaţia (36) devine

$$|A_{\mathfrak{M}_p}| = 2M_p.$$

Astfel, la echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, momentele rezultante care au ordinele (37) înregistrează valoarea maximă.

3.3.2. **Precizarea momentelor rezultante care se echilibrează simultan.** Se presupune că se adoptă unul dintre decalajele ζ precizate de formulele (32) sau (34), deci că se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Considerînd ordinele p care respectă condiţia

$$\frac{\nu}{p} = \frac{\lambda_0}{p_0},$$

unde ν este un număr întreg, se constată că acestor ordine le corespund din (32) sau (34) aceeaşi valoare a unghiului ζ. Ca urmare se conchide că simultan cu echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se echilibrează şi momentele rezultante care au ordinele

$$p = \frac{\nu}{\lambda_0} p_0. \tag{38}$$

Condiţia (38) este satisfăcută în două situaţii :
a) dacă p_0 şi λ_0 nu au divizori comuni, trebuie îndeplinită egalitatea

$$\nu = \xi\,\lambda_0 \quad (\xi = 1,2,3,\ldots).$$

În această situaţie, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 antrenează şi echilibrarea momentelor rezultante ale căror ordine sînt

$$p = \xi\,p_0; \tag{39}$$

b) dacă p_0 şi λ_0 au divizori comuni, relaţia (38) poate fi pusă sub forma

$$p = \nu \frac{\frac{p_0}{d}}{\frac{\lambda_0}{d}},$$

unde d este cel mai mare divizor comun. În această situaţie, ν poate lua numai valorile

$$\nu = \rho \frac{\lambda_0}{d} \quad (\rho = 1,2,3,..),$$

ceea ce înseamnă că o dată cu momentul rezultant de ordinul p_0 se echilibrează şi momentele rezultante care au ordinele

$$p = \rho \frac{p_0}{d}. \tag{40}$$

3.3.3. **Stabilirea condiţiilor care conduc la cel mai bun echibraj al momentelor rezultante.** Ţinînd seama de posibilităţile de echilibrare exprimate de relaţia (39), respectiv (40), condiţiile de realizare a celui mai bun echilibraj al momentelor forţelor de inerţie corespund echilibrării momentului rezultant de ordinul cel mai mic. De exemplu, dacă se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul întîi, se obţine echilibrarea completă a momentelor rezultante, concluzie dedusă din (39) prin înlocuirea valorii $p_0 = 1$.

a) La o succesiune a aprinderilor caracterizată prin $K_a > 1$, echilibrarea completă a momentelor rezultante este realizată dacă ζ ia una dintre valorile

$$\zeta = \psi - 2\lambda_0 \pi,$$

care rezultă din (32) pentru $p_0 = 1$, factorul λ_0 fiind cuprins în domeniul

$$(K_a - 2)\frac{\tau}{i} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_a - 1)\frac{\tau}{i}, \tag{41}$$

obţinut din (33) în baza aceleiaşi condiţii ($p_0 = 1$).

Referitor la valorile posibile ale factorului λ_0 se observă că limitele precizate de relaţia (41) cuprind cel puţin un număr întreg, oricare ar fi valoarea supraunitară a numărului K_a, cînd $\frac{\tau}{i} \geqslant 1$, deci cînd $i \leqslant \tau$; rezultă că numai la motorul în patru timpi cu patru cilindri sînt posibile toate valorile lui K_a.

b) Dacă se adoptă alternativa $K_a = 1$, valorile ζ şi λ_0 se deduc din (34) şi (35) pentru $p_0 = 1$:

$$\zeta = 2\lambda_0 \pi, \tag{42}$$

$$\lambda_0 \leqslant \frac{\tau}{i}. \tag{43}$$

Conform relaţiei (8), cea mai mare valoare a unghiului ζ este $\zeta = 2\pi$ şi se obţine la motoarele în patru timpi. Avînd în vedere această împre-

jurare, rezultă din (42) $\lambda_0 = 1$, iar din (43) $i \leqslant \tau$, ceea ce înseamnă că succesiunea considerată a aprinderilor este aplicabilă în exclusivitate tot la motorul în patru timpi cu patru cilindri.

Se constată că echilibrajul complet al momentelor rezultante poate fi realizat pentru orice K_a la un singur motor, la care, de altfel, se pot echilibra direct momentele externe din fiecare linie prin folosirea arborilor cotiți cu plan central de simetrie.

3.3.4. **Determinarea momentelor rezultante care pot fi echilibrate cînd se adoptă repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor.** Se presupune că se realizează repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor, deci că unghiul ζ ia valoarea (22). Ordinele momentelor rezultante care se echilibrează astfel se deduc introducînd valoarea (22) în relația (32) sau (34), în funcție de succesiunea adoptată a aprinderilor între liniile de cilindri ($K_a > 1$, respectiv $K_a = 1$).

În alternativa $K_a > 1$ se obține, avînd în vedere formula (1),

$$p_0 = \lambda_0 \frac{2\,\frac{i}{\tau}}{2K_a - 3}. \tag{44}$$

iar în alternativa $K_a = 1$ rezultă

$$p_0 = 2\lambda_0 \frac{i}{\tau}. \tag{45}$$

Deoarece formula (45) conduce la ordine care nu intră în discuție, fiindcă armonicile respective nu produc momente [2], posibilitățile de echilibrare în cazul repartiției uniforme a aprinderilor pentru întregul motor corespund formulei (44).

Unghiul ζ, fiind o mărime esențialmente pozitivă, se deduce din (32) condiția

$$\psi > 2\lambda_0 \frac{\pi}{p_0};$$

înlocuind din (1) valoarea maximă posibilă a unghiului ψ, rezultă următoarea restricție pentru factorul λ_0:

$$\lambda_0 < \left(\frac{i}{2} - 1\right)\frac{\tau p_0}{i}.$$

Formula (44) conduce la valori întregi pentru p_0 în două situații:

a) dacă numerele $2\,\frac{i}{\tau}$ și $2K_a - 3$ nu au divizori comuni, formula (44) este îndeplinită cînd λ_0 este un multiplu de $2K_a - 3$. În această situație rezultă din (45) ordine multipli de $\frac{i}{\tau}$ aparținînd armonicilor care

nu produc momente; în consecinţă, echilibrajul momentelor rezultante nu este influenţat prin repartiţia uniformă a aprinderilor pentru întregul motor;

b) dacă numerele $2\frac{i}{\tau}$ şi $2K_a - 3$ au divizori comuni, evident impari, pentru cel mai mare divizor comun δ formula (44) ia forma

$$p_0 = \lambda_0 \frac{2\frac{i}{\tau}}{\frac{2K_a - 3}{\delta}}. \tag{46}$$

Egalitatea (46) este satisfăcută cînd λ_0 ia valorile

$$\lambda_0 = \sigma \frac{2K_a - 3}{\delta} \quad (\sigma = 1,2,3,\ldots),$$

astfel încît ordinele momentelor rezultante care se echilibrează la folosirea repartiţiei uniforme a aprinderilor pentru întregul motor sînt

$$p_0 = \sigma \frac{2\frac{i}{\tau}}{\delta}. \tag{47}$$

Cînd

$$\sigma = \frac{\chi\delta}{2}, \tag{48}$$

unde χ este un număr par, din formula (47) se obţin ordine ale unor armonici care nu produc momente, deci formula (47) se aplică dacă σ nu ia valorile (48).

4. PRECIZAREA CONDIŢIILOR ÎN CARE MOMENTELE REZULTANTE AU MĂRIME CONSTANTĂ

Dacă anumite considerente constructive împiedică dispunerea liniilor de cilindri paralel sau în opoziţie ($0 < \gamma < \pi$), nu se poate echilibra momentul rezultant al nici unei armonici. În acest caz se pune problema limitării mărimii momentelor rezultante prin alegerea corespunzătoare a unghiului dintre linii şi a decalajului dintre arborii cotiţi.

Deoarece mărimea vectorului rotitor care interpretează momentul rezultant de ordinul p variază după o elipsă, la modificarea unghiului γ una dintre semiaxele elipsei se micşorează, iar cealaltă se măreşte. O situaţie avantajoasă se obţine cînd scăderea unei semiaxe este exact compensată de creşterea celeilalte, deci cînd mărimea vectorului rotitor este constantă.

Momentul rezultant de ordinul p este reprezentat printr-un vector rotitor de mărime constantă dacă $\pm A_{\mathfrak{M}_p} = B_{\mathfrak{M}_p}$. Avînd în vedere relaţiile (2), se deduce condiţia

$$\pm \sin p\frac{\psi-\zeta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos p\frac{\psi-\zeta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

deci

$$\pm \operatorname{tg} p\frac{\psi-\zeta}{2} = \operatorname{tg}\left(\lambda\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \qquad (\lambda = 1,2,3,\ldots),$$

de unde se obţine

$$\psi - \zeta = \mp\left[(2\lambda-1)\frac{\pi}{p} - \frac{\gamma}{p}\right]. \tag{49}$$

Pentru $K_a > 1$ rezultă din (1) şi (8) $\psi - \zeta > 0$, deci expresia (49) devine

$$\zeta = \psi - \left[(2\lambda-1)\frac{\pi}{p} - \frac{\gamma}{p}\right]. \tag{50}$$

Înlocuind în (50) pe ψ din (1) şi ţinînd seama de condiţia (8), se deduce

$$(K_a-2)\frac{\tau p}{i} + \frac{\gamma}{2\pi} + 1 \leqslant \lambda \leqslant (K_a-1)\frac{\tau p}{i} + \frac{\gamma}{2\pi} + 1. \tag{51}$$

Existenţa unei valori întregi λ care să aparţină domeniului (51) este posibilă cînd diferenţa dintre limitele domeniului este cel puţin egală cu unitatea; deoarece această diferenţă este $\frac{\tau p}{i}$, rezultă condiţia

$$p \geqslant \frac{i}{\tau}.$$

Pentru $K_a = 1$, $\psi = 0$, deci expresia (49) ia forma

$$\zeta = (2\lambda-1)\frac{\pi}{p} - \frac{\gamma}{p}; \tag{52}$$

ţinînd seama de (8) şi (52), condiţia impusă factorului λ este

$$\lambda \leqslant \frac{\tau p}{i} + \frac{\gamma}{2\pi} + 1.$$

Formulele (50) şi (52) permit determinarea decalajului ζ care conduce la o valoare constantă a momentului rezultant de ordinul p cînd unghiul γ dintre planele liniilor de cilindri este cunoscut. Dacă se impune valoarea unghiului ζ, de pildă valoarea care conduce la repartiţia uniformă a aprinderilor pentru întregul motor, aceleaşi formule servesc la precizarea unghiului dintre planele liniilor de cilindri.

5. CONCLUZII

Rezultatele precedente au un caracter general, putînd fi aplicate oricărui motor cu două linii de cilindri prevăzut cu arbori cotiți care se rotesc în același sens. Formulele stabilite permit determinarea condițiilor în care se poate echilibra momentul rezultant al oricărei armonici, precizarea momentelor rezultante care se echilibrează simultan, stabilirea condițiilor care conduc la cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante și determinarea momentelor rezultante care pot fi echilibrate cînd se folosește repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor. De asemenea se arată modul în care mărimea momentelor rezultante poate fi limitată cînd echilibrarea acestor momente nu este posibilă.

Primită la redacție la 16 decembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate*, St .cerc. mec. apl., *4* (1959).
2. G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU, *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele cu două linii de cilindri*, St. cerc. mec. apl., **26**, *5* (1967).

ECUAȚIILE NELINIARE ALE MIȘCĂRII PERTURBATE A VEHICULULUI ORBITAL STAȚIONAR LA O LATITUDINE ARBITRARĂ

de M. M. NIȚĂ
Academia Militară

Se stabilesc ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate, considerînd că deplasarea relativă în longitudine față de poziția staționară poate avea valori oricît de mari, cu reținerea unor termeni de ordin superior în expresia potențialului gravitațional terestru.
Din integrala Jacobi a ecuațiilor mișcării perturbate se deduce ecuația suprafețelor de viteză nulă. Se stabilesc apoi soluții aproximative ale ecuațiilor mișcării.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [8] am arătat că realizarea unui vehicul staționar la orice distanță geocentrică r_0, deasupra unui loc situat la o latitudine arbitrară φ, implică utilizarea unui motor-rachetă de mică tracțiune, a cărui axă formează un unghi dat ψ cu linia polilor; tracțiunea motorului raportată la masa vehiculului, în cazul considerării cîmpului gravitațional sferic, trebuie să aibă valoarea

$$a_r = g\frac{\sin\varphi}{\cos\psi}, \tag{1}$$

unde g este accelerația locală a gravitației terestre. Un caz particular al acestei probleme a fost tratat în [7], considerîndu-se că axa motorului este paralelă cu linia polilor ($\psi = 0$); în acest caz, distanța geocentrică r_0 a vehiculului orbital staționar este egală cu raza r_n a orbitei satelitului staționar ecuatorial.

În lucrarea [9] s-a studiat, în aproximația liniară, mișcarea perturbată a vehiculului orbital staționar la o latitudine arbitrară, luînd pentru funcția de forță corespunzătoare atracției Pămîntului o expresie de forma

$$U_1 = \frac{kM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} + \varepsilon\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{\cos^2\varphi\cos 2\Lambda}{2}\right], \tag{2}$$

în care k este constanta atracției universale, M masa Pământului, R raza medie a ecuatorului, r distanța geocentrică a vehiculului, φ latitudinea și Λ longitudinea acestuia măsurată față de axa mare a elipsei ecuatoriale. În expresia (2), J_2 și ε sînt coeficienți adimensionali; termenul care conține pe J_2 exprimă efectul turtirii Pământului, iar cel care conține pe ε exprimă influența formei eliptice a ecuatorului.

În cele ce urmează, după o scurtă analiză privind valabilitatea soluțiilor ecuațiilor liniare obținute în [9], ne propunem să stabilim și să analizăm ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate a vehiculului spațial staționar pentru cazul cînd axa motorului este paralelă cu linia polilor, cu luarea în considerație a nesfericității globului terestru.

2. ANALIZA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR LINIARE

Soluțiile ecuațiilor liniare ale mișcării perturbate, obținute în lucrarea [9], pot fi puse sub forma

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -\sum_{i=1}^{2} k_{1i}(A_i \sin p_i t + B_i \cos p_i t) - k_{13}\left(\frac{A_3}{p_3}\cos p_3 t - B_3 \sin p_3 t\right),\\
\xi_2 &= \sum_{i=1}^{2} (A_i \sin p_i t + B_i \cos p_i t) - k_{23}\left(\frac{A_3}{p_3}\cos p_3 t - B_3 \sin p_3 t\right),\\
\xi_3 &= \sum_{i=1}^{2} k_{3i}\,(A_i \cos p_i t - B_i \sin p_i t) + \left(\frac{A_3}{p_3}\sin p_3 t + B_3 \cos p_3 t\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3 reprezintă variațiile coordonatelor r, φ și Λ. În cazul $\psi = 0$, pulsațiile p_1, p_2, p_3 sînt date de

$$\begin{aligned}
p_1 &= \omega\sqrt{1 + 3\sin\varphi_0} + P_1(J_2, \varepsilon),\\
p_2 &= \omega\sqrt{1 - 3\sin\varphi_0} + P_2(J_2, \varepsilon),\\
p_3 &= \frac{2\gamma\omega\cos\varphi_0}{\sqrt{1 - 9\sin^2\varphi_0}} + P_3(J_2, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{4}$$

unde ω este viteza unghiulară a rotației diurne a Pământului, φ_0 latitudinea poziției staționare a vehiculului, γ este dat de

$$\gamma^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \varepsilon, \tag{5}$$

iar P_1, P_2, P_3 sînt polinoame în J_2 și ε.

În cazul pozițiilor staționare situate în planul meridian care conține axa mică a elipsei ecuatoriale $\left(\Lambda = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, în domeniul de latitudini definit de relația

$$1 - 3 \sin \varphi_0 > 0, \tag{6}$$

variațiile razei geocentrice, ale latitudinii și ale longitudinii vehiculului orbital sînt exprimate prin compunerea a trei oscilații armonice, avînd perioadele T_1, T_2 și T_3. Perioadele T_1 și T_2, cu neglijarea unor termeni mici (de ordinul 10^{-7}) în comparație cu unitatea — termeni conținuți în polinoamele P_1 și, respectiv, P_2 —, sînt aceleași ca în cazul cîmpului gravitațional sferic. Perioada T_3, exprimată în zile siderale, este dată de

$$T_3 = \frac{\sqrt{1 - 9 \sin^2 \varphi_0}}{2 \gamma \cos \varphi_0}, \tag{7}$$

se observă că pentru satelitul staționar ecuatorial ($\varphi_0 = 0$) se regăsește valoarea $T_3 \approx 2{,}3$ ani, menționată în lucrările altor autori [1], [4], [6].

Se remarcă, așadar, că turtirea Pămîntului nu introduce modificări esențiale ale mișcării perturbate față de cazul mișcării în cîmpul gravitațional sferic. Efecte importante sînt determinate de forma eliptică a ecuatorului terestru. Astfel, spre deosebire de cazul cîmpului gravitațional sferic, în care pozițiile staționare sînt posibile la orice longitudine, dar mișcarea perturbată este caracterizată prin creșterea sau descreșterea continuă a longitudinii, forma eliptică a ecuatorului terestru, în general abaterea formei Pămîntului față de cea a unui solid de revoluție în jurul axei polilor, are ca efect principal faptul că pozițiile staționare sînt posibile numai pentru longitudinile

$$\Lambda_0 = n \frac{\pi}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3),$$

iar mișcarea perturbată pentru pozițiile staționare situate în planul meridian definit de axa mică a elipsei ecuatoriale, în domeniul de latitudini dat de (6), este o mișcare de tip Lissajous într-un domeniu care conține poziția staționară prescrisă.

Se observă că soluțiile (3) pot fi scrise sub forma

$$\xi_i = \xi_i^s + \xi_i^l \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

în care ξ_i^s reprezintă termenii cu perioadele T_1 și T_2 (de ordinul zilelor sau al fracțiunilor de zi siderale), aceeași ca în cazul cîmpului gravitațional sferic, iar ξ_i^l reprezintă termenii cu perioada T_3 de ordinul anilor, care exprimă influența formei eliptice a ecuatorului.

Se poate observa ușor că amplitudinile oscilațiilor de perioadă scurtă sînt de același ordin de mărime cu perturbațiile inițiale, astfel încît pentru caracterizarea globală a mișcării perturbate este suficient să se considere doar termenii ξ_i' în expresiile variațiilor coordonatelor vehiculului orbital:

$$\xi_1 \approx -\frac{k_{13}}{p_3} A_3 \cos p_3 t + k_{13} B_3 \sin p_3 t,$$

$$\xi_2 \approx -\frac{k_{23}}{p_3} A_3 \cos p_3 t + k_{23} B_3 \sin p_3 t, \tag{9}$$

$$\xi_3 \approx \frac{1}{p_3} A_3 \sin p_3 t + B_3 \cos p_3 t,$$

în care A_3 și B_3 au ordinul de mărime al perturbațiilor inițiale, iar coeficienții k_{13} și k_{23}, pentru cazul $\psi = 0$, sînt dați de

$$k_{13} = \frac{2 r_0}{3 \omega} p_3; \qquad k_{23} = \frac{4 \operatorname{tg} \varphi_0}{3 \omega} p_3.$$

Neglijînd în (9) termenii de mică amplitudine (se are în vedere că $\gamma \approx 6 \cdot 10^{-4}$), se obține în final

$$\xi_1 \approx -\frac{2 r_0}{3 \omega} A_3 \cos p_3 t,$$

$$\xi_2 \approx \frac{4 \operatorname{tg} \varphi_0}{3 \omega} A_3 \cos p_3 t, \tag{10}$$

$$\xi_3 \approx \frac{\sqrt{1 - 9 \sin^2 \varphi_0}}{2 \gamma \omega \cos \varphi_0} A_3 \sin p_3 t.$$

Din aceste relații se observă că amplitudinile oscilațiilor de perioadă lungă din expresiile variației razei geocentrice și latitudinii sînt în general de același ordin de mărime ca perturbațiile inițiale. În schimb, ordinul de mărime al amplitudinii oscilației de perioadă lungă din expresia variației longitudinii este de aproximativ 10^3 ori mai mare decît ordinul de mărime al perturbațiilor inițiale. Cît privește derivatele $\dot{\xi}_1'$, $\dot{\xi}_2'$, $\dot{\xi}_3'$, se observă că mărimea acestora se păstrează în limitele unor valori mici, comparabile cu cele ale derivatelor componentelor de perioadă scurtă.

3. ECUAŢIILE NELINIARE ALE MIŞCĂRII PERTURBATE

Din cele arătate rezultă că, dacă pentru anumite limite ale perturbaţiilor iniţiale aproximaţia liniară este permisă în studiul variaţiei distanţei geocentrice şi a latitudinii, în analiza variaţiei longitudinii vehiculului aproximaţia liniară nu este justificată. Este necesară deci întocmirea ecuaţiilor mişcării perturbate renunţînd la aproximaţia liniară, cel puţin pentru variaţia longitudinii.

Pentru aceasta vom considera ecuaţiile mişcării vehiculului sub forma :

$$\ddot{r} - r(\omega + \dot{\theta})^2 \cos^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial U}{\partial r},$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r(\omega + \dot{\theta})^2 \sin \varphi \cos \varphi + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{11}$$

$$2r\dot{r}(\omega + \dot{\theta}) \cos^2 \varphi + 2r\dot{\varphi}(\omega + \dot{\theta}) \sin \varphi \cos \varphi + \ddot{\theta} \cos^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

unde longitudinea θ este măsurată de la axa mică a elipsei ecuatoriale $\left(\theta = \Lambda - \frac{\pi}{2}\right)$, iar U este dat de

$$U = U_1 + a_r r \sin \varphi, \tag{12}$$

în care, ţinînd seama de consideraţiile anterioare, dintre armonicile de ordin superior din expresia potenţialului gravitaţional se va reţine numai termenul care exprimă forma eliptică a ecuatorului terestru, adică

$$U = \frac{k M}{r}\left[1 - \frac{\gamma^2}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos^2 \varphi \cos 2\theta\right] + a_r r \sin \varphi. \tag{13}$$

Neglijarea termenului în J_2 din expresia (12) este justificată de faptul că în general armonicile zonale din expresia potenţialului gravitaţional nu determină modificări calitative ale mişcării perturbate.

Avînd în vedere cele arătate anterior, în studiul mişcării perturbate vom considera variaţii mici pentru variabilele r, $\dot{r}$, φ, $\dot{\varphi}$ şi $\dot{\theta}$, adică

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \xi_1; \qquad \varphi = \varphi_0 + \xi_2, \\ \dot{r} &= \dot{\xi}_1; \qquad \dot{\varphi} = \dot{\xi}_2; \qquad \dot{\theta} = \dot{\xi}_3, \end{aligned} \tag{14}$$

unde r_0, φ_0, $\theta = 0$ reprezintă coordonatele poziţiei staţionare, variabila θ putînd avea în mişcarea perturbată valori oricît de mari.

Introducînd (14) în (11), ținînd seama că în mișcarea de bază $\xi_1 = \xi_2 = \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_3 = 0$ și neglijînd termenii mici, se obțin în final ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate sub forma

$$\frac{1}{r_0}\ddot{\xi}_1 - 2\omega\,\dot{\xi}_3\cos^2\varphi_0 - \frac{2+\cos^2\varphi_0}{r_0}\omega^2\,\xi_1 + \frac{\omega^2}{2}\xi_2\sin 2\varphi_0 =$$

$$= -2\omega^2\gamma^2\cos^2\varphi_0\sin^2\theta,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \frac{\omega^2}{2r_0}\xi_1\sin 2\varphi_0 + \omega^2\,\xi_2\cos^2\varphi_0 + \omega\,\dot{\xi}_3\sin 2\varphi_0 = \tag{15}$$

$$= -\frac{2\gamma^2\omega^2}{3}\sin 2\varphi_0\sin^2\theta,$$

$$\ddot{\xi}_3\cos^2\varphi_0 + \frac{2\omega}{r_0}\dot{\xi}_1\cos^2\varphi_0 - \omega\,\dot{\xi}_2\sin 2\varphi_0 =$$

$$= 2\omega^2\gamma^2\left(\frac{\cos^2\varphi_0}{3} - \frac{\sin 2\varphi_0}{3}\xi_2 - \frac{\cos^2\varphi_0}{r_0}\xi_1\right)\sin 2\theta.$$

Se observă că, dacă în aceste ecuații se consideră că unghiul θ este mic, adică

$$\sin\theta \approx \xi_3,$$

și se neglijează termenii neliniari, se obține sistemul ecuațiilor variațiilor considerat în lucrarea [9], cu excepția termenilor în J_2, care au fost neglijați în prezenta lucrare.

Sistemul (15) admite integrala primă

$$\frac{1}{r_0}\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2\cos^2\varphi_0 - \frac{2+\cos^2\varphi_0}{r_0^2}\omega^2\,\xi_1^2 + \frac{\omega^2}{r_0}\xi_1\,\xi_2\sin 2\varphi_0 +$$

$$+ \omega^2\,\xi_2^2\cos^2\varphi_0 - \frac{4\omega^2\gamma^2}{3}\left(\cos^2\varphi_0 - 3\frac{\xi_1}{r_0}\cos^2\varphi_0 - \xi_2\sin 2\varphi_0\right)\sin^2\theta = \text{const},$$

care este integrala Jacobi pentru mișcarea perturbată. Primii trei termeni reprezintă energia cinetică a vehiculului în mișcarea perturbată față de

reperul terestru. Potenţialul dinamic al mişcării este deci

$$U^*(\xi_1, \xi_2, \theta) = \frac{2 + \cos^2 \varphi_0}{r_0} \omega^2 \xi_1 - \frac{\omega^2}{r_0} \xi_1 \xi_2 \sin 2\varphi_0 -$$

$$- \omega^2 \xi_2^2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{4\omega^2 \gamma^2}{3} \left(\cos^2 \varphi_0 - 3 \frac{\xi_1}{r_0} \cos^2 \varphi_0 - \right.$$

$$\left. - \xi_2 \sin 2\varphi_0 \right) \sin^2 \theta. \tag{16}$$

În locul variabilelor ξ_1, ξ_2 se introduc variabilele η_1, η_2, date de

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 \cos \varphi_0 - r_0 \xi_2 \sin \varphi_0, \\ \eta_2 &= \xi_1 \sin \varphi_0 + r_0 \xi_2 \cos \varphi_0, \end{aligned} \tag{17}$$

de unde se observă că η_1 reprezintă variaţia razei orbitei vehiculului staţionar, iar η_2 deplasarea vehiculului după o direcţie paralelă cu linia polilor.

Introducînd (17) în (16) şi neglijînd termenii mici se obţine ecuaţia suprafeţelor de viteză nulă sub forma

$$\eta_1^2 + \frac{3 \sin^2 \varphi_0 - 1}{3 \cos^2 \varphi_0} \eta_2^2 + 2 \eta_1 \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{4 \gamma^2 r_s^2}{9 \cos^2 \varphi_0} \sin^2 \theta = K, \tag{18}$$

unde r_s este raza orbitei vehiculului staţionar la latitudinea φ_0, iar K o constantă. Intersecţia acestei familii de suprafeţe cu planul $\eta_2 = 0$ (planul orbitei vehiculului staţionar în mişcarea de bază) este familia de curbe

$$\eta_1^2 + \frac{4 \gamma^2 r_s^2}{9 \cos^2 \varphi_0} \sin^2 \theta = K \tag{19}$$

sau, luînd pentru K expresia

$$K = \frac{4 \gamma^2 r_s^2}{9 \cos^2 \varphi_0} (1 + k),$$

unde k este o constantă, rezultă

$$\eta_1 = \pm \frac{2 \gamma r_s}{3 \cos \varphi_0} \sqrt{k + \cos^2 \theta}. \tag{20}$$

Într-un sistem de coordonate polare (ρ, θ) cu originea în centrul O′ al orbitei neperturbate a vehiculului, în care $\rho = r_s + \eta_1$, ecuațiile curbelor (20) devin

$$\rho = r_s\left(1 \pm \frac{2\gamma}{3\cos\varphi_0}\sqrt{k + \cos^2\theta}\right). \tag{21}$$

Pentru $k = 0$ se obțin două curbe cvasicirculare, reprezentate în figura 1 prin linii groase, care se intersectează în punctele B_1 $(r_s, \pi/2)$ și B_2 $(r_s, 3\pi/2)$, situate în planul meridian care conține axa mare a elipsei ecuatoriale.

Pentru $k > 0$ se obțin două curbe cvasicirculare separate, una situată în interiorul curbelor $k = 0$, iar cealaltă în afara acestora. În figura 1 au fost considerate trei valori pozitive ale parametrului k, și anume $a > b > c > 0$.

În sfîrșit, pentru $k < 0$ se obțin două curbe închise simetrice, una avînd punctul $A_1(r_s, 0)$ în interior, iar cealaltă avînd în interior punctul $A_2(r_s, \pi)$. În figura 1 au fost considerate două valori negative ale parametrului k, și anume $k = -a_1$ și $k = -b_1$, în care $a_1 > b_1 > 0$.

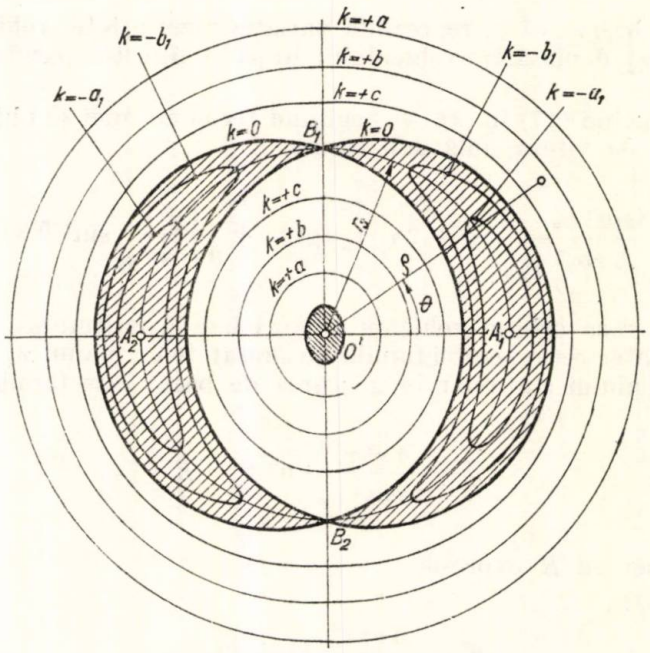


Fig. 1

Punctele A_1 și A_2, situate în planul meridian care conține axa mică a elipsei ecuatoriale, sînt poziții staționare stabile, iar punctele B_1 și B_2, așa cum s-a arătat și în lucrarea [9], sînt poziții instabile. Regiunile hașurate în figura 1 reprezintă domeniul de „acroșare" a vehiculului orbital staționar; dacă vehiculul orbital este plasat în acest domeniu cu viteză

relativă nulă față de un reper terestru, atunci acesta va rămîne în vecinătatea punctelor A_1 sau A_2.

Lățimea maximă a acestor domenii are loc în planul meridian care conține axa mică a elipsei ecuatoriale, avînd valoarea

$$L = \frac{4\gamma r_s}{3\cos\varphi_0},$$

de unde, ținînd seama că $r_s = r_n \cos\varphi_0$, unde r_n este raza orbitei satelitului staționar ecuatorial, rezultă $L \approx 35$ km.

De remarcat că, dacă se consideră $\varphi_0 = 0$, se regăsesc pentru suprafețele de viteză nulă ecuațiile corespunzătoare satelitului staționar ecuatorial, menționate în diverse lucrări [2], [3], [5].

4. INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR NELINIARE

Din analiza ecuațiilor (9) se observă că, dacă ordinul de mărime al variabilei ξ_3 este egal cu unitatea, atunci ordinul de mărime al variabilelor ξ_1/r_0, ξ_2 și $\dot{\xi}_3$ este egal cu γ, ordinul de mărime al derivatelor $\dot{\xi}_1/r_0$, $\dot{\xi}_2$ și $\ddot{\xi}_3$ este γ^2, iar al derivatelor $\ddot{\xi}_1/r_0$ și $\ddot{\xi}_2$ este egal cu γ^3, unde γ este dat de (5), avînd valoarea $\gamma \approx 6\cdot 10^{-4}$. Prin urmare, dacă se urmărește analiza componentelor de perioadă lungă pe baza ecuațiilor neliniare (15), se pot face în aceste ecuații următoarele simplificări:

— în prima ecuație se neglijează termenii $\ddot{\xi}_1/r_0$ și $2\,\omega^2\gamma^2\cos^2\varphi_0\sin^2\theta$, ambii avînd ordinul de mărime γ^2, în timp ce ceilalți termeni cu care se însumează au ordinul de mărime egal cu γ;

— în a doua ecuație se neglijează termenii $\ddot{\xi}_2$ și $\frac{2}{3}\gamma^2\omega^2\sin 2\varphi_0 \times \sin^2\theta$ pentru aceleași considerente;

— în a treia ecuație se neglijează ultimii doi termeni din membrul drept, avînd ordinul de mărime γ^3, în timp ce ceilalți termeni cu care se însumează au ordinul de mărime γ.

Cu aceste simplificări și introducînd notațiile $\dot{\xi}_3 = \dot{\theta}$, $\ddot{\xi}_3 = \ddot{\theta}$, se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}
&-\frac{2+\cos^2\varphi_0}{r_0}\omega^2\,\xi_1 + \frac{\omega^2}{2}\xi_2\sin 2\varphi_0 - 2\omega\,\dot{\theta}\cos^2\varphi_0 = 0,\\
&\frac{\omega^2}{2r_0}\xi_1\sin 2\varphi_0 + \omega^2\,\xi_2\cos^2\varphi_0 + \omega\,\dot{\theta}\sin 2\varphi_0 = 0,\\
&\ddot{\theta}\cos^2\varphi_0 + \frac{2\omega}{r_0}\dot{\xi}_1\cos^2\varphi_0 - \omega\,\dot{\xi}_2\sin 2\varphi_0 = \frac{2\,\omega^2\gamma^2\cos^2\varphi_0}{3}\sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{22}$$

Din primele două ecuații rezultă imediat

$$\frac{\xi_1}{r_0} = -\frac{2}{3\omega}\dot{\theta},$$
$$\xi_2 = -\frac{4}{3\omega}\dot{\theta}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0. \tag{23}$$

Ținînd seama de (23), ultima ecuație din (22) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{p_3^2}{2}\sin 2\theta = 0, \tag{24}$$

unde p_3 este dat de ultima relație din (4), în care se reține numai primul termen.

De remarcat că pentru unghiurile θ mici, considerînd că $\sin 2\theta \approx 2\theta$, soluția ecuației (24) este de forma

$$\theta = C_1 \cos p_3 t + C_2 \sin p_3 t,$$

identică cu ultima relație (9), care reprezintă soluția ecuației mișcării în aproximația liniară.

Renunțînd la ipoteza unghiurilor θ mici, soluția ecuației (24), cu condițiile inițiale $t = 0$; $\theta = \theta_0$; $\dot{\theta} = 0$, este

$$\sin\theta = \sin\theta_0 \cdot \mathrm{sn}\, p_3 t_1, \tag{25}$$

în care

$$t_1 = t + \frac{F(\sin\theta_0)}{p_3}, \tag{26}$$

unde $F(\sin\theta_0)$ este integrala eliptică completă de speța întîi.

Avînd în vedere relația (25), soluțiile ecuațiilor (23) sînt

$$\frac{\xi_1}{r_0} = -\frac{2p_3 \sin\theta_0}{3\omega}\,\mathrm{cn}\, p_3 t_1,$$
$$\xi_2 = -\frac{4p_3\,\mathrm{tg}\,\varphi_0 \sin\theta_0}{3\omega}\,\mathrm{cn}\, p_3 t_1, \tag{27}$$

astfel încît, eliminînd parametrul t_1 din ecuațiile (25) și (27), se obțin ecuațiile traiectoriei

$$\xi_1^2 = \frac{4p_3^2 r_0^2}{9\omega^2}(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta),$$
$$\xi_2 = \xi_1 \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi_0}{r_0}. \tag{28}$$

Prin urmare, în mișcarea de perioadă lungă, considerînd ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate, traiectoria vehiculului față de un reper terestru este situată în domeniul

$$-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$
$$-\frac{2p_3}{3\omega} r_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{2p_3}{3\omega} r_0, \tag{29}$$
$$-\frac{4p_3}{3\omega}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0 \leqslant \xi_2 \leqslant \frac{4p_3}{3\omega}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0,$$

care conține punctul $A_1(\theta = \xi_1 = \xi_2 = 0)$. Rezultate similare se obțin și pentru punctul A_2 (fig. 1), ceea ce demonstrează posibilitatea realizării unor vehicule orbitale staționare în planul meridian care conține axa mică a elipsei ecuatoriale.

Perioada T_3^* a oscilațiilor de lungă perioadă în cazul considerării ecuațiilor neliniare este

$$T_3^* = \frac{4F(\sin\theta_0)}{p_3}.$$

Pentru valori mici ale unghiului θ_0 avem

$$F(\sin\theta_0) \approx \frac{\pi}{2}$$

astfel încît $T_3^* = T_3$, unde T_3 este dat de (7).

Particularizînd aceste rezultate pentru cazul satelitului staționar ecuatorial ($\varphi_0 = 0$), se regăsesc rezultatele semnalate de alți autori [3].

Primită la redacție la 7 martie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. BLITZER L., E. M. BOUGHTON G. KANG, R. M. PAGE, *Effect of ellipticity of the equation on 24-hour nearly circular satellite orbits*, J. Geophys. Res., **27**, *1*, 329—335 (1962).
2. BLITZER L., *Synchronous and resonant satellite orbits associated with equatorial ellipticity*, ARS Journal, **32**, *7*, 1016—1018 (1962).
3. CAMBI E., *Stability of a geostationary satellite in the terrestrial field*, ELDO Technical Review, **2**, *1*, 51—76 (1967).
4. FRICK R. H., T. B. GARBER, *Perturbations of synchronous satellite due to triaxiality of the Earth*, Journal of the Aerospace Sciences, **29**, *9*, 1105—1111 (1962).
5. KANG G., M. G. KENEHAN, *Longitude positioning and orbit control of the 24-hour equatorial satellite*, AIAA Journal, **2**, *6*, 991—999 (1964).
6. MARCHAL C., *Perturbations et stabilisation artificielle d'un satellite équatorial de 24 heures*, La Recherche Aérospatiale, *96*, 13—22 (1963).
7. NIȚĂ M. M., *Sur la possibilité de réalisation d'un vaisseau orbital stationnaire au-dessus d'un point non situé sur l'équateur terrestre*, Proceedings of the XIII-th International Astronautical Congress, Varna, 1962, Viena-New York, Springer Verlag, 1964.
8. — *Généralisation du problème concernant la réalisation d'un vaisseau orbital stationnaire au-dessus de n'importe quel point du globe terrestre*, Proceedings of the XIV-th International Astronautical Congress, Paris, 1963, Paris, Gauthier-Villars, 1964.
9. — *Sur les perturbations des vaisseaux orbitaux stationnaires à une latitude arbitraire, dues à la triaxialité de la terre*, Proceedings of the XVIII-th International Astronautical Congress, Belgrade, 1967, Oxford—New York, Pergamon Press, 1968.

CALCULATORUL ANALOGIC ÎN CERCETAREA MECANISMELOR

de RADU C. BOGDAN, SERGIU CONONOVICI
și DAN LARIONESCU
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

În prezenta lucrare se dau indicații asupra posibilităților de folosire a calculatorului electronic analogic în cercetarea mecanismelor. Se studiază posibilitatea realizării derivării succesive la calculatorul analogic și se modelează în diferite variante mecanisme plane articulate simple.

1. NOȚIUNI ASUPRA UTILIZĂRII CALCULATORULUI ELECTRONIC ANALOGIC

1.1. MODUL DE FUNCȚIONARE

Calculatorul electronic analogic este format dintr-un număr finit de elemente : amplificatoare operaționale și elemente neliniare, cu ajutorul cărora se pot realiza diverse operații matematice conform tabelului din anexă.

O metodă foarte des folosită de rezolvare a unei probleme tehnice folosind calculatorul analogic este aceea a *modelării matematice.*

Această metodă presupune în ordine următoarele :

— se stabilește un model matematic, adică sistemul de ecuații (de obicei diferențiale sau cu derivate parțiale) care rezolvă problema tehnică studiată ;

— se programează calculatorul analogic, adică se conectează într-un mod convenabil elementele sale amintite mai sus, în scopul determinării unei soluții particulare a sistemului de ecuații.

O altă metodă, principial diferită, este aceea a simulării, în care elementele care constituie calculatorul analogic sînt astfel conectate, înc să simuleze sistemul ce urmează a fi studiat. În studiul mecanismelor se pot folosi cu bune rezultate ambele metode. Astfel este comod a fi folosită metoda modelului matematic în cercetarea mecanismelor la care scrierea sistemului de ecuații ce caracterizează aspectul cinematic sau din amic

T. CERC. MEC. APL., TOM., 28, NR. 5, 1969, P. 1093—1122.

al funcționării sale se poate realiza ușor (de exemplu mecanismul bielă-manivelă, mecanismul cu culisă oscilantă, patrulaterul articulat etc.).

Tehnica simulării este indicată în studiul mecanismelor complexe. În acest caz, blocuri de elemente ale calculatorului analogic se comportă ca subansambluri ale mecanismului (funcții de transfer identice), metoda de cercetare a mecanismului fiind stabilită de la caz la caz (de exemplu metoda intersecțiilor geometrice).

1.2. COMPARAȚIE CU CALCULATORUL NUMERIC

Calculatorul analogic furnizează rezultate sub formă de diagrame (de exemplu traiectoria unui punct al mecanismului), ușor de interpretat în cazul mecanismelor.

Calculatorul numeric furnizează rezultate sub formă de tabele numerice (de exemplu n valori ale vectorului de poziție al unui punct al mecanismului corespunzătoare a n poziții ale unghiului de manivelă), mai puțin comode în cercetarea mecanismelor.

Spre deosebire de calculatorul numeric, care poate furniza ușor rezultate cu 10 zecimale exacte, calculatorul analogic obține rezultate cu o eroare medie de aproximativ 2% (depinde de calitatea calculatorului), suficientă în general în tehnică. Programarea calculatorului numeric se bazează pe metode de analiză numerică și este mai dificilă decît programarea calculatorului analogic. În schimb, sistemele de ecuații cu derivate parțiale (care însă apar mai rar în studiul mecanismelor) produc dificultăți mari la rezolvarea lor cu calculatorul analogic.

Din cele arătate mai sus rezultă că în studiul mecanismelor calculatorul analogic este deosebit de indicat prin continuitatea soluției, stabilirea rapidă a parametrilor, ușurința manipulării, rezultatele sub formă de grafic, prețul scăzut al exploatării sale, toate acestea fiind avantaje care justifică calculatorului analogic termenul de „ingineresc".

1.3. ELEMENTE DE PROGRAMARE LA CALCULATORUL ANALOGIC

Se expune pe scurt modul de programare la calculatorul analogic a unei ecuații diferențiale de gradul n, probleme care se reduc la programarea acestei ecuații diferențiale, întîlnindu-se frecvent în studiul mecanismelor.

Considerăm ecuația diferențială de ordinul n de formă

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right), \tag{1}$$

unde x este variabila independentă (de exemplu timpul real) și y variabila dependentă care admite n derivate succesive.

În procesul rezolvării acestei ecuații diferențiale la calculatorul analogic, în diverse puncte ale montajului realizat în acest scop, cu elementele calculatorului apar tensiuni variabile, corespunzătoare atît variabilei y, cît și derivatelor sale. Adoptînd o notație capabilă să pună în evi-

denţă ordinul derivatei lui y, corespondenţa dintre mărimile specificate mai sus este de forma

$$\begin{aligned} V_{x,0} &= a_{x,0} \cdot x, \\ V_{y,0} &= a_{y,0} \cdot y, \\ V_{y,1} &= a_{y,1} \cdot \frac{dy}{dx}, \\ V_{y,2} &= a_{y,2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_{y,n} &= a_{y,n} \cdot \frac{d^ny}{dx^n}. \end{aligned} \tag{2}$$

În relaţiile (1), $a_{x,0}$; $a_{y,0}$; $a_{y,1}$; $a_{y,2}$; ..., $a_{y,n}$ au semnificaţia unor factori de scară de amplitudine. Variabila independentă a proceselor desfăşurate în calculatorul analogic este timpul-maşină, pe care convenim să-l notăm prin τ.

Schimbarea scării timpului (comprimarea sau dilatarea mărimii timp-maşină) se realizează prin transformarea liniară

$$\tau = a_\tau \cdot x, \tag{3}$$

unde a_τ are semnificaţia unui factor de scară de timp.

Rezultă $d\tau = a_\tau\, dx$ şi deci

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{a_\tau} \cdot \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= \frac{1}{a_\tau^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^ny}{d\tau^n} &= \frac{1}{a_\tau^n} \cdot \frac{d^ny}{dx^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Cu ajutorul relaţiilor (4), relaţiile (2) se obţin de forma

$$\begin{aligned} V_{x,0} &= a_{x,0} \cdot x, \\ V_{y,0} &= a_{y,0} \cdot y, \\ V_{y,1} &= a_{y,1} \cdot \frac{dy}{dx} = a_{y,1} \cdot a_\tau \cdot \frac{dy}{d\tau}, \\ V_{y,2} &= a_{y,2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = a_{y,2} \cdot a_\tau^2 \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{y,n} &= a_{y,n} \frac{d^ny}{dx^n} = a_{y,n}\, a_\tau^n \frac{d^ny}{d\tau^n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ecuația (1) devine

$$\frac{V_{y,n}}{a_{y,n}} = f\left(\frac{V_{x,0}}{a_{x,0}}, \quad \frac{V_{y,0}}{a_{y,0}}, \quad \frac{V_{y,1}}{a_{y,1}}, \ldots, \frac{V_{y,n-1}}{a_{y,n-1}}\right)$$

sau altfel

$$V_{y,n} = f_1(V_{x,0}, \quad V_{y,0}, \quad V_{y,1}, \ldots, \quad V_{y,n-1}). \tag{6}$$

Schema de principiu care modelează ecuația (6) pe calculatorul analogic este reprezentată în figura 1.

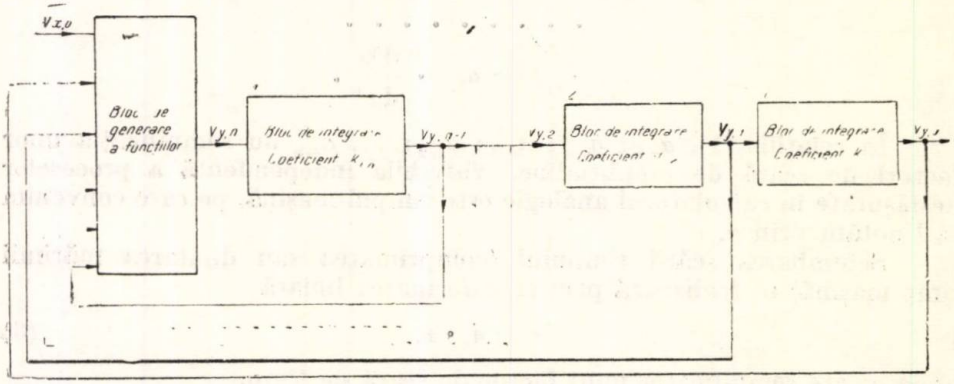


Fig. 1

Presupunem că blocul de integrare numărul p cu $1 \leqslant p \leqslant n$ efectuează și operația de înmulțire cu coeficientul K_{ip}, adică

$$V_{y,p-1} = K_{ip} \int_0^\tau V_{y,p}\, \mathrm{d}\tau.$$

Folosind relațiile (5), obținem

$$a_\tau^{p-1} \cdot a_{y,p-1} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p-1}y}{\mathrm{d}\tau^{p-1}} = K_{ip} \cdot a_\tau^p \cdot a_{y,p} \cdot \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}^p y}{\mathrm{d}\tau^p}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= K_{ip}\, a_\tau^p\, a_{y,p} \frac{\mathrm{d}^{p-1}y}{\mathrm{d}\tau^{p-1}}.$$

Rezultă coeficientul K_{ip} de forma

$$K_{ip} = \frac{a_{y,p-1}}{a_\tau\, a_{y,p}}. \tag{7}$$

În privința alegerii factorilor de scară se pot afirma următoarele. Dacă factorii de scară de amplitudine nu sînt corect aleși, calculatorul introduce la un moment dat erori mari, tensiunile depășind valoarea maximă la care amplificatorul funcționează liniar, ajungînd în domeniul de saturație.

Se impune deci proporția (în cazul lui x)

$$\frac{x}{x_{max}} = \frac{V_{x,0}}{V_{max}} \tag{8}$$

și deci

$$a_{x,0} = \frac{V_{max}}{x_{max}} . \tag{9}$$

Analog

$$\begin{aligned} a_{y,0} &= \frac{V_{max}}{y_{max}} , \\ a_{y,1} &= \frac{V_{max}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max}} , \\ a_{y,2} &= \frac{V_{max}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{max}} , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{y,n} &= \frac{V_{max}}{\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{max}} . \end{aligned} \tag{10}$$

Valoarea V_{max} reprezintă tensiunea maximă admisă de amplificatoarele operaționale (unitatea mașinii) și este o mărime caracteristică fiecărui tip de calculator.

Valorile x_{max}, y_{max}, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{max}$, ..., $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{max}$ rezultă din considerații de ordin fizic al fenomenului studiat.

Factorul de scară pentru timp trebuie de asemenea ales în mod convenabil, ținînd seama în acest sens că, dacă tensiunea variază prea încet, apar erori mari, datorită faptului că se integrează în timp deriva amplificatoarelor, ceea ce duce la o accentuare a erorilor, iar pe de altă parte o variație prea rapidă a tensiunilor atrage după sine necesitatea unor tensiuni de intrare foarte mici, deci incomode în lucru. Pentru alegerea factorului de scară pentru timp se pornește de la evaluarea constantei de timp pentru fiecare integrală în parte.

Cu notațiile anterioare, constanta de timp $T_{y,r}$ este

$$V_{y,r-1} = \frac{1}{T_{y,r}} \int_0^\tau V_{y,r}\, d\tau$$

și deci

$$T_{y,r} = \frac{1}{K_{y,r}} = \frac{a_{y,r}\, a_\tau}{a_{y,r-1}} \text{ [s]}. \tag{11}$$

Dacă ecuaţia diferenţială (1) este de ordinul doi cu coeficienţii constanţi, se obişnuieşte să se scrie astfel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\xi\omega_n\frac{dy}{dx} + \omega_n^2 y = p(x). \tag{12}$$

Studiul amănunţit al ecuaţiei (12) a condus la observaţii care permit apriori alegerea aproximativă a factorilor de scară.

Mărimea ξ este denumită în general factor de amortizare. Pentru $\xi = 0$ (caz teoretic), sistemul descris de ecuaţia (12) nu are amortizare, fiind un sistem pur oscilant. În acest caz, ω_n are semnificaţia frecvenţei naturale de oscilaţie.

Valoarea $\xi = 1$ corespunde cazului amortizării critice, în schimb pentru $\xi \gg 1$ sistemul are o amortizare puternică.

Valorile uzuale ale factorului de amortizare ξ sînt cuprinse între 0,5 şi 1, valoarea $\xi = 0{,}7$ fiind considerată uneori optimă.

Dacă funcţia de excitaţie $p(x) = \sin\omega x$, atunci

$$\left|\frac{d^n p}{dx^n}\right|_{max} \cong |\omega^n \cos\omega x|_{max} \tag{13}$$

şi deci valoarea maximă a derivatei variabile y (de asemenea o funcţie sinusoidală în acest caz) poate fi prezisă, cunoscînd mărimea maximă a fuuncţiei şi frecvenţa de oscilaţie.

1.4. CARACTERISTICI ALE CALCULATORULUI ANALOGIC MEDA-40-TA

Analizatorul diferenţial MEDA-40-TA face parte din seria de calculatoare analogice tranzistorizate ARITMA. Construcţia calculatorului analogic MEDA-40-TA asigură o mare flexibilitate şi adaptabilitate a elementelor de calcul. Capacitatea calculatorului poate fi extinsă. Marele număr de elemente de calcul liniare şi neliniare exacte, posibilitatea de a folosi integratoarele ca memorie analogică, posibilitatea de a efectua calcule iterative, lucrul cu un singur impuls sau repetitiv cu o frecvenţă peste 50 Hz şi metodele combinate de programare folosind impendanţele fixate pe panoul său sau externe, libere asigură flexibilitatea mare a calculatorului.

În ansamblul său, analizatorul diferenţial MEDA-40-TA conţine 15 unităţi modulare TZP-1 cu cîte două amplificatoare operaţionale fiecare. După conectarea impedanţelor exterioare de calcul, amplificatorul operaţional poate lucra ca invertor, sumator sau integrator. El poate fi de asemenea folosit pentru multiplicarea sau împărţirea cu o constantă şi pentru realizarea diferitelor relaţii neliniare.

Părţile constitutive ale calculatorului sînt:

— 2 unităţi modulare TDQ-1, conţinînd cîte patru cvadratoare care pot modela o funcţie pătratică cu 10 secţiuni liniare. Împreună cu un amplificator operaţional se poate asambla un multiplicator cu diode;

— 2 module TFM-1, generatoare de funcţii cu diode, putînd aproxima o funcţie din 19 segmente de dreaptă. Lucrează cu două amplificatoare operaţionale;

— 1 modul TZK-1, conţinînd două comparatoare. Acestea stabilesc dacă suma algebrică a două tensiuni este mai mare sau mai mică ca zero;

— panoul pentru coeficienţi, avînd:

a) impedanţele de intrare şi de reacţie pentru 12 amplificatoare integratoare cu circuitele pentru punerea condiţiilor iniţiale;

b) 30 de potenţiometre pentru punerea coeficienţilor şi condiţiilor iniţiale, din care 10 elicoidale cu 5 ture;

c) 228 de prize colorate în cod, permiţînd conectarea elementelor de pe panouri.

Calculatorul conţine elementele de protecţie şi de semnalizare a defecţiunilor.

2. ELEMENTE SPECIFICE CERCETĂRII MECANISMELOR CU CALCULATORUL ANALOGIC

Avînd avantajele indicate în prima parte a lucrării, calculatorul analogic a atras atenţia cercetătorilor ocupaţi cu studiul mecanismelor, folosind acest tip de calculator cu bune rezultate atît în studii cinematice, cît şi dinamice.

Astfel Crossley [3] indică în principiu felul în care pot fi modelate la calculatorul analogic mecanisme plane articulate simple: mecanismul elipsograf, mecanismul bielă-manivelă, mecanismul patrulater etc. Nu trece însă la modelarea efectivă a acestor mecanisme care să conducă atît la rezultate, cît şi la indicaţii privind particularităţile montajelor propuse, ceea ce ar uşura reproducerea lor în procesul cercetării efective ale unui mecanism.

Plander şi Tomas [7] merg mai departe, îmbinînd consideraţiile teoretice cu o aplicaţie, şi anume modelarea mecanismului pentalater de specia întîi, obţinînd curbe care reprezintă traiectoria, viteza şi acceleraţia unui punct al acestui mecanism. Ei introduc în studiul efectuat şi consideraţii de ordin dinamic.

Keller [4] extinde cercetările efectuate cu ajutorul calculatorului analogic la studiul cîtorva mecanisme spaţiale, inclusiv patrulaterul spaţial, folosind în acest scop un montaj format din 25 de amplificatoare şi 5 cvadratoare.

Toate aceste lucrări ilustrează marile posibilităţi care se deschid în cercetarea mecanismelor folosind această modernă realizare tehnică care este calculatorul electronic analogic. Posibilităţi mari se deschid în special la realizarea de sinteze experimentale ale unui anumit tip de mecanism, de optimizări ale performanţelor mecanismului, de reliefare a anumitor aspecte dinamice. În general, avantajele acestei noi căi de cercetare a mecanismelor (încă foarte puţin folosită) constau în realizarea unui model electronic al mecanismului cercetat, foarte uşor de manevrat şi de transformat şi care permite măsurarea directă în fiecare moment a parametrilor mecanismului. Lucrarea de faţă se înscrie pe linia cercetărilor

descrise mai sus şi constituie prima etapă dintr-o suită de lucrări în care ne propunem să cercetăm anumite tipuri de mecanisme cu ajutorul calculatoarelor analogice de care dispune în ultima vreme ţara noastră.

2.1. POSIBILITĂŢI DE CALCUL A PARAMETRILOR CINEMATICI AI MECANISMELOR

Oricare ar fi mecanismul studiat, se pune problema determinării traiectoriei, vitezei şi acceleraţiei (prin proiecţiile lor pe axe) pentru un punct M oarecare al mecanismului.

Dacă notăm cu z_M vectorul de poziţie al punctului corespunzător unui anumit moment al funcţionării mecanismului, de asemenea v_M şi a_M vectorii viteză şi acceleraţia corespunzători lui M, atunci proiecţiile pe axe ale traiectoriei vitezei şi acceleraţiei se obţin din relaţiile

$$\begin{aligned} z_M &= z_{M|x}\, i + z_{M|y} \cdot j, \\ v_M &= v_{M|x}\, i + v_{M|y}\, j, \\ a_M &= a_{M|x}\, i + a_{M|y}\, j, \end{aligned} \tag{14}$$

unde i şi j sînt vectorii unitari (versori) corespunzători celor două axe.

Există două metode de calcul al parametrilor cinematici ai punctului M, şi anume:

— derivarea succesivă a traiectoriei pentru a obţine viteza şi acceleraţia;

— integrarea succesivă a acceleraţiei pentru a obţine viteza şi traiectoria.

Fiecare dintre aceste două metode au atît avantaje, cît şi dezavantaje. Astfel prima metodă porneşte de la expresia traiectoriei unui punct M al mecanismului, calculată folosind o metodă oarecare, analitică. Evident, forma acestei expresii este mai simplă decît relaţia care dă acceleraţia punctului M şi beneficiază de un suport fizic mai uşor de intuit (necesar, de exemplu, în procesul determinării valorilor maxime).

Dezavantajele primei metode apar în momentul derivării succesive a traiectoriei pentru a obţine viteza şi acceleraţia punctului M, fapt care se realizează de obicei prin introducerea de erori sistematice apărute în procesul derivării succesive. Se recomandă de aceea folosirea unor montaje realizate cu elemente ale calculatorului analogic în stare să asigure o eroare cît mai mică.

A doua metodă porneşte de la expresia acceleraţiei (mai greu de modelat decît traiectoria), în schimb beneficiază de o precizie mai mare în realizarea integrărilor succesive în comparaţie cu derivarea succesivă. Se remarcă totuşi o oarecare sensibilitate în stabilirea condiţiilor iniţiale pentru integratoarele care realizează integrarea succesivă şi din această cauză condiţiile iniţiale trebuie calculate foarte precis. Pentru mecanisme simple (bielă-manivelă, culisă oscilantă etc.) în cazul unei viteze unghiulare constante, expresia acceleraţiei se calculează uşor şi, în acest caz, studiile întreprinse de noi recomandă folosirea metodei integrărilor succesive.

O altă problemă care se ridică este aceea a folosirii relaţiilor aproximative pentru calculul traiectoriilor, respectiv al acceleraţiilor la modelarea mecanismelor pe calculatorul analogic. Mergînd pînă la o precizie

suficient de ridicată, aceste relaţii aproximative sînt utile, deoarece modelarea lor evită folosirea unui număr de blocuri neliniare (care depinde de mecanismul studiat), ţinînd seama că aceste blocuri neliniare comportă şi o eroare mai ridicată decît celelalte elemente din componenţa calculatorului analogic. Se ajunge astfel la situaţia că eroarea comisă prin folosirea relaţiilor aproximative de calcul (aproximativ 1%) la modelarea mecanismelor devine mai mică decît eroarea totală rezultată prin cumularea erorilor determinate de blocurile neliniare (aproximativ 2%), folosite în cadrul modelării relaţiilor exacte ale traiectoriei sau ale acceleraţiei.

Consideraţiile expuse mai sus ne-au determinat să folosim la modelarea mecanismelor simple relaţii aproximative de calcul ale traiectoriei şi acceleraţiei, care în plus conduc la simplificarea montajelor de pe calculator.

Pentru realizarea derivării succesive s-a folosit un montaj bazat pe modelarea unui sistem de ordinul doi, care considerăm că prezintă avantaje faţă de sistemul de derivare bazat pe modelarea unui sistem de ordinul unu. Mecanismele simple modelate ne-au servit şi ca test pentru alegerea metodei de derivare care conduce la o precizie mai bună. Au fost verificate de asemenea cu ajutorul modelelor realizate avantajele şi dezavantajele fiecăreia dintre cele două metode pentru studiul cinematic al mecanismelor. Pentru fiecare mecanism studiat au fost trasate, cu ajutorul unui inscriptor perfecţionat anexat calculatorului analogic, familii de curbe reprezentînd parametrii cinematici ai unui punct al mecanismului în cazul variaţiei elementelor sale.

3. METODE DE DERIVARE SUCCESIVĂ LA CALCULATORUL ANALOGIC

Din cele arătate mai sus se impune în studiul unui mecanism derivarea succesivă a traiectoriei unui punct al mecanismului pentru determinarea vitezei, respectiv a acceleraţiei sale. Nu se recomandă în acest scop a se folosi amplificatoare operaţionale echipate ca derivatoare din următoarele consideraţii :

— derivatorii au tendinţa de a amplifica paraziţii ;

— sensibilitatea mărită la generaţii de înaltă frecvenţă, proprie derivatorilor, poate duce la oscilaţii de înaltă frecvenţă nedorite în dispozitivul de modelare dacă nu se iau măsuri speciale de precauţie. Din aceste cauze, în locul derivatoarelor se folosesc pentru derivare integratoare în montaje speciale.

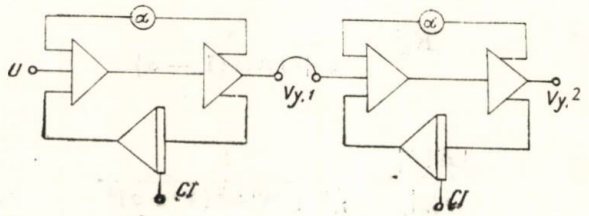


Fig. 2

Pentru derivarea succesivă a traiectoriei T_M descrise de mişcarea punctului M al mecanismului se pot folosi cu rezultate suficient de bune două astfel de montaje devenite clasice, aşezate în serie (fig. 2).

Metoda implicită de derivare prezentată în figura 2 are ca suport teoretic modelarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul unu de forma

$$\frac{dy}{dt}(1-\alpha)+y=u(t), \tag{15}$$

cu condiţia iniţială

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{16}$$

Soluţia ecuaţiei omogene (15) este zero, ceea ce implică lipsa regimului tranzitoriu.

În ceea ce priveşte soluţia ecuaţiei neomogene, ea aproximează funcţia $u(t)$ şi deci $V_{y,1}$ aproximează (cu acelaşi ordin de mărime, deoarece în montaj se folosesc numai integratoare care funcţionează cu eroare foarte mică) derivata funcţiei. Cu alte cuvinte, montajul din figura 2 realizează într-adevăr cu aproximaţie derivata succesivă a semnalului de intrare. Pentru a evalua mărimea erorii comise în operaţia de derivare descrisă mai sus, considerăm că funcţia $u(t)$ poate fi descompusă în serie Fourier (întotdeauna posibil, deoarece funcţiile care exprimă parametrii cinematici ai unui mecanism sînt de obicei periodice şi continue) şi este de forma

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t},$$

cu c_n constante complexe şi ω avînd semnificaţia unei viteze unghiulare constante a manivelei mecanismului.

Căutăm o soluţie a ecuaţiei neomogene Y, a ecuaţiei (15) de forma

$$Y=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n^{(1)} e^{in\omega t}, \tag{17}$$

cu $K_n^{(1)}$ constante complexe.

Introducînd soluţia presupusă Y în ecuaţia (15), obţinem prin identificare constantele

$$K_n^{(1)}=\frac{c_n}{1+in\omega(1-\alpha)} \tag{18}$$

şi deci

$$\frac{|K_n^{(1)}|}{|c_n|}=\frac{1}{\sqrt{1+n^2\omega^2(1-\alpha)^2}}. \tag{19}$$

Defazajul constantei complexe $K_n^{(1)}$ în raport cu c_n este

$$\Phi^{(1)}=\arg K_n^{(1)}-\arg c_n=-\operatorname{arc\,tg} n\omega(1-\alpha). \tag{20}$$

Din relaţiile (19) şi (20) rezultă că, pentru o valoare a lui α foarte apropiată de 1, eroarea comisă devine neglijabilă (în practică se alege însă α de ordinul valorii 0,9). De asemenea rezultă că această metodă de derivare distorsionează armonicile semnalului de intrare proporţional cu rangul ei şi cu viteza unghiulară.

Figura 3 se prezintă cu un montaj utilizat de noi pentru derivarea succesivă a funcţiilor reprezentînd traiectoria unui punct al mecanismului.

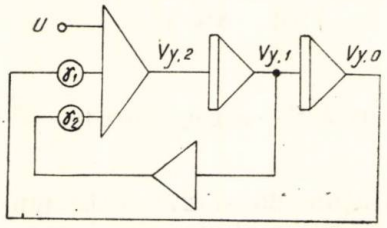


Fig. 3

Montajul din figura 3 modelează ecuaţia diferenţială de ordinul doi cu coeficienţii constanţi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\,\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = u, \tag{21}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = 0\,; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{22}$$

Se observă din figură că potenţiometrele γ_1 şi γ_2 au valorile ω_n^2, respectiv $2\xi\,\omega_n$.

Soluţia ecuaţiei omogene (21) este de forma

$$y_0 = A\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi\right), \tag{23}$$

unde A şi φ sînt constante care depind de frecvenţa naturală de oscilaţie şi de amortizare. Regimul tranzitoriu dat de relaţia (23) este format din oscilaţii de pulsaţie $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, amortizate prin exponenţialele $e^{-\zeta\omega_n t}$.

Se pot alege valori convenabile pentru constantele ζ şi ω_n, astfel încît amortizarea regimului tranzitoriu să se efectueze într-un interval de timp suficient de scurt. În regim permanent, y reproduce funcţia $u(t)$, iar $V_{y,1}$ şi $V_{y,2}$ reprezintă respectiv cele două derivate succesive ale semnalului de intrare.

Pentru a evalua eroarea comisă în reproducerea funcţiei $u(t)$ procedăm analog ecuaţiei de grad unu, adică alegem funcţia $u(t)$ de forma (14), căutînd o soluţie a ecuaţiei neomogene de forma (17)

$$Y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n^{(2)}\,e^{in\omega t}. \tag{24}$$

Introducînd valoarea lui Y dată de relaţia (24) în ecuaţia (21), obţinem prin identificare valorile constantelor complexe :

$$K_n^{(2)} = \frac{c_n}{(\omega_n^2 - n^2\omega^2) + 2\zeta\,\omega_n n\omega i} \tag{25}$$

şi deci

$$\frac{|K_n^{(2)}|}{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2 n^2\omega^2}}. \tag{26}$$

Analog obţinem

$$\Phi^{(2)} = \arg K_n^{(2)} - \arg c_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{-2\zeta\omega_n n\omega}{\omega_n^2 - n^2\omega^2}. \tag{27}$$

Se observă din relaţiile (26) şi (27) că sistemul de ordinul doi distorsionează şi el (analog cu sistemul de ordinul unu) armonicile semnalului de intrare în funcţie de rangul ei şi de frecvenţa la care este pus să lucreze.

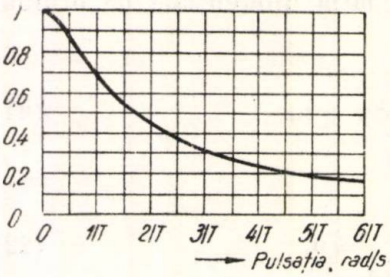


Fig. 4

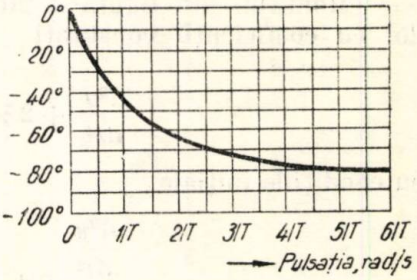


Fig. 5

În figurile 4 şi 5 se reprezintă variaţia în cazul sistemului de ordinul unu a raportului amplitudinilor (relaţia (19) şi a fazei (relaţia (20)) în cazul variaţiei frecvenţei. S-a notat $T = 1 - \alpha$

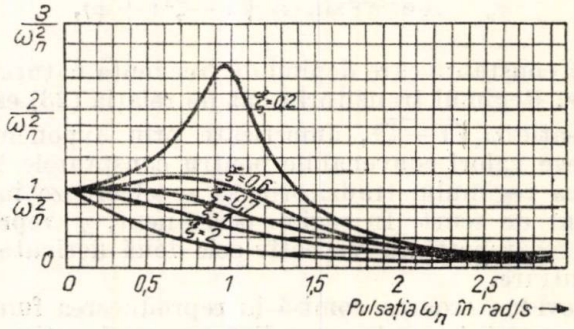


Fig. 6

Figurile 6 şi 7 sînt analoge figurilor 4 şi 5 în cazul sistemului de ordinul doi, caracterizat de ecuaţii diferenţială (21). Se indică pe aceste

figuri, în plus, influența factorului de amortizare care caracterizează sistemul de ordinul doi.

Practic, în studiile noastre am utilizat valoarea 0,9 (asigură o stabilitate mai bună în funcționare) pentru coeficientul α în cazul sistemului de ordinul unu, caracterizat de ecuația (15). Rezultă deci $T = 0{,}1$.

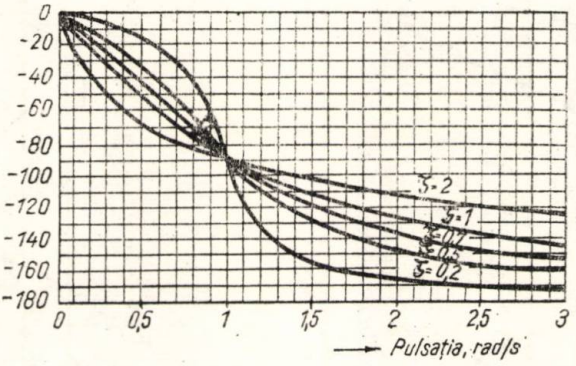


Fig. 7

Pentru sistemul de ordinul doi am ales următoarele valori pentru amortizare și frecvența naturală de oscilație :

$$\xi = 0{,}7\,;\ \omega_n = 31{,}6.$$

Aceste valori asigură o bună stabilitate în funcționare și dau putința cuprinderii unor game suficient de largi de frecvențe, în cadrul cărora sistemul funcționează cu eroare mică. Se observă din figurile 4—7 că pentru valorile alese mărimilor α, ζ și ω_n eroarea cu care funcționează sistemul de ordinul doi este sensibil mai mică în raport cu sistemul de ordinul unu. Se poate considera că în gama de frecvențe 0—3 Hz sistemul de ordinul doi reproduce semnalul de intrare (și deci și derivatele sale succesive) cu o eroare sub 1%.

Ecuația (21), avînd amortizarea și frecvența naturală specificată mai sus, este de forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 44{,}3\frac{dy}{dt} + 1.000\ y = u. \tag{28}$$

Atît la mecanismul bielă-manivelă, cît și pentru mecanismul cu culisă oscilantă, se poate considera $u_{max} = 2\ V$.

Utilizînd transformarea (2) și relațiile (9) și (10), coeficienții de scară de amplitudine sînt

$$a_{u,0} = 5\,;\ a_{y,0} = 5.000\,;\ a_{y,1} = 158\,;\ a_{y,2} = 5$$

și deci ecuația (28), modelată pe calculatorul analogic, este de forma

$$V_{y,2} = V_u - 1{,}4\ V_{y,1} + V_{y,0}. \tag{29}$$

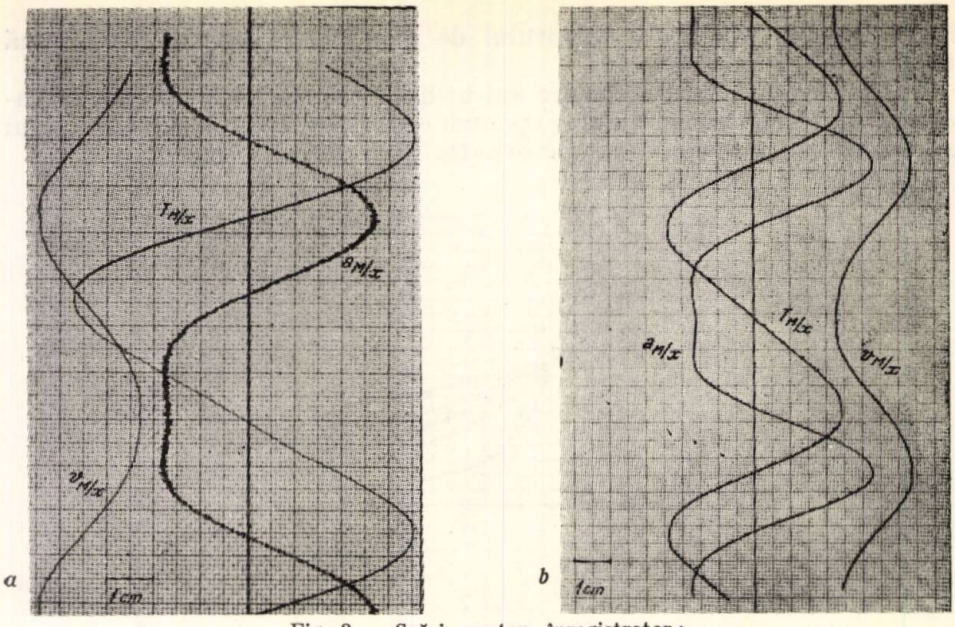


Fig. 8. — Scări pentru înregistrator :

timp	2,5 sm/cm ;	timp	2,5 sm/cm,
traiectorie	2 V/cm ;	traiectorie	2 V/cm,
viteză	0,1 V/cm ;	viteză	0,1 V/cm,
accelerație	0,01 V/cm ;	accelerație	0,01 V/cm.
	a		*b*

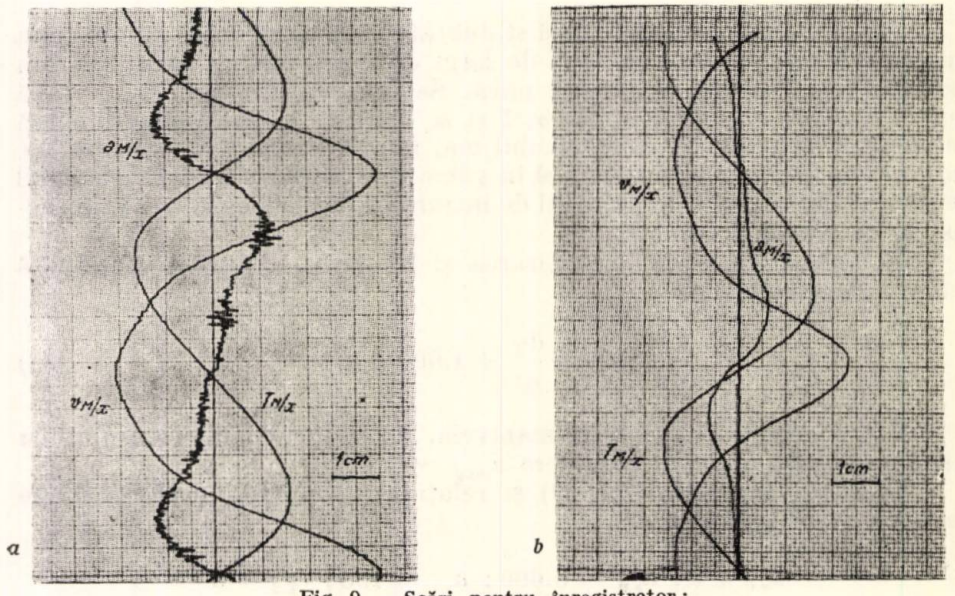


Fig. 9. — Scări pentru înregistrator :

timp	2,5 sm/cm ;	timp	0,2 sm/cm,
traiectorie	1 V/cm ;	traiectorie	1 V/cm ,
viteză	0,2 V/cm ;	viteză	0,1 V/cm,
accelerație	0,2 V/cm ;	accelerație	0,04 V/cm.
	a		*b*

Coeficienții integratoarelor în cazul unui coeficient de scară de timp $a_\lambda = 10$ (se încetinește de zece ori timpul de desfășurare a mișcării mecanismului) sînt calculate cu relația (7):

$$K_{i,1} = 3{,}16\,;\ K_{i,2} = 3{,}16$$

și deci în figura (3), ținînd seama de aceste valori, se poate alege $\gamma_2 = 4{,}43$ și $\gamma_1 = 16$.

În figurile 8 și 9 se prezintă comparativ parametrii cinematici ai mecanismelor bielă-manivelă și culisă oscilantă în derivarea aceluiași semnal (reprezentînd traiectoria) prin cele două scheme de derivare, și anume folosind sisteme de ordinul unu (*a*) și sisteme de ordinul doi (*b*).

Se observă la accelerație stabilitatea mai bună a sistemului de ordinul doi atunci cînd este folosit pentru derivare față de sistemul de ordinul unu. De altfel, acest fapt rezultă și din proprietățile caracteristice sistemelor de ordinul doi:

1. Pentru unele valori ale parametrilor caracteristici, aceste sisteme pot intra în oscilație, spre deosebire de sistemele de ordinul unu. Această proprietate este legată de existența inerției, oscilațiile fiind corespunzătoare unei transformări alternative a energiei potențiale în energie cinetică și invers.

2. Deoarece amortizarea este întotdeauna pozitivă, aceste oscilații sînt întotdeauna amortizate, ceea ce revine a spune că sistemele de ordinul doi sînt *totdeauna stabile.*

4. MODELĂRI DE MECANISME

4.1. MECANISMUL BIELĂ-MANIVELĂ

În figura 10 se prezintă mecanismul bielă-manivelă, indicîndu-se notațiile pe care le utilizăm pentru acest mecanism.

Considerăm viteza unghiulară a manivelei OA constantă:

$$\varphi = \omega\, t.$$

Evident,

$$T_{M|x} = OK + KM,\ T_{M|y} = 0. \tag{30}$$

Din figură rezultă

$$T_{M|x} = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}.$$

Notînd $\lambda = \dfrac{r}{l}$, $\dfrac{1}{12} \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{3}$,

obținem

$$\frac{1}{l}\,T_{M|x} = T^*_{M|x} = \lambda\cos\omega t + \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\omega t}. \tag{31}$$

Utilizînd dezvoltarea radicalului în serie, relaţia (31) devine

$$T^*_{M|x} \cong \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \lambda \cos \omega t + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\,\omega t. \tag{32}$$

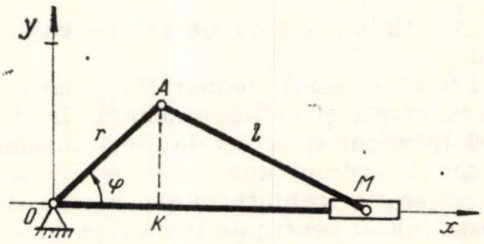


Fig. 10

Aproximaţia dată de relaţia (32) este de obicei suficientă în practică. Derivînd succesiv relaţia (32), obţinem

$$v^*_{M|x} = - \lambda\omega \sin \omega t - \frac{\lambda^2\omega}{2} \sin 2\omega t, \tag{33}$$

$$a^*_{M|x} = - \lambda\omega^2 \cos \omega t - \lambda^2\omega^2 \cos 2\omega t. \tag{34}$$

La momentul $t = 0$ se obţin valorile traiectoriei vitezei şi acceleraţiei de forma :

$$T^*_{M|x}\big|_{t=0} = 1 + \lambda\,; \quad v^*_{M|x}\big|_{t=0} = 0\,; \quad a^*_{M|x}\big|_{t=0} = - \lambda\omega^2 - \lambda^2\omega^2. \tag{35}$$

De asemenea

$$\max T^*_{M|x} = 1 + \lambda\,; \quad \max v^*_{M|x} = \omega\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right); \quad \max a^*_{M|x} = \omega^2(1 + \lambda). \tag{36}$$

Notînd

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{4}\,; \quad \alpha_2 = \lambda\,; \quad \alpha_3 = \frac{\lambda^2}{4}\,, \quad \alpha_4 = \lambda\omega^2, \quad \alpha_5 = \lambda^2\omega^2,$$

$$\alpha_6 = 1 + \lambda\,; \quad \alpha_7 = \omega^2\lambda(1 + \lambda)\,; \quad \alpha_8 = \omega\lambda\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right), \tag{37}$$

rezultă ecuaţia traiectoriei şi acceleraţiei pe care ne propunem să le modelăm de forma

$$T^*_{M|x} = \alpha_1 + \alpha_2 \cos \omega t + \alpha_3 \cos 2\omega t, \tag{38}$$

$$a^*_{M|x} = - \alpha_3 \cos \omega t - \alpha_4 \cos 2\omega t, \tag{39}$$

împreună cu condiţiile iniţiale

$$T^*_{M|x}\big|_{t=0} = \alpha_6\,;\quad a^*_{M|x}\big|_{t=0} = -\alpha_7\,. \tag{40}$$

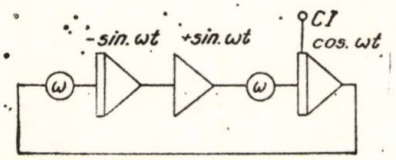


Fig. 11

Funcţia $\cos \omega t$ se modelează la calculatorul analogic utilizînd în acest scop o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi de ordinul doi omogenă :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \tag{41}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0\,;\quad y|_{t=0} = 1. \tag{42}$$

Montajul care modelează această ecuaţie diferenţială este redat în figura 11.

Se procedează analog pentru funcţia $\cos 2\omega t$.

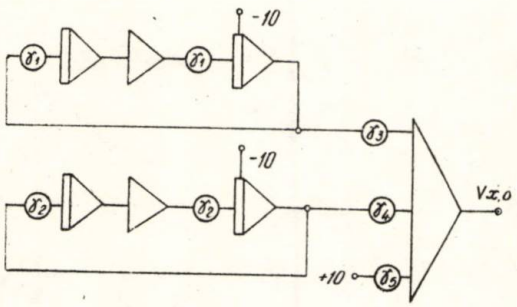


Fig. 12

Programînd ecuaţia traiectoriei $T^*_{M|x}$ la calculator (stabilind deci factori de scară pentru amplitudine şi timp etc.), se obţine montajul din figura 12, unde coeficienţii γ_i sînt daţi de tabela 1.

Tabela 1

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
0,157	0,314	0,222	0,019	0,648

Se obţin astfel diagramele traiectoriei punctului M al mecanismului bielă-manivelă din figura 8, care serveşte drept test pentru alegerea unei scheme de derivare succesivă cît mai bună.

Schema care realizează modelarea acceleraţiei în cazul mecanismului bielă-manivelă este dată în figura 13.

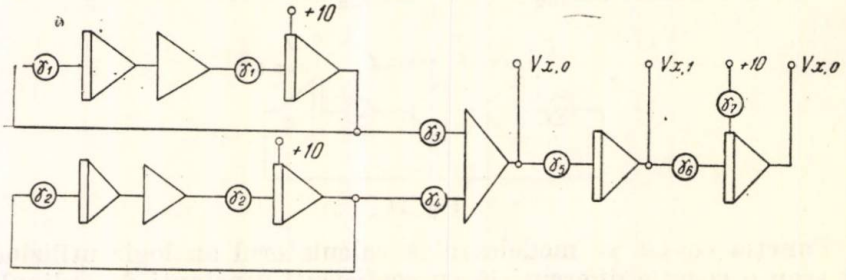


Fig. 13

Coeficienţii γ_i sînt calculaţi în tabela 2 pentru trei valori distincte ale parametrului λ.

Tabela 2

λ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
1/3	0,157	0,314	0,730	0,243	0,150	0,050	0,888
1/5	0,157	0,314	0,4382	0,087	0,150	0,050	0,800
1/8	0,157	0,314	0,274	0,034	0,150	0,050	0,750

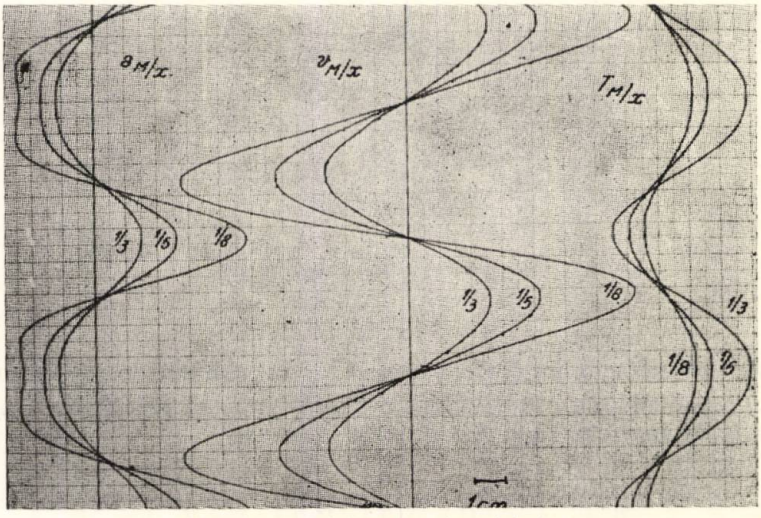


Fig. 14. — Scări pentru înregistrator :

timp	2,5	sm/cm,
traiectorie	1	V/cm,
viteză	1	V/cm,
acceleraţie	2	V/cm.

În figura 14 se prezintă curbele reprezentînd parametrii cinematici ai mecanismului bielă-manivelă pentru valorile $\lambda = 1/3, 1/5, 1/8$ şi corespunzători schemei 13 şi tabelei 2.

4.2. MECANISMUL CU CULISĂ

Mecanismul cu culisă se prezintă în figura 15, specificîndu-se totodată notaţiile folosite în cele ce urmează.

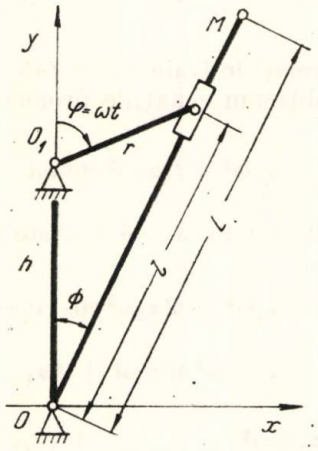


Fig. 15

Din figura 15 rezultă

$$T_{M|x} = L \sin \alpha, \quad T_{M|y} = L \cos \Phi. \tag{43}$$

Notînd $\lambda = \dfrac{r}{h}$, obţinem

$$T_{M|x} = \frac{L\lambda \sin \omega t}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \omega t}}; \quad T_{M|y} = \frac{L(1 + \lambda \cos \omega t)}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \omega t}}. \tag{44}$$

Utilizînd dezvoltarea în serie a radicalului de la numitor, relaţiile (44) devin

$$T_{M|x} \cong \frac{L\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \sin \omega t \left[1 + \frac{3\lambda^2}{4(1 + \lambda^2)} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \cos \omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{3\lambda^2}{4(1 + \lambda^2)} \cos 2\omega t \right], \tag{45}$$

$$T_{M|y} \cong \frac{L}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(\frac{1}{\lambda} + \cos \omega t\right) \left(1 + \frac{3\lambda^2}{4(1 + \lambda^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \cos \omega t + \frac{3\lambda^2}{4(1 + \lambda^2)} \cos 2\omega t \right). \tag{46}$$

Dacă $\lambda < 1$, culisa este oscilantă, iar dacă $\lambda > 1$, culisa devine rotativă. Notăm

$$\alpha_1 = \frac{L\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}};\ \alpha_2 = 1 + \frac{3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)};\ \alpha_3 = \frac{\lambda}{1+\lambda^2};\ \alpha_4 = \frac{3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2}. \quad (47)$$

Derivînd succesiv relaţiile traiectoriei (45) şi (46) şi ţinînd totodată seama de notaţia (47), obţinem ecuaţiile proiecţiilor acceleraţiei pe axe :

$$a_{M|x} = \alpha_1[\sin\omega t(-\alpha_2\omega^2 + 2\alpha_3\omega^2\cos\omega t - 5\alpha_4\omega^2\cos 2\omega t) + \\ + \cos\omega t(2\alpha_3\omega^2\sin\omega t - 4\ \alpha_4\omega^2\sin 2\omega t)], \quad (48)$$

$$a_{M|y} = \alpha_1\cos\omega t(-\alpha_2\omega^2 + 2\alpha_3\omega^2\cos\omega t - 5\alpha_4\cos 2\omega t) + \\ + \sin\omega t(-2\alpha_3\omega^2\sin\omega t + 4\alpha_4\omega^2\sin 2\omega t)] + \quad (49)$$

$$+ \cos\omega t\,\frac{\alpha_1\alpha_3\omega^2}{\lambda} - \cos 2\omega t\,\frac{4\alpha_1\alpha_4\omega^2}{\lambda},$$

cu condiţiile iniţiale

$$v_{M|x}\big|_{t=0} = \alpha_1\omega(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4), \quad (50)$$

respectiv

$$T_{M|y}\big|_{t=0} = \alpha_1\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4).$$

Presupunînd mărimea L egală cu unitatea, coeficienţii α_i sînt daţi de tabela 3 în cazul unei frecvenţe a mişcării mecanismului egală cu 0,5.

Tabela 3

λ	α_1	α_2	α_3	α_4
1/3	0,316	1,067	0,300	0,067
3	0,948	1,067	0,300	0,067

În figura 16 *a* şi *b* sînt prezentate montajele elementelor calculatorului care realizează modelele ecuaţiilor proiecţiilor acceleraţiei $a_{M|x}$, respectiv $a_{M|y}$.

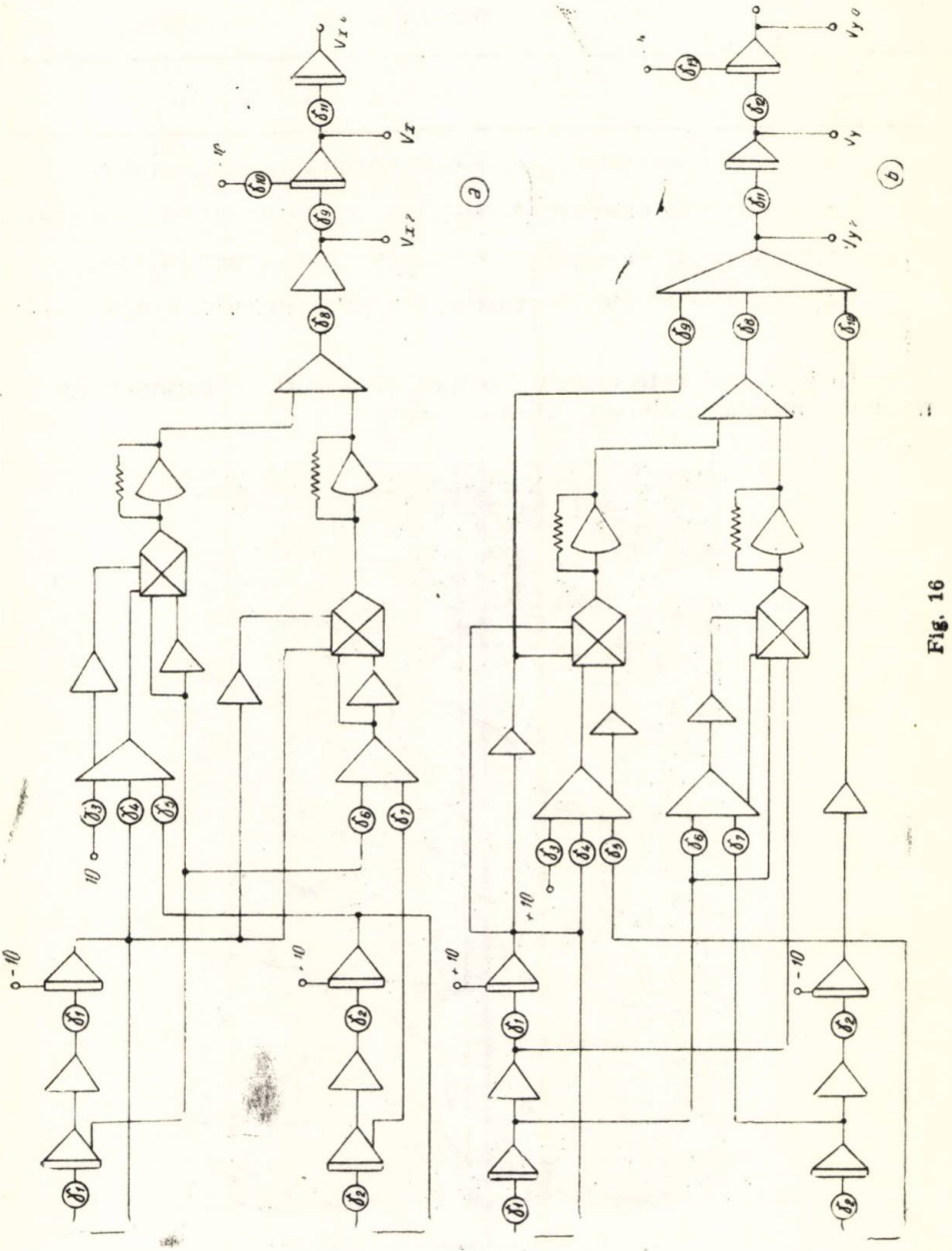


Fig. 16

Coeficienții γ_i sînt calculați în funcție de coeficienții α_i, de factori de scară de amplitudine și timp, fiind redați în tabela 4.

Tabela 4

λ	proiecția	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}
1/3	O_x	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,316	0,100	0,083	0,100		
	O_y	0,314	0,628	0,526	0,297	0,166	0,296	0,133	0,316	0,140	0,126	0,100	0,100	0,053
3	O_x	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,948	0,100	0,249	0,100		
	O_y	0,314	0,628	0,526	0,297	0,166	0,296	0,133	0,948	0,140	0,126	0,100	0,100	0,053

În figura 17 este redată proiecția pe axa O_x a parametrilor cinematici ai mecanismului cu culisă oscilantă.

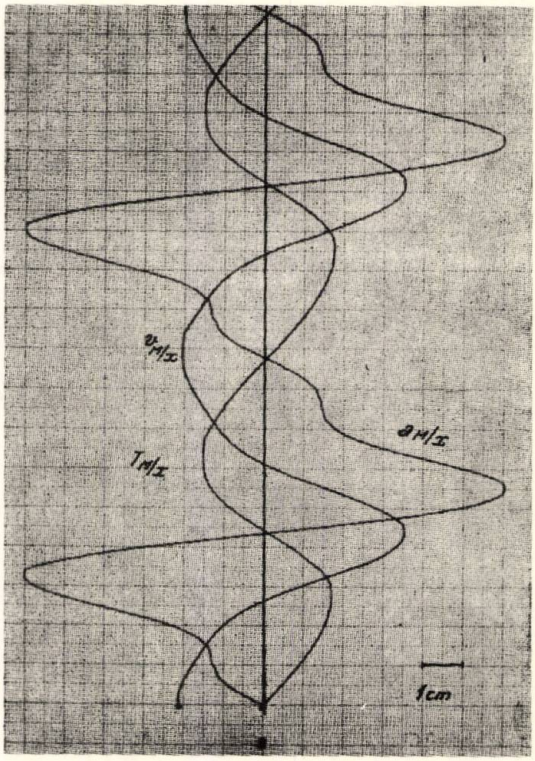


Fig. 17. — Scări pentru înregistrator:

timp	2,5 sm/cm;
traiectorie	0,4 V/cm;
viteză	0,4 V/cm;
accelerație	0,1 V/cm.

4.3. MECANISMUL BIELĂ-MANIVELĂ CU CULISĂ OSCILANTĂ ŞI ROTATIVĂ

Acest mecanism este prezentat în figura 18.

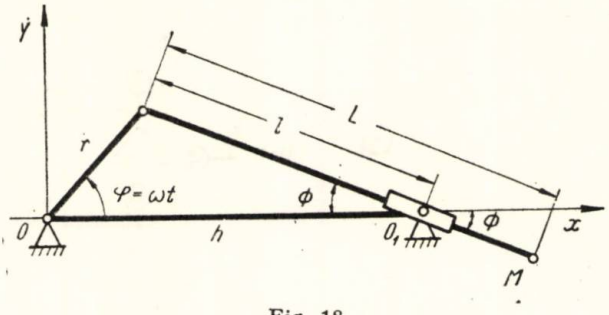


Fig. 18

Din figura 18 rezultă

$$T_{M|x} = h + (L - l)\cos\Phi\,;\quad T_{M|y} = (L - l)\sin\Phi. \tag{51}$$

Cu notaţia $\lambda = \frac{r}{h}$ se obţine

$$T_{M|x} = h + \frac{(L-l)(1-\lambda\cos\varphi)}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}}\,;\quad T_{M|y} = \frac{(L-l)\,\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}}. \tag{52}$$

Dezvoltînd în serie radicalul, obţinem utilizînd notaţiile (47)

$$T_{M|x} = \alpha_1\left(\frac{1}{\lambda} - \cos\omega t\right)(\alpha_2 + \alpha_3\cos\omega t + \alpha_4\cos 2\omega t) + \\ + \begin{cases} h\lambda\cos\omega t & \text{dacă } \lambda < 1, \\ 2h - h\lambda\cos\omega t & \text{dacă } \lambda > 1. \end{cases} \tag{53}$$

Analog

$$T_{M|y} = \alpha_1\sin\omega t(\alpha_2 + \alpha_3\cos\omega t + \alpha_4\cos 2\omega t) - h\lambda\sin\omega t. \tag{54}$$

În funcţie de valoarea lui λ, mecanismul bielă-manivelă va avea culisă oscilantă ($\lambda < 1$) sau rotativă ($\lambda > 1$).

Derivînd succesiv relaţiile traiectoriei (53) şi (54), obţinem ecuaţiile proiecţiei pe axe ale acceleraţiei :

$$a_{M|y} = \alpha_1[\sin\omega t(-\alpha_2\omega^2 - 2\alpha_3\omega^2\cos\omega t - 5\alpha_4\omega^2\cos 2\omega t) + \\ + \cos\omega t\,(-2\alpha_3\omega^2\sin\omega t - 4\,\alpha_4\,\omega^2\sin 2\omega t)] + \\ + h\lambda\sin\omega t, \tag{55}$$

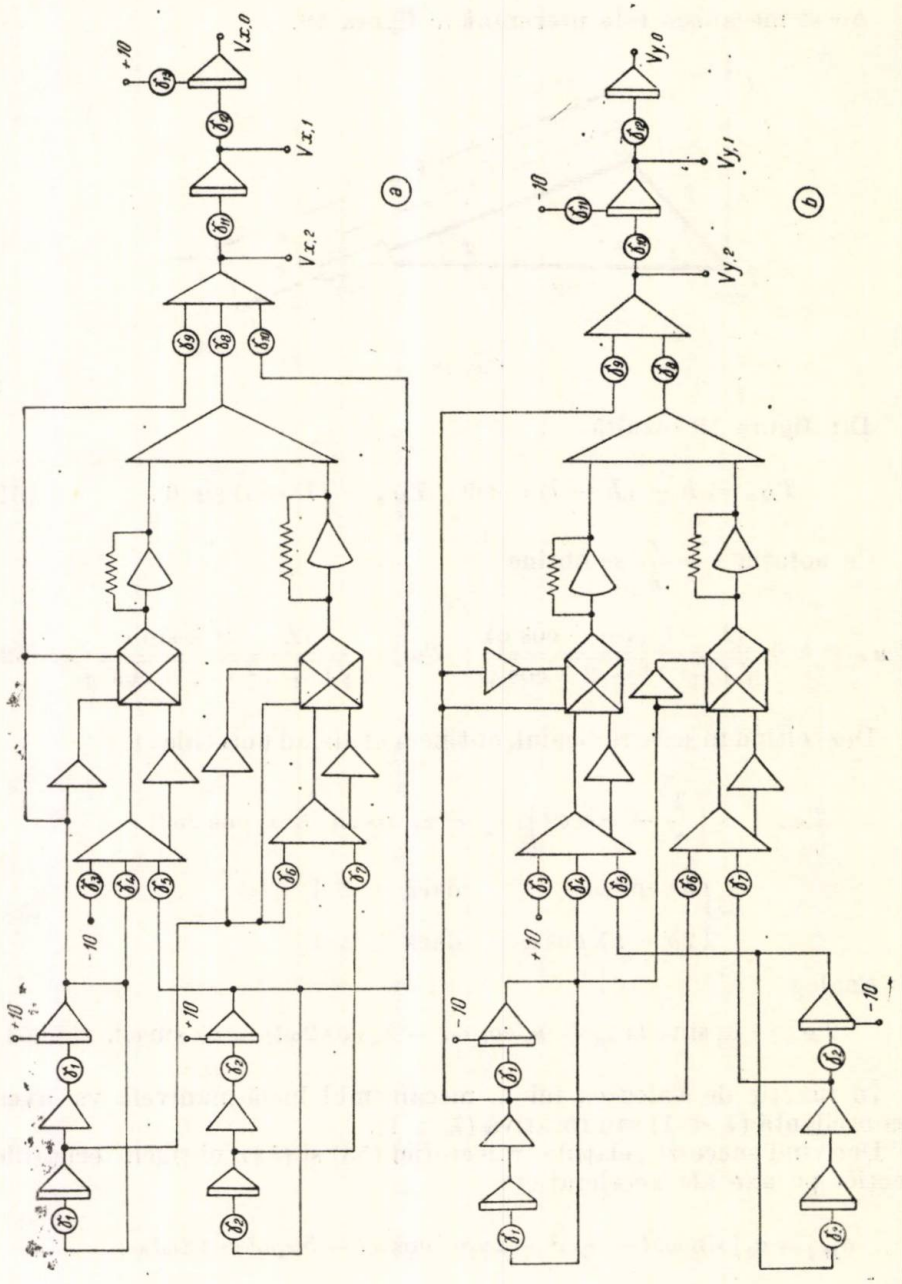


Fig. 19

$$a_{M|x} = \alpha_1 [\cos \omega t(\alpha_2 \omega^2 + 2\alpha_3\omega^2 \cos \omega t + 5\alpha_4\omega^2 \cos 2\omega t) +$$

$$+ \sin \omega t (- 2\alpha_3\omega^2 \sin \omega t - 4\alpha_4\omega^2 \sin 2\omega t)] - \qquad (56)$$

$$- \left(h\lambda\omega^2 + \frac{\alpha_1\alpha_3\omega^2}{\lambda}\right) \cos \omega t + \begin{cases} - \dfrac{4\alpha_1\alpha_4\omega^2}{\lambda} \cos 2\omega t \text{ dacă } \lambda < 1, \\ + \dfrac{4\alpha_1\alpha_4\omega^2}{\lambda} \cos 2\omega t \text{ dacă } \lambda > 1), \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale

$$T_{M|x}|_{t=0} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 - h\lambda), \qquad (57)$$

respectiv

$$v_{M|y}|_{t=0} = \alpha_1\omega(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - h\lambda\omega. \qquad (58)$$

Valorile coeficienţilor α_i sînt cele din tabela 3.

În figura 19 *a* şi *b* se prezintă montajele realizate pe calculatorul analogic pentru modelarea relaţiilor 55, respectiv 56.

Coeficienţii γ_i rezultă din tabela 5, funcţie de factorii de scară şi de coeficienţii α_i

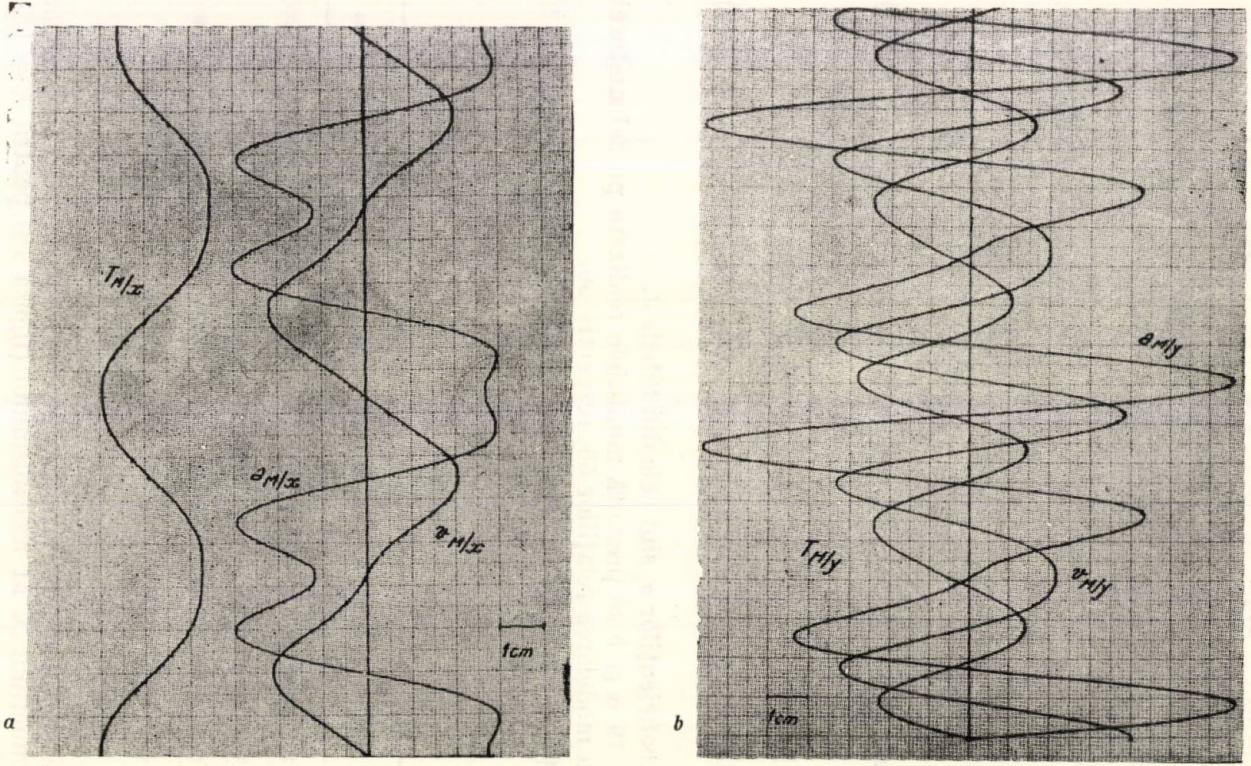
Tabela 5

λ	proiecţia	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}
1/3	O_x	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,316	0,305	0,126	0,200	0,200	0,266
	O_y	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,316	0,164	0,200	0,038	0,200	——
3	O_x	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,949	0	0,126	0,200	0,200	0,400
	O_y	0,314	0,628	0,526	0,296	0,166	0,296	0,133	0,949	0,164	0,200	0,323	0,200	

În figurile 20 şi 21 sînt reprezentate proiecţiile pe axe ale parametrilor cinematici ai punctului M al mecanismului (figura 18) pentru $\lambda = 1/3$, respectiv $\lambda = 3$.

Primită la redacţie la 31 decembrie 1968

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948 BUDAPEST



a *b*

Fig. 20. — Scări pentru înregistrator :

timp	2,5 sm/cm ;	timp	2,5 sm/cm,
traiectorie	0,4 V/cm ;	traiectorie	0,05 V/cm,
viteză	0,4 V/cm ;	viteză	0,1 V/cm,
accelerație	0,4 V/cm ;	accelerație	0,2 V/cm ;
	a		*b*

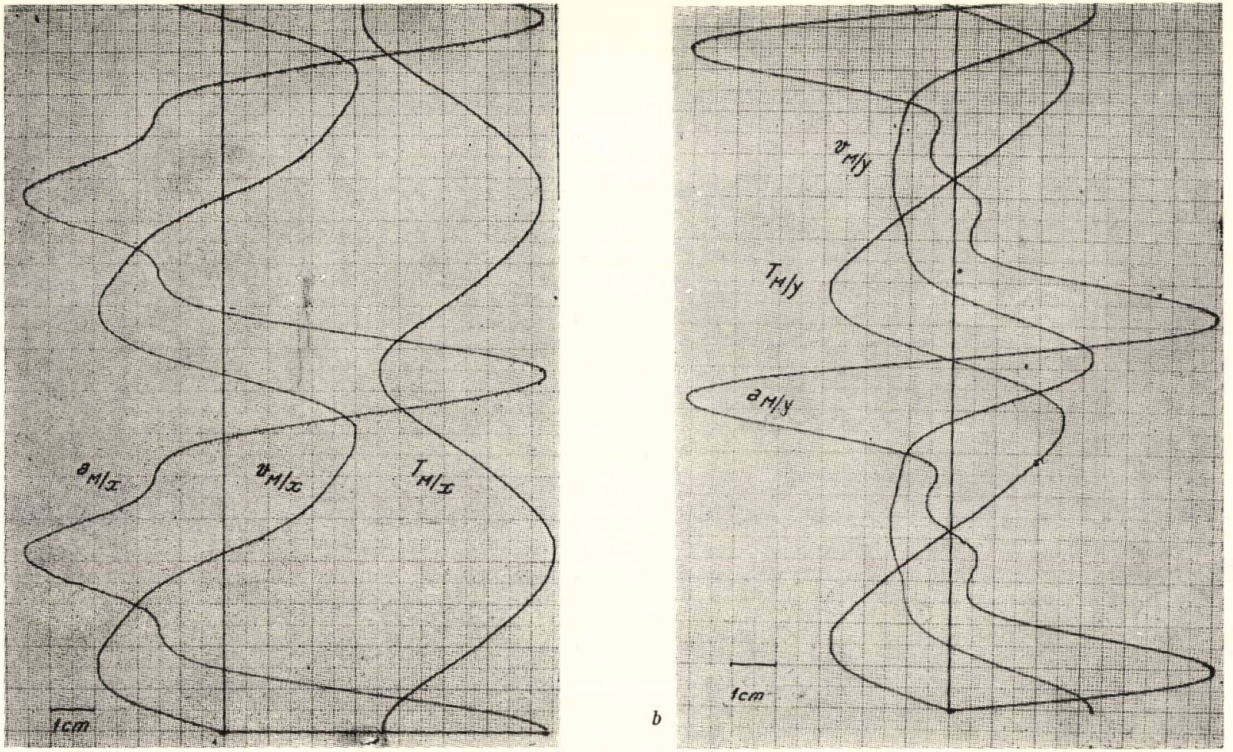
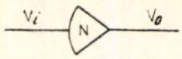
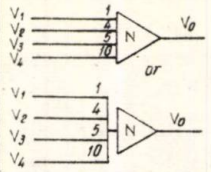
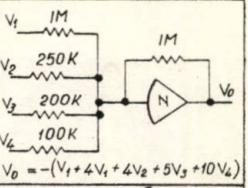
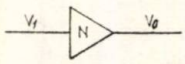
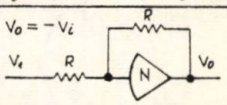
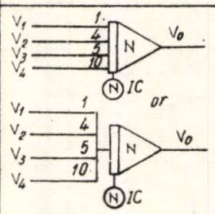
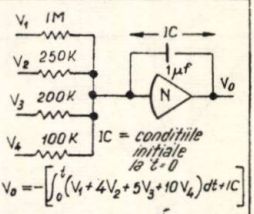
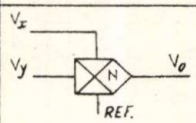
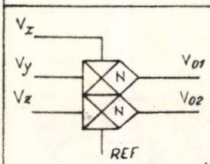
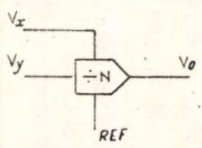
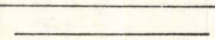
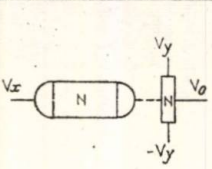
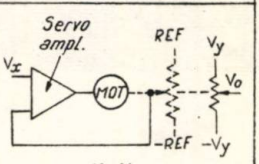
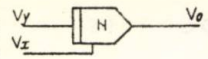
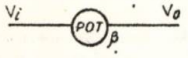
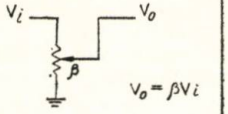
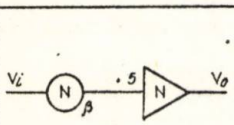
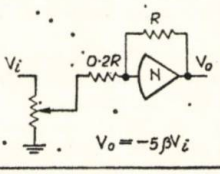
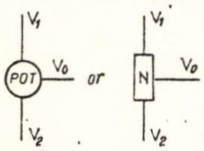
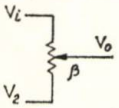
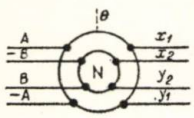
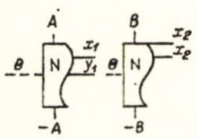
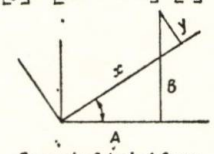
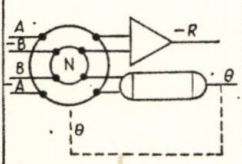
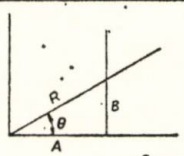
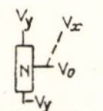
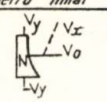


Fig. 21. — Scări pentru înregistrator :

timp	2,5 sm/cm ;	timp	2,5 sm/cm,
traiectorie	1 V/cm ;	traiectorie	0,5 V/cm,
viteză	1 V/cm ;	viteză	1 V/cm,
accelerație	1 V/cm ;	accelerație	1 V/cm.
	a		*b*

Elementul de calcul	Simbol	Explicație
Amplificator operațional (Calculator analogic)		$V_0 = -KV_i$ K = câștigul cu bucla deschisă
Amplificator sumator		 $V_0 = -(V_1 + 4V_1 + 4V_2 + 5V_3 + 10V_4)$
Amplificator inversor		 $V_0 = -V_i$
Amplificator integrator		 IC = condițiile inițiale la $t = 0$ $V_0 = -\left[\int_0^t (V_1 + 4V_2 + 5V_3 + 10V_4)dt + IC\right]$
Multiplicator electronic		$V_0 = \frac{V_x V_y}{REF}$
Două produse dependente.		$V_{01} = \frac{V_x V_y}{REF}$ $V_{02} = \frac{V_x V_z}{REF}$
Împărțitor		$V_0 = \frac{V_y REF}{V_x}$
Generator electronic de funcțiuni		$V_0 = f(V_x)$
Conexiuni electrice		
Conexiuni mecanice.		
Servo multiplicator.		 $V_0 = \frac{V_x V_y}{REF}$

Elementul de calcul	Simbol	Explicație
Integrator generalizat		$V_o \int_{X_1}^{X_2} V_y \, dx$
Potențiometru pus la masă.		 $V_o = \beta V_i$
Potențiometru folosit cu amplificator operațional (tipic)		 $V_o = -5\beta V_i$
Potențiometru nepus la masă.		 $V_o = \beta V_1 + (1-\beta) V_2$
Rezolver (rectangular)	 or 	$x = x_1 + x_2$; $x_1 = A\cos\theta$ $x_2 = B\sin\theta$ $y = y_1 + y_2$; $y_1 = -A\sin\theta$ $y_2 = B\cos\theta$ or $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  Se poate folosi și forma dreptunghiulară.
Rezolver (polar)		 $\theta = \text{arc.tg.} \frac{B}{A}$ $R = \sqrt{A^2 + B^2}$
Servo-potențio-metru	 Potențiometru liniar	$V_o = \frac{V_x V_y}{REF}$
	 Potențiometru funcțiune sau Potențiometru cu prize	$V_o = \frac{V_y f(V_x)}{REF}$

N = numărul de identificare al unității de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. ARTOBOLEVSKI I. I., *Teoria mehanizmov i maşin*, Moscova, Gos. izd. tehn.-teor. lit., 1953.
2. BOIANGIU D., E. NICOLAU, C. NIŢĂ, *Instrumente, dispozitive şi maşini matematice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
3. GROSSLEY F. E., *Modelirovanie dvijenii ploskih cetirehsvennih mehanizmov na elektronnoi analogovoi maşine*, în *Sovremennie problemi teorii maşin i mehanizmov*, Moscova, Izdat. „Nauka", 1965, p. 162—171.
4. KELLER R. E., *The Study of Spatial Mechanismus by electronic analog computer*, Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, Series 1388, *3*, 301—310 (1966).
5. KORN A. GRANINO, KORN M. THERESA, *Electronic analog computers*, McGraw-Hill Book Comp., New York-Toronto—Londra, 1965.
6. PAUL R. J. A., *Fundamental analogue Techniques*, Londra—Glasgow, Blakie and Son, 1965.
7. PLANDER JOAN, TOMAS JOZEF, *Analysis of Mechanisms with lower pairs by means of electronic analog computers*, lucrare prezentată la Conferința de mecanică, Bucureşti, 1965, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **12**, *3*, 643—661 (1967).

CALCULUL RANDAMENTULUI ŞI BILANŢUL ENERGETIC TRANSMISIILOR PRIN CURELE

de IOSIF EGRI
Institutul politehnic Galaţi

În prezent, din lipsa de formule practice de calcul, aprecierea randamentului transmisiilor prin curele se face prin aproximaţie. Alegerea arbitrară a randamentului pe baza unor criterii empirice poate duce la rezultate neraţionale şi cu totul neeconomice.
În această lucrare se dau formule pentru calculul pierderilor datorite frecărilor în lagăre, rigidităţii curelei, frecării curelei pe roată prin alunecare elastică şi prin patinare, prin histerezis şi datorită rezistenţei aerului şi se stabileşte o metodă unitară şi generală pentru calculul randamentului transmisiilor prin curele.
Ecuaţia bilanţului energetic, stabilită în această lucrare, este valabilă pentru toate tipurile de transmisie prin curele şi permite efectuarea unui studiu al pierderilor, stabilirea influenţei diverşilor factori asupra randamentului şi, în consecinţă, adoptarea celor mai raţionale soluţii din punct de vedere tehnic şi economic.

1. GENERALITĂŢI

Deşi transmisiile prin curele au un domeniu larg de utilizare şi cantitatea de energie transmisă cu aceste mijloace este mare, totuşi în literatura tehnică de specialitate se găsesc prea puţine indicaţii şi date în legătură cu randamentul şi cu bilanţul energetic al transmisiilor prin curele. De obicei ele se limitează la enunţarea, de cele mai multe ori parţială, a pierderilor şi a cauzelor care le provoacă şi uneori la indicarea limitelor între care variază aceste pierderi.

Stabilirea soluţiei optime la proiectarea şi dimensionarea transmisiilor şi realizarea unei eficienţe economice ridicate impun folosirea unor metode mai precise şi mai raţionale pentru calculul pierderilor de energie şi al randamentului transmisiilor prin curele.

★

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1123–1145

În transmisiile prin curea au loc următoarele pierderi :
— pierderi datorite frecării în lagăre (F_{rl}, F_{al}) ;
— pierderi datorite rigidității curelei (F_{rr}, F_{ar}) ;
— pierderi prin frecarea curelei pe roată datorită alunecării elastice (F_{ra}, F_{aa}) ;
— pierderi prin frecarea curelei pe roată datorită patinării (F_{rf}, F_{af}) ;
— pierderi prin histerezis (F_{rh}, F_{ah}) ;
— pierderi datorite rezistenței aerului (F_{rv}, F_{av}) ;
— pierderi datorite unor rezistențe accidentale (F_{ri}, F_{at}).

Pierderile depind de construcția și de execuția roților și a curelei, de încărcarea transmisiei (tensiunile în ramurile curelei), de starea instalației, de condițiile de lucru și de regimul de exploatare.

Referindu-ne la roata de rezistență-condusă (fig. 1) și notînd

F_u — forța periferică utilă la roata condusă $\left(F_u = \frac{M_u}{R_r}\right)$,

F_{rp} — pierderea totală de la roata condusă, redusă la periferia roții,

F_r — forța periferică totală (reală) de la roata condusă ($F_r = F_u + F_{rp}$),

v_r — viteza periferică a roții conduse,

P_u — puterea utilă la arborele roții conduse ($P_u = F_u \cdot v_r$),

P_r — puterea consumată pentru acționarea roții conduse ($P_r = F_r \cdot v_r$),

k_{rp} — coeficientul de pierdere total al roții conduse $\left(k_{rp} = \frac{F_{rp}}{F_u}\right)$,

k_r — factorul de pierdere al roții conduse ($k_r = 1 + k_{rp}$),

randamentul roții conduse este

$$\eta_{lr} = \frac{P_u}{P_r} = \frac{F_u}{F_r} = \frac{F_u}{F_u + F_{rp}} = \frac{1}{1 + k_{rp}} = \frac{1}{k_r}. \tag{1}$$

Pentru roata motoare-conducătoare (fig. 1), notînd

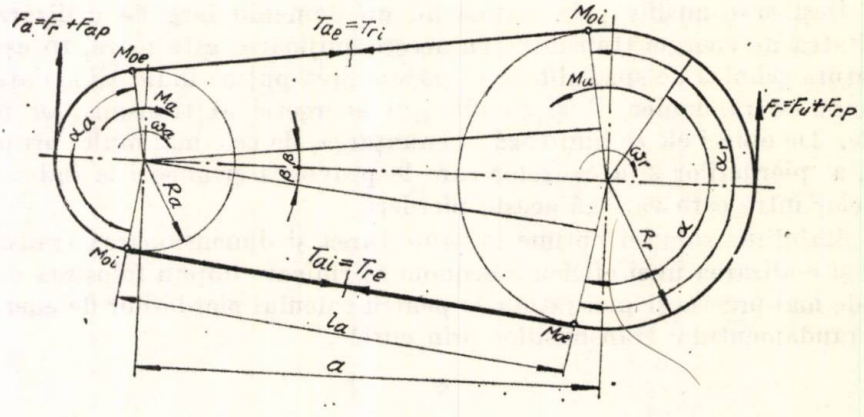


Fig. 1

F_{at} — forţa periferică teoretică de acţionare ($F_{at} = F_r$),
F_{ap} — pierderea totală de la roata motoare redusă la periferia roţii,
F_a — forţa periferică reală de acţionare a roţii motoare ($F_a = F_r + F_{ap}$),
v_a — viteza periferică a roţii conducătoare,
P_{at} — puterea utilă la arborele roţii motoare ($P_{at} = F_r \cdot v_a$),
P_a — puterea consumată pentru acţionarea roţii motoare ($P_a = F_a \cdot v_a$),
avem de asemenea

$$\eta_a = \frac{P_{at}}{P_a} = \frac{F_r}{F_a} = \frac{F_r}{F_r + F_{ap}} = \frac{1}{1 + k_{ap}} = \frac{1}{k_a}. \tag{2}$$

Randamentul întregii transmisii — raportul dintre puterea utilă la arborele roţii conduse şi puterea consumată la arborele roţii motoare — este

$$\eta_{ar} = \frac{P_u}{P_a} = \frac{F_u}{F_a} \cdot \frac{v_r}{v_a} = \frac{F_u}{F_a}(1 - \psi), \tag{3}$$

unde ψ este alunecarea specifică prin patinare $\left(\psi = 1 - \frac{v_r}{v_a}\right)$.

În cazul transmisiilor fără patinarea curelei sau cu o patinare neglijabilă ($v_r \approx v_a$, respectiv $\psi \approx 0$), avem

$$\eta_{ar} \approx \frac{F_u}{F_a}. \tag{3'}$$

Întrucît transmisia prin curele are două roţi cu mişcări distincte, pentru a arăta influenţa fiecărei roţi asupra randamentului este mai avantajos să exprimăm randamentul global al transmisiei ca produsul randamentelor celor două roţi :

$$\eta_{ar} \approx \frac{F_u}{F_r} \cdot \frac{F_r}{F_a} = \eta_r \cdot \eta_a. \tag{3''}$$

2. PIERDERILE ŞI RANDAMENTUL ROŢII CONDUSE

2.1. PIERDERILE DATORITE FRECĂRII ÎN LAGĂRE

Frecarea în lagăre, redusă la periferia roţii conduse (fig. 2), este

$$F_{rl} = \mu_{rl} N \frac{r_r}{R_r}, \tag{4}$$

unde N este apăsarea totală pe lagăre și μ_{rl} coeficientul de frecare de alunecare din lagăre.

Apăsarea totală N este

$$N = \frac{f}{m-1} F_r = \frac{f}{m-1} k_r F_u, \tag{5}$$

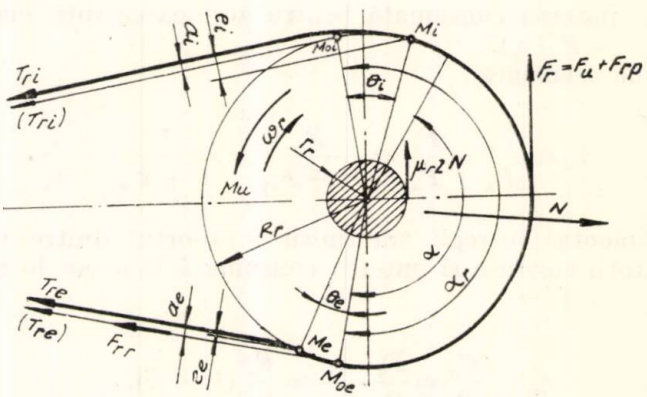


Fig. 2

unde

$$m = e^{\mu_c \alpha},$$

$$f = \sqrt{m(m + 2\cos\beta) + 1} \leqslant m + 1,$$

α este arcul de alunecare (radiani),

β — unghiul de înclinație a ramurilor de curea față de axa longitudinală a transmisiei,

μ_c — coeficientul de frecare de alunecare a curelei pe coroana roții.

Arcul de alunecare este

$$\alpha = \frac{1}{\mu_c} \cdot \ln \frac{\sigma_{t_{max}}}{\sigma_{t_{min}}} = \frac{1}{\mu_c} \cdot \ln \frac{\sigma_0 + 0{,}5\,\sigma_r}{\sigma_0 - 0{,}5\,\sigma_r}, \tag{6}$$

unde

σ_0 este tensiunea inițială de montaj a curelei $\left(\sigma_0 = \frac{T_0}{A}\right)$,

σ_r — tensiunea corespunzătoare sarcinii $\left(\sigma_r = \frac{F_r}{A}\right)$.

Prin urmare, relația (4) devine

$$F_{rl} = \mu_{rl} \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_r}{R_r} \cdot k_r \cdot F_u. \tag{4'}$$

Coeficientul de pierdere prin frecări în lagărele roţii conduse este

$$k_{rl} = \frac{F_{rl}}{F_u} = \mu_{rl} \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_r}{R_r} \cdot k_r. \tag{7}$$

Relaţia (7) este utilizabilă şi în cazul lagărelor de rostogolire. În acest caz, în locul coeficientului de frecare de alunecare μ_{rl} se introduce în formula (7) un coeficient de frecare echivalent.

2.2. PIERDERILE DATORITE RIGIDITĂŢII CURELEI

Datorită rigidităţii curelei, punctele reale de contact ale curelei la intrarea şi la ieşirea de pe roată (fig. 2 şi 3) se deplasează cu unghiurile θ_i, respectiv θ_e faţă de punctele teoretice de tangenţă; ramura trasă (T_{rt}) se îndepărtează de roată, iar ramura trăgătoare (T_{re}) se apropie de roată.

Mărirea braţului tensiunii din ramura trasă (T_{rt}) şi micşorarea braţului tensiunii din ramura trăgătoare (T_{re}) dau naştere unui moment rezistent suplimentar, respectiv unei rezistenţe suplimentare (F_{rr}).

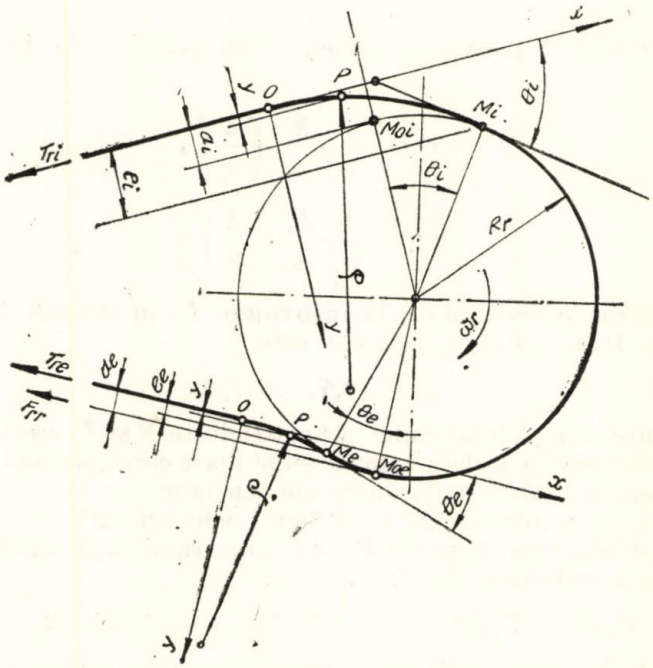


Fig. 3

Pierderile datorite rigidităţii curelei se exprimă în funcţie de coeficienţii de rigiditate $C_{rt} = \frac{e_i}{R_r}$ şi $C_{re} = \frac{e_e}{R_r}$.

Deplasările transversale e_i și e_e se stabilesc cu ajutorul ecuației liniei elastice a curelei (fig. 3) :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_i I}, \tag{8}$$

unde

ρ este raza de curbură a curelei pe porțiunea de racordare la roată ($\infty > \rho > R_r$),
M — momentul încovoietor în punctul cu raza ρ ($M = T \cdot y$),
E_i — modulul de elasticitate la încovoiere a curelei,
I — momentul de inerție a secțiunii transversale a curelei.

Aplicînd această ecuație pentru punctele reale de contact cu roata (M_i și M_e), pentru care $\rho = R_r$ și $y = e_i$, respectiv $y = e_e$, rezultă

$$e_i = \frac{E_i I}{T_{ri} R_r}, \tag{9}$$

$$e_e = \frac{E_i I}{T_{re} R_r}. \tag{10}$$

Notînd cu δ grosimea curelei, avem pentru cele două ramuri ale curelei

$$C_{ri} = \frac{1}{3} \cdot \frac{E_i}{\sigma_i} \cdot \left(\frac{\delta}{D_r}\right)^2,$$

$$C_{re} = \frac{1}{3} \cdot \frac{E_i}{\sigma_e} \cdot \left(\frac{\delta}{D_r}\right)^2.$$

Modulul de elasticitate la încovoiere E_i în funcție de modulul de elasticitate E la întindere a curelei este

$$E_i = (0{,}5 \ldots 0{,}7)\, E.$$

La curele de piele modulele de elasticitate E și E_i cresc cu tensiunea (σ) și cu vechimea curelei : valorile superioare corespunzînd pentru curele vechi și pentru limitele superioare ale tensiunii (fig. 4).

De obicei se admite [2] $E_i = 300 \ldots 900$ kgf/cm^2.

Rezistența suplimentară F_{rr} datorită rigidității curelei se deduce din ecuația de echilibru (fig. 2 și 3)

$$F_{rr} R_r + T_{re}(R_r - a_e) - T_{ri}(R_r + a_i) - F_r \cdot R_r = 0, \tag{11}$$

unde a_i și a_e sînt deplasările transversale ale curelei față de punctele teoretice de contact la intrarea, respectiv la ieșirea de pe roată.

Cu ajutorul ecuației diferențiale a razei de curbură

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\rho}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

calculăm unghiurile de decalaj θ_i și θ_e ale punctelor reale de contact față de cele teoretice și, în consecință, deplasările transversale a_i și a_e.

Întrucît

$$\frac{1}{\rho} = \frac{T}{E_t I} \cdot y = \frac{1}{C_r \cdot R_r^2} \cdot y,$$

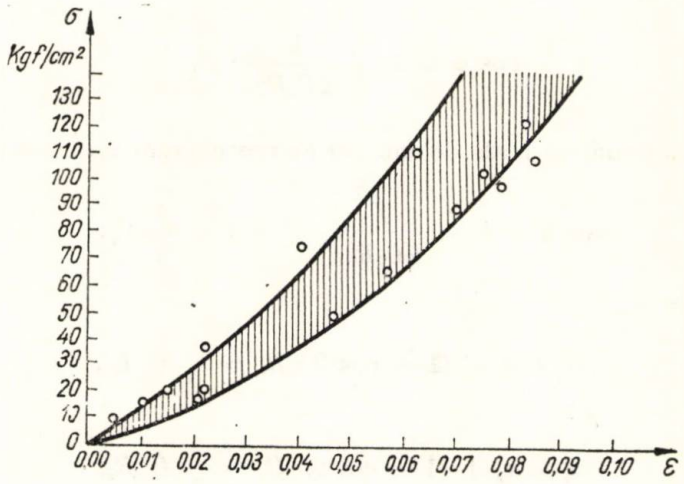


Fig. 4

rezultă

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{C_r \cdot R_r^2} \cdot y \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Integrînd, obținem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \left(C - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot y^2\right)^2}}{C - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot y^2}.$$

Întrucît pentru $x = 0$ avem $y = 0$ și $\frac{dy}{dx} = 0$, rezultă $C = 1$.

Prin urmare,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot y^2\right)^2}}{1 - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot y^2}.$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Deci

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot y^2.$$

Pentru punctele reale de contact cu roata avem $\varphi = \theta$ şi $y = e$, deci

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2C_r R_r^2} \cdot e^2 = 1 - \frac{1}{2} C_r.$$

Prin urmare

$$a_i = e_i - (1 - \cos \theta_i) R_r = \frac{1}{2} C_{ri} R_r,$$

$$a_e = e_e + (1 - \cos \theta_e) R_r = \frac{3}{2} C_{re} R_r.$$

Întrucît $T_{re} - T_{ri} = F_r$, din ecuaţia de echilibrare a momentelor (11) rezultă

$$F_{rr} = \frac{1}{2} C_{ri} T_{ri} + \frac{3}{2} C_{re} T_{re}.$$

De asemenea, din expresiile (9) şi (10) ale deplasărilor transversale e_i şi e_e rezultă

$$C_{ri} T_{ri} = C_{re} T_{re},$$

deci

$$F_{rr} = 2C_{ri} T_{ri}.$$

Întrucît

$$T_{ri} = \frac{1}{m - 1} \cdot F_r = \frac{1}{m - 1} \cdot k_r F_u,$$

rezultă

$$F_{rr} = 2C_{ri} \frac{1}{m - 1} \cdot k_r F_u.$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere prin rigiditatea curelei la roata condusă este

$$k_{rr} = \frac{F_{rr}}{F_u} = 2C_{rt}\frac{1}{m-1}\cdot k_r. \tag{13}$$

2.3. PIERDERILE PRIN FRECAREA CURELEI PE COROANĂ DATORITĂ ALUNECĂRII ELASTICE

Alunecarea elastică (fig. 1 şi 2) are loc pe o porţiune de arc α în general mai mică decît arcul de înfăşurare α_r, de-a lungul căreia tensiunea curelei creşte de la T_{rt} la T_{re}.

Alungirea elastică totală a curelei Δl_r pe lungimea totală de alunecare $l_r = \alpha R_r$ sub acţiunea diferenţei de tensiune $\Delta T_r = T_{re} - T_{rt} = F_r$ este

$$\Delta l_r = \frac{F_r l_r}{AE} = \frac{k_r F_u \cdot \alpha_r R_r}{AE}$$

unde A este secţiunea transversală a curelei.

Lucrul mecanic de frecare prin alunecarea elastică a curelei pe coroană este

$$L_{ra} = \frac{1}{2}\mu_c N \cdot \Delta l_r = \frac{1}{2}\mu_c \frac{f}{m-1}\cdot\frac{k_r^2 F_u^2}{AE}\cdot \alpha R_r. \tag{14}$$

Lucrul mecanic echivalent produs de rezistenţa suplimentară F_{ra} pe arcul de alunecare $l_r = \alpha R_r$ este

$$F_{ra}\cdot \alpha R_r = L_{ra}, \tag{14'}$$

de unde

$$F_{ra} = \mu_c \frac{f}{m-1}\cdot\frac{F_u^2}{2AE}\cdot k_r^2.$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere prin frecarea curelei pe coroană datorită alunecării elastice este

$$k_{ra} = \frac{F_{ra}}{F_u} = \mu_c \frac{f}{m-1}\cdot\frac{F_u}{2AE}\cdot k_r^2. \tag{15}$$

Se observă că pierderile prin alunecare elastică cresc cu încărcarea roţii conduse (F_u) şi scad o dată cu creşterea vechimii curelei (E).

2.4. PIERDERILE PRIN FRECAREA CURELEI PE COROANĂ DATORITĂ PATINĂRII

Patinarea curelei, caracterizată prin alunecarea întregii curele pe roată, apare numai atunci cînd momentul rezistent depăşeşte momentul limită transmis prin frecare :

$$M_r = F_r \cdot R_r = (T_{re} - T_{ri})\, R_r \geqslant (e^{\mu_c \alpha_r} - 1)\, T_{ri} \cdot R_r.$$

Aşadar, patinarea începe numai cînd $T_{re} \geqslant T_{ri}\, e^{\mu_c \alpha_r}$, respectiv cînd arcul de alunecare α depăşeşte arcul de înfăşurare : $\alpha \geqslant \alpha_r$.

Lucrul mecanic de frecare prin patinarea curelei este

$$L_{rf} = F_{rf} \cdot \alpha_r R_r = \mu_c N \cdot \Delta S_r, \tag{16}$$

unde ΔS_r este cursa de patinare a curelei pe roata condusă.

Notînd cu S_c spaţiul parcurs de un punct de pe curea care se deplasează cu viteza v_c şi cu $S_r = \alpha_r R_r$ spaţiul corespunzător parcurs de acelaşi punct de pe roată care se deplasează cu viteza periferică v_r, cursa de patinare este

$$\Delta S_r = S_c - S_r = \frac{v_c}{v_r} S_r - S_r = \left(\frac{v_c}{v_r} - 1\right) S_r.$$

Avem

$$v_r = (1 - \psi)\, v_a,$$

$$v_c = 1 - \frac{1}{2}\,(\psi_r + \psi)\, v_a,$$

unde ψ_r şi ψ sînt alunecările specifice prin patinare ale curelei corespunzătoare unghiurilor α_r şi α.

Alunecările specifice se stabilesc practic din „curba de alunecare" :

$$\psi = f(\varphi),$$

unde $\varphi = \dfrac{e^{\mu_c \alpha} - 1}{e^{\mu_c \alpha} + 1}$ este coeficientul de încărcare (tracţiune) a curelei.

Alunecarea specifică ψ creşte cu încărcarea φ a curelei.

În general [2], $\psi < 0{,}005 \ldots 0{,}03$.

În expresia lui ΔS_r, substituind valorile lui v_c, v_r şi S_r, rezultă

$$\Delta S_r = \frac{\psi - \psi_r}{2(1 - \psi)} \cdot \alpha_r R_r.$$

Prin urmare, relaţia (16) devine

$$L_{rf} = F_{rf} \cdot \alpha_r R_r = \mu_c \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{\psi - \psi_r}{2(1-\psi)} \cdot k_r F_u \cdot \alpha_r R_r, \qquad (16')$$

de unde rezultă rezistenţa suplimentară F_{rf} datorită frecării prin patinarea curelei :

$$F_{rf} = \mu_c \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{\psi - \psi_r}{2(1-\psi)} \cdot k_r F_u .$$

Deci coeficientul de pierdere prin patinare este

$$k_{rf} = \frac{F_{rf}}{F_u} = \mu_c \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{\psi - \psi_r}{2(1-\psi)} \cdot k_r . \qquad (17)$$

La calcule mai exacte se ţine seama şi de pierderea suplimentară datorită masei proprii a curelei.

2.5. PIERDEREA PRIN HISTEREZIS

Pierderea prin histerezis însoţeşte inevitabil procesul complex de transmitere a puterii prin transmisie de curea. Datorită fenomenului de

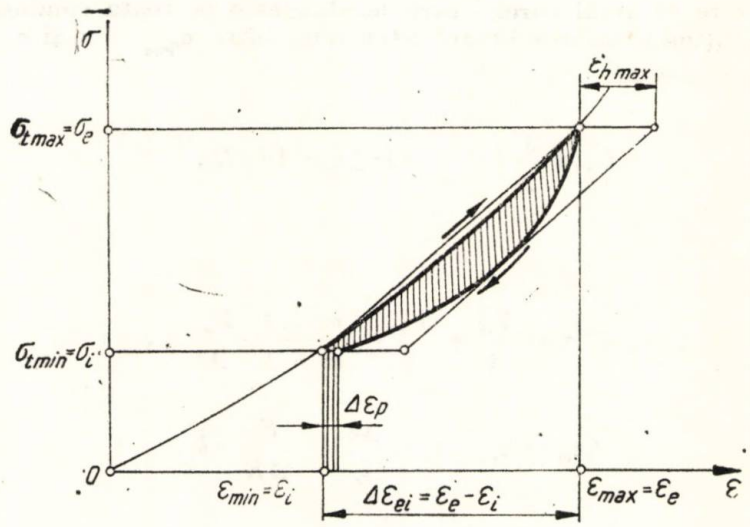


Fig. 5

histerezis (fig. 5), curba $\sigma = f(\varepsilon)$ este diferită la încărcarea şi la descărcarea curelei.

Pierderea prin histerezis, ca diferența dintre energia consumată la roata condusă și energia cîștigată la roata conducătoare, nu se manifestă separat și independent la fiecare roată, deci nu este o caracteristică proprie a roților, ci o caracteristică a întregii transmisii, în care cureaua are un rol determinant. Deoarece la roata condusă există un consum suplimentar de energie pentru alungirea curelei, iar la roata conducătoare un cîștig de energie prin revenirea curelei la starea „inițială", pierderea prin histerezis se manifestă numai la întregul ansamblu al mecanismului de transmisie și numai la un ciclu complet al procesului de transmisie. Așadar, pierderea prin histerezis nu apare ca atare la calculul randamentului roților ; ea apare ca o pierdere propriu-zisă numai pentru întregul ansamblu al mecanismului de transmisie.

În practică, pentru calculul randamentului roților de curea și pentru calculul tensiunilor reale din ramurile de curea nu vom repartiza arbitrar pierderea prin histerezis pe roți, ci vom considera la fiecare roată energiile care participă efectiv la procesul de transmitere a mișcării. În acest fel, pierderea propriu-zisă prin histerezis apare numai în cadrul pierderilor globale ale întregii transmisii.

Energia suplimentară consumată pentru alungirea curelei pe roata condusă (reprezentată prin aria suprafeței cuprinse sub curba de încărcare) este

$$L_{rh} = \int_{\sigma_{t\min}}^{\sigma_{t\max}} V \sigma \cdot d\varepsilon, \tag{18}$$

unde V este volumul curelei care se alungește pe roata condusă.

Admițînd o variație liniară a tensiunii între $\sigma_{t_{\min}} = \sigma_i$ și $\sigma_{t_{\max}} = \sigma_e$, relația (18) devine

$$L_{rh} \approx \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_e) \cdot \Delta\varepsilon_{ei} \cdot A \cdot \alpha R_r, \tag{18'}$$

unde

$$\sigma_i + \sigma_e = \frac{T_{ri}}{A} + \frac{T_{re}}{A} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u}{A} \cdot k_r,$$

$$\Delta\varepsilon_{ei} = \varepsilon_e - \varepsilon_i = \frac{\Delta l_r}{l_r} = \frac{F_u}{AE} \cdot k_r.$$

Înlocuind aceste valori în relația (18'), rezultă

$$L_{rh} \approx \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u^2}{2AE} \cdot k_r^2 \cdot \alpha R_r. \tag{18''}$$

Lucrul mecanic echivalent produs de rezistența suplimentară F_{rh} pe arcul de alungire $l_r = \alpha R_r$ este

$$F_{rh} \cdot \alpha R_r \approx L_{rh}, \tag{19}$$

de unde

$$F_{rh} \approx \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u^2}{2AE} \cdot k_r^2.$$

Deci coeficientul de pierdere datorit consumului suplimentar de energie pentru alungirea curelei este

$$k_{rh} = \frac{F_{rh}}{F_u} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u}{2AE} \cdot k_r^2. \tag{20}$$

2.6. PIERDERILE DATORITE REZISTENȚEI AERULUI

Rezistența aerului constă din rezistența de frecare F_{rt} a curelei, din rezistența de frecare F_{rc} a coroanei și din rezistența de formă F_{rs} a spițelor (rezistența butucului este neglijabilă) :

$$F_{rv} = F_{rt} + F_{rc} + F_{rs}. \tag{21}$$

Rezistența de frecare a curelei corespunzătoare celor două ramuri este

$$F_{rt} = k_t \cdot C_{ft} \cdot q \cdot S_t, \tag{22}$$

unde

S_t este suprafața de frecare a curelei (ramura trasă și ramura trăgătoare),
q — presiunea dinamică a aerului,
C_{ft} — coeficientul de rezistență de frecare a curelei,
k_t — coeficientul de majorare.
Avem

$$S_t \approx 4\, b\, l_a \approx 4\, b\, a \cdot \cos \beta,$$

$$q = \rho \frac{v^2}{2},$$

unde v este viteza mijlocie a curelei și ρ densitatea aerului.

În funcție de natura stratului-limită avem :

— pentru stratul de frecare laminar : $C_{ft} = 1{,}527 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_e}\right)^{\frac{1}{2}}$;

— pentru stratul de frecare turbulent : $C_{ft} = 0{,}072 \left(\frac{1}{\mathcal{R}_e}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Limita dintre stratul de frecare laminar și turbulent are loc pentru numărul Reynolds

$$\mathcal{R}_e = \frac{v l_a}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5,$$

unde ν este viscozitatea cinematică a aerului.

Coeficientul de majorare k_t crește cu curbura și cu oscilațiile curelei.

Considerînd raza coroanei relativ mare față de grosimea stratului-limită de frecare, putem considera mișcarea suprafeței coroanei paralelă cu cea a stratului-limită, ambele efectuînd o mișcare circulară concentrică ; în consecință, rezistența de frecare a coroanei are o expresie similară cu relația (22) :

$$F_{rc} = k_c \cdot C_{fc} \cdot q \cdot S_c, \tag{22'}$$

unde

S_c este suprafața de frecare a coroanei ($S_c \approx 4 \pi R_r B$),

C_{fc} — coeficientul de rezistență de frecare a coroanei,

k_c — coeficientul de majorare datorit curburei coroanei.

Coeficientul de rezistență C_{fc} are expresii similare cu cele de la mișcarea paralelă.

Coeficientul de majorare k_c crește cu curbura coroanei.

Rezistența de formă F_{rs} a spițelor, redusă la periferia roții, este

$$F_{rs} \approx \frac{1}{4} Z_s \cdot C_s \cdot q \cdot A_s, \tag{23}$$

unde

Z_s este numărul spițelor,

C_s — coeficientul de rezistență de formă a spiței,

A_s — secțiunea frontală (radială) maximă a spiței, perpendiculară pe direcția vitezei ($A_s \approx R_r b_s$).

Coeficientul de rezistență de formă a spiței ovale cu raportul $h_s/b_s \approx 2$, pentru $\frac{b_s \cdot v}{\nu} > 5 \cdot 10^4$, este $C_s \approx 0{,}2$.

Prin urmare, rezistența totală a aerului, redusă la periferia roții conduse, este

$$F_{rv} \approx (k_t \cdot C_{ft} \cdot S_t + k_c \cdot C_{fc} \cdot S_c + \frac{1}{4} Z_s \cdot C_s \cdot A_s) \cdot q. \tag{21'}$$

Coeficientul de pierdere datorit rezistenței aerului este

$$k_{rv} = \frac{F_{rv}}{F_u}. \tag{24}$$

2.7. PIERDERILE DATORITE UNOR REZISTENȚE ACCIDENTALE

Pe lîngă rezistențele care pot fi exprimate prin formule analitice mai există pierderi întîmplătoare, accidentale, a căror valoare nu poate fi evaluată precis pe bază de calcule :

$$k_{ri} = \frac{F_{ri}}{F_u}. \tag{25}$$

Din această categorie de pierderi fac parte pierderile datorite lipirii curelei impregnate de coroană și pierderile datorite înțepenirii curelei trapezoidale în șanțurile de forme și dimensiuni necorespunzătoare.

★

Analizînd expresiile pierderilor parțiale ale roții conduse, rezultă că aceste pierderi depind de forța periferică ($F_r = k_r F_u$), respectiv de pierderea globală (k_r). Așadar, calculul pierderilor parțiale presupune cunoașterea pierderii globale (k_r), respectiv a sumei pierderilor parțiale.

Pierderea totală a roții conduse este

$$P_{rp} = P_{rl} + P_{rr} + P_{ra} + P_{rf} + P_{rb} + P_{rv} + P_{ri}. \tag{26}$$

Împărțind cu viteza periferică v_r a roții conduse și cu forța periferică utilă F_u, obținem succesiv următoarele expresii ale ecuației bilanțului energetic al pierderilor :

$$F_{rp} = F_{rl} + F_{rr} + F_{ra} + F_{rf} + F_{rb} + F_{rv} + F_{ri}, \tag{26'}$$

$$k_{rp} = k_{rl} + k_{rr} + k_{ra} + k_{rf} + k_{rb} + k_{rv} + k_{ri}. \tag{26''}$$

Înlocuind coeficienții de pierdere și grupînd termenii în raport cu factorul de pierdere global k_r, rezultă

$$\left(\mu_c \frac{f}{m-1} \cdot \frac{F_u}{2AE} + \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u}{2AE}\right) \cdot k_r^2 - \left[1 - \mu_{rl} \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_r}{R_r} - \right.$$

$$\left. - 2\,C_{rl} \frac{1}{m-1} - \mu_c \frac{f}{m-1} \cdot \frac{\psi - \psi_r}{2(1-\psi)}\right] \cdot k_r + (1 + k_{rv} + k_{ri}) = 0. \tag{27}$$

Notînd pentru simplificare

$$B_2 = \mu_e \frac{f}{m-1} \cdot \frac{F_u}{2AE} + \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{F_u}{2AE},$$

$$2B_1 = 1 - \left[\mu_{ri} \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_r}{R_r} + 2C_{ri} \frac{1}{m-1} + \mu_e \frac{f}{m-1} \cdot \frac{\psi - \psi_r}{2(1-\psi)} \right],$$

$$B_0 = 1 + k_{rv} + k_{ri},$$

rezultă o ecuație de forma

$$B_2 k_r^2 - 2B_1 k_r + B_0 = 0, \tag{27'}$$

care determină valoarea factorului de pierdere k_r.

În practică este mai avantajos să calculăm valoarea coeficientului de pierdere k_{rp} :

$$B_2(1 + k_{rp})^2 - 2B_1(1 + k_{rp}) + B_0 = 0,$$

de unde

$$k_{rp}^2 - 2 \frac{B_1 - B_2}{B_2} \cdot k_{rp} + \frac{B_2 - 2B_1 + B_0}{B_2} = 0. \tag{28}$$

Notînd pentru simplificare

$$C_1 = \frac{B_1 - B_2}{B_2},$$

$$C_0 = \frac{B_2 - 2B_1 + B_0}{B_2},$$

rezultă o ecuație de gradul al doilea în raport cu k_{rp}, de forma

$$k_{rp}^2 - 2C_1 k_{rp} + C_0 = 0. \tag{28'}$$

Soluția acestei ecuații este

$$k_{rp} = C_1 - \sqrt{C_1^2 - C_0}. \tag{29}$$

Prin urmare, factorul de pierdere este

$$k_r = 1 + k_{rp}, \tag{30}$$

iar randamentul roții conduse în funcție de factorul de pierdere

$$\eta_r = \frac{1}{k_r}. \tag{1'}$$

3. PIERDERILE ȘI RANDAMENTUL ROȚII CONDUCĂTOARE

3.1. PIERDERILE DATORITE FRECĂRII ÎN LAGĂRE

Frecarea în lagăre, redusă la periferia roții conducătoare (fig. 6), este

$$F_{at} = \mu_{at} N \cdot \frac{r_a}{R_a}. \tag{31}$$

Conform relației (5), avem, înlocuind rezultanta N în funcție de F_r,

$$F_{at} = \mu_{at} \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_a}{R_a} \cdot F_r.$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere prin frecări în lagărele roții motoare este

$$k_{at} = \frac{F_{at}}{F_r} = \mu_{at} \frac{f}{m-1} \cdot \frac{r_a}{R_a}. \tag{32}$$

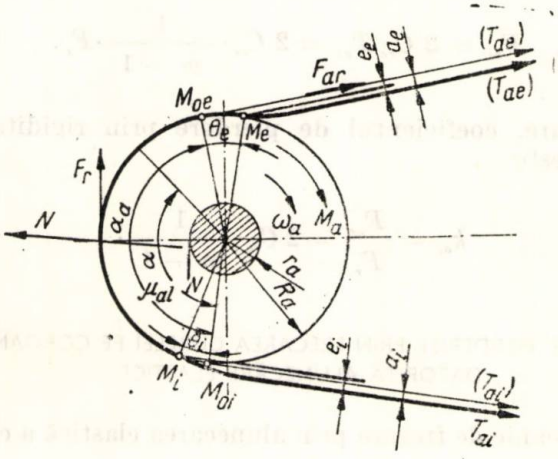


Fig. 6

3.2. PIERDERILE DATORITE RIGIDITĂȚII CURELEI

Rezistența suplimentară F_{ar} datorită rigidității curelei se deduce din ecuația de echilibru a momentelor (fig. 6) :

$$F_{ar} \cdot R_a + T_{ae}(R_a - a_e) + F_r \cdot R_a = T_{ai}(R_a + a_i). \tag{33}$$

Întrucît pentru roata motoare avem

$$T_{ai} - T_{ae} = F_r,$$

$$a_i = e_i - (1 - \cos \theta_i) R_a = \frac{1}{2} C_{ri} R_a,$$

$$a_e = e_e + (1 - \cos \theta_e) R_a = \frac{3}{2} C_{re} R_a,$$

rezultă din ecuația (33)

$$F_{ar} = \frac{1}{2} C_{ri} T_{ai} + \frac{3}{2} C_{re} T_{ae}.$$

Deoarece

$$C_{ri} T_{ai} = C_{re} T_{ae},$$

$$T_{ae} = \frac{1}{m-1} \cdot F_r,$$

avem

$$F_{ar} = 2 C_{re} T_{ae} = 2 C_{re} \cdot \frac{1}{m-1} \cdot F_r.$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere prin rigiditatea curelei la roata motoare este

$$k_{ar} = \frac{F_{ar}}{F_r} = 2 C_{re} \cdot \frac{1}{m-1}. \tag{34}$$

3.3. PIERDERILE PRIN FRECAREA CURELEI PE COROANĂ DATORITĂ ALUNECĂRII ELASTICE

Lucrul mecanic de frecare prin alunecarea elastică a curelei pe roată (fig. 6) este

$$L_{aa} = F_{aa} \cdot \alpha R_a = \frac{1}{2} \mu_c N \cdot \Delta l_a. \tag{35}$$

Înlocuind pe N și Δl_a și simplificînd, rezultă

$$F_{aa} = \mu_c \frac{f}{m-1} \cdot \frac{1}{2AE} \cdot F_r^2.$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere prin alunecarea elastică a curelei pe roata motoare este

$$k_{ao} = \frac{F_{aa}}{F_r} = \mu_c \cdot \frac{f}{m-1} \cdot \frac{1}{2AE} \cdot F_r. \tag{36}$$

3.4. PIERDERILE PRIN FRECAREA CURELEI PE COROANĂ DATORITĂ PATINĂRII

Lucrul mecanic de frecare prin patinarea curelei pe roata motoare (fig. 6) este

$$L_{af} = F_{af} \cdot \alpha_a R_a = \mu_c N \cdot \Delta S_a, \tag{37}$$

unde ΔS_a este cursa de patinare a curelei pe roata motoare :

$$\Delta S_a = S_a - S_c = S_a - \frac{v_c}{v_a} S_a = \left(1 - \frac{v_c}{v_a}\right) S_a = \left(1 - \frac{v_c}{v_a}\right) \cdot \alpha_a R_a.$$

Cînd patinează numai roata motoare avem $v_c = (1 - \psi)\, v_a$, deci $\Delta S_a = \psi \cdot \alpha_a R_a$, iar cînd patinează şi roata condusă avem $v_c = \left[1 - \right.$ $\left. - \frac{1}{2}(\psi_r + \psi)\right] \cdot v_a$ şi, în consecinţă, $\Delta S_a = \frac{1}{2}(\psi_r + \psi) \cdot \alpha_a R_a$.

Prin urmare, la supraîncărcări mai importante, cînd patinează ambele roţi, relaţia (37) devine

$$L_{af} = F_{af} \cdot \alpha_a R_a = \mu_c \cdot \frac{f}{m-1} \cdot F_r \cdot \frac{1}{2}(\psi_r + \psi) \cdot \alpha_a R_a. \tag{37'}$$

Deci forţa de frecare F_{af} prin patinarea curelei pe roate motoare este

$$F_{af} = \frac{1}{2}(\psi_r + \psi) \cdot \mu_c \frac{f}{m-1} \cdot F_r$$

şi, în consecinţă, coeficientul de pierdere prin patinarea curelei este

$$k_{af} = \frac{F_{af}}{F_r} = \frac{1}{2}(\psi_r + \psi) \cdot \mu_c \frac{f}{m-1} \cdot \tag{38}$$

3.5. CÎŞTIGUL DE ENERGIE PRIN REVENIREA CURELEI PE ROATA MOTOARE

Prin revenirea curelei pe roata motoare la starea „iniţială" se recuperează o parte din energia consumată pentru alungirea ei pe roata condusă.

Energia recuperată (reprezentată prin aria suprafeței cuprinse sub curba de descărcare (fig. 5) este

$$L_{ah} = \int_{\sigma_{t\max}}^{\sigma_{t\min}} V\sigma \cdot d\varepsilon. \tag{39}$$

Diferența dintre energia L_{rh} consumată la roata condusă și energia L_{ah} recuperată la roata motoare este pierderea prin histerezis (haşurată în diagrama din figura 5) :

$$L_h = L_{rh} - L_{ah}. \tag{40}$$

Referindu-ne la notațiile din diagramă (fig. 5), avem

$$L_h = [\psi_h \cdot (\sigma_e - \sigma_i) \cdot \varepsilon_{h_{\max}} + \sigma_i \cdot \Delta\varepsilon_p] \cdot V, \tag{40'}$$

unde

V este volumul de curea la revenirea ei pe roata motoare, corespunzător volumului de curea care se întinde pe roata condusă ($V = A \cdot i \, \alpha \, R_a = A \cdot \alpha \, R_r$),

$\varepsilon_{h_{\max}}$ — diferența maximă dintre alungirea curelei la descărcare și la încărcare,

$\Delta\varepsilon_p$ — alungirea remanentă a curelei după un ciclu complet de funcționare,

ψ_h — raportul dintre suprafața efectivă cuprinsă între bucla de încărcare și bucla de descărcare și suprafața totală a paralelogramului circumscris curbei de histerezis.

La o curea nouă de piele, pentru diferențe de tensiuni $\Delta\sigma = \sigma_{t_{\max}} - \sigma_{t_{\min}}$ variind între limitele curente cuprinse între 10 și 30 kgf/cm², raportul ψ_h variază între limitele 0,66—0,69.

Diferența $\varepsilon_{h_{\max}}$ se stabilește prin măsurători. La o curea nouă de piele, pentru $\Delta\sigma$ variind între limitele 10—30 kgf/cm², diferența $\varepsilon_{h_{\max}}$ variază între limitele 0,003—0,004. Diferența $\varepsilon_{h_{\max}}$ scade cu vechimea curelei.

La o curea nouă am găsit la primele cicluri de histerezis alungirea remanentă $\Delta\varepsilon_p = 0{,}001$. Ea scade apreciabil cu numărul ciclurilor de histerezis.

În general, pierderea totală prin histerezis scade cu vechimea curelei.

Energia cîștigată la revenirea curelei pe roata motoare este deci

$$L_{ah} = L_{rh} - L_h. \tag{39'}$$

Întrucît

$$L_{ah} = F_{ah} \cdot i \, \alpha \, R_a = F_{ah} \cdot \alpha \, R_r, \tag{39''}$$

forța activă F_{ah} cîștigată la revenirea curelei pe roata motoare este

$$F_{ah} = \frac{L_{rh} - L_h}{\alpha R_r}. \tag{41}$$

Substituind pe L_{rh} și L_h din relațiile (18''), respectiv (41'), rezultă

$$F_{ah} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \frac{1}{2AE} \cdot F_r^2 - [\psi_h(\sigma_e - \sigma_i) \cdot \varepsilon_{h_{max}} + \sigma_i \cdot \Delta\varepsilon_p] \cdot A. \tag{41'}$$

Coeficientul de cîștig de forță activă la roata motoare este deci

$$k_{ah} = \frac{F_{ah}}{F_r}. \tag{41''}$$

În ecuația bilanțului energetic al pierderilor de la roata motoare, coeficientul k_{ah}, reprezentînd un cîștig de energie, apare cu semnul minus.

3.6. PIERDERILE DATORITE REZISTENȚEI AERULUI

Întrucît rezistența de frecare a curelei a fost luată în considerare la roata condusă, rezistența totală a aerului constă din rezistența de frecare F_{ac} a coroanei și din rezistența de formă F_{as} a spițelor :

$$F_{av} \approx F_{ac} + F_{as}. \tag{42}$$

Rezistența coroanei și a spițelor au expresii similare cu cele de la roata condusă.

Coeficientul de pierdere este

$$k_{av} = \frac{F_{av}}{F_r}. \tag{43}$$

3.7. PIERDERILE DATORITE UNOR REZISTENȚE ACCIDENTALE

Pierderile accidentale F_{ai}, ca și coeficientul de pierdere

$$k_{ai} = \frac{F_{ai}}{F_r}, \tag{44}$$

au valori similare cu cele ale roților conduse.

★

Pierderea totală a roții conducătoare este

$$P_{ap} = P_{al} + P_{ar} + P_{aa} + P_{af} - P_{ah} + P_{av} + P_{ai}. \tag{45}$$

Împărțind cu viteza periferică v_a a roții motoare și cu forța periferică reală F_r, obținem succesiv următoarele expresii ale ecuației bilanțului energetic al pierderilor:

$$F_{ap} = F_{al} + F_{ar} + F_{aa} + F_{af} - F_{ah} + F_{av} + F_{ai}, \tag{45'}$$

$$k_{ap} = k_{al} + k_{ar} + k_{aa} + k_{af} - k_{ah} + k_{av} + k_{ai}. \tag{45''}$$

Prin urmare, factorul de pierdere al roții motoare este

$$k_a = 1 + k_{ap}, \tag{46}$$

ar randamentul roții motoare în funcție de factorul de pierdere

$$\eta_a = \frac{1}{k_a}. \tag{2'}$$

4. RANDAMENTUL ȘI BILANȚUL ENERGETIC AL ÎNTREGII TRANSMISII

Randamentul întregii transmisii, conform relației (3), este

$$\eta_{ar} = \eta_a \cdot \eta_r (1 - \psi) = \frac{1}{k_{ar}} (1 - \psi), \tag{3'''}$$

factorul de pierdere global al întregii transmisii

$$k_{ar} = k_a \cdot k_r = 1 + k_p, \tag{47}$$

iar coeficientul de pierdere global al întregii transmisii

$$k_p = k_{rp} + k_{ap} + k_{rp} \cdot k_{ap}. \tag{48}$$

Pentru studiul pierderilor este mai avantajos să grupăm pierderile după structura lor.

Ecuația bilanțului energetic al pierderilor relative ale întregii transmisii în funcție de coeficienții de pierdere poate fi exprimată prin

$$\begin{aligned} k_p = {} & (k_{rl} + k_{al} + k_{rl} \cdot k_{al}) + (k_{rr} + k_{ar} + k_{rr} \cdot k_{ar}) + \\ & + (k_{ra} + k_{aa} + k_{ra} \cdot k_{aa}) + (k_{rf} + k_{af} + k_{rf} \cdot k_{af}) + \\ & + (k_{rh} - k_{ah} - k_{rh} \cdot k_{ah}) + (k_{rv} + k_{av} + k_{rv} \cdot k_{av}) + \\ & + (k_{ri} + k_{ai} + k_{ri} \cdot k_{ai}). \end{aligned} \tag{49}$$

Pierderea relativă k_p a întregii transmisii este funcție de un număr mare (circa 30) de parametri geometrici și mecanici. Din această cauză este clar că evaluarea exactă a randamentului total al transmisiei printr-o simplă apreciere arbitrară practic este imposibilă.

Pierderile fiind grupate pe roți după natura și proveniența lor, se poate stabili cu ușurință ponderea diferitelor categorii de pierderi și, în consecință, se poate efectua un studiu sistematic al pierderilor după importanța lor.

Prin gruparea pierderilor se pot stabili mai ușor parametrii principali, hotărîtori, și influența lor asupra pierderilor.

5. CONCLUZII

Pierderea de putere într-o transmisie de curea depinde de un număr mare de parametri geometrici și mecanici. Din această cauză este clar că evaluarea exactă a randamentului total al transmisiei printr-o simplă apreciere arbitrară practic nu este posibilă.

Formulele stabilite în această lucrare pentru calculul pierderilor și al randamentului sînt suficient de exacte, unitare și general-valabile pentru toate tipurile de transmisii prin curele.

Ecuația bilanțului energetic al pierderilor permite efectuarea unui studiu științific (teoretic și experimental) al pierderilor și, în consecință, stabilirea celor mai raționale soluții din punct de vedere tehnic și economic.

Studiul analitic al pierderilor permite adoptarea soluțiilor optime la proiectare și la dimensionare și elimină risipa de energie, urmare unei evaluări arbitrare necorespunzătoare a randamentului transmisiei.

Formulele de calcul stabilite în această lucrare permit rezolvarea a numeroase noi probleme în legătură cu proiectarea și cu exploatarea transmisiilor prin curele.

Primită la redacție la 5 septembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Manea și colectivul, *Organe de mașini*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1958.
2. G. Niemann, *Maschinenelemente*, vol. II, Springer-Verlag, 1960.
3. Hütte, *Das Ingenieurs Taschenbuch*, Berlin, 1954.
4. *Mașinostroenie*, vol. II, Moscova, 1948.
5. V. S. Poleakov și colectivul, *Organe de mașini*, Mașghiz, 1954 (trad. din rusă).

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA INFLUENȚEI REGIMULUI DE LUCRU ASUPRA PRECIZIEI GROSIMII DINTELUI LA FREZAREA DANTURII ROȚILOR DINȚATE CILINDRICE

de ION LĂZĂRESCU și EUGEN PAY
nstitutul politehnic Cluj

Lucrarea analizează deformarea sistemului M—D—S—P datorită forțelor care intervin la prelucrarea prin frezare a danturii roților cilindrice, precum și ca urmare a dilatării termice, ținînd seama de abaterile existente la semifabricat (excentricități etc.) și de eroarea cinematică a sistemului melc-roată de divizare de la mașina-unealtă.
Ea reprezintă un studiu teoretic al obținerii grosimii dintelui roții dințate frezate și o confirmare experimentală a variației acesteia în funcție de regimul de așchiere. În final, valoarea totală a abaterilor se materializează sub forma unei deplasări relative de corijare.

Precizia roților dințate cilindrice cuprinde o serie de parametri, printre care grosimea dintelui își are importanța sa, influențînd asupra jocului la flancuri, criteriu luat în considerare în legătură cu condițiile cerute diferitelor angrenaje, precum și, prin variația acesteia, asupra celorlalți indici de precizie. Kolev [1] se ocupă în parte cu precizia roții dințate, luînd în considerare rolul forțelor de așchiere și al avansului asupra deformării sistemului tehnologic M-D-S-P, fără însă a considera grosimea dintelui, ținînd seama numai de deformarea dornurilor de fixare. Lucrarea de față își propune de a analiza deformarea elastică și termică a sistemului M-D-S-P, datorită forțelor care intervin, luînd în considerare și abaterile existente la piesă (excentricități etc.), și eroarea cinematică a sistemului melc-roată de divizare de la mașina-unealtă.

Se va considera că, la prelucrarea danturii prin frezare (fig. 1) prin metoda rulării, intervin următorii factori care influențează asupra abaterilor grosimii dintelui prelucrat:

— deformația dornului portpiesă, datorită forței de respingere F_y și dilatării acestuia;

— deformația dornului portfreză ca urmare a acelorași cauze;

— dilatarea piesei și frezei;

— abaterile provocate de bătaia radială a semifabricatului şi a frezei;

— depărtarea reciprocă a semifabricatului şi frezei datorită şocului produs la intrarea dintelui în material;

— erorile provocate de jocul din lanţul cinematic, localizat la melc-roată melcată, şi jocul existent la aşezarea frezei pe dorn;

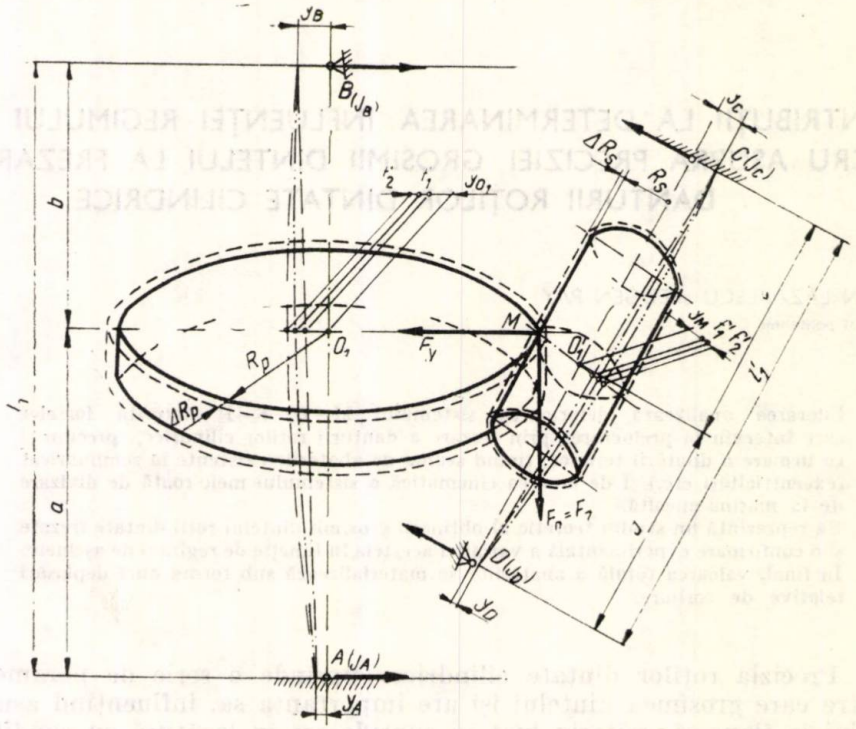


Fig. 1. — Deformarea sistemului tehnologic M—D—S—P datorită forţelor şi temperaturii.

— abaterile datorită torsionării dornului portfreză;

— deformarea batiului datorită forţelor care apar în procesul de aşchiere şi ca urmare a dilatării termice;

— uzura sculei.

Se vor trece aceşti factori în revistă.

Deformaţia dornului portpiesă datorită forţei de respingere F_y se calculează cu relaţia cunoscută [6]

$$f_1 = \frac{a\frac{B}{j_B}}{a+b} + \frac{F_y a^3 b^2 (3a+4b)}{12 E I_1 l_1^3}, \tag{1}$$

în care

I_1 este momentul de inerţie al secţiunii dornului portpiesă,
E — modulul de elasticitate,
j_B — rigiditatea dornului la reazemul B,
B — reacţiunea din reazem,
iar restul notaţiilor corespunzător figurii 1.

Deformația datorită dilatării ca urmare a ridicării temperaturii dornului portpiesă, produsă de căldura ce apare la procesul de așchiere, va fi [7]

$$f_2 = \frac{\alpha_1(\theta_2 - \theta_1)}{4h_p l_1}(-b^3 + 2l_1 b^2 - l_1^2 b), \tag{2}$$

în care

$\theta_{1,2}$ este temperatura medie a dornului, inițială și finală,
α_1 — coeficientul de dilatație pentru materialul dornului,
h_p — factor care caracterizează dimensiunea dornului portpiesă.

În ceea ce privește deformațile dornului portfreză, datorită forței de respingere F_y și dilatării, acestea vor fi, ca și anterior,

$$f_1' = \frac{c\frac{D}{j_D}}{c+d} + \frac{F_y c^3 d^2(3c - 4d)}{12EI_1' l_1'^3}, \tag{3}$$

$$f_2' = \frac{\alpha_1(\theta_2' - \theta_1')}{4h_f l_1'}(-d^3 + 2l_1' d^2 - l_1'^2 d), \tag{4}$$

în care

I_1' este momentul de inerție al secțiunii dornului portfreză,
j_D — rigiditatea dornului la reazemul D,
D — reacțiunea din reazem,
h_f — factor care caracterizează dimensiunea dornului portfreză.

În continuare se va considera dilatarea piesei și frezei. În procesul de așchiere, datorită dilatării acestora, poziția reciprocă se schimbă, variația fiind determinată de dilatare piesei și frezei (însemnate întrerupt în figura 1). Pentru piesă, dilatarea va fi

$$\Delta R_p = R_p \cdot \alpha_1(\theta_3 - \theta_1) - R_p = R_p[\alpha_1(\theta_3 - \theta_1) - 1], \tag{5}$$

în care R_p este raza piesei și θ_3 temperatura medie a piesei în procesul de așchiere.

Pentru freză (sculă) avem

$$\Delta R_S = R_S \cdot \alpha_S(\theta_4 - \theta_1) - R_S = R_S[\alpha_S(\theta_4 - \theta_1) - 1], \tag{6}$$

în care

R_S este raza frezei,
θ_4 — temperatura medie a frezei în procesul de așchiere,
α_S — coeficientul de dilatație pentru materialul sculei.

Luîndu-se în considerare bătaia radială a semifabricatului în timpul prelucrării (ca urmare a jocului existent la aşezarea acestuia pe dorn), vor apărea abateri ale grosimii dintelui (fig. 2), rezultînd valorile*)

$$g_{max} = (R_a + e_1)\frac{\pi}{z_1},$$

$$g_{min} = (R_a - e_1)\frac{\pi}{z^2},$$

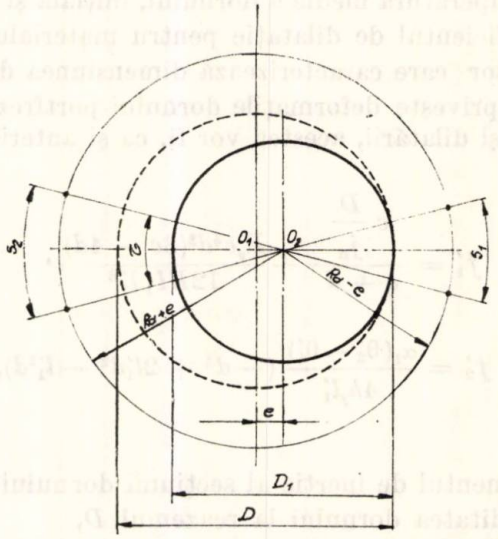


Fig. 2. — Amplasarea excentrică a semifabricatului pe dornul portpiesă.

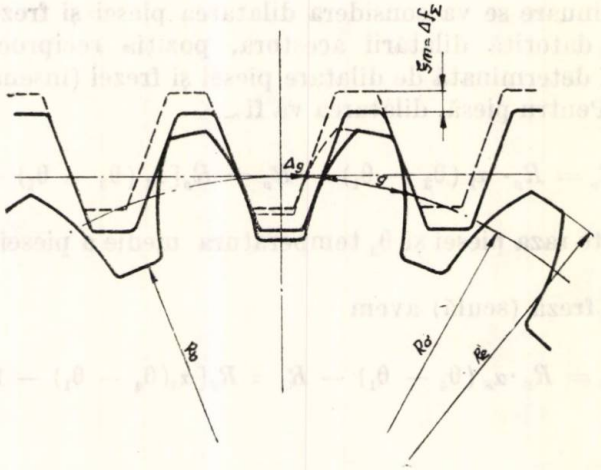


Fig. 3. — Deplasarea frezei faţă de semifabricat datorită erorilor care intervin.

*) Prin analogie cu cele tratate de W. Hofmann în legătură cu separarea abaterii radiale şi a erorii cumulte de pas la măsurarea pasului pe cercul de divizare al danturii [3].

în care

R_d este raza cercului de divizare,

$\frac{\pi}{z_1}$ — unghiul corespunzător plinului dintelui pe cercul de divizare,

e_1 — excentricitatea de aşezare a semifabricatului pe dorn;

z_1 — numărul de dinţi al roţii prelucrate.

Ca urmare, abaterea grosimii dintelui va fi

$$\Delta g_{max} = \pm \frac{e_1 \pi}{z_1},$$

respectiv deplasarea radială va avea valoarea

$$f_{br_p} = \pm \frac{\pi e_1}{2 z_1 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{7}$$

în care α este unghiul de angrenare.

În ceea ce priveşte abaterea grosimii dintelui provocată de bătaia radială a frezei, se poate lua pentru aceasta [5]

$$\pm \Delta g_{br_s},$$

respectiv deplasarea radială [5]

$$f_{br_s} = \pm 2 e_s \cdot \sin \frac{\pi}{z_s}$$

sau

$$f_{br_s} = \pm \frac{\Delta g_{br_s}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{8}$$

în care e este excentricitatea de aşezare a frezei pe dorn şi z_s numărul de dinţi ai frezei pe circumferinţă.

Datorită şocului produs de lovirea piesei de dintele frezei, are loc o depărtare reciprocă a piesei şi sculei [4]. Ca urmare intervin abateri, concretizate printr-o valoare

$$f_{din}, \tag{9}$$

care se poate determina analitic sau experimental.

Din cauza jocului din lanţul cinematic localizat la melc-roată melcată, apare o eroare a grosimii dintelui de valoare

$$\pm \Delta g_{cin},$$

respectiv

$$f_{cin} = \pm \frac{\Delta g_{cin}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{10}$$

care se poate determina prin măsurare.

Datorită jocului dintre alezajul frezei şi dornul de fixare a acestuia, are loc o bătaie radială a sculei, avînd loc abateri la grosimea dintelui prelucrat, de valoare

$$\pm \Delta g_{ex},$$

respectiv

$$f_{ex} = \pm \frac{\Delta g_{ex}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{11}$$

care se poate calcula în funcţie de joc sau se poate măsura.

Torsionarea dornului portfreză provoacă o întîrziere, respectiv un avans al mişcării frezei, apărînd o eroare a grosimii dintelui :

$$\pm \Delta g_{tor},$$

respectiv

$$f_{tor} = \pm \frac{\Delta g_{tor}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{12}$$

care se poate măsura.

Datorită forţelor care apar în procesul de aşchiere şi ca urmare a dilatărilor termice, se produce o deformare a batiului care face ca poziţia reciprocă între semifabricat şi sculă să se modifice, intervenind o eroare

$$\Delta g_b, \tag{13}$$

neglijabilă.

În urma uzurii sculei au loc abateri ale grosimii dintelui, care pot fi notate

$$\Delta g_{uz},$$

respectiv

$$f_{uz} = + \frac{\Delta g_{uz}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \tag{14}$$

care, pentru durata prelucrării unei roţi de dimensiuni obişnuite, este neglijabilă.

Considerînd suma deplasărilor (1) — (14), se găseşte

$$f_\Sigma = f_1 + f_2 + f_1' + f_2' - \Delta R_p - \Delta R_s \pm f_{br_p} \pm \pm f_{br_s} \pm f_{din} \pm f_{cin} \pm f_{ex} \pm f_{tor} + f_{uz}. \tag{15}$$

Ca urmare a deplasărilor date de relaţia (15), grosimea dintelui prelucrat se modifică, ca şi cum ar exista o corijare

$$\Delta g_\Sigma = 2 f_\Sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{16}$$

Deoarece pentru valoarea forței de așchiere la frezarea danturii se poate lua expresia [2]

$$F_z = C_1 \cdot S^{X_{F_z}} \cdot m^{Y_{F_z}} \cdot \frac{1}{v^{W_{F_z}}} \cdot z_1^{U_{F_z}} \cdot k_M = C_2 \cdot S^{X_{F_z}} \cdot m^{Y_{F_z}} \cdot \frac{1}{v^{W_{F_z}}} \cdot z_1^{U_{F_z}},$$

iar pentru temperatura medie a piesei și frezei valorile [2]

$$\theta_3 = C \cdot S^{X_\theta} \cdot v^{Y_\theta} \cdot m^{W_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{U_\theta}} \cdot k_M \cdot k_D = C_3 \cdot S^{X_\theta} \cdot v^{Y_\theta} \cdot m^{W_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{U_\theta}},$$

$$\theta_4 = C' \cdot S^{X'_\theta} \cdot v^{Y'_\theta} \cdot m^{W'_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{U'_\theta}} \cdot k'_M \cdot k'_D = C_4 \cdot S^{X'_\theta} \cdot v^{Y'_\theta} \cdot m^{W'_\theta} \frac{1}{z_1^{U'_\theta}},$$

în care

S este avansul,

v — viteza principală de așchiere,

m — modulul,

k_M, k'_M, — coeficienți în legătură cu influența materialului,

k_D, k'_D — coeficienți în legătură cu influența diametrului,

c, c', x_θ, y_θ, w_θ, u_θ, x'_θ, y'_θ, w'_θ, u'_θ — parametri depinzînd de condițiile de așchiere, luînd

$$F_y = (0{,}4 \ldots 0{,}6)\ F_z,$$

unde F_z este forța principală de așchiere, expresia (15) devine

$$f_\Sigma = \frac{a\,\frac{B}{j_B}}{a+b} + \frac{C_2 \cdot S^{X_{F_z}} \cdot m^{Y_{F_z}} \cdot \frac{1}{v^{W_{F_z}}} \cdot z_1^{U_{F_z}} \cdot a^3 b^2 (3a+b)}{12\,EI_1 l_1^3} +$$

$$+ \frac{\alpha_1(\theta_2 - \theta_1)}{4h_p l_1}(-b^3 + 2l_1 b^2 - l_1^2 b) + \frac{c\,\frac{D}{j_D}}{c+d} +$$

$$+ \frac{C_2 \cdot S^{X_{F_z}} \cdot m^{Y_{F_z}} \cdot \frac{1}{v^{W_{F_z}}} \cdot z_1^{U_{F_z}} \cdot c^3 d^2 (3c - 4d)}{12\,EI'_1 l'^3_1} +$$

$$+ \frac{\alpha_1(\theta'_2 - \theta'_1)}{4h_f l'_1}(-d^3 + 2l'_1 d^2 - l'^2_1 d) -$$

$$- R_p\left[\alpha_1\left(C_3 \cdot S^{X_\theta} \cdot v^{Y_\theta} \cdot m^{W_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{u_\theta}} - \theta_1\right) - 1\right] -$$

$$- R_s\left[\alpha_s\left(C_4 \cdot S^{X'_\theta} \cdot v^{Y'_\theta} \cdot m^{W'_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{U'_\theta}} - \theta_1\right) - 1\right] \pm \frac{\pi e_1}{2z_1 \operatorname{tg} \alpha} \pm$$

$$\pm 2e_s \cdot \sin\frac{\pi}{z_s} + f_{\text{din}} \pm \frac{\Delta g_{\text{cin}}}{2\operatorname{tg}\alpha} \pm \frac{\Delta g_{\text{ex}}}{2\operatorname{tg}\alpha} \pm \frac{\Delta g_{\text{tor}}}{2\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\Delta g_{\text{uz}}}{2\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (17)$$

respectiv

$$\Delta g_\Sigma = \left\{ \frac{a\,\dfrac{B}{j_B}}{a+b} + \frac{C_2 \cdot S^{X_{F_Z}} \cdot m^{Y_{F_Z}} \cdot \dfrac{1}{v^{W_{F_Z}}} \cdot a^3 b^2 (3a+b)}{12\,EI_1\,l_1^3} + \right.$$

$$+ \frac{\alpha_1 (\theta_2 - \theta_1)}{4 h_p l_1} (-b^3 + 2 l_1 b^2 - l_1^2 b) + \frac{c\,\dfrac{D}{j_D}}{c+d} +$$

$$+ \frac{C_2 \cdot S^{X_{F_Z}} \cdot m^{Y_{F_Z}} \cdot z^{U_{F_Z}} \cdot \dfrac{1}{v^{W_{F_Z}}} \cdot c^3 d^2 (3c - 4d)}{12\,EI_1' l_2'^3} +$$

$$+ \frac{\alpha_1 (\theta_2' - \theta_1')}{4 h_f \cdot l_1'} (-d^3 + 2 l_1' d^2 - l_1'^2 d) -$$

$$- R_p \left[\alpha_1 \left(C_3 \cdot S^{X_\theta} \cdot v^{Y_\theta} \cdot m^{W_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{u_\theta}} - \theta_1 \right) - 1 \right] -$$

$$\left. - R_S \left[\alpha_S \left(C_4 \cdot S^{X_\theta'} \cdot v^{Y_\theta'} \cdot m^{W_\theta'} \cdot \frac{1}{z_1^{U_\theta'}} - \theta_1 \right) - 1 \right] \right\} 2 \operatorname{tg} \alpha \pm$$

$$\pm \frac{\pi e_1}{z_1} \pm 4 e_s \cdot \sin \frac{\pi}{z_s} \cdot \operatorname{tg} \alpha + 2 f_{\text{din}} \cdot \operatorname{tg} \alpha \pm \Delta g_{\text{cin}} \pm$$

$$\pm \Delta g_{\text{ex}} \pm \Delta g_{\text{tor}} = \Delta g_{\text{uz}}, \tag{18}$$

adică

$$\Delta g_\Sigma = \varphi \Big(a, b, c, d, E, I_1, I_1', \theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2', e_1, e_s, z_s, R_p, R_S, \tag{19}$$

$$\Delta g_{\text{ex}}, \Delta g_{\text{uz}}, j_{ABCD}, \Delta g_{\text{cin}}, S, \frac{1}{v}, m, z_1 \Big)$$

sau

$$\Delta g_\Sigma = k_1 + \lambda_1 S^{X_{F_Z}} \cdot m^{Y_{F_Z}} \cdot \frac{1}{v^{W_{F_Z}}} \cdot z_1^{U_{F_Z}} - \lambda_2 S^{X_\theta} \cdot v^{Y_\theta} \cdot m^{W_\theta} \cdot \frac{1}{z_1^{U_\theta}}, \tag{20}$$

în care k_1 este o constantă a sistemului tehnologic M-D-S-P.

Se observă că abaterile grosimii dintelui variază proporţional cu s, m, $\dfrac{1}{v}$, z_1 şi depind de sistemul tehnologic M-D-S-P.

Cunoscîndu-se valoarea totală a abaterilor, materializată în final sub forma unei deplasări relative de corijare, se poate proceda la reglarea poziţiei frezei faţă de semifabricat, ţinînd seama de valorile o bţinute şi în cadrul condiţiilor tehnice impuse.

În legătură cu cele analizate s-au făcut experimentări * cu roţi dinţate cilindrice cu dantură dreaptă, modulul 2...2,5...3 mm din OLC 45, 41 C 10, 15 MoC 12 şi 21 TMC 12, avînd diferite numere de dinţi şi diferite înălţimi de dantură.

Prelucrarea s-a executat cu freză melc din oţel rapid cu profilul rectificat (STAS 3092-67). S-a măsurat cota peste n dinţi şi variaţia acesteia pe circumferinţa roţii dinţate (conform STAS 6273-60), cu ajutorul micrometrului cu taler (Maag). O parte dintre rezultatele experimentărilor sînt date în figurile 4—12.

Din diagramele obţinute se observă că grosimea dintelui variază în funcţie de regimul de lucru, avînd pondere termenii cu „plus" din relaţia (18) la viteză de aşchiere mică şi termenii cu „minus" la viteză de aşchiere mare; de asemenea se observă că grosimea dintelui scade cu mărimea avansului de la 0,33—0,66 mm/rot piesă şi creşte cu mărimea avansului în continuare de la 0,66 la 1,32 mm/rot piesă (influenţă comparativ mai mică decît cea a vitezei de aşchiere în limitele avansului experimentat: s = 0,33—1,32 mm/rot piesă), ceea ce confirmă justeţea calculului analitic expus.

Din figurile 4—12 se poate observa influenţa diametrului frezei D_f asupra variaţiei grosimii dintelui, datorită influenţei grosimii aşchiei asupra dinamicii procesului de aşchiere.

În concluzie, luînd în considerare analiza efectuată şi rezultatele experimentărilor făcute, se poate spune că influenţa cea mai mare asupra erorii grosimii dintelui roţii dinţate la frezare cu freza melc-modul o are deformaţia elastică şi termică din procesul de aşchiere, care în anumite cazuri se compensează fiind de semne contrare.

Într-adevăr, cu creşterea vitezei de aşchiere, în cazul frezării danturii, forţa de aşchiere scade [2], iar temperatura creşte paralel cu deformaţia termică, datorită cărui fapt grosimea dintelui scade, ca şi cum s-ar micşora distanţa axială între sculă şi semifabricat, respectiv ca şi cum ar avea loc o corijare.

Punînd invers problema, pe baza variaţiei grosimii dintelui se poate stabili „corecţia" care a intervenit datorită influenţei factorilor tehnologici amintiţi. Ca urmare, pentru a se obţine o anumită grosime a dintelui, se poate stabili pentru o anumită viteză „corecţia" distanţei axiale care trebuie luată în considerare la prelucrare.

Acelaşi lucru se întîmplă şi în ceea ce priveşte variaţia avansului, deoarece creşterea acestuia duce la creşterea concomitentă a forţei şi a temperaturii în procesul de aşchiere [2]. Aceste creşteri, într-o anumită măsură, nu se compensează, astfel încît, ca şi mai sus, va apărea o variaţie a grosimii dintelui în funcţie de avans, care poate fi „corectată" în mod similar.

*) La uzina „Înfrăţirea" din Oradea.

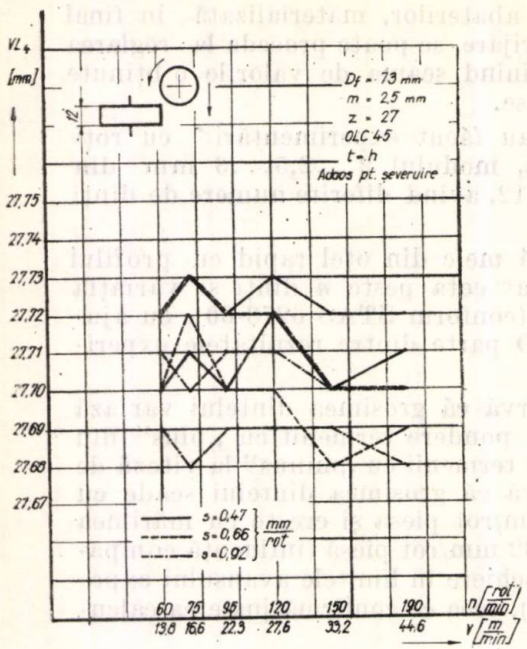


Fig. 4

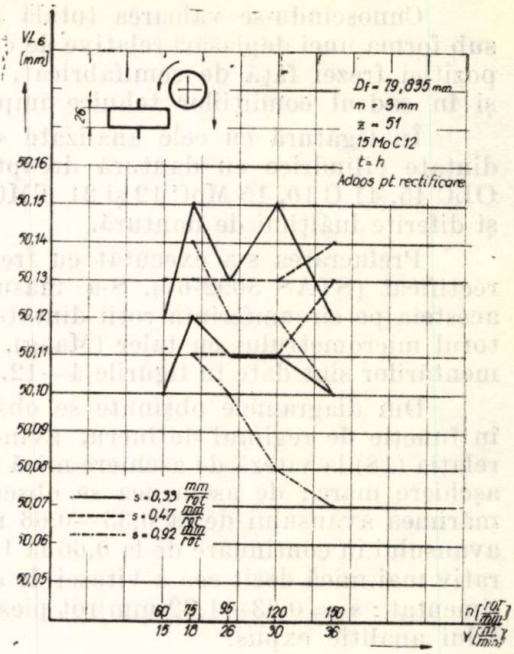


Fig. 5

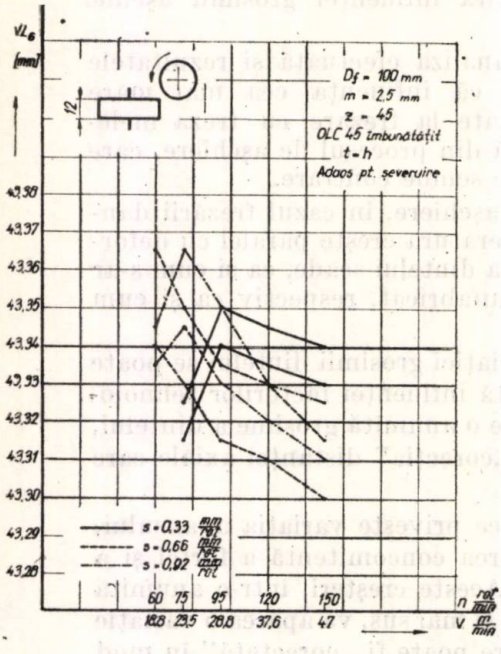


Fig. 6

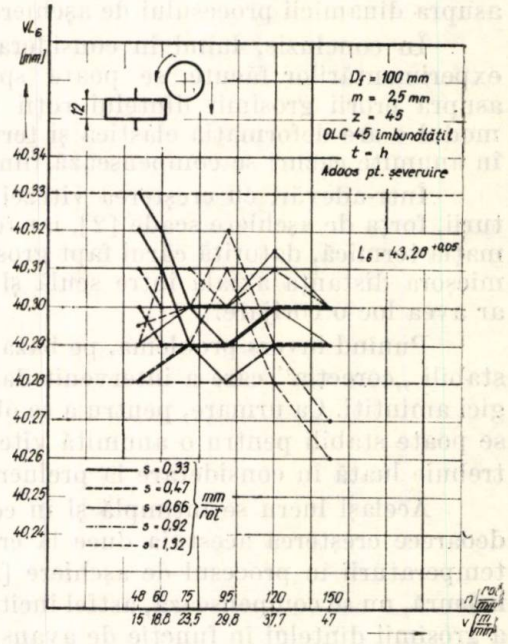


Fig. 7

Fig. 4 — 12. Variaţia grosimii dintelui în funcţie de viteza de aşchiere la diferite avansuri de lucru.

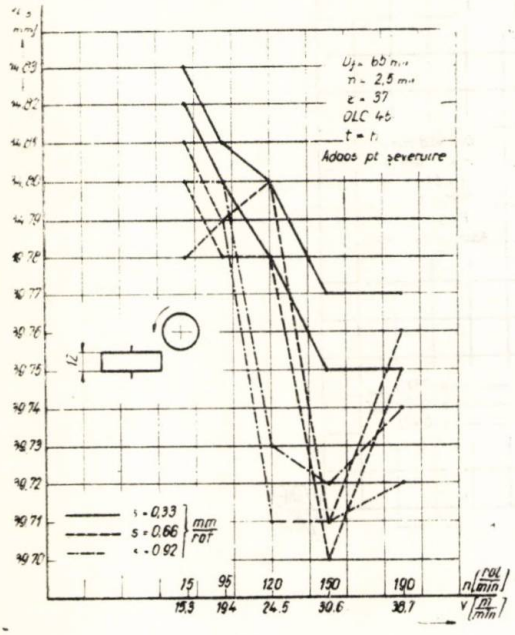


Fig. 8

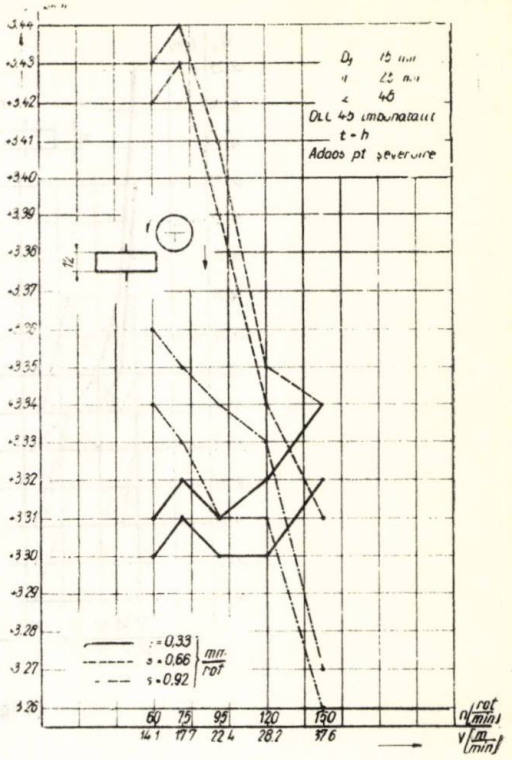


Fig. 9

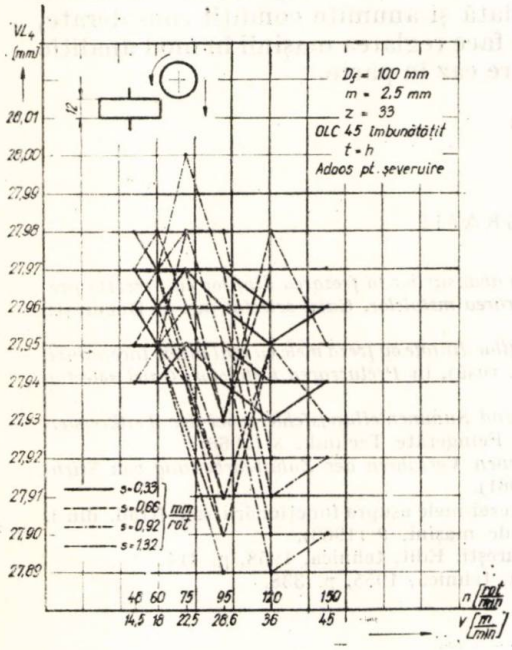


Fig. 10

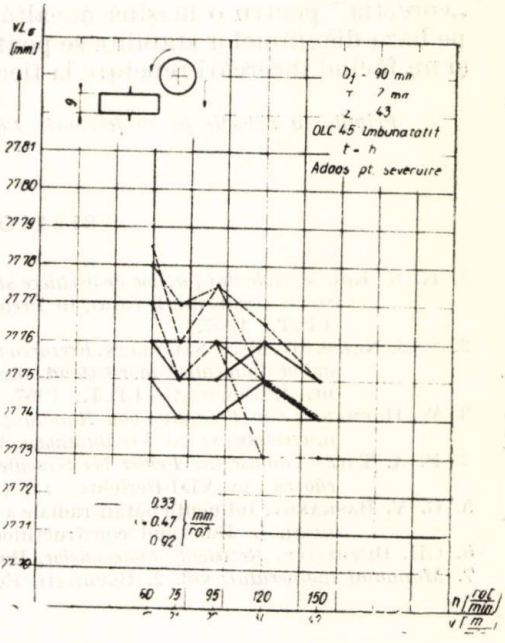


Fig. 11

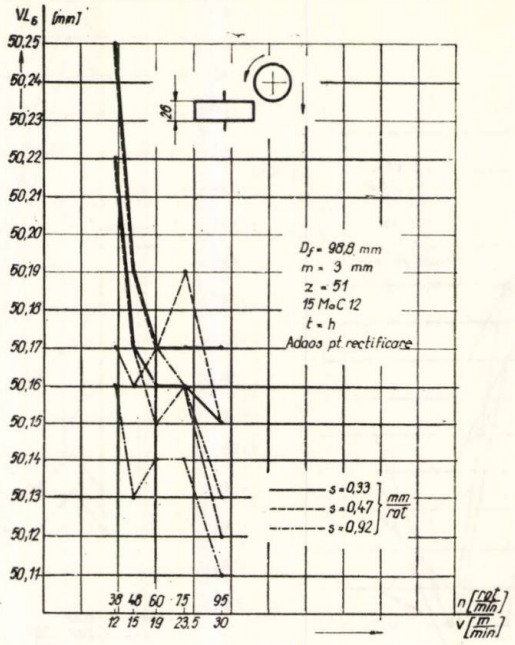


Fig. 12

Utilitatea celor analizate constă în faptul că, odată cunoscută „corecţia" pentru o maşină-unealtă dată şi anumite condiţii considerate, pe baza diagramelor stabilite se poate face reglarea maşinii în mod analitic şi nu făcînd încercări repetate la fiecare caz în parte.

Primită la redacţie la 20 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. K. S. Kolev, *Calculul forţelor de aşchiere şi a avansurilor la frezarea dinţilor cu precizia prescrisă* (trad. din l. rusă), în *Prelucrarea metalelor. Caiet selectiv*, nr. 1, Bucureşti, I.D.T., 1967.
2. S. S. Nekrsaov, V. N. Safiullin, *Frezarea roţilor dinţate cu freza melc cu mai multe începuturi, avînd diamentrul mărit* (trad. din l. rusă), în *Prelucrarea metalelor. Caiet selectiv*, nr. 4, Bucureşti, I.D.T., 1967.
3. W. Hofmann, *Zur Trennung von Rundlauf- und Summenteilungsfehlern bei der Teilkreisteilungsmessung an Verahnungen*, în Feingeräte Technik, *8* (1966).
4. B. A. Taiz, *Analyse der Fehler bei verschiedenen Verfahren der Zahnbearbeitung von Stirnrädern*, în VDI-Berichte, *47*, (1961).
5. G. V. Baskakov, Influenţa bătăii radiale a frezei-melc asupra funcţionării sale (trad. din l. rusă), în Buletinul construcţiilor de maşini, *9* (1963).
6. Gh. Buzdugan, *Rezistenţa materialelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958, p. 414.
7. *Manualul inginerului*, vol. 2, Bucureşti, Edit. tehnică, 1955, p. 338.

STABILITATEA DINAMICĂ LA ÎNCOVOIERE A CONSOLELOR

de. N. D. POPESCU
Institutul de mine Petroşani

Scopul lucrării este de a studia condiţiile de stabilitate a consolelor solicitate la încovoiere de către forţe a căror intensitate variază periodic.
Aplicînd principiul dinamic al stabilităţii barelor, se determină ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie pentru o consolă solicitată de o sarcină pulsatorie. Cu ajutorul metodei lui Ritz, după unele transformări simple, ecuaţia diferenţială a mişcării se aduce la forma cunoscută sub denumirea de ecuaţia lui Mathieu, care se rezolvă prin metoda lui Ince. Ca urmare se obţin ecuaţiile curbelor, care delimitează zonele de stabilitate ale soluţiilor ecuaţiei lui Mathieu.
Rezultatele obţinute îşi găsesc aplicare la calculul dinamic al elementelor de construcţie şi al organelor de maşini.

1. INTRODUCERE

Problema stabilităţii dinamice a barelor drepte a fost rezolvată numai pentru cazul solicitării la compresiune axială a unei bare articulate la ambele extremităţi [1].

Deoarece în practică solicitarea la încovoiere este mult mai frecventă decît solicitarea axială, în lucrarea de faţă ne propunem să studiem condiţiile de stabilitate a consolelor solicitate la încovoiere de către o forţă variabilă periodic. În acest scop ne vom referi la grinda în consolă (fig. 1) cu secţiunea transversală dreptunghiulară, avînd lăţimea b şi înălţimea h, acţionată la capătul liber de o forţă concentrată *) :

$$F_{(t)} = (F_0^2 + S^2 \cos^2 \Omega t)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

*) Forţa $F_{(t)}$ se obţine prin compunerea forţelor F_0 şi $S \cos \Omega t$, care acţionează după două direcţii normale între ele (situate în planul de simetrie vertical al grinzii), direcţii care suferă o rotire variabilă periodic, dată de expresia

$$\alpha_{(t)} = \text{arc tg} \frac{S}{F_0} \times \cos \Omega t,$$

astfel încît rezultanta $F_{(t)}$ îşi păstrează încontinuu direcţia normală la axa barei. Pentru o astfel de solicitare, ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie a consolei este o ecuaţie de tip Mathieu.

În cazul că cele două direcţii după care acţionează cele două componente ale forţei $F_{(t)}$ se suprapun, iar unghiul $\alpha_{(t)} = 0$, ecuaţia diferenţială a mişcării de vibraţie a consolei va fi o ecuaţie de tip Whittaker.

Acest ultim caz de solicitare a fost tratat într-o formă destul de aproximativă de către V.V. Bolotin în lucrarea *Dinamiceskaia ustoicivosti uprughih sistem* la p. 491—497. Rezolvarea completă a acestei probleme face obiectul raportului *Dynamical stability of the straight beams solicited to the bending by periodically variable forces*, întocmit de către autorul lucrării de faţă pentru Simpozionul IUTAM de la Karlsruhe (1969).

În componenţa acestei forţe intră deci atît forţa statică F_0, cît şi forţa variabilă $S \cos \Omega t$ (S fiind amplitudinea, iar Ω frecvenţa ciclică), astfel încît forţa $F_{(t)}$ va varia periodic între limitele F_0 şi $(F_0^2 + S^2)^{1/2}$.

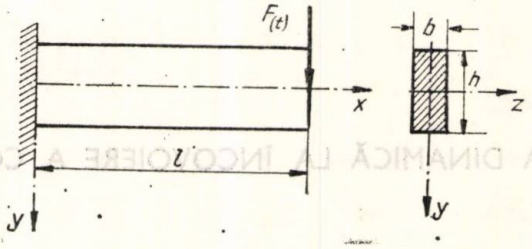


Fig. 1

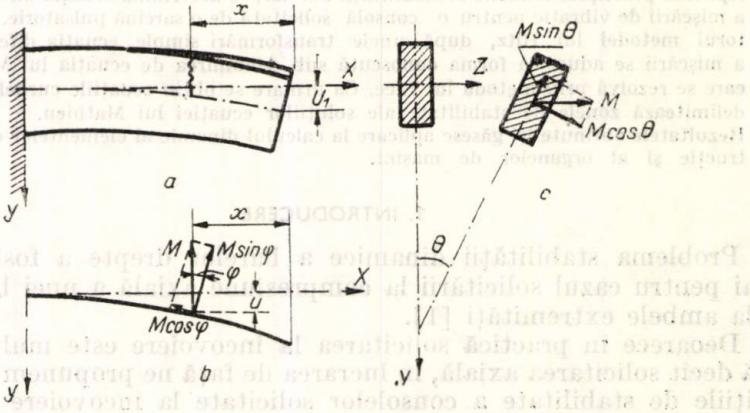


Fig. 2

Pentru studiul acestei probleme se foloseşte principiul dinamic al stabilităţii, admiţîndu-se că bara este dreaptă, perfect elastică, şi, datorită unui impuls oarecare, se produc mici vibraţii laterale ale acesteia, datorită cărora grinda se încovoaie uşor lateral şi se răsuceşte (fig. 2*a*).

În figura 2 *c* s-a reprezentat o secţiune oarecare a grinzii care s-a răsucit cu unghiul θ, iar în figura 2*b* s-a desenat, văzută de sus, fibra medie a grinzii, care s-a curbat lateral.

2. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII DE VIBRAŢIE

Dacă $S = 0$, ecuaţia diferenţială care serveşte la determinarea condiţiei de pierdere a stabilităţii poziţiei de echilibru a grinzii reprezentate în figura 1 este de forma [1]

$$C \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_y} \theta = 0, \tag{2}$$

unde θ este unghiul de răsucire al axei Y, $C = GI_r \left(I_r \simeq \frac{h b^3}{3} \right)$, iar M momentul încovoietor în secțiunea de abscisă x.

În cazul solicitării grinzii cu sarcina pulsatorie (1), ecuația (2) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + \frac{(F_0^2 + S^2 \cos^2 \Omega t)\, x^2}{CEI_y}\, \theta + \frac{m_0}{C} \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{3}$$

unde m_0 este momentul de inerție al maselor pe unitatea de lungime a grinzii.

Pentru cazul că $F_{(t)} = 0$, ecuația (3) se poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m_0}{C} \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{4}$$

care este ecuația oscilațiilor de răsucire.

Se caută pentru ecuația (3) o soluție aproximativă de forma

$$\theta = X_{(x)}\, T_{(t)}, \tag{5}$$

unde

$$X_{(x)} = \theta_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \tag{6}$$

satisface condițiile de limită.

Introducînd expresiile (5) și (6) în ecuația (3) și ținînd seama de caracterul aproximativ al soluției (5), se obține inegalitatea

$$\Gamma = \left[\left(\frac{F_0^2 + S^2 \cos^2 \Omega t}{CEI_y}\, x^2 - \frac{\pi^2}{4l^2} \right) T + \frac{m_0}{C} \ddot{T} \right] \theta_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \neq 0. \tag{7}$$

Condiția abaterii minime a funcției (7) față de zero se scrie sub forma cunoscută, dată de Ritz

$$\int_0^l \Gamma\, X_{(x)}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Ținînd seama de relațiile (6) și (7), după efectuarea integralei (8) se obține

$$\ddot{T}_{(t)} - \omega_{0_r}^2 \left(1 - \frac{F_0^2}{F_{0_c}^2} - \frac{S^2}{F_{0_c}^2} \cos^2 \Omega t \right) T_{(t)} = 0, \tag{9}$$

unde

$$\omega_{0_r} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{C}{m_0}} \tag{10}$$

este pulsația oscilațiilor de răsucire pentru consola nesolicitată, iar

$$F_{0c} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}}} \cdot \frac{\sqrt{CEI_y}}{l^2} \simeq \frac{4{,}33}{l^2}\sqrt{CEI_y} \tag{11}$$

este valoarea aproximativă a sarcinii critice de flambaj pentru solicitarea statică a consolei.

Dacă în ecuația (9) se ia $S = 0$, aceasta se poate scrie sub forma

$$\ddot{T}_{(t)} - \omega_{0r}^2\left(1 - \frac{F_0^2}{F_{0c}^2}\right) T_{(t)} = 0. \tag{12}$$

Deci pătratul pulsației de răsucire pentru consola acționată de sarcina statică F_0 este

$$\omega_r = \omega_{0r}^2\left(1 - \frac{F_0^2}{F_{0c}^2}\right). \tag{13}$$

Se constată că o dată cu creșterea sarcinii F_0 pulsația ω_r descrește, iar cînd $F_0 = F_{0c}$ pulsația este nulă, astfel că sub acțiunea acestei sarcini consola nu mai vibrează, găsindu-se în echilibru într-o formă ușor răsucită și încovoiată lateral.

Dacă $S \neq 0$, funcția T se obține prin rezolvarea ecuației diferențiale (9), care după schimbarea variabilei ia forma

$$\ddot{T}_{(z)} - (p - 2q\cos 2z)\, T_{(z)} = 0, \tag{14}$$

unde

$$z = \Omega t, \tag{15}$$

$$q = \frac{S^2}{4F_{0c}^2}\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2, \tag{16}$$

$$p = \left(1 - \frac{2F_0^2 + S^2}{2F_{0c}^2}\right)\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2. \tag{17}$$

3. REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII DE VIBRAȚIE

Ecuația (14), cunoscută sub denumirea de ecuația lui Mathieu, se rezolvă ușor prin metoda lui Ince [2]. În acest scop se caută o soluție de forma

$$T_{(z)} = \sum_{r=0}^{\infty} (A_r \cos rz + B_r \sin rz). \tag{18}$$

Punînd condiția ca soluția (18) să satisfacă identic ecuația diferențială (14), se obțin relații de recurență simple între coeficienții A_r și B_r. Aceste ecuații conțin fie numai coeficienții A_r (pari sau impari), fie numai coeficienții B_r (pari sau impari). Deci soluția periodică căutată poate lua una dintre următoarele patru forme :

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2rz, \\ F_2(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1} \cos(2r+1)z, \\ G_1(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r} \sin 2rz, \\ G_2(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1} \sin(2r+1)z. \end{aligned} \tag{19}$$

În cazul primei soluții (soluția pară de perioadă π), dacă se scrie că ea verifică identic ecuația diferențială (14), se obțin între coeficienții A_r următoarele formule de recurență :

$$\begin{aligned} &pA_0 - qA_2 = 0, \\ &(p-4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(p-4r^2)A_{2r} - q(A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Din a doua relație (20) și următoarele se deduce raportul $\frac{A_2}{A_0}$, care se poate exprima sub forma unei fracții continue, nelimitată :

$$\frac{A_2}{2A_0} = \frac{-q}{|4-p-} \; \frac{q^2}{|16-p-} \; \frac{q^2}{|36-p-} \cdots \frac{q^2}{|4r^2-p-} \cdots \tag{21}$$

Se poate arăta cu ușurință că fracția continuă (21) este convergentă
Condiția de compatibilitate a sistemului (20) este ca valoarea raportului $\frac{A_2}{A_0}$ dat de expresia (21) să fie egal cu a celui dat de prima ecuație (20), adică cu $\frac{p}{q}$.

$$-\frac{p}{2} = \frac{q^2}{|4-p-} \; \frac{q^2}{|16-p-} \; \frac{q^2}{|36-p-} \cdots \frac{q^2}{|4r^2-p-} \cdots \tag{22}$$

Aceasta este condiția necesară pentru ca funcția $F_1(z)$ (pară și de perioadă π) să fie soluție a ecuației (14). Ecuația (22) poartă denumirea de ecuație caracteristică a funcției $F_1(z)$.

Pentru restul funcțiilor (19) se obțin condiții de compatibilitate similare, astfel încît cele patru ecuații caracteristice se pot scrie sub forma

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{p}{2} - \frac{q^2}{|4-p-} \cdots \frac{q^2}{|4r^2-p-} \cdots && \text{(pentru } F_1(z)\text{)},\\
0 &= q+1-\frac{q^2}{|9-p-} \cdots \frac{q^2}{|(2r+1)^2-p-} \cdots && \text{(pentru } F_2(z)\text{)},\\
0 &= -q+1-\frac{q^2}{|9-q-} \cdots \frac{q^2}{|(2r+1)^2-p-} \cdots && \text{(pentru } G_1(z)\text{)},\\
0 &= 4-p-\frac{q^2}{|16-p-} \cdots \frac{q^2}{|(2r+2)^2-p-} \cdots && \text{(pentru } G_2(z)\text{)}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Fiecare dintre ecuațiile (23) definește în planul (p,q) cîte o curbă transcendentă, formată dintr-o infinitate de ramuri distincte și fără puncte comune.

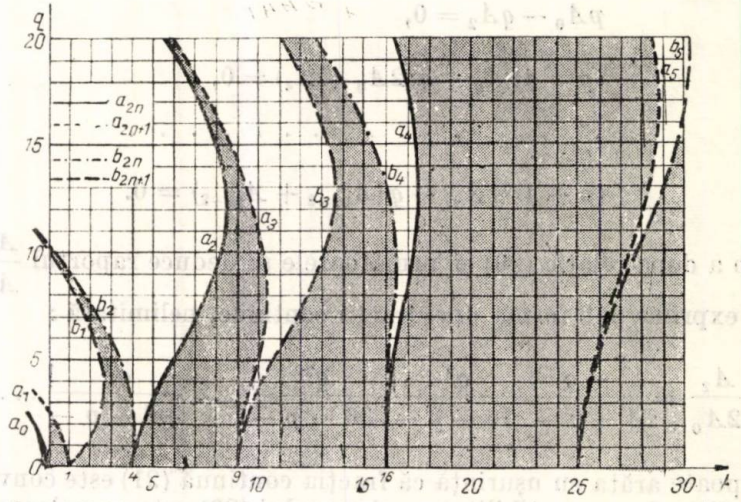


Fig. 3

Aceste curbe, notate cu a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n} și b_{2n+1} $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, au fost reprezentate în graficul din figura 3.

Ince [2] a demonstrat că punctele de coordonate (p,q) situate între curbele a_{2n} și b_{2n}, respectiv a_{2n+1} și b_{2n+1}, determină soluții instabile pentru ecuația diferențială (14), în timp ce pentru punctele situate între

curbele a_{2n} și a_{2n+1}, respectiv b_{2n} și b_{2n+1}, corespund soluții stabile. Deci regiunile de culoare închisă din figura 3 vor reprezenta zonele de stabilitate.

Se constată că zonele de stabilitate se măresc pe măsură ce parametrul p crește.

4. CONCLUZII

Din analiza graficului reprezentat în figura 3 se constată că pentru valori mici ale lui q (respectiv pentru valori mici ale forței S) soluția ecuației diferențiale (14) este întotdeauna stabilă, cu excepția cazului cînd $p = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Pentru această situație, dacă $F_0 = 0$, expresia (17) se poate scrie sub forma

$$\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2 \simeq p = n^2, \tag{24}$$

de unde se deduce valoarea critică a lui Ω:

$$\Omega_c = \frac{\omega_{0r}}{n}. \tag{25}$$

Deci pentru $F_0 = 0$ și valori mici ale lui S pot avea loc vibrații violente pentru valori ale frecvenței Ω ale forței pulsatoare, date de relația (25).

Dacă $F_0 \neq 0$, valoarea critică a frecvenței Ω descrește o dată cu creșterea forței F_0. Astfel, pentru $F_0 = 0{,}5\, F_{cc}$ relația (25) devine

$$\Omega_c = \frac{\sqrt{3}\,\omega_{0r}}{2n}. \tag{26}$$

În cazul cînd $F_0 = 0$, iar S are o acțiune statică (ceea ce corespunde situației cînd $\Omega t = 0$), flambajul lateral al consolei se va produce în mod evident cînd este satisfăcută egalitatea

$$S = F_{0c}. \tag{27}$$

Experiența arată însă că, atunci cînd forța S are o acțiune dinamică (respectiv cînd $\Omega t \neq 0$), flambajul lateral se produce pentru o valoare a forței S mult mai mare decît cea dată de relația (27). Acest lucru rezultă și din graficul reprezentat în figura 3. Astfel, pentru un punct situat în zona de stabilitate și avînd coordonatele $p = 1{,}5$ și $q = 8$, relațiile (15) și (16), în care se ia $F_0 = 0$, devin

$$\begin{gathered}\frac{S^2}{4F_{0c}^2}\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2 = 8,\\ \left(1 - \frac{S^2}{2F_{0c}^2}\right)\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2 = 1{,}5.\end{gathered} \tag{28}$$

Eliminînd raportul $\left(\frac{\omega_{0r}}{\Omega}\right)^2$ între aceste două relații, rezultă

$$S = 1{,}35 F_{0c} > F_{0c}. \tag{29}$$

Primită la redacție la 8 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. S. P. TIMOSHENKO, I. M. GERE, *Teoria stabilității elastice*, București, Edit. tehnică, 1967, p. 172 și 273.
2. R. CAMPBELL, *Théorie générale de l'équation de Mathieu*, Paris, Masson et Cie Editeurs, 1955, p. 14 și 170.

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL SPAȚIAL AL STRUCTURILOR MULTIETAJATE SIMETRICE CU ETAJ CONSTANT ALCĂTUITE CU DIAFRAGME. I

de FLORIAN VIRGILIU
Institutul de petrol gaze, și geologie — București

În lucrare se studiază repartizarea încărcării orizontale a structurii la elementele sale constitutive, numai în cazul translatării planșeelor, prin asimilarea structurii de rezistență a unei construcții multietajate cu nivel constant, cu o consolă deformabilă prin încovoiere simplă și torsiune și prin asimilarea diferitelor elemente plane verticale cu niște lamele deformabile în planul lor prin încovoiere și forfecare-lunecare.

A. ASPECTE GENERALE

Ca elemente portante și de contravîntuire ale structurilor multietajate „în diafragme", sînt tratați în prezent pereții — plini sau cu goluri — din beton sau din zidărie de cărămidă ai clădirilor respective, așa-numitele diafragme.

Aceste diafragme au deci aceeași funcțiune în acest gen de structuri ca și cadrele în structurile tradiționale „în cadre". Ele pot înlocui complet cadrele sau pot colabora cu acestea în structuri mixte. Atît unele, cît și celelalte sînt elemente plane verticale, dispuse în general paralel cu cele două direcții principale ale clădirilor (transversală și longitudinală). Legătura dintre elementele de pe cele două direcții se realizează atît monolit, în secțiunile de încrucișare, cît și prin intermediul planșeelor.

Încărcarea dintr-o acțiune exterioară oarecare a fiecărui element plan vertical în parte (cadru sau diafragmă) rezultă din conlucrarea spațială a tuturor elementelor structurale verticale și orizontale, în funcție de modul în care acestea se deformează. Spre deosebire însă de structurile în cadre, la care diferitele elemente plane verticale paralele între ele practic se deformează în același fel, la structurile în diafragme și mai ales la cele mixte modul în care se deformează elementele respective diferă în general esențial de la element la element, după cum acesta este un cadru, o diafragmă plină sau una cu goluri, în funcție de lungimea sec-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1167—1190

țiunii la diafragmele pline, de poziția și deschiderea golurilor, precum și de rigiditatea buiandrugilor, la diafragmele cu goluri.

Așadar, dacă în cazul structurilor în cadre problema distribuirii încărcării exterioare la diferitele elemente portante verticale poate fi soluționată simplu prin metoda practică a suprafețelor aferente, în cazul structurilor în diafragme sau al celor mixte aceasta nu poate fi rezolvată decît printr-un calcul ad-hoc de conlucrare spațială.

Se menționează cu această ocazie că metoda utilizată deseori în proiectare, de distribuire a acestei încărcări, la elementele plane verticale care alcătuiesc structura (diafragme pline și cu goluri sau cadre), proporțional cu niște momente de inerție echivalente ale acestora și cu distanțele lor pînă la un așa-numit „centru de rigiditate", este departe de a da o soluție satisfăcătoare problemei. Într-adevăr, deformabilitatea unui element plan vertical oarecare de tipul unei diafragme pline, al unei diafragme cu goluri și mai ales al unui cadru se datorește nu numai încovoierii generale, adică flexibilității barelor verticale (spaleți plini sau stîlpi), ci și lunecării dintre fibrele verticale ale acestora sau între diferitele grupuri de fibre (spaleți sau stîlpi), prin deformarea buiandrugilor sau a riglelor de cadre. Or, ponderea deplasărilor laterale prin lunecare față de cele prin încovoiere diferă atît de la element la element, după cum acesta este cadru, diafragmă cu goluri sau diafragmă plină (mai lată sau mai îngustă), cît și de la nivel la nivel.

De asemenea nu poate fi vorba de un centru de rigiditate de nivel decît în primul rînd dacă planșeele ar fi perfect rigide în direcție normală pe planul lor, ceea ce nu este de loc cazul.

B. IPOTEZE DE CALCUL

Pentru reducerea complexității problemei propuse, se admit în cele ce urmează următoarele ipoteze simplificatoare :

a) conlucrarea spațială dintre diferitele elemente plane verticale se consideră că se realizează numai datorită legăturilor orizontale dintre ele (planșee). Pentru a ține totuși seama de legăturile monolite dintre elementele plane dispuse pe direcții diferite, se sporește rigiditatea fiecărui element solicitat prin adăugarea la secțiunea acestuia a unor porțiuni corespunzătoare (aripi) din secțiunile pline ale elementelor dispuse pe cealaltă direcție cu care sînt legate monolit ;

b) cutia realizată prin legăturile monolite dintre pereții marginali plini și pereții intermediari din subsol se consideră suficient de rigidă pentru a interzice rotiri diferențiate ale fundațiilor diferitelor elemente plane verticale ;

c) diferitele elemente plane verticale se consideră complet lipsite de rigiditate în direcția normală pe planul lor ;

d) conlucrarea spațială dintre diferitele elemente plane verticale ale structurii în situația arătată mai sus se studiază în ipoteza perfectei rigidități a planșeelor în planul lor și a perfectei flexibilități a acestora în direcție normală pe planul lor.

Rezultă că, în ceea ce privește încărcarea verticală a structurii, aceasta poate fi distribuită diferitelor elemente plane verticale prin metoda cunoscută a suprafețelor aferente.

În ceea ce priveşte însă distribuirea încărcării orizontale la aceleaşi elemente, rezultă că aceasta depinde numai de susceptibilitatea lor de a accepta deplasări orizontale în dreptul planşeelor (deci independent direct de rotirea secţiunilor respective).

C. SCHEMA DE CALCUL

În baza ipotezelor arătate este posibilă asimilarea „formală" a oricărui element plan vertical (cadru sau diafragmă) cu o lamelă plină încastrată în fundaţie, care admite aceleaşi deplasări în dreptul planşeelor ca elementul real.

Întrucît deplasările respective ale acestuia din urmă depind nu numai de alcătuirea sa constructivă (cadru, diafragmă plină sau cu goluri), ci şi de modul în care este încărcat, asimilarea respectivă trebuie să fie specifică distribuirii efective a încărcării acestuia (care nu este cunoscută însă apriori). Această dificultate este escaladată în lucrare, calculul făcîndu-se prin iteraţii. Astfel caracteristicile de rigiditate ale diferitelor lamele pline echivalente se determină iniţial pentru încărcări convenţionale (de tipul încărcării totale a structurii) ale elementelor reale. Bineînţeles că aceasta comportă ridicarea prealabilă a nedeterminării statice (acolo unde este cazul) a acestor elemente.

În lucrarea [4] se arată că, dacă se consideră deformarea lamelei echivalente ca provenind atît din încovoiere, cît şi din lunecare-forfecare, linia elastică a acesteia poate fi suficient de exact suprapusă peste înfăşurătoarea punctelor deplasate din dreptul planşeelor ale elementului real în stare deformată, prin egalarea săgeţilor corespunzătoare ale acestora la două nivele (de preferinţă al doilea şi penultimul nivel). Se determină astfel cîte două caracteristici de rigiditate, specifice încărcărilor apreciate iniţial, pentru fiecare lamelă plină echivalentă. Acestea urmează apoi să fie corectate prin iteraţii după determinarea prin calcul a încărcărilor corespunzătoare.

În faza finală de iteraţii se pot determina, aşa cum se va arăta mai jos, caracteristici de rigiditate de nivel pentru fiecare lamelă plină echivalentă prin egalarea săgeţilor corespunzătoare de la toate nivelele.

De asemenea, structura în ansamblu este privită ca o consolă cu alcătuire complexă, care, sub acţiunea forţelor exterioare orizontale, se deformează prin încovoiere, forfecare-lunecare şi torsiune. Datorită flexibilităţii planşeelor în direcţie normală pe planul lor, secţiunile orizontale prin această consolă nu rămîn însă plane în starea deformată a acesteia.

Admiţînd suprapunerea efectelor, secţiunile deplanate ale consolei din dreptul planşeelor structurii se translatează prin încovoierea simplă a consolei şi se rotesc în planul lor prin torsionarea acesteia în jurul centrelor de torsiune respective, variabile ca poziţie de la nivel la nivel. Conform accepţiei generale, aceste puncte sînt punctele în care, dacă acţionează forţele exterioare, consola echivalentă nu se torsionează. Aşadar, axa consolei cu care este asimilată structura de rezistenţă este formată din succesiunea centrelor de torsiune de la diferitele nivele ale structurii.

Se menţionează că, în cazul structurilor simetric alcătuite, axa consolei coincide, în baza celor arătate mai sus, cu axa geometrică a structurii.

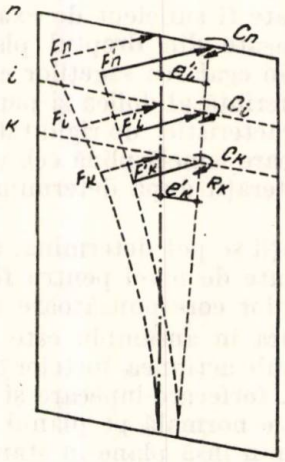
În cele ce urmează se dă baza teoretică a calculului, în stadiul elastic de deformare, pentru cazul structurilor multietajate simetrice cu nivel constant (aceeaşi înălţime între diferitele planşee şi cu aceeaşi greutate concentrată la fiecare nivel) :

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h,$$
$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = Q_0, \tag{1}$$

unde n este numărul total de nivele ale structurii.

Aceste calcule sînt concepute a fi efectuate în aplicaţiile practice cu ajutorul calculatoarelor electronice cifrice. Pentru cazul însă cînd un calcul prin mijloacele uzuale este singurul accesibil sau cînd unele rezultate aproximative pot fi considerate ca mulţumitoare, se dau în partea a doua a lucrării două procedee de rezolvare numerică aproximativă şi modul de sistematizare a calculelor respective în scopul mecanizării lor.

Pentru cazul utilizării mijloacelor moderne de calcul s-a urmărit evitarea întocmirii unui program ad-hoc (ceea ce se realizează prin utilizarea subprogramelor din biblioteca de programe cu care este dotat orice calculator electronic), precum şi posibilitatea rezolvării concomitente în mai multe variante de încărcare (de exemplu în primele trei moduri de vibraţie şi din vînt).



—.—.—.— Linia proiecţiilor centrelor de mase

--------- Linia centrelor de torsiune

Fig. 1

În cazul unei structuri oarecare, în baza principiului suprapunerii efectelor, în locul sistemului forţelor exterioare orizontale de nivel F_j (fig. 1) (aplicate în centrele de mase respective în cazul forţelor seismice sau în mijlocul laturilor planşeelor normale pe direcţia lui în cazul acţiunii

vîntului) se pot considera alte două sisteme de forţe-echivalente cu primul, şi anume :
— forţele :

$$F'_j = F_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

aplicate în axa consolei la nivelele j, şi
— cuplele de nivel :

$$C_j = F_j \cdot e'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

unde e'_j este excentricitatea necunoscută a centrului de torsiune de la nivelul j faţă de linia de acţiune a forţei de nivel F_j. În acest fel, calculele din prezenta lucrare sînt valabile şi pentru cazul unei structuri oarecare, încărcată însă numai cu sistemul de forţe F'_j.

Într-adevăr, din încărcarea structurii cu sistemul de forţe F'_j, planşeele structurii capătă doar o mişcare de translaţie, iar consola echivalentă este simplu încovoiată. Diferitele lamele pline echivalente l' (paralele cu direcţia de acţiune a forţelor exterioare) se încarcă cu forţele

$$F'_{jl'} \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, n, \\ l' = 1, 2, \ldots, m', \end{cases}$$

iar lamelele l'' (normele pe linia de acţionare a forţelor exterioare) nu se încarcă :

$$F'_{jl''} = 0 \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, n, \\ l'' = 1, 2, \ldots, m'', \end{cases} \tag{3'}$$

unde n este numărul de nivele al structurii, iar m' şi m'' sînt, respectiv, numărul de lamele dispuse paralel cu direcţia de acţiune a forţelor exterioare sau normal pe această direcţie.

Din încărcarea structurii cu cuplele C_j, consola echivalentă este torsionată, planşeele structurii se rotesc în planul lor şi astfel toate lamelele structurii se încarcă cu forţele suplimentare :

$$F''_{jl'} \text{ şi } F''_{jl''} \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, n, \\ l' = 1, 2, \ldots, m', \\ l'' = 1, 2, \ldots, m''. \end{cases}$$

În total, diferitele lamele ale structurii se încarcă cu forţele

$$\begin{aligned} F_{jl'} &= F'_{jl'} + F''_{jl'}, \\ F_{jl''} &= F''_{jl''}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru ca rezultatele calculului acestor încărcări să poată fi nemijlocit folosite în calculele de rezistenţă şi mai ales pentru a evita labili-

tatea sistemului de ecuaţii ce se obţine, în locul forţelor de mai sus se consideră ca necunoscute ale problemei momentele încovoietoare din secţiunile lamelelor echivalente din dreptul planşeelor structurii :

$$M'_{kl'} = h \cdot \sum_{k}^{n} \sum_{i+1}^{n} F'_{jl'},$$

$$M''_{kl'} = h \cdot \sum_{k}^{n} \sum_{i+1}^{n} F''_{jl'}, \tag{5}$$

$$M''_{kl''} = h \cdot \sum_{k}^{n} \sum_{i+1}^{n} F''_{jl''}.$$

În mod similar, în locul forţelor exterioare F'_j se consideră momentele încovoietoare din secţiunile k (din dreptul planşeelor structurii) ale consolei echivalente :

$$M_k = h \cdot \sum_{k}^{n} \sum_{i+1}^{n} F_j, \tag{6}$$

precum şi momentele de torsiune din aceleaşi secţiuni :

$$M^t_k = \sum_{k+1}^{n} C_j = \sum_{k+1}^{n} e'_j \cdot F_j. \tag{7}$$

Din încovoierea simplă a consolei echivalente, axa acesteia se deplasează în direcţia de acţiune a forţelor exterioare (fig. 2). Săgeţile y_k din dreptul planşeelor structurii vor fi egale cu săgeţile diferitelor lamele pline echivalente :

$$y'_{kl'} = y_k \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n, \\ l' = 1, 2, \ldots, m', \end{cases}$$

$$y'_{kl''} = 0 \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n, \\ l'' = 1, 2, \ldots, m''. \end{cases} \tag{8}$$

Din torsionarea consolei echivalente, secţiunile acesteia (din dreptul planşeelor structurii) se rotesc cu unghiurile

$$\theta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

iar diferitele lamele pline echivalente se deplasează în plus cu săgeţile

$$y''_{kl'} = r_{kl'} \cdot \theta_k ,$$
$$y''_{kl''} = r_{kl''} \cdot \theta_k , \tag{9}$$

unde $r_{kl'}$ şi $r_{kl''}$ sînt distanţele, măsurate normal de la centrul de torsiune

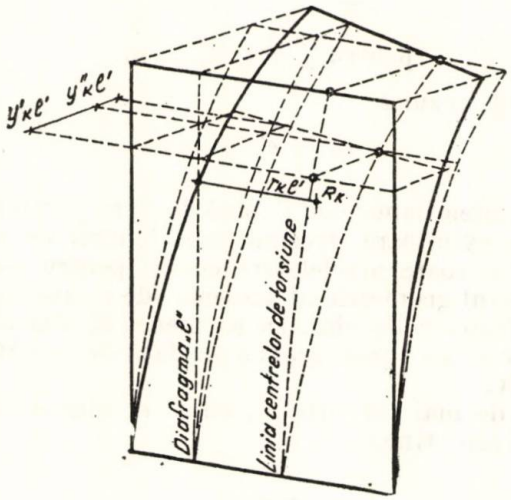


Fig. 2

al nivelului k, pînă la lamelele l' (paralele cu direcţia de acţiune a forţelor exterioare), respectiv l'' (normale pe această direcţiune).

D. **Determinarea momentelor** $M'_{kl'}$ (adică a momentelor încovoietoare de la nivelul k din lamelele pline echivalente l'*) paralele cu direcţia de acţiune a forţelor exterioare, rezultînd din translatarea planşeelor structurii, respectiv din încovoierea simplă a consolei echivalente cu aceasta).

În lucrarea de faţă, calculele se mărginesc la determinarea acestor momente. Se precizează că momentele $M'_{kl'}$ sînt chiar momentele încovoietoare reale din lamelele pline echivalente în cazul structurilor simetrice în raport cu direcţia de acţiune a forţelor exterioare.

Calculul acestor momente va lua în considerare :

— aspectul static al problemei, adică echivalenţa sistemului de forţe $F'_{jl'}$ cu forţa F'_j la fiecare nivel al structurii ;

— aspectul geometric, exprimat prin condiţiile (8) arătate mai sus, rezultînd din ipoteza perfectei rigidităţi a planşeelor în planul lor, precum şi

— aspectul fizic. Se va obţine astfel sistemul de ecuaţii necesar pentru determinarea necunoscutelor arătate.

*) În baza relaţiilor (3), momentele $M'_{kl''}$ din lamelele l'' normale pe direcţia de acţiune a forţelor exterioare sînt nule.

1. STABILIREA RELAȚIILOR DE ECHIVALENȚĂ

În conformitate cu cele expuse mai sus vom avea

$$\sum_{l'} F'_{jl'} = F'_j = F_j,$$

$$\sum_{l'} r_{jl'} \cdot F'_{jl'} = 0, \tag{1.1}$$

pentru $j = 1, 2, \ldots n.$

Din figura (3) rezultă

$$r_{jl'} = e'_j + x_{l'}, \tag{1.2}$$

unde $x_{l'}$ sînt distanțele lamelelor l' pînă la axa paralelă cu direcția de acțiune a forțelor exterioare, trecînd prin centrul de mase al nivelului respectiv (același la toate nivelele structurii) pentru cazul forțelor seismice sau prin centrul geometric al acestuia (de asemenea același la toate nivelele) în cazul forțelor din vînt. De asemenea e'_j sînt abscisele centrului de mase, respectiv al centrului geometric, față de centrul de torsiune de la nivelul respectiv.

În calculele de mai jos, atît $x_{l'}$, cît și e'_j sînt considerate pozitive cînd se măsoară spre stînga.

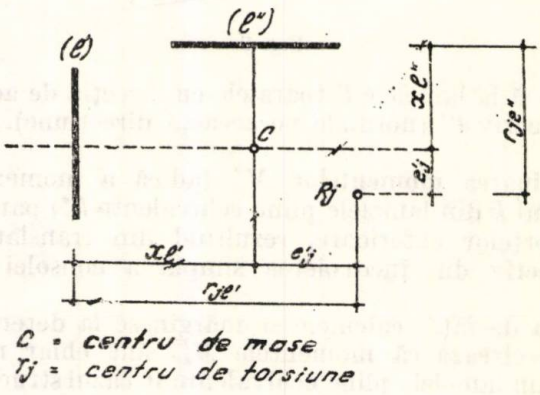


Fig. 3

Pe baza relațiilor (5) și (6), aplicînd de două ori suma pe primul indice (j) asupra relațiilor de echivalență (1.1) de mai sus, respectiv între valorile $(i+1) \div n$ și între $(k) \div (n)$, acestea devin

$$\sum_{l'} M'_{kl'} = M_k,$$

$$\sum_{l'} x_{l'} \cdot M'_{kl'} = - e'_{kn} \cdot M_k, \tag{1.3}$$

pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$

în care s-a notat

$$e'_{kn} = \frac{\sum_{k}^{n}\sum_{i+1}^{n} e'_j \cdot F_j}{\sum_{k}^{n}\sum_{i+1}^{n} F_j}, \tag{1.4}$$

aceasta fiind astfel o valoare medie ponderată între nivelele k şi n ale absciselor e'_j (deci fără vreo semnificaţie practică directă).

2. STABILIREA RELAŢIILOR FIZICE

Aşa cum se arată în [4], expresia săgeţilor de la nivelele (echidistante) k ale unei console de secţiune constantă rezultînd din încovoiere şi forfecare-lunecare este

$$y_k = -\frac{h^2}{6EI}\cdot\left[6\sum_{0}^{k}\sum_{0}^{i-1} M_j + M_k - (3k+1)\cdot M_0 + \Delta\cdot(M_0 - M_k)\right], \tag{2.1}$$

unde M_j este momentul încovoietor de la nivelul j $(=0,1,2,\ldots,n-1)$, h fiind distanţa dintre două nivele consecutive, iar

$$\Delta = \frac{7{,}2\,E}{G}\cdot\frac{I}{A\cdot h^2} \tag{2.2}$$

este un coeficient (adimensional), care introduce influenţa forfecării-lunecării asupra săgeţii.

În această expresie, E şi G sînt modulele de elasticitate (longitudinal şi transversal) ale materialului din care este alcătuită consola, iar I şi A momentul de inerţie şi, respectiv, aria secţiunii consolei.

În cazul de faţă, atît lamelele echivalente cu diferitele elemente plane portante verticale ale structurii, cît şi consola echivalentă cu întreaga structură dau o imagine a situaţiei reale numai din punctul de vedere al deplasărilor (săgeţilor) din dreptul anumitor secţiuni (la nivelul diferitelor planşee ale structurii). Aceste elemente fiind fictive, jocul săgeţilor lor poate fi realizat din ponderea, variabilă de la nivel la nivel, a influenţei forfecării-lunecării asupra celei a încovoierii.

Păstrînd aceeaşi structură a expresiei săgeţii unui astfel de element fictiv cu cea a consolei cu secţiune constantă dată în (2.1), vom avea

$$y_k = -\frac{h^2}{6EI'}\cdot\left[6\sum_{0}^{k}\sum_{0}^{i-1} M_j + M_k - (3k+1)\cdot M_0 + \Delta'_k\cdot(M_0 - M_k)\right], \tag{2.3}$$

respectiv

$$y'_{kl'} = -\frac{h^2}{6EI_{l'}}\cdot\left[6\sum_{0}^{k}\sum_{0}^{i-1} M'_{jl'} + M'_{kl'} - (3k+1)\cdot M'_{0l'} + \Delta_{kl'}\cdot(M'_{0l'} - M'_{kl'})\right]\cdot \tag{2.4}$$

unde $I_{l'}$ este o valoare arbitrară, reprezentînd un moment de inerţie fictiv al lamelei echivalente l', iar $\Delta_{kl'}$ sînt nişte coeficienţi care introduc influenţa, variabilă de la nivel la nivel, a forfecării-lunecării asupra deformării de ansamblu a lamelei l' între nivelele o şi k.

De asemenea, I' este o valoare arbitrară, avînd semnificaţia unui moment de inerţie fictiv al consolei echivalente cu structura de rezistenţă (faţă de direcţia de acţiune a forţelor exterioare), iar Δ'_k în mod similar, sînt coeficienţii care introduc influenţa forfecării-lunecării în deformarea totală a consolei echivalente în direcţia de acţiune a forţelor exterioare între nivelele 0 şi k.

Întrucît I' poate avea o valoare arbitrară, în cele de mai jos se ia în mod convenabil

$$I' = \sum_{l'} I_{l'} . \tag{2.5}$$

În baza condiţiilor geometrice (8) rezultă

$$6 \sum_{0}^{k} \sum_{0}^{i-1} M'_{j\,l'} + M'_{k\,l'} - (3k+1) \cdot M'_{0\,l'} + \Delta_{kl'} \cdot (M'_{0\,l'} - M'_{k\,l'}) =$$

$$= \eta_{l'} \cdot \left[6 \sum_{0}^{k} \sum_{0}^{i-1} M_j + M_k - (3k+1) \cdot M_0 + \Delta'_k \cdot (M_0 - M_k) \right]$$

$$\text{pentru} \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n, \\ l' = 1, 2, \ldots, m', \end{cases} \tag{2.6}$$

unde s-a notat

$$\eta_{l'} = \frac{I_{l'}}{I'} . \tag{2.7}$$

Ecuaţiile (1.3) şi (2.6) formează un sistem de $n(2 + m')$ ecuaţii cu acelaşi număr de necunoscute :

$M'_{k\,l'}$ în număr de $n \cdot m'$,

e'_{kn} „ „ „ n ,

şi Δ'_k „ „ „ n.

Necunoscutele nesemnificative e'_{kn}, care intervin numai în al doilea grup de ecuaţii (1.3), pot fi eventual determinate, după aflarea necunoscutelor principale $M'_{k\,l'}$, cu formula

$$e'_{kn} = - \frac{\sum_{l'} x_{l'} \cdot M'_{k\,l'}}{M_k} . \tag{2.8}$$

În ceea ce privește necunoscutele Δ'_k, acestea pot fi de asemenea determinate eventual după aflarea necunoscutelor $M'_{k\,l'}$. Într-adevăr, însumînd ecuațiile (2.6) pe indicele l' și ținînd seama de primul grup de ecuații (1.3), se obține

$$\Delta'_k = \frac{\sum_{l'} \Delta_{kl'} \cdot (M'_{0\,l'} - M'_{k\,l'})}{M_0 - M_k}, \tag{2.9}$$

$$\text{pentru } k = 1, 2, \ldots, n.$$

3. CALCULUL CU AJUTORUL CALCULATOARELOR ELECTRONICE

Necunoscutele Δ'_k pot fi eliminate din ecuațiile (2.6) cu ajutorul expresiei (2.9). Se obține astfel sistemul

$$6 \sum_{0}^{k} \sum_{0}^{i-1} M'_{j\,l'} + M'_{k\,l'} - (3k+1) \cdot M'_{0\,l'} + \Delta_{kl'} \cdot (M'_{0\,l'} - M'_{k\,l'}) -$$

$$- \eta_{l'} \cdot \sum_{l'} \Delta_{kl'} \cdot (M'_{0\,l'} - M'_{k\,l'}) = \eta_{l'} \cdot \left[6 \sum_{0}^{k} \sum_{0}^{i-1} M_j + M_k - (3k+1) \cdot M_0 \right], \tag{3.1}$$

$$\text{pentru } \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'. \end{cases}$$

Dacă se dezvoltă sumele din ecuațiile de mai sus și se notează:

$$\begin{aligned} \alpha_{kl'} &= 1 - \Delta_{kl'} \cdot (1 - \eta_{l'}), \\ \beta_{kl'} &= 3k - \alpha_{kl'}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ecuațiile (3.1) devin

$$\beta_{kl'} \cdot M'_{0\,l'} - \eta_{l'} \cdot \sum_{h' \neq l'} \Delta_{kh'} \cdot M'_{0h'} + 6\,(k-1) \cdot M'_{1\,l'} +$$

$$+ 6(k-2) \cdot M'_{2\,l'} + \cdots + 6(k-i) \cdot M'_{i\,l'} + \cdots + \alpha_{kl'} \cdot M'_{k\,l'} +$$

$$+ \eta_{l'} \cdot \sum_{h' \neq l'} \Delta_{kh'} \cdot M'_{kh'} = \eta_{l'} \cdot D_k,$$

$$\text{pentru } \begin{cases} k = 1, 2, \ldots\ n, \\ l' = 1, 2, \ldots\ m', \end{cases} \tag{3.3}$$

unde

$$D_k = 6 \sum_{0}^{k} \sum_{0}^{i-1} M_j - (M_0 - M_k) - 3k \cdot M_0. \tag{3.4}$$

În ecuațiile (3.3), în număr de nm', trebuie luați numai termenii pentru care valorile $(k-i)$ sînt pozitive. Deci ultimul termen de forma $6(k-i)\cdot M'_{ii'}$ este $6\ M'_{k-1,\,i'}$.

Se observă că matricea coeficienților necunoscutelor ecuațiilor (3.3) poate fi aranjată în supervectorul-linie

$$M = \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k \ldots A_{n-1}\}, \tag{3.4'}$$

în care A_0 este supervectorul-coloană de ordinul n

$$A_0 = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}, \tag{3.5}$$

iar A_k sînt supervectorii-coloană de ordinul n

$$A_1 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ 6U \\ 12U \\ \vdots \\ 6(k-1)\cdot U \\ \vdots \\ 6(n-1)\cdot U \end{Bmatrix}; \quad A_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 6U \\ \vdots \\ 6(k-2)\cdot U \\ \vdots \\ 6(n-2)\cdot U \end{Bmatrix},$$

$$A_k = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_k \\ 6U \\ \vdots \\ 6(n-k)\cdot U \end{Bmatrix}; \quad A_{n-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \\ 6U \end{Bmatrix}, \tag{3.6}$$

unde U este matricea-unitatea de rangul m'

$$U = \begin{Bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Bmatrix}, \tag{3.7}$$

iar a_k și b_k sînt matricele pătrate de rangul m', care se calculează cu formulele matriceale

$$a_k = U - \delta_k + (\eta\cdot e)\cdot\delta_k = U - (U - \eta\cdot e)\cdot\delta_k, \tag{3.8}$$

$$b_k = 3k\cdot U - a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.9}$$

în care e este matricea pătrată de rangul m'

$$e = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}, \tag{3.10}$$

iar η și δ_k sînt matricele diagonale de rangul m'

$$\eta = \begin{Vmatrix} \eta_1 & & & & & & \\ & \eta_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \eta_{i'} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \eta_{m'} \end{Vmatrix}, \tag{3.11}$$

$$\delta_k = \begin{Vmatrix} \Delta_{k1} & & & & & & \\ & \Delta_{k2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \Delta_{kl'} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \Delta_{km'} \end{Vmatrix}. \tag{3.12}$$

Vectorul termenilor liberi se calculează cu formula matriceală

$$L_i = \begin{Vmatrix} D_{1i} \cdot \gamma \\ D_{2i} \cdot \gamma \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{ki} \cdot \gamma \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{ni} \cdot \gamma \end{Vmatrix}, \tag{3.13}$$

unde γ este produsul matriceal

$$\gamma = \eta \cdot u, \tag{3.14}$$

u fiind vectorul-coloană cu m' termeni

$$u = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.15}$$

În (3.13), i reprezintă varianta de încărcare. Termenii D_{ki} se pot calcula în tabele, după modelul dat în tabela 1.

Tabela 1

CALCULUL TERMENILOR DE INCĂRCARE D_K și d'_K

a) Calculul momentelor M_K

i,K	$h.F_K$	$A_K = \sum_K^n h.Fi$	$M_K = \sum_{K+1}^n A_i$
0	0	—	$\sum_1^n A_i$
1	$h.F_1$	$\sum_1^n h.Fi$	$\sum_2^n A_i$
2	$h.F_2$	$\sum_2^n h.Fi$	$\sum_3^n A_i$
⋮	⋮	⋮	⋮
K-1	$h.F_{K-1}$	$\sum_{K-1}^n h.Fi$	$\sum_K^n A_i$
K	$h.F_K$	$\sum_K^n h.Fi$	$\sum_{K+1}^n A_i$
K+1	$h.F_{K+1}$	$\sum_{K+1}^n h.Fi$	$\sum_{K+2}^n A_i$
⋮	⋮	⋮	⋮
n-2	$h.F_{n-2}$	$(h.F_n + h.F_{n-1}) + h.F_{n-2}$	$h.F_n + (h.F_n + h.F_{n-1})$
n-1	$h.F_{n-1}$	$h.F_n + h.F_{n-1}$	$h.F_n$
n	$h.F_n$	$h.F_n$	0

b) Calculul termenilor D_K și d'_K

i,K	M_K	$a_K = \sum_0^{K-1} M_j$	$b_K = \sum_0^K a_i$	$\gamma_K = 6\,b_K$	$\varepsilon_K = 3K.M_0$	$\delta_K = M_0 - M_K$	$D_K = \gamma_K - \varepsilon_K - \delta_K$	$d'_K = \delta_K$
0	M_0	0	0	0	0	0	0	0
1	M_1	M_0	a_1	$6b_1$	$3M_0$	$M_0 - M_1$	$\gamma_1 - \varepsilon_1 - \delta_1$	δ_1
2	M_2	$M_0 + M_1$	$a_1 + a_2$	$6\,b_2$	$6\,M_0$	$M_0 - M_2$	$\gamma_2 - \varepsilon_2 - \delta_2$	δ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
K-1	M_{K-1}	$\sum_0^{K-2} M_j$	$\sum_0^{K-1} a_i$	$6\,b_{K-1}$	$3(K-1).M_0$	$M_0 - M_{K-1}$	⋯	⋯
K	M_K	$\sum_0^{K-1} M_j$	$\sum_0^K a_i$	$6\,b_K$	$3K.M_0$	$M_0 - M_K$	$\gamma_K - \varepsilon_K - \delta_K$	δ_K
K+1	M_{K+1}	$\sum_0^K M_j$	$\sum_0^{K+1} a_i$	$6\,b_{K+1}$	$3(K+1).M_0$	$M_0 - M_{K+2}$	⋯	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-2	M_{n-2}	$\sum_0^{n-3} M_j$	$\sum_0^{n-2} a_i$	$6\,b_{n-2}$	$3(n-2).M_0$	$M_0 - M_{n-2}$	⋯	⋯
n-1	M_{n-1}	$\sum_0^{n-2} M_j$	$\sum_0^{n-1} a_i$	$6\,b_{n-1}$	$3(n-1).M_0$	$M_0 - M_{n-1}$	⋯	⋯
n	0	$\sum_0^{n-1} M_j$	$\sum_0^n a_i$	$6\,b_n$	$3n.M_0$	M_0	$\gamma_n - \varepsilon_n - \delta_n$	δ_n

OBSERVAȚIE

Numărul de ecuații ale sistemului (3.3) poate fi redus, punînd condițiile geometrice (9), în mod aproximativ numai la un număr redus de nivele :

$$n' = \frac{n + a}{\lambda}, \tag{3.16}$$

unde λ este un număr întreg oarecare $(2, 3, \ldots)$. În acest caz, nivelele se vor renumerota în consecință. În formula (3.16), a este un număr întreg mai mic decît λ, reprezentînd numărul de nivele ce trebuie adăugat (în mod fictiv) la partea superioară a structurii pentru ca n' să rezulte un număr întreg. În acest caz se vor recalcula caracteristicile de forfecare cu formula

$$\Delta'_{kl'} = \frac{\Delta_{kl'}}{\lambda^2} \tag{3.17}$$

și coeficienții $\alpha_{kl'}$ și $\beta_{kl'}$ în consecință. De asemenea, termenii liberi vor trebui calculați cu formula

$$D'_k = \frac{D_k}{\lambda^2}. \tag{3.18}$$

Numărul de ecuații se reduce în acest fel la $n' \cdot m'$.

La nivelele intermediare (dintre nivelele λ, $2\lambda, \ldots$, $n' \cdot \lambda$, renumerotate cu $1, 2, 3, \ldots, n'$), momentele încovoietoare se vor calcula prin interpolare.

3.1. Calculul caracteristicilor fizico-geometrice ale unei lamele pline echivalente cu un element portant oarecare plan vertical

După cum s-a arătat mai sus, asimilarea unui element plan vertical oarecare (diafragmă plină de grosime variabilă, diafragmă cu goluri, cadru-diafragmă sau cadru) cu o lamelă plină echivalentă se face prin egalarea săgeților la diferitele lor nivele.

În [4] s-a arătat că săgeata la un nivel k al unei diafragme pline sau cu goluri, al unui cadru sau cadru-diafragmă se poate calcula cu formula

$$y_k = \frac{h^2}{6EI_t} \cdot \eta_k, \tag{3.19}$$

unde I_t este momentul de inerție pe un tronson oarecare (de obicei primul) al diafragmei pline, respectiv al unui spalete sau stîlp în celelalte cazuri, iar

$$\eta_k = 3 \sum_0^k \sum_0^{i-1} \mathfrak{M}_j + \sum_0^k \mathfrak{M}'_j + \Delta_t \cdot \sum_0^k \mathfrak{M}''_j. \tag{3.20}$$

În această expresie, Δ_i este caracteristica la forfecare a aceluiaşi stîlp sau spalete, calculabilă cu formula (2.2), iar

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_j &= m_J^s + m_J^a, \\ \mathfrak{M}_j' &= m_J^s + \mathfrak{M}_j, \\ \mathfrak{M}_j'' &= m_J^s - m_J^a, \end{aligned} \tag{3.21}$$

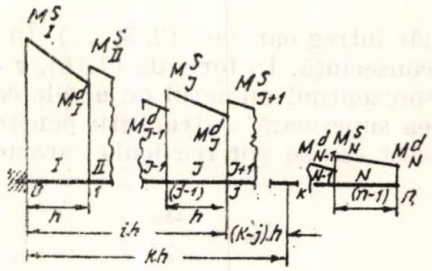


Fig. 4

unde m_J^s şi m_J^a sînt momentele încovoietoare reduse din extremitatea stîngă, respectiv dreaptă, a tronsonului J (între nivelele $j-1$ şi j) (fig. 4) al stîlpului, respectiv spaletului de mai sus:

$$m_J^{s,a} = \frac{I_I}{I_J} \cdot M_J^{s,a} \tag{3.22}$$

(M_J^s, M_J^a sînt momentele încovoietoare reale corespunzătoare, iar I_J este momentul de inerţie pe tronsonul J).

Se observă că, în cazul unui stîlp, ultinul termen din formula (3.20), care reprezintă influenţa forţei tăietoare, poate fi neglijat.

De asemenea, săgeata unei lamele pline cu structură complexă, de moment de inerţie I şi caracteristică la forfecare Δ_k (variabilă pe înălţime), este după [4],

$$y_k = \frac{h^2}{6EI} \cdot (A_k + \Delta_k \cdot a_k), \tag{3.23}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned} A_k &= 3 \sum_0^k \sum_0^{i-1} \mathfrak{M}_j + \sum_0^k \mathfrak{M}_j', \\ a_k &= \sum_0^k \mathfrak{M}_j'', \end{aligned} \tag{3.24}$$

în care

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_j &= M_J^s + M_J^a = M_{j-1} + M_j, \\ \mathfrak{M}_j' &= M_J^s + \mathfrak{M}_j = M_{j-1} + \mathfrak{M}_j, \\ \mathfrak{M}_j'' &= M_J^s - M_J^a = M_{j-1} - M_j, \end{aligned} \tag{3.25}$$

M_j fiind momentul forţelor exterioare de pe elementul portant real (calculat ca pentru o consolă):

$$M_j = h \cdot \sum_{j}^{n} \sum_{i+1}^{n} F_k. \tag{3.26}$$

Din egalarea săgeţilor elementului portant real cu al lamelei pline echivalente rezultă

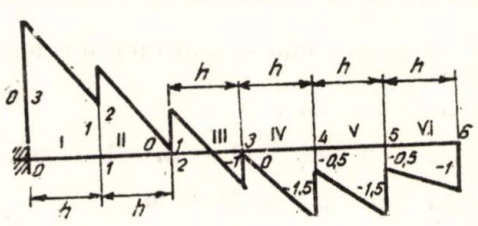
$$\Delta_k = \frac{\frac{I}{I_1} \cdot \eta_{1k} - A_k}{a_k}, \tag{3.27}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n$.

Întrucît I rămîne nedeterminat, valoarea sa poate fi luată arbitrar. Se recomandă însă ca aceasta să fie îndeajuns de mare pentru ca toţi coeficienţii Δ_k să rezulte pozitivi.

OBSERVAŢII

1. Atît termenii η_{1k}, cît şi A_k şi a_k se pot calcula simplu în tabele după modelul dat în figura 5 şi în acelaşi mod.



j	M_j^s	M_j^d	m_j	$\sum_{j=0}^{i-1} m_j$	$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} m_j$	m'_j	$\sum_{j=0}^{k} m'_j$	m''_j	$\sum_{j=0}^{k} m''_j$
I	3	1	4	0	0	7	7	2	2
II	2	0	2	4	4	4	11	2	4
III	1	1	0	5	10	1	12	2	6
IV	0	-1,5	-1,5	6	16	-1,5	10,5	1,5	7,5
V	-0,5	-1,5	-2	4,5	20,5	-2,5	8	1	8,5
VI	-0,5	-1	-1,5	2,5	23	-2	6	0,5	9

$$\eta_4 = 3.16 + 10,5 + 7,5\,\Delta$$

Fig. 5

2. Se precizează că dacă în expresiile termenilor A_k şi a_k intră momentele forţelor exterioare de pe elementul real, adică momentele încovoietoare din lamela echivalentă cu acesta şi care se calculează cu formula (3.26), în expresia termenilor η_{1k} intră momentele încovoietoare

care rezultă (după ridicarea eventuală a nedeterminării statice a elementului real respectiv) pentru aceeaşi încărcare ca mai sus, însă în stîlpul sau spaletele ales al elementului real (în general static nedeterminat).

3. Calculele exprimate prin formula (3.26) de mai sus, similară cu formula (6), se pot efectua de asemenea într-o tabelă după modelul dat în tabela 1.

4. Aşa cum s-a arătat mai sus, în locul caracteristicilor fizico-geometrice ale unei lamele pline echivalente oarecare, şi anume momentul de inerţie fictiv de valoare arbitrară I şi coeficienţii Δ_k de valori variabile pe înălţime, se pot lua în consideraţie numai două caracteristici, I şi Δ, constante pe toată înălţimea (cel puţin în primele faze de iteraţie). Aceste caracteristici urmează a fi determinate prin egalarea săgeţilor numai la două nivele ale lamelei echivalente cu cele corespunzătoare ale elementului real încărcat cu aceeaşi sarcină (arbitrar aleasă, în prima fază de iteraţie). Rezultă astfel

$$I = \frac{A_j \cdot a_i - A_i \cdot a_j}{\eta_j \cdot a_i - \eta_i \cdot a_j} \cdot I_I,$$
$$\Delta = \frac{A_j \cdot \eta_i - A_i \cdot \eta_j}{\eta_j \cdot a_i - \eta_i \cdot a_j}, \tag{3.28}$$

cu recomandarea ca i şi j să fie al doilea şi, respectiv, penultimul nivel ($i = 2$; $j = n-1$).

5. Dacă se procedează ca mai sus, atunci în ecuaţiile (3.3) urmează a se înlocui

$$\begin{aligned} &\Delta_{kh'} \quad \text{cu} \quad \Delta_{h'}, \\ &\alpha_{kl'} \quad \text{cu} \quad \alpha_{l'} = 1 - \Delta_{l'} \cdot (1 - \eta_{l'}), \\ &\beta_{kl'} \quad \text{cu} \quad \beta_{kl'} = 3k - \alpha_{l'}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Rezultă astfel că toate matricele δ_k sînt egale între ele :

$$\delta_k = \delta, \tag{3.30}$$

ca şi toate matricele a_k :

$$a_k = a. \tag{3.31}$$

În acest caz, matricea M se prezintă (desfăşurat), ca în tabela 2.

6. În aceeaşi situaţie, dacă lamelele l' se pot grupa în m'_1 grupuri de lamele cu aceeaşi caracteristică Δ, fiecare dintre aceste grupuri de lamele poate fi înlocuit cu o singură lamelă L', avînd momentul de inerţie fictiv $I_{L'}$, egal cu suma momentelor de inerţie fictive ale lamelelor din grupul respectiv şi caracteristica de forfecare $\Delta_{L'}$ egală cu valoarea comună a caracteristicilor lamelelor din acest grup. În acest caz, matricele U, a, b_k, e, η, δ, γ şi u vor fi de gradul m'_1. În acelaşi grup de lamele, momentele încovoietoare $M'_{kL'}$ se vor distribui la aceste lamele proporţional cu momentele de inerţie fictive respective :

$$M'_{kl'} = \frac{\eta_{l'}}{\eta_{L'}} \cdot M'_{kL'}. \tag{3.32}$$

În acest fel, numărul de ecuaţii al sistemului (3.3) se reduce la $n \cdot m'_1$.

Tabela 2

Matricea coeficienților necunoscutelor și a termenilor liberi (de încărcare) Calculul repartizării sarcinii totale la diferitele diafragme în cazul translatării nivelelor

k	l	M_{01}	M_{02}	...	M_{0l}	...	M_{0m}	M_{11}	M_{12}	...	M_{1l}	...	M_{1m}	M_{21}	M_{22}	...	M_{2l}	...	M_{2m}	...	M_{k1}	M_{k2}	...	M_{kl}	...	M_{km}	...	$M_{n-2,1}$	$M_{n-2,2}$	...	$M_{n-2,l}$	...	$M_{n-2,m}$	$M_{n-1,1}$	$M_{n-1,2}$	...	$M_{n-1,l}$	...	$M_{n-1,m}$	U_{kl}
1	1	β_{11}	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	α_1	a_{12}	...	a_{1l}	...	a_{1m}																											$D_1 \cdot \gamma_1$
1	2	$-a_{21}$	β_{12}	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$	a_{21}	α_2	...	a_{2l}	...	a_{2m}																											$D_1 \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮																											⋮
1	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	β_{1l}	...	$-a_{lm}$	a_{l1}	a_{l2}	...	α_l	...	a_{lm}																											$D_1 \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮																											⋮
1	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	β_{1m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ml}	...	α_m																											$D_1 \cdot \gamma_m$
2	1	β_{21}	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	6						α_1	a_{12}	...	a_{1l}	...	a_{1m}																					$D_2 \cdot \gamma_1$
2	2	$-a_{21}$	β_{22}	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$		6					a_{21}	α_2	...	a_{2l}	...	a_{2m}																					$D_2 \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮			⋱		⋰		⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮																					⋮
2	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	β_{2l}	...	$-a_{lm}$				6			a_{l1}	a_{l2}	...	α_l	...	a_{lm}																					$D_2 \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮					⋰		⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮																					⋮
2	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	β_{2m}						6	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ml}	...	α_m																					$D_2 \cdot \gamma_m$
3	1	β_{31}	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	12						6																											$D_3 \cdot \gamma_1$
3	2	$-a_{21}$	β_{32}	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$		12						6																									$D_3 \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮			⋱		⋰				⋱		⋰																						⋮
3	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	β_{3l}	...	$-a_{lm}$				12						6																								$D_3 \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮					⋰						⋰																						⋮
3	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	β_{3m}						12						6																						$D_3 \cdot \gamma_m$
⋮	⋮																																							⋮
k	1	β_{k1}	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	$6(k-1)$						$6(k-2)$							α_1	a_{12}	...	a_{1l}	...	a_{1m}														$D_k \cdot \gamma_1$
k	2	$-a_{21}$	β_{k2}	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$		$6(k-1)$						$6(k-2)$						a_{21}	α_2	...	a_{2l}	...	a_{2m}														$D_k \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮			⋱		⋰				⋱		⋰			⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮														⋮
k	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	β_{kl}	...	$-a_{lm}$				$6(k-1)$						$6(k-2)$				a_{l1}	a_{l2}	...	α_l	...	a_{lm}														$D_k \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮					⋰						⋰			⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮														⋮
k	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	β_{km}						$6(k-1)$						$6(k-2)$		a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ml}	...	α_m														$D_k \cdot \gamma_m$
⋮	⋮																																							
$n-1$	1	$\beta_{n-1,1}$	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	$6(n-2)$						$6(n-3)$							$6(n-1-k)$							6					α_1	a_{12}	...	a_{1l}	...	a_{1m}	$D_{n-1} \cdot \gamma_1$
$n-1$	2	$-a_{21}$	$\beta_{n-1,2}$	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$		$6(n-2)$						$6(n-3)$							$6(n-1-k)$						6					a_{21}	α_2	...	a_{2l}	...	a_{2m}	$D_{n-1} \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮			⋱		⋰				⋱		⋰					⋱		⋰			⋱		⋰			⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮	⋮
$n-1$	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	$\beta_{n-1,l}$	...	$-a_{lm}$				$6(n-2)$						$6(n-3)$							$6(n-1-k)$						6			a_{l1}	a_{l2}	...	α_l	...	a_{lm}	$D_{n-1} \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮					⋰						⋰							⋰					⋰			⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮	⋮
$n-1$	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	$\beta_{n-1,m}$						$6(n-2)$						$6(n-3)$							$6(n-1-k)$					6		a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ml}	...	α_m	$D_{n-1} \cdot \gamma_m$
n	1	β_{n1}	$-a_{12}$	...	$-a_{1l}$	...	$-a_{1m}$	$6(n-1)$						$6(n-2)$							$6(n-k)$						12					6						$D_n \cdot \gamma_1$
n	2	$-a_{21}$	β_{n2}	...	$-a_{2l}$	...	$-a_{2m}$		$6(n-1)$						$6(n-2)$							$6(n-k)$						12					6					$D_n \cdot \gamma_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮			⋱		⋰				⋱		⋰					⋱		⋰			⋱		⋰			⋮		⋱		⋰	⋮	⋮
n	l	$-a_{l1}$	$-a_{l2}$	...	β_{nl}	...	$-a_{lm}$				$6(n-1)$						$6(n-2)$							$6(n-k)$						12					6			$D_n \cdot \gamma_l$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋰	⋮					⋰						⋰							⋰					⋰							⋰	⋮	⋮
n	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	...	$-a_{ml}$	...	β_{nm}						$6(n-1)$						$6(n-2)$							$6(n-k)$					12					6		$D_n \cdot \gamma_l$

$$\gamma_l = \frac{I_l}{I}\ ;\ I = \sum_l I_l$$

$$\alpha_l = 1 - \frac{\Delta_l}{10} \cdot (1 - \gamma_l)$$

$$\beta_{kl} = 3k - \alpha_l$$

$$a_{lh} = \gamma_l \cdot \frac{\Delta_h}{20}$$

Casetele goale presupun cifra 0 (zero)

=

4. EXEMPLU CA CALCUL

Se consideră structura cu patru nivele echidistante alcătuită din lamelele reprezentate în figura 6, avînd caracteristicile din tabela următoare:

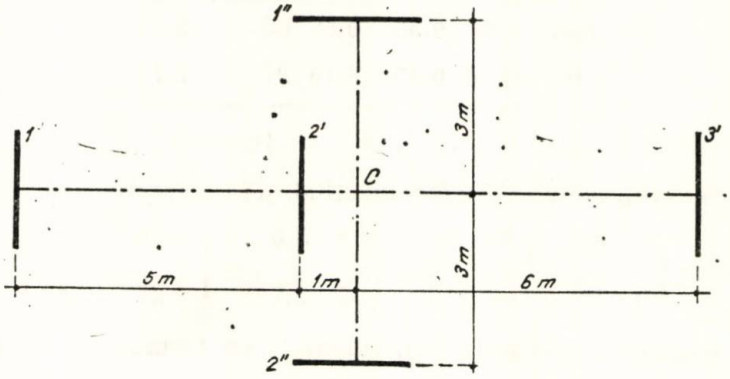


Fig. 6

l'	l''	$I_{l'}$	$I_{l''}$	$\Delta_{l'}$	$\Delta_{l''}$	$\eta_{l'}$	$\eta_{l''}$
1	—	3	—	60	—	0,30	—
2	—	2,5	—	60	—	0,25	—
3	—	4,5	—	6	—	0,45	—
—	1	—	4	—	200	—	0,40
—	2	—	6	—	50	—	0,60

Se cere să se calculeze eforturile din diferitele lamele dintr-o acţiune seismică în primul mod de vibraţie în ipoteza translatării planşeelor structurii.

4.1. Calculul cu ajutorul calculatorului electronic (CIFRA — 102)

În cele ce urmează se redă numai calculul pentru o acţiune orizontală pe direcţia transversală a structurii în ultima fază de iteraţie.

Întrucît lamelele (1) şi (2) au aceeaşi caracteristică relativă la forfecare, acestea se grupează într-o singură lamelă. Matricea η va fi deci

$$\eta = \begin{Bmatrix} 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}45 \end{Bmatrix},$$

iar matricea δ

$$\delta = \begin{Bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 6 \end{Bmatrix}.$$

Produsul matriceal $(\eta \cdot e) \cdot \delta$ este

		e				
		1	1	60	0	δ
		1	1	0	6	
0,55	0	0,55	0,55	33	3,3	
0	0,45	0,45	0,45	27	2,7	
		$\eta \cdot e$		$(\eta \cdot e) \cdot \delta$		

Matricea (a), calculată cu formula (3.8) şi (3.31), este

$$(a) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 33 & 3,3 \\ 27 & 2,7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26 & 3,3 \\ 27 & -2,3 \end{Bmatrix}.$$

De asemenea, matricele (b_k), calculate cu formula (3.9), vor fi

$$(b_k) = \begin{Bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 3k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -26 & 3,3 \\ 27 & -2,3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3k+26 & -3,3 \\ -27 & 3k+2,3 \end{Bmatrix}.$$

Aşadar, matricea (M) este

29	−3,3	−26	3,3	0	0	0	0
−27	5,3	27	−2,3	0	0	0	0
32	−3,3	6	0	−26	3,3	0	0
−27	8,3	0	6	27	−2,3	0	0
35	−3,3	12	0	6	0	−26	3,3
−27	11,3	0	12	0	6	27	−2,3
38	−3,3	18	0	12	0	6	0
−27	14,3	0	18	0	12	0	6

Calculul termenilor D_k s-a făcut folosind tabelele 2 din [4].

Se calculează în prealabil caracteristica Δ' a consolei echivalente cu formula (3) din (4):

$$\Delta' = \frac{600 \cdot 5,5 + 60 \cdot 4,5}{10} = 357.$$

Aşadar, termenii de încărcare D_{k1} (în primul mod de vibraţie) sînt

k	A_{k1}	$C_k \cdot \Delta'$	D_{k1}
1	8,692	13,2804	− 21,9724
2	30,812	46,3743	− 77,1863
3	60,747	90,3210	−151,0680
4	93,880	138,4446	−232,3246

Matricea γ, calculată cu formula (3.15), este

$$\gamma = \begin{array}{c|cc|c} & & & u \\ \hline & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline \eta & 0{,}55 & 0 & 0{,}55 \\ & 0 & 0{,}45 & 0{,}45 \\ \hline & & & \Upsilon \end{array}.$$

Aşadar, vectorul termenilor liberi, calculaţi conform expresiei (3.13), este

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{r} -\ 12{,}09 \\ -\ 9{,}88 \\ \hline -\ 42{,}46 \\ -\ 34{,}73 \\ \hline -\ 83{,}09 \\ -\ 67{,}98 \\ \hline -\ 127{,}78 \\ -\ 104{,}54 \end{array} \right\}.$$

Valorile necunoscutelor rezultate prin calculul la calculatorul electronic CIFA–102 sînt

k \ L'	I (1, 2)	II (3)
0	−2,4227	−5,8102
1	−1,9578	−3,5166
2	−1,3041	−1,6962
3	−0,6712	−0,4138

După repartizarea eforturilor din lamela-rezultantă (I) la lamelele (1) şi (2) proporţional cu momentele de inerţie fictive ale acestora, rezultatul final este

k \ l'	1	2	3
0	−1,3269	−1,1058	−5,8102
1	−1,0679	−0,8899	−3,5166
2	−0,7111	−0,5930	−1,6962
3	−0,3625	−0,3087	−0,4138

4.2. Calculul prin metoda repartizării proporționale cu momentele de inerție echivalente

Pentru datele respective rezultă valorile

k \ l'	1	2	3
0	−2,4729	−2,0607	−3,7093
1	−1,6423	−1,3686	−2,4635
2	−0,9001	−0,7501	−1,3501
3	−0,3255	−0,2713	−0,4882

După cum se poate observa, prin această metodă (de obicei utilizată în practică) rezultă valori inadmisibil diferite de cele calculate prin metoda expusă.

Această neconcordanță se datorește, desigur, diferenței mari între caracteristicile relative la forfecare ale lamelelor echivalente, adică desconsiderării deformabilității prin lunecare-forfecare ale elementelor portante ale structurii.

5. CONCLUZII

Calculul structurilor la acțiuni orizontale, în special seismice, comportă o serie de aproximări necesare atît din cauza cunoașterii incomplete a fenomenului fizic, cît și dificultăților matematice de descriere riguroasă a acestuia.

În problema studiată în prezenta lucrare se pot enumera astfel următoarele aproximații care rezultă din cele de mai sus :

— escamotarea în fond a principiului lui de St. Venant, privind extinderea influențelor locale ;

— aplicarea ipotezei secțiunilor plane, în tot lungul lor, la elemente cu legături flagrant neaxiale și deci cu concentrări importante de eforturi și cu dimensiuni ale secțiunii manifest incomparabile între ele ;

— neglijarea factorului timp într-un fenomen dinamic complex cum este cazul acțiunii seismice și aprecierea prin formule pur convenționale a unor încărcări statice echivalente.

Limitele între care se înscriu erorile cuprinse în rezultatele unui calcul efectuat în asemenea condiții rămîn în general necontrolabile în lipsa posibilităților practice de efectuare a unor experiențe perfect concludente sau a unor calcule exacte comparative (cum este, de exemplu, în cazul acțiunii seismice).

Așadar, în situația acceptării necesare a unor atare erori, care se prezintă astfel ca o servitute a teoriei în actualul stadiu incomplet de cunoaștere, orice alte schematizări menite de altfel doar simplificării calculelor numerice aplicative pot reduce la pur formale soluțiile obținute.

Această obligație apare cu atît mai stringentă astăzi în prezența calculatoarelor electronice cifrice, capabile să efectueze calcule din cele mai complicate cu maximum de precizie și într-un timp minim.

În sensul celor arătate mai sus, în lucrarea de față s-a acordat o mare atenție problemei repartizării sarcinilor orizontale la elementele

plane care alcătuiesc o structură multietajată cu nivel constant, cu atît mai mult cu cît încărcarea de ansamblu a structurii se determină de fapt în mod pur convenţional.

În această problemă s-a urmărit ca necunoscutele să fie direct eforturile necesare în calculele de dimensionare în cazul diafragmelor pline, respectiv să se evite labilitatea sistemului de ecuaţii obţinut (după cum se ştie, încărcarea este proporţională cu derivata a patra a săgeţii).

Determinarea acestor eforturi în calculele aplicative este prevăzută a se face cu ajutorul calculatoarelor electronice cifrice.

Utilizarea acestora comportă însă în general descrierea prealabilă a algoritmului de calcul respectiv fie în cod-maşină, fie într-un limbaj universal accesibil calculatorului respectiv.

Pentru a reduce la minimum munca de programare şi pentru a putea folosi, într-o primă fază de automatizare a calculelor, aceste mijloace moderne de calcul fără a fi necesară întocmirea unui program ad-hoc, s-a urmărit utilizarea subprogramelor uzuale cu care este livrat de obicei orice calculator electronic sau care se află direct cablate în maşină, precum şi posibilitatea rezolvării concomitente în mai multe variante de încărcare.

Bineînţeles că, într-o fază avansată de automatizare a calculelor aplicative, este posibilă alcătuirea unui program general care să descrie integral algoritmul de calcul în cadrul căruia subprogramele amintite să fie utilizate ca „rutini" de calcul şi pentru care sînt pregătite toate elementele necesare.

Pentru cazul utilizării totuşi în aplicaţii a mijloacelor uzuale de calcul, s-a urmărit reducerea la minimum a volumului de muncă pe baza aceluiaşi algoritm, fără concesiuni de ordin teoretic, prin procedee de calcul numeric aproximativ, prin sistematizarea calculelor şi prin folosirea de tabele, aşa cum se va arăta în partea a doua a lucrării.

Din exemplul tratat în lucrare reiese importanţa luării în considerare a deformaţiilor din forfecare-lunecare a elementelor plane verticale care alcătuiesc structurile multietajate moderne, în general neglijate în lucrările cunoscute. Aceste deformaţii apar cu atît mai importante în cazul structurilor nesimetrice, la care intervine şi rotirea planşeelor (torsionarea consolei echivalente). Problema aceasta va face însă obiectul unei lucrări ulterioare.

În încheiere menţionăm că, în afara bazei teoretice prezentate, lucrarea de faţă prezintă următoarele realizări de ordin practic :

1) posibilitatea utilizării calculatoarelor electronice în practica de proiectare, adică într-un domeniu rămas în urmă în această privinţă, chiar înainte de întocmirea unui program ad-hoc, reducînd astfel la minimum, în împrejurările actuale, volumul de muncă şi viteza de lucru în proiectare ;

2) determinarea unor valori ale eforturilor de calcul în mod necesar mai apropiate de cele reale, ceea ce implică o repartizare mai raţională a armăturilor în structură şi, prin aceasta, mărirea rezervei de siguranţă a acesteia şi economisirea prin proiectare a oţelului-beton.

Primită la redacţie la 15 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Albigés N., Goulet J., *Contreventement de bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, mai 1960.
2. Beck H., *Ein Beitrag zur Berechnung der Dehnungsverformung bei Rahmen mit schlanken und gedrungenen Konstruktionsgliedern*, Die Bautechnik, *5* (1959).
3. Drozdov P. F., *Rasciet kropnopanelinth zdanii na vertikalinle i gorizontalintie nagruzki*, Stroitelinaia mehanik i rasciet soorujenii, *6* (1966).
4. Florian V., *Contribuţii privind calculul la forţe orizontale al structurilor alcătuite din diafragme*, St. cerc. mec. apl., 6 (1964).
5. Lin T. Y., *Lateral Force Distribution in a Concrete Buildings Story*, Journal A.C.I., *23* (1951).
6. Muto K., *Seismis Analysis of Reinforced Concrete Buidlings* I-st W.C.E.E., Berkeley, 1959.
7. Phillip L. Gould, *Interaction of shear wall-frame systems in multistor ybuildings*, Journal of the American Concrete Institute, *1* (1965).
8. Rosman R., *Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von waagrechtbelasteten Wänden und Starkwerkrahmen bei Hochbauten*, Beton und Stahlbetonbau, *2* (1963),
9. — *Systeme aus durchbrochenen Wänden und Starkwerkrahmen*, Die Bautechnik. *2* (1964).
10. — *Faltwerke als aussteifende Systeme bei Hochbauten*, Der Bauingenieur, *2* (1967).
11. Stiller M., *Verteilung der Horizontalkräfte auf die aussteifenden Scheibensysteme von Hochhäusern*, Beton und Stahlbetonbau, *2* (1965).
12. Ţiţariu T., Cişmigiu Al., *Calculul dinamic şi spaţial al construcţiilor la cutremur şi la alte acţiuni laterale*, Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *12* (1959).

CALCULUL PLĂCILOR CURBE SUBȚIRI CU DUBLĂ CURBURĂ POZITIVĂ REZEMATE PE ARCE CU TIRANȚI

de VICTOR GIONCU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), Timișoara

În lucrare se prezintă calculul cu ajutorul diferențelor finite al plăcilor curbe subțiri cu dublă curbură pozitivă, în care se ține seama de conlucrarea cu elementele marginale de tipul arcelor cu tiranți. Pe un exemplu de calcul se evidențiază unele modificări importante ale stării de solicitare și deformație a plăcii curbe față de calculul obișnuit (de pildă, dacă nu se limitează alungirea tiranților, pot să apară eforturi importante de întindere la contactul dintre placă și arc), de care trebuie să se țină seamă la o proiectare corectă.

1. INTRODUCERE

La proiectarea acoperișurilor clădirilor civile sau industriale, reducerea greutății proprii este sarcina principală a proiectantului structurii de rezistență. Din acest punct de vedere, plăcile curbe subțiri cu dublă curbură de beton armat reprezintă soluții deosebit de avantajoase în urma folosirii raționale a materialului în structură. Prefabricarea, care se extinde din ce în ce mai mult și la aceste structuri, elimină principalul inconvenient, cofrajul.

Calculul plăcilor cu dublă curbură pe contur dreptunghiular se face fie pe baza teoriei de membrană, completată cu efectul perturbărilor marginale [1], fie pe baza teoriei simplificate a plăcilor pleoștite, elaborată de Marguerre și Vlasov [2]. La integrarea ecuațiilor diferențiale ale problemei, constantele de integrare se determină din condițiile de margine. În [3] se arată că „marginile plăcilor curbe subțiri pleoștite se consideră articulate atunci cînd plăcile reazemă pe pereți sau timpane de ajuns de rigide în planul lor și elastice în afara planului lor", fără să se precizeze care este această rigiditate. Pe baza lucrărilor lui Dikovici [4], în [3] se dau diagrame și tabele pentru calculul plăcilor curbe cu curbură Gauss pozitivă, rezemate pe timpane perfect rigide în planul lor și perfect elas-

tice în plan transversal. În urma unor prelucrări statistice, A. Aass [5], [6] a stabilit relaţii simple pentru determinarea solicitărilor unitare şi a deplasărilor.

Rezemările plăcilor curbe pe contur dreptunghiular se rezolvă de obicei sub forma unui arc cu tirant sau grindă cu zăbrele cu talpă curbă. Atît încercările pe modele [7], [8], cît şi pe construcţii la scară naturală, au arătat că ipotezele timpanului ideal presupuse în [3] nu sînt satisfăcute, deplasările verticale ale elementelor marginale putînd fi chiar mai mari decît cele din centrul plăcii. De aceea sînt de aşteptat modificări importante ale stării de solicitare şi deformaţie, în special în regiunea marginilor, calculul trebuind să fie făcut ţinîndu-se seama de rigidităţile reale ale elementelor marginale. Deplasările colţurilor, de care nu se ţine seama în calculele obişnuite, pot modifica de asemenea starea de solicitare (în special pe cea de încovoiere) [7].

În lucrarea de faţă se studiază numai cazul elementelor de margine realizate sub formă de arce cu tiranţi.

Problema conlucrării elementelor de margine cu placa curbă este studiată în multe lucrări. Astfel, H. C. Shah [9] foloseşte serii trigonometrice simple, rezolvînd paraboloidul eliptic rezemat elastic pe două laturi opuse, celelalte fiind articulate. Prin suprapunerea a două serii trigonometrice simple, Keshava-Rao şi Sharma [10] studiază cazul rezemării elastice pe toate laturile, dar, prin luarea în considerare a patru termeni din dezvoltarea în serie, soluţiile nu pot fi considerate satisfăcătoare, numărul termenilor necesari fiind mult mai mare [11]. Cu ajutorul seriilor trigonometrice duble, M. Krstič [12] studiază problema încastrărilor elastice din punctul de vedere al rotirilor. Seriile trigonometrice sînt însă slab convergente, exemplul de calcul citat nefiind semnificativ din cauza dimensiunilor alese. Un studiu mult mai complet al condiţiilor de margine, atît teoretic, cît şi experimental, este cel al lui Abu-Sitta [7], [8], care pe baza încercărilor pe modele indică şi reguli practice pentru calculul plăcilor curbe rezemate pe arce cu tiranţi. În lucrare nu se dezvoltă însă o metodă de calcul care să fie confruntată cu rezultatele experimentale. O soluţie numerică, folosind diferenţele finite, este dată de Padilla şi Schnobrich [13], care studiază şi cazul deplasării libere a reazemelor. Prin folosirea metodelor de înlocuire a suprafeţei curbe continue printr-un sistem de bare rigide cu legături elastice, Rajendram şi Simmonds [14] determină ecuaţiile condiţiilor de rezemare elastice, dar nu trag nici o concluzie privind calculul practic şi efectul acestora asupra stării de solicitare. Mileikovski şi Kisin [15] studiază de asemenea rezemări pe timpane de tipul arcelor, folosind o metodă asemănătoare înlocuirii unei suprafeţe cilindrice cu una prismatică. Cinenkov şi Krakovski [16] trec în revistă cercetările efectuate în U.R.S.S. privind calculul plăcilor cu curbură pozitivă rezemate atît pe timpane rigide, cît şi pe reazeme elastice de tipul arcelor şi grinzilor cu zăbrele. Ecuaţiile generale ale conlucrării elementelor marginale cu plăcile cu dublă curbură sînt date şi de G. H. Powell [17], de asemenea fără să se tragă concluzii practice privind calculul. Incastrarea elastică a plăcilor curbe cu curbură negativă este studiată de Das

Gupta [18], Chronowicz [19], Dayaratnam și Gerstle [20] și Kato și Nishimura [21]. În ultima lucrare este studiată și problema deplasării reazemelor.

În lucrarea de față s-a adoptat la studiul conlucrării plăcii cu elementele marginale metoda numerică, care se pretează cel mai bine la mecanizarea calculelor prin folosirea calculatoarelor electronice. Soluțiile analitice cu ajutorul seriilor trigonometrice au dezavantajul cunoscut al slabei convergențe pentru curburi pozitive și nu permit studierea influenței deplasărilor reazemelor.

Exemplul de calcul va permite să se tragă unele concluzii privind comportarea plăcilor cu curbură pozitivă rezemate pe arce cu tiranți.

2. ECUAȚIILE GENERALE

Pentru plăcile curbe subțiri pleoștite pe contur dreptunghiular folosite ca acoperișuri la construcții civile sau industriale, diferența dintre diferitele suprafețe de același tip de curbură este neglijabilă din punct de vedere static și geometric [3]. De aceea calculul se face de obicei pentru paraboloidul de rotație, care are ecuația cea mai simplă a suprafeței mediane :

$$z = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2), \tag{1}$$

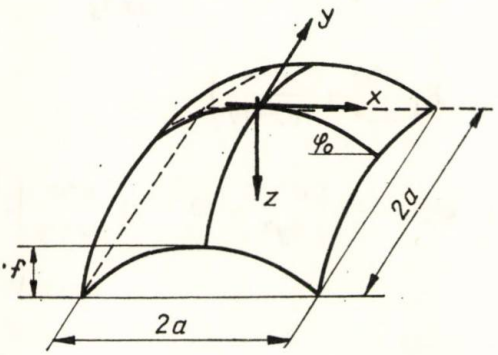


Fig. 1. — Elementele geometrice ale paraboloidului de rotație pe contur pătrat.

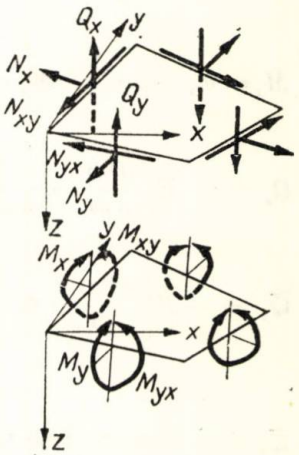


Fig. 2. — Solicitările unitare ale plăcii curbe subțiri.

unde $R = \frac{a^2}{2f}$ este raza de curbură la creștetul plăcii (fig. 1). Elementele marginale sînt verticale și fac unghiul φ_0 cu placa curbă :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{R} = 0{,}4\,; \quad \varphi_0 = 22^\circ \quad \left(\text{pentru } \frac{f}{a} = \frac{1}{5}\right).$$

În metoda mixtă, cu necunoscutele deplasarea verticală w şi funcţia de eforturi F, ecuaţiile generale ale teoriei de încovoiere sînt [2]

$$K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)=p,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\frac{E\delta}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0, \tag{2}$$

unde $K=\dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$, δ fiind grosimea plăcii, μ coeficientul lui Poisson şi p componenta verticală a încărcării. Dacă sînt cunoscute mărimile w şi F, starea de solicitare şi deformare a plăcii curbe este perfect determinată (fig. 2):

$$N_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\quad N_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad N_{xy}=N_{yx}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},$$

$$m_x=-K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad m_y=-K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$M_x=m_x+\mu m_y;\quad M_y=m_y+\mu m_y;\quad M_{xy}=M_{yx}=-K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

$$Q_x=-K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right);\quad Q_y=-K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right),$$

$$\overline{Q}_x=-K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial^2 y}\right];\quad \overline{Q}_y=-K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right], \tag{3}$$

$\overline{Q}_x$ şi $\overline{Q}_y$ fiind forţele tăietoare generalizate,

$$u=\frac{1}{R}\int_{x_0}^{x} w\,dx+\frac{1}{E\delta}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dx,$$

$$v=\frac{1}{R}\int_{y_0}^{y} w\,dy+\frac{1}{E\delta}\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)dy, \tag{4}$$

u şi v fiind deplasările plăcii curbe după axele x şi y.

3. CONDIȚIILE DE MARGINE

În cele ce urmează se studiază o placă curbă pe contur pătrat, prezentînd simetrie geometrică și de încărcare în raport cu axele ox și oy (fig. 1). De aceea este suficient să se studieze condițiile de margine numai pentru $x = a$. La această margine apar în placă solicitările unitare N_x, $\overline{N}_{xy} = N_{xy} + \frac{M_{xy}}{R}$, M_x și $\overline{Q}_x$, iar deformația ei este caracterizată de deplasările u, v și w după cele trei axe și rotirea θ_x în jurul unei axe paralele cu axa ox.

Solicitările unitare fiind dirijate după normala și tangenta la suprafața mediană, iar elementele marginale fiind verticale, se compun în solicitările dirijate după axele ox și oz :

$$H_x = N_x \cos \varphi_0 - \overline{Q}_x \sin \varphi_0,$$

$$V_x = N_x \sin \varphi_0 + \overline{Q}_x \cos \varphi_0. \tag{5}$$

Se admit următoarele ipoteze simplificatoare :

— placa curbă se descarcă la elementele marginale în centrul lor de greutate ;

— rigiditatea transversală a elementelor marginale este neglijabilă ;

— din prima ecuație (5) se neglijează al doilea termen, componentele orizontale ale forței tăietoare fiind mici ;

— raza de curbură a elementului marginal este constantă.

Din cauza pleoștirii elementelor marginale se mai admit următoarele ipoteze :

— distribuția eforturilor în secțiunea transversală este liniară ;

— efectul solicitărilor longitudinale asupra deplasărilor verticale este neglijabilă ;

— momentul de răsucire rezultat din deplasările laterale este neglijabil ;

— lungimile măsurate pe curbă sînt practic egale cu cele proiectate.

Dacă din elementul marginal se decupează un element diferențial de lungime dx, se pot evidenția solicitările (fig. 3) :

$$P = EA\left(\frac{dv_g}{dy} - \frac{w_g}{R}\right) \text{— forța axială,} \tag{6}$$

$$M = -EI\frac{d^2w_g}{dy^2} \text{ — momentul de încovoiere în planul arcului,} \tag{6'}$$

$$T = \frac{dM}{dy} \text{ — forța tăietoare corespunzătoare lui } M, \tag{6''}$$

$$M_{12} = GI_{12}\frac{d\theta_g}{dy} \text{ — momentul de răsucire,} \tag{6'''}$$

unde v_g, w_g, θ_g sînt deformaţiile după axele oy, oz şi rotirea elementului de margine, iar EA, EI, GI_{12} sînt rigidităţile axiale, de încovoiere şi răsucire. Din condiţiile de echilibru scrise pentru elementul diferenţial rezultă ecuaţiile (g fiind o încărcare uniform distribuită în lungul elementului marginal)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} - \frac{T}{R} + \overline{N}_{xy} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}y^2} + \frac{P}{R} - \overline{Q}_x \cos\varphi_0 + g = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}M_{12}}{\mathrm{d}y} + M_x = 0. \tag{7}$$

Introducînd condiţiile de continuitate ale deformaţiilor (care pretind egalitatea deformaţiilor plăcii şi elementului marginal), introducînd relaţiile (6) în (7) şi adăugînd la acestea prima relaţie (5) transformată, se obţine

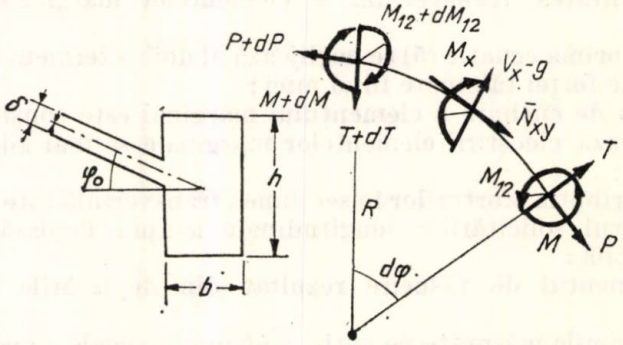


Fig. 3. — Solicitările elementului marginal.

$$EA\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{EI}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{EA}{R}\frac{\partial w}{\partial y} - N_{xy} - \frac{M_{xy}}{R} = 0,$$

$$\frac{EA}{R}\frac{\partial v}{\partial y} - EI\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{EA}{R^2}w - \overline{Q}_x \cos\varphi_0 + g = 0,$$

$$GI_{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + M_x = 0,$$

$$N_x = 0. \tag{8}$$

Pentru transcrierea acestor ecuații în metoda mixtă, se folosesc relațiile (3), (4) și $\theta = \dfrac{\partial w}{\partial x}$:

$$\frac{A}{\delta}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{EI}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{K}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{A}{R\delta}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi_0 + g = 0,$$

$$GI_{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

În prima ecuație, termenii în w sînt foarte mici și se neglijează (după rezolvarea problemei s-a verificat această ipoteză și s-au găsit diferențe sub 1%). Prima și ultima ecuație pot fi transformate integrînd în raport cu y și, ținînd seama de simetria geometrică și de încărcare, constantele de integrare din ultima ecuație sînt nule. Rezultă sistemul de ecuații, regrupat în mod convenabil:

$$\frac{A}{\delta}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} + C = 0,$$

$$F = 0,$$

$$\frac{A}{R\delta}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi_0 + g = 0,$$

$$GI_{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{10}$$

La deducerea condițiilor de margine s-a ținut seama de propunerea lui Abu-Sitta [7], considerîndu-se $\mu = 0$ la determinarea ecuațiilor și $\mu = 0{,}15$ la calculul solicitărilor.

4. CONDIȚII DE COLȚ

Dacă P_c și T_c sînt forțele axiale și tăietoare ale arcului în punctul de reazem, componentele orizontale și verticale ale reacțiunii sînt (fig. 4)

$$H_c = P_c\cos\varphi_0 - T_c\sin\varphi_0,$$
$$V_c = P_c\sin\varphi_0 + T_c\cos\varphi_0. \tag{11}$$

Prima condiţie de colţ va rezulta din egalitatea deplasării orizontale a plăcii cu a reazemului :

$$v = v_c, \tag{12}$$

iar a doua din condiţia de echilibru vertical :

$$V_c + \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a p\,dx dy + \int_0^a g\,dy = 0. \tag{12'}$$

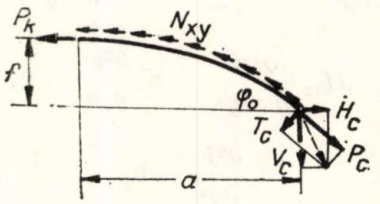


Fig. 4. — Arcul marginal.

Din ecuaţia de momente în jurul axului care trece prin punctul de reazem şi ţinînd seama de simetrie, rezultă

$$M_{12} - M = 0. \tag{12''}$$

Cum de obicei elementele marginale sînt legate monolit între ele, rezultă în urma simetriei (neglijînd efectul forţelor tăietoare din colţuri)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

şi, prin urmare, $N_{xy} = 0$. Cum însă variaţia lui N_{xy} din teoria reazemelor rigide indică valori mari în colţuri, ar rezulta o variaţie bruscă la zero, ceea ce printr-un calcul cu diferenţe finite ar putea să nu fie evidenţiată. De aceea propunem ca valoarea lui N_{xy} din colţ să se determine din ecuaţia de echilibru a unei jumătăţi de arc (fig. 4) :

$$-P_k + H_c - \int_0^a N_{xy}\,dy = 0, \tag{12^{III}}$$

unde P_k este forţa axială din secţiunea de cheie a arcului, determinată după cum se va arăta mai jos din egalitatea deformaţiilor plăcii şi arcului. Ecuaţiile (12) şi (12'') pot fi scrise în raport cu necunoscutele mixte w şi F :

$$\frac{1}{E\delta}\int_0^a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy + \frac{1}{R}\int_0^a w\,dy = v_c \tag{12^{IV}}$$

$$GI_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + EI\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{12^{V}}$$

5. CALCULUL ARCELOR MARGINALE

Calculul elementelor marginale se face în mod obișnuit din lunecările plăcii. Calculul ținînd seama de egalitatea deformațiilor permite un calcul mai exact al solicitărilor arcului. Observînd relațiile (6) și

$$N_y = E\delta\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right); \quad m_y = -K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad M_{xy} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

rezultă relațiile

$$P = \frac{A}{\delta} N_y, \tag{13}$$

$$M = \frac{EI}{K} m_y, \tag{13'}$$

$$M_{12} = -\frac{GI_{12}}{K(1-\mu)} M_{xy}. \tag{13''}$$

Calculul arcului se poate face astfel direct din solicitările plăcii curbe.

6. APLICAREA DIFERENȚELOR FINITE

Se împarte semilatura a în k intervale egale (fig. 5) :

$$\Delta = \frac{a}{k}. \tag{14}$$

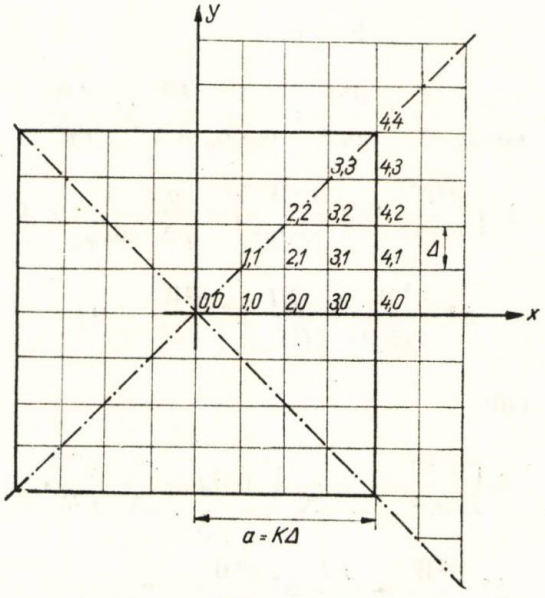


Fig. 5. — Rețeaua de puncte.

Pentru a lucra adimensional se introduc noi necunoscute, definite prin relaţiile

$$w = \frac{pa^4}{K}\frac{1}{k^4}W,$$

$$F = pRa^2\frac{1}{k^2}\Phi. \tag{15}$$

Notînd

$$\varepsilon = \frac{E\delta}{KR^2}\left(\frac{a}{k}\right)^4 = \frac{48}{k^4}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2, \tag{16}$$

ecuaţiile generale devin

$$\Delta^4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)-\Delta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=1, \tag{17}$$

$$\Delta^4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\varepsilon\Delta^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)=0, \tag{17'}$$

condiţiile de margine

$$\frac{A}{\delta\Delta}\Delta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial x}+C=0, \tag{18}$$

$$\Phi = 0, \tag{18'}$$

$$-\frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{A}{\delta\Delta}\Delta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{EI}{K\Delta}\Delta^4\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-$$

$$-\Delta^3\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right)-\frac{g}{p\Delta}\frac{1}{\cos\varphi_0}=0 \tag{18''}$$

$$\Delta^3\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}+\frac{EI}{GI_{12}}\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0; \tag{18'''}$$

şi condiţiile de colţ

$$\Delta\int_0^a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dy+\frac{\varepsilon}{\Delta}\int_0^a W dy=\frac{v_c}{\Delta}\frac{E\delta}{pR}, \tag{19}$$

$$\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{EI}{GI_{12}}\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0. \tag{19'}$$

Folosind relațiile cunoscute ale transformării derivatelor în diferențe finite, ecuațiile (17) și (17′) se vor scrie pentru un punct al rețelei m, n (fig. 6):

$$20W_{m,n} - 8(W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + W_{m,n+1} + W_{m,n-1}) + 2(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}) + (W_{m+2,n} + W_{m-2,n} + W_{m,n+2} + W_{m,n-2}) + 4\Phi_{m,n} - (\Phi_{m+1,n} + \Phi_{m-1,n} + \Phi_{m,n+1} + \Phi_{m,n-1}) = 1, \tag{20}$$

$$20\Phi_{m,n} - 8(\Phi_{m+1,n} + \Phi_{m-1,n} + \Phi_{m,n+1} + \Phi_{m,n-1}) + 2(\Phi_{m+1,n+1} + \Phi_{m-1,n+1} + \Phi_{m+1,n-1} + \Phi_{m-1,n-1}) + (\Phi_{m+2,n} + \Phi_{m-2,n} + \Phi_{m,n+2} + \Phi_{m,n-2}) + \varepsilon[-4W_{m,n} + (W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + W_{m,n+1} + W_{m,n-1})] = 0. \tag{20′}$$

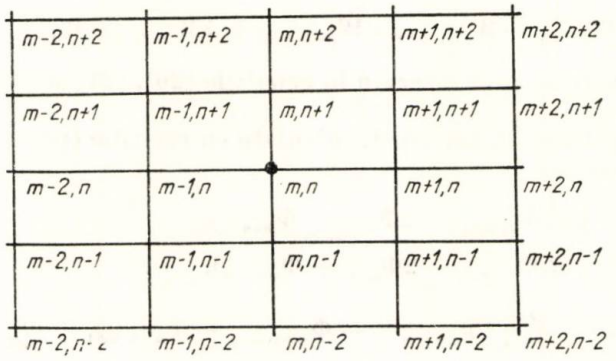


Fig. 6.— Nodurile rețelei.

Ecuațiile (20) și (20′) sînt valabile pentru toate punctele interioare ale rețelei din figura 5. Ele sînt valabile și pentru punctele de pe contur, dar completate cu condițiile de margine (18), deoarece acestea fac parte atît din placă, cît și din arc. Condițiile de margine (18) scrise pentru $x = a$ $(m=k)$ devin cu ajutorul diferențelor finite

$$\Phi_{k+1,n} + \alpha\Phi_{k-1,n} + C = 0, \tag{21}$$

$$\Phi_{k,n} = 0, \tag{21′}$$

$$-\beta_2(\Phi_{k+1,n} + \Phi_{k-1,n}) - W_{k+2,n} - 2W_{k+1,n+1} + 6W_{k+1,n} - 2W_{k+1,n-1} + \beta_1 W_{k,n+2} - 4\beta_1 W_{k,n+1} + 6\beta_1 W_{k,n} - 4\beta_1 W_{k,n-1} + \beta_1 W_{k,n-2} + 2W_{k-1,n+1} - 6W_{k-1,n} + 2W_{k-1,n-1} + W_{k-2,n} = \frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{g}{p\Delta}, \tag{21″}$$

$$W_{k+1,n+1} - (2+\gamma)W_{k+1,n} + W_{k+1,n-1} + 2\gamma W_{k,n} - W_{k-1,n+1} + (2-\gamma)W_{k-1,n} - W_{k-1,n-1} = 0, \tag{21‴}$$

unde s-au introdus notaţiile adimensionale

$$\alpha = \frac{A - 0{,}5\delta\Delta}{A + 0{,}5\delta\Delta}\ ;\ \beta_1 = \frac{1}{\cos\varphi_0}\ \frac{2EI}{K\Delta},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\cos\varphi_0}\ \frac{2A}{\delta\Delta}\ ;\ \gamma = \frac{2K\Delta}{GI_{12}};\ \lambda = \frac{4EI}{GI_{12}}. \tag{22}$$

Ecuaţiile (21) sînt valabile pentru toate punctele de pe contur. Ele se scriu şi pentru colţuri, completate cu ecuaţiile de colţ (19) transformate :

$$(\Phi_{k+1,0} + 4\Phi_{k+1,1} + 2\Phi_{k+1,2} + \ldots + 2\Phi_{k+1,k-2} + 4\Phi_{k+1,k-1} + \Phi_{k+1,k}) +$$
$$+ (\Phi_{k-1,0} + 4\Phi_{k-1,1} + 2\Phi_{k-1,2} + \ldots + 2\Phi_{k-1,k-2} + 4\Phi_{k-1,k-1}) +$$
$$+ \varepsilon(W_{k,0} + 4W_{k,1} + 2W_{k,2} + \ldots + 2W_{k,k-2} + 4W_{k,k-1}) = 3\,\frac{v_c}{\Delta}\,\frac{E\delta}{pR}, \tag{23}$$

$$W_{k+1,k+1} + \lambda W_{k+1,k} - W_{k+1,k-1} - W_{k-1,k+1} + \lambda W_{k-1,k} + W_{k-1,k-1} = 0. \tag{23'}$$

Imaginea punctelor care intervin în ecuaţiile (20), (21) şi (23) este arătată în figura 7.

Solicitările unitare din (3) vor fi calculate cu relaţiile (pentru sarcina uniform distribuită)

$$N_{xm,n} = pR(\Phi_{m,n+1} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m,n-1}),$$

$$N_{ym,n} = pR(\Phi_{m+1,n} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m-1,n}),$$

$$N_{xym,n} = -\frac{pR}{4}(\Phi_{m+1,m+1} - \Phi_{m+1,n-1} - \Phi_{m-1,n+1} + \Phi_{m-1,m-1}),$$

$$m_{xm,n} = -\frac{pa^2}{k^2}(W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}),$$

$$m_{ym,n} = -\frac{pa^2}{k^2}(W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}),$$

$$M_{xym,n} = -\frac{pa^2}{4k^2}(1-\mu)(W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} -$$
$$- W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1}),$$

$$Q_{xm,n} = -\frac{pa}{2k}(W_{m+2,n} + W_{m+1,n+1} - 4W_{m+1,n} + W_{m+1,n-1} -$$
$$- W_{m-1,n+1} + 4W_{m-1,n} - W_{m-1,n-1} - W_{m-2,n}),$$

$$Q_{ym,n} = -\frac{pa}{2k}(W_{m,n+2} + W_{m+1,n+1} - 4W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n+1} -$$
$$- W_{m+1,n-1} - 4W_{m-1,n-1} - W_{m-1,n-1} - W_{m,n-2}). \tag{24}$$

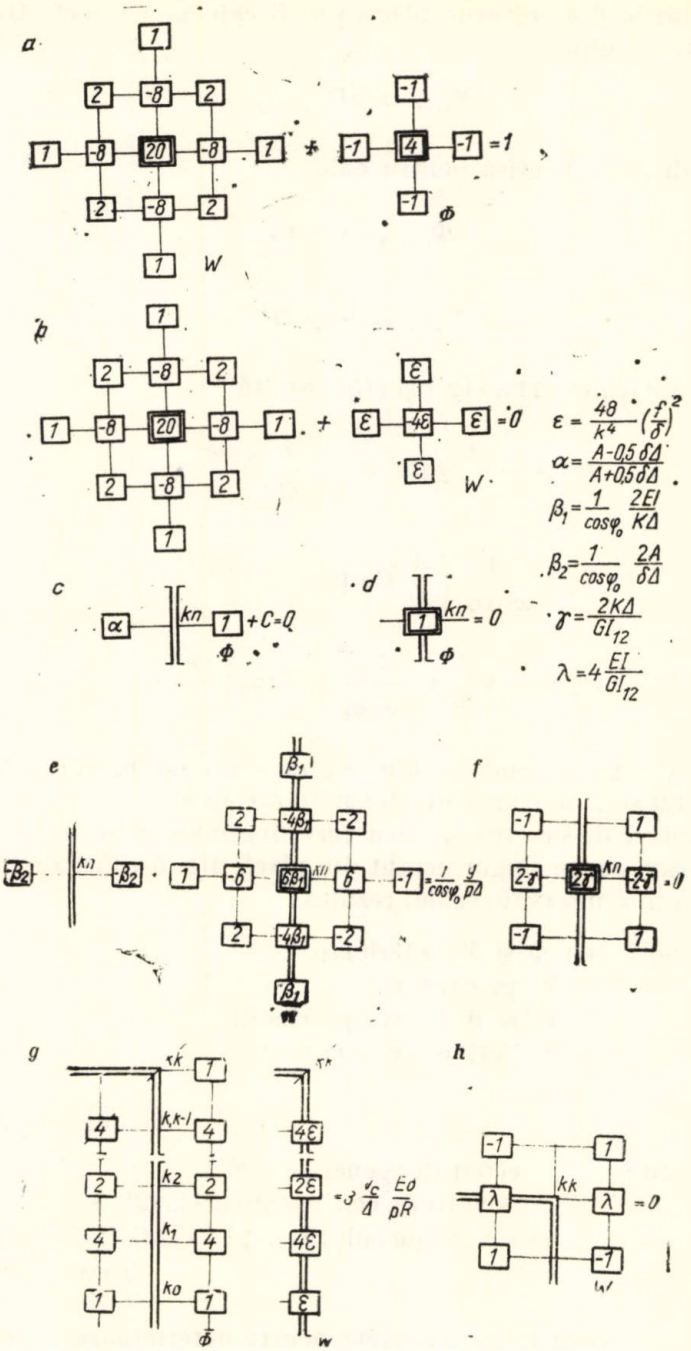


Fig. 7. — Imaginea coeficienților care intervin în ecuațiile de echilibru : *a* — ecuația (20 a) ; *b* — ecuația (20′) ; *c* — ecuația (21) *d* — ecuația (21′) ; *e* — ecuația (21″) ; *f* — ecuația (21‴) ; *g* — ecuația (23 *a*) ; *h* — ecuația (23′).

Solicitările din colţurile plăcii pot fi calculate direct. Din a doua ecuaţie (24) rezultă

$$N_{yk,k} = pR\Phi_{k+1,k},$$

iar din condiţia (21) scrisă pentru colţ

$$\Phi_{k+1,k} = -C,$$

de unde

$$N_{yk,k} = -pRC.$$

Cu ajutorul relaţiilor (11), (12′) şi (13) rezultă

$$P_c = -\frac{A}{\delta} pRC = -\frac{A}{\delta f} C \frac{pa^2}{2},$$

$$T_c = \frac{1}{\cos\varphi_0}\left(\frac{A}{\delta f} C \sin\varphi_0 - 1\right)\frac{pa^2}{2}, \tag{25}$$

$$H_c = -\left(\frac{A}{\delta f} C \frac{1}{\cos\varphi_0} - \operatorname{tg}\varphi_0\right)\frac{pa^2}{2},$$

ultima relaţie reprezentînd (bineînţeles cu semn schimbat) şi efortul din tirant dacă nu se ţine seama de alungirea acestuia.

Din motive de simetrie de structură, rezemare şi încărcare este suficient să operăm cu un singur octant din placă (fig. 5). Pentru împărţirea semilaturei a în k intervale egale, rezultă :

a) necunoscute :	Φ şi W interioare	$k(k+1)$
	W pe contur	k
	Φ şi W fictive pe rîndul 1	$2(k+2)$,
	W fictive pe rîndul 2	$(k+1)$,
	C	1 ,
	Total	$(k+2)\ (k+3)$
b) ecuaţii :	ecuaţiile generale (20′)	$k(k+1)$
	ecuaţii de contur (20) (21), (21″), (21‴),	$4k$
	ecuaţii de colţ (21), (21‴) (23), (23′) (12′), (12‴)	6
	Total	$(k+2)\ (k+3)$

Numărul de ecuaţii este suficient pentru determinarea necunoscutelor. Dacă se dispune de un calculator electronic cu o capacitate mai redusă, numărul de ecuaţii poate fi redus prin eliminarea unor necunoscute ex terioare fictive. Necunoscutele $\Phi_{k+1,n}$ se pot elimina cu ajutorul ecuaţiei

(21). Prin adunarea ecuațiilor (20) și (21'') se pot elimina necunoscutele fictive $W_{k+2,\,n}$, obținîndu-se ecuația modificată

$$(\alpha - 1)(1 + \beta_2)\Phi_{k-1,\,n} - 2W_{k+1,\,n} + (\beta_1 + 1)W_{k,\,n+2} - 4(\beta_1+2)W_{k,\,n+1} +$$
$$+ (6\beta_1 + 20)W_{k,\,n} - 4(\beta_1 + 2)W_{k,n-1} + (\beta_1 + 1)W_{k,\,n-2} +$$
$$+ 4W_{k-1,\,n+1} - 14W_{k-1,\,n} + 4W_{k-1,\,n-1} + 2W_{k-2,\,n} +$$
$$+ C(1 + \beta_2) = 1 + \frac{1}{\cos\varphi_0}\,\frac{g}{p\Delta}, \qquad (21^{IV})$$

indicată în figura 8.

$W_{k+1,\,k+1}$ se elimină cu ajutorul ecuației (23')

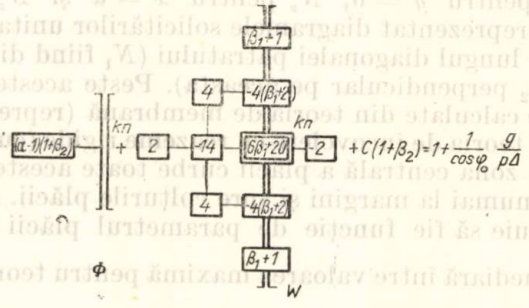


Fig. 8. — Imaginea coeficienților care intervin în ecuația (21IV).

Prin aceste eliminări rezultă un sistem redus de ecuații cu $(k+1)$ $(k+2)$ necunoscute. Pentru $k=4$ rezultă un sistem de 30 de ecuații cu 30 de necunoscute, arătate în tabela 1. Termenii liberi reprezintă încărcarea uniform distribuită verticală, greutatea proprie a elementului marginal și deplasarea orizontală a reazemului.

7. EXEMPLU DE CALCUL

S-a determinat starea de solicitare și deformare a unui parabolid de rotație pe contur patrat (fig. 1), cu următoarele date numerice :

$2a=24{,}00$m,

$f=2{,}40$m,

$\delta=0{,}06$m,

$p=250$kgf/cm^2,

beton B 250.

Arcul marginal are secțiunea transversală dreptunghiulară cu dimensiunile de $h=0{,}50$ m și $b=0{,}25$m. Rezultă

$$R = 30{,}00\text{m};\ \varepsilon=300;\ \alpha=0{,}161;\ \beta_1=104;\ \beta_2=1{,}5;\ \gamma=0{,}121;\ \lambda=11{,}7.$$

Sistemul de ecuații din tabela 1 a fost rezolvat cu ajutorul calculatorului electronic MECIPT-2 al Direcției de sistematizare arhitectură și proiectarea construcțiilor (DSAPC) Banat. Soluțiile Φ și W sînt trecute în tabela 2, respectiv 3, pentru încărcarea uniform distribuită, deplasarea orizontală a reazemelor și greutatea arcelor marginale.

7.1. STAREA DE SOLICITARE ȘI DEFORMAȚIE DIN ÎNCĂRCAREA VERTICALĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

În figurile 9*a*, *b* și *c* s-au trasat cu linie plină diagramele solicitărilor unitare N_x, N_y pentru $y=0$, N_y pentru $x=a$ și N_{xy} pentru $x=a$. În figura 9*d* s-au reprezentat diagramele solicitărilor unitare principale N_1 și N_2 calculate în lungul diagonalei pătratului (N_1 fiind dirijat în direcția diagonalei, iar N_2 perpendicular pe aceasta). Peste aceste diagrame s-au suprapus valorile calculate din teoria de membrană (reprezentate cu linie întreruptă) și din teoria de încovoiere cu reazeme rigide (cu linie punctată). Se constată că în zona centrală a plăcii curbe toate aceste valori coincid. Diferențele apar numai la margini și spre colțurile plăcii. Astfel, valoarea lui N_y, care trebuie să fie funcție de parametrul plăcii ε și de factorul $\alpha\left(\frac{A}{\delta a}\right)$ este intermediară între valoarea maximă pentru teoria de membrană și zero din teoria de încovoiere cu reazeme rigide. Creșterea foarte mare spre colțuri (fig. 9*b*) se datorește conlucrării cu grinda de margine, care obligă placa să-i urmărească deformațiile axiale, maxime la reazeme. Diferența mare dintre valorile solicitărilor unitare N_{xy} spre colțuri se explică prin participarea la prelucrarea încărcărilor verticale și a solicitărilor N_x, respectiv N_y, care în teoria de încovoiere cu reazeme rigide sînt nule și în care întreaga încărcare este echilibrată numai de solicitările unitare de lunecare. Se constată că, cu toate că nu s-a pus condiția ca N_{xy} să fie zero în colțuri (vezi punctul 4), aceasta este practic nulă. Solicitările principale N_1 cresc spre colțuri, necesitînd astfel în unele cazuri îngroșarea plăcii. În schimb, solicitările unitare N_2, care în teoria reazemelor rigide au valorile maxime de întindere în colțuri (unde din cauza lipsei solicitărilor axiale există o stare de tăiere pură), sînt de compresiune din cauza conlucrării cu elementele marginale, reducîndu-se astfel volumul eforturilor de întindere din colțuri, care trebuie să fie preluate de armături dispuse la 45° față de margini.

În figurile 10*a* și *b* s-au trasat diagramele momentelor de încovoiere M_x pentru $y=0$ și $y=0{,}75\,a$ și M_x și M_y pentru $x=a$. Se constată că momentele de încastrare își schimbă semnul în lungul marginii $x=a$ (schimbare semnalată experimental și în [7], [8], iar valoarea maximă nu este la mijlocul deschiderii, ci spre colțuri. Această valoare trebuie să fie funcție de parametrul plăci curbe ε și de factorul $\gamma\left(\frac{Ka}{GI_{12}}\right)$ (care este 0 pentru încastrarea

Tabela 1

	Nr. ec.	Punctul	Φ_{00}	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{22}	Φ_{30}	Φ_{31}	Φ_{32}	Φ_{33}	W_{00}	W_{10}	W_{11}	W_{20}	W_{21}	W_{22}	W_{30}	W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{40}	W_{41}	W_{42}	W_{43}	W_{50}	W_{51}	W_{52}	W_{53}	W_{54}	C	Inc. unif. distr.	Depl. reaz. $3\frac{V_c}{\Delta}\frac{E\delta}{pR}$	Greut. arcelor $\frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{g}{p\Delta}$
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	I	II	III
Ecuația (20a)	1	00	5	−8	2	1	.	.	·	·	0	·	−ε	ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	2	10	−8	25	−16	−8	6	·	1	·	·	·	ε	−4ε	2ε	ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	3	11	1	−16	22	4	−16	2	·	2	·	·	·	2ε	−4ε	·	2ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	4	20	·	−8	4	20	−16	2	−8	4	·	·	·	ε	·	−4ε	2ε	·	ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	5	21	·	6	−16	−16	46	−16	4	−16	6	·	·	·	2ε	2ε	−8ε	2ε	·	2ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	6	22	·	·	2	2	−16	20	·	4	−16	2	·	·	·	·	2ε	−4ε	·	·	2ε	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	7	30	·	1	·	−8	4	·	20−α	−16	2	·	·	·	·	ε	·	·	−4ε	2ε	·	·	ε	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	·	·	·
	8	31	·	·	2	4	−16	4	−16	42−2α	−16	2	·	·	·	·	2ε	·	2ε	−8ε	2ε	·	·	2ε	·	·	·	·	·	·	·	−2	·	·	·
	9	32	·	·	·	·	6	−16	2	−16	44−2α	−16	·	·	·	·	·	2ε	·	2ε	−8ε	2ε	·	·	2ε	·	·	·	·	·	·	−2	·	·	·
	10	33	·	·	·	·	·	2	·	2	−16	20−2α	·	·	·	·	·	·	·	·	2ε	−4ε	·	·	·	2ε	·	·	·	·	·	−2	·	·	·
Ecuația (20b)	11	00	1	−1	·	·	·	·	·	·	·	·	5	−8	2	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	0,25	·	·
	12	10	−1	4	−2	−1	·	·	·	·	·	·	−8	25	−16	−8	6	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1,00	·	·
	13	11	·	−2	4	·	−2	·	·	·	·	·	2	−16	22	4	−16	2	·	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1,00	·	·
	14	20	·	−1	·	4	−2	·	−1	·	·	·	1	−8	4	20	−16	2	−8	4	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1,00	·	·
	15	21	·	·	−2	−2	8	−2	·	−2	·	·	·	6	−16	−16	46	−16	4	−16	6	·	·	2	·	·	·	·	·	·	·	·	2,00	·	·
	16	22	·	·	·	·	−2	4	·	·	−2	·	·	·	2	2	−16	20	·	4	−16	2	·	·	2	·	·	·	·	·	·	·	1,00	·	·
	17	30	·	·	·	−1	·	·	4	−2	·	·	·	1	·	−8	4	·	20	−16	2	·	−8	4	·	·	1	·	·	·	·	·	1,00	·	·
	18	31	·	·	·	·	−2	·	−2	8	−2	·	·	·	2	4	−16	4	−16	42	−16	2	4	−16	4	·	·	2	·	·	·	·	2,00	·	·
	19	32	·	·	·	·	·	−2	·	−2	8	−2	·	·	·	·	6	−16	2	−16	44	−16	·	4	−16	6	·	·	2	·	·	·	·	2,00	·	·
	20	33	·	·	·	·	·	·	·	·	−2	4	·	·	·	·	·	2	·	2	−16	20	·	·	4	−16	·	·	·	2	·	·	1,00	·	·
Ecuația (27 c')	21	40	·	·	·	·	·	·	$\frac{(\alpha-1)(1+\beta_2)}{2}$	·	·	·	·	·	·	1	·	·	−7	4	·	·	10+3β₁	−8−4β₁	1+β₁	·	−1	·	·	·	·	$\frac{1+\beta_2}{2}$	0,50	·	0,50
	22	41	·	·	·	·	·	·	·	(α−1)(1+β₂)	·	·	·	·	·	·	2	·	4	−14	4	·	−8−4β₁	21+7β₁	−8−4β₁	1+β₁	·	−2	·	·	·	1+β₂	1,00	·	1,00
	23	42	·	·	·	·	·	·	·	·	(α−1)(1+β₂)	·	·	·	·	·	·	2	·	4	−14	4	1+β₁	−8−4β₁	20+6β₁	−8−4β₁	·	·	−2	·	·	1+β₂	1,00	·	1,00
	24	43	·	·	·	·	·	·	·	·	·	(α−1)(1+β₂)	·	·	·	·	·	·	·	·	6	−14	·	1+β₁	−8−4β₁	24+6β₁	·	·	·	−2	1+β₁	1+β₂	1,00	·	1,00
Ecuația (21 d)	25	40	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$1-\frac{\gamma}{2}$	−1	·	·	γ	·	·	·	$-1-\frac{\gamma}{2}$	1	·	·	·	·	·	·	·
	26	41	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	2−γ	−1	·	·	2γ	·	·	1	−2−γ	1	·	·	·	·	·	·
	27	42	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	2−γ	−1	·	·	2γ	·	·	1	−2−γ	1	·	·	·	·	·
	28	43	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	2−γ	·	·	·	2γ−1	·	·	1	−2−γ	1	·	·	·	·
Ec. 23	29	44	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	·	·	·	2γ−λ	·	·	·	2	−2−λ−	·	·	·	·
	30	44	·	·	·	·	·	·	1−α	4(1−α)	2(1−α)	4(1−α)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	ε	4ε	2ε	4ε	·	·	·	·	·	−12	·	1,00	·

Tabela 2a

Necunoscutele $\Phi_{m,n}$ interioare

	Încărcarea uniform distribuită	Deplasarea reazemelor	Greutatea arcelor
Φ_{00}	4,65425	$2,33369 \times 10^{-4}$	$2,54819 \times 10^{-3}$
Φ_{10}	4,40426	2,33398	2,54463
Φ_{11}	4,17052	2,31873	2,53835
Φ_{20}	3,62174	2,37381	2,57914
Φ_{21}	3,43672	2,31116	2,56457
Φ_{22}	2,85120	2,15742	2,56697
Φ_{30}	2,20633	2,47439	3,85557
Φ_{31}	2,10082	2,33838	3,82866
Φ_{32}	1,76437	1,95225	3,79936
Φ_{3}	1,12303	1,36228	4,87714

Tabela 2b

Necunoscutele $\Phi_{k+1,n}$ exterioare

	Încărcarea uniform distribuită	Deplasarea reazemelor	Greutatea arcelor
Φ_{50}	−2,33778	$5,19253 \times 10^{-4}$	$-397,93861 \times 10^{-3}$
Φ_{51}	−2,32079	5,21441	−397,93422
Φ_{52}	−2,26662	5,27663	−397,92953
Φ_{53}	−2,16337	5,37162	−398,10305
Φ_{54}	−1,98256	5,59094	−397,31781

Tabela 2c

Necunoscuta C

	Încărcarea uniform distribuită	Deplasarea reazemelor	Greutatea arcelor
C	1,98255	$-5,59093 \times 10^{-4}$	$397,31783 \times 10^{-3}$

Tabela 3a

Necunoscutele $W_{m,\,n}$ interioare și de pe contur

	Încărcarea uniform distribuită	Deplasarea reazemelor ↓	Greutatea arcelor ↓
W_{00}	$0{,}71885\times10^{-2}$	$0{,}37500\times10^{-3}$	$0{,}35581\times10^{-3}$
W_{10}	0,71887	0,37487	0,35581
W_{11}	0,70118	0,36434	0,35366
W_{20}	0,75526	0,39170	0,36013
W_{21}	0,68430	0,34998	0,35153
W_{22}	0,52094	0,24263	0,33016
W_{30}	0,93206	0,51699	0,38255
W_{31}	0,75686	0,42249	0,36303
W_{32}	0,35084	0,16059	0,30938
W_{33}	−0,05276	0,16491	0,23585
W_{40}	1,16535	2,10565	0,43941
W_{14}	0,80143	1,93436	0,40427
W_{42}	0,02309	1,45205	0,30489
W_{43}	−0,42434	0,75403	0,15969 ↑

Tabela 3b

Necunoscutele $W_{k+1.\,n}$ exterioare

	Încărcarea uniform distribuită	Deplasarea reazemelor	Greutatea arcelor
W_{50}	$1{,}27589\times10^{-2}$	$0{,}27138\times10^{-3}$	$1{,}37974\times10^{-3}$
W_{51}	1,09216	0,23793	1,14427
W_{52}	0,70740	0,14524	0,46285
W_{53}	0,44752	0,01388	−0,55813
W_{54}	0,37010	−0,12853	−0,60463

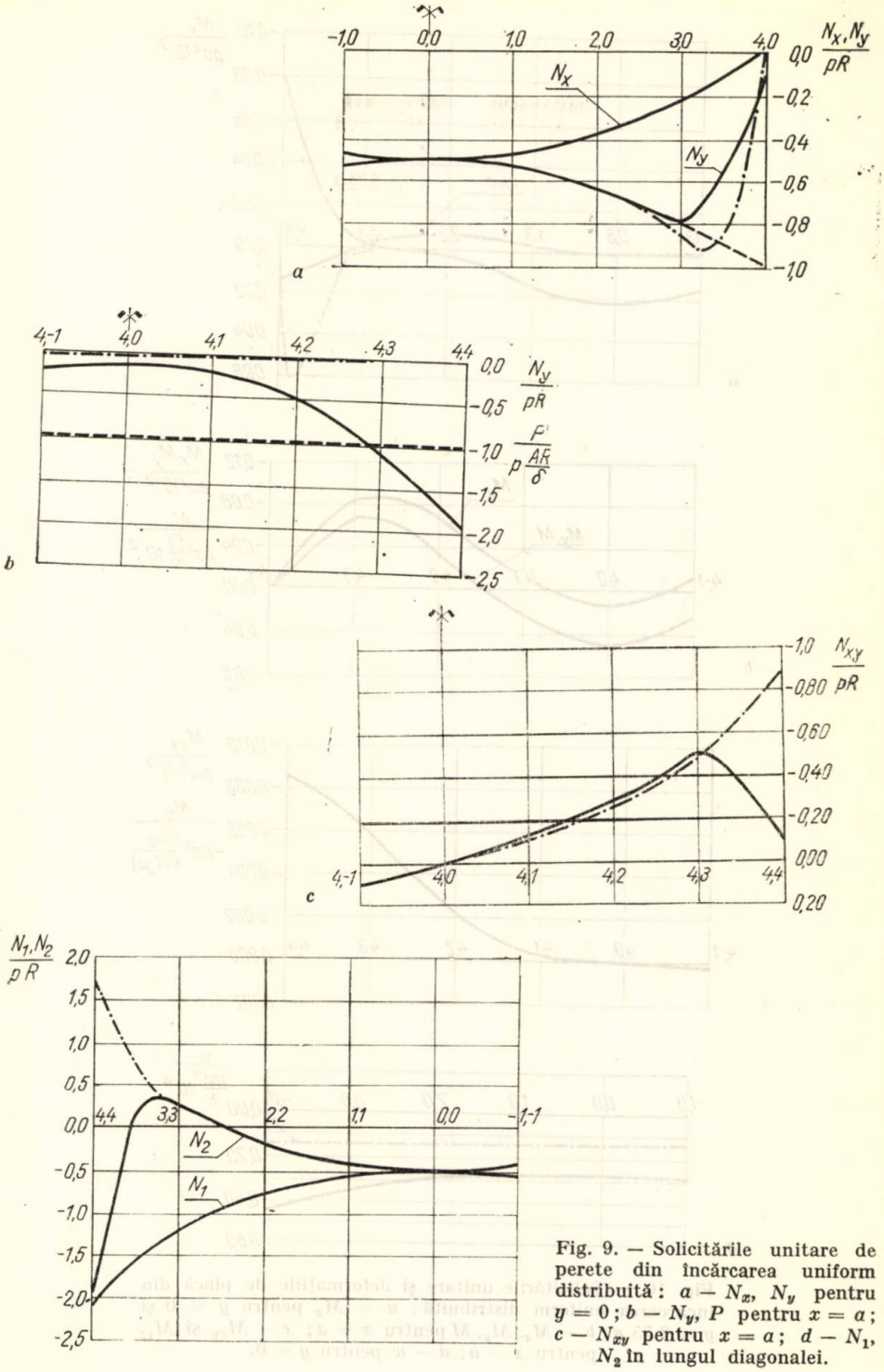


Fig. 9. — Solicitările unitare de perete din încărcarea uniform distribuită: a — N_x, N_y pentru $y = 0$; b — N_y, P pentru $x = a$; c — N_{xy} pentru $x = a$; d — N_1, N_2 în lungul diagonalei.

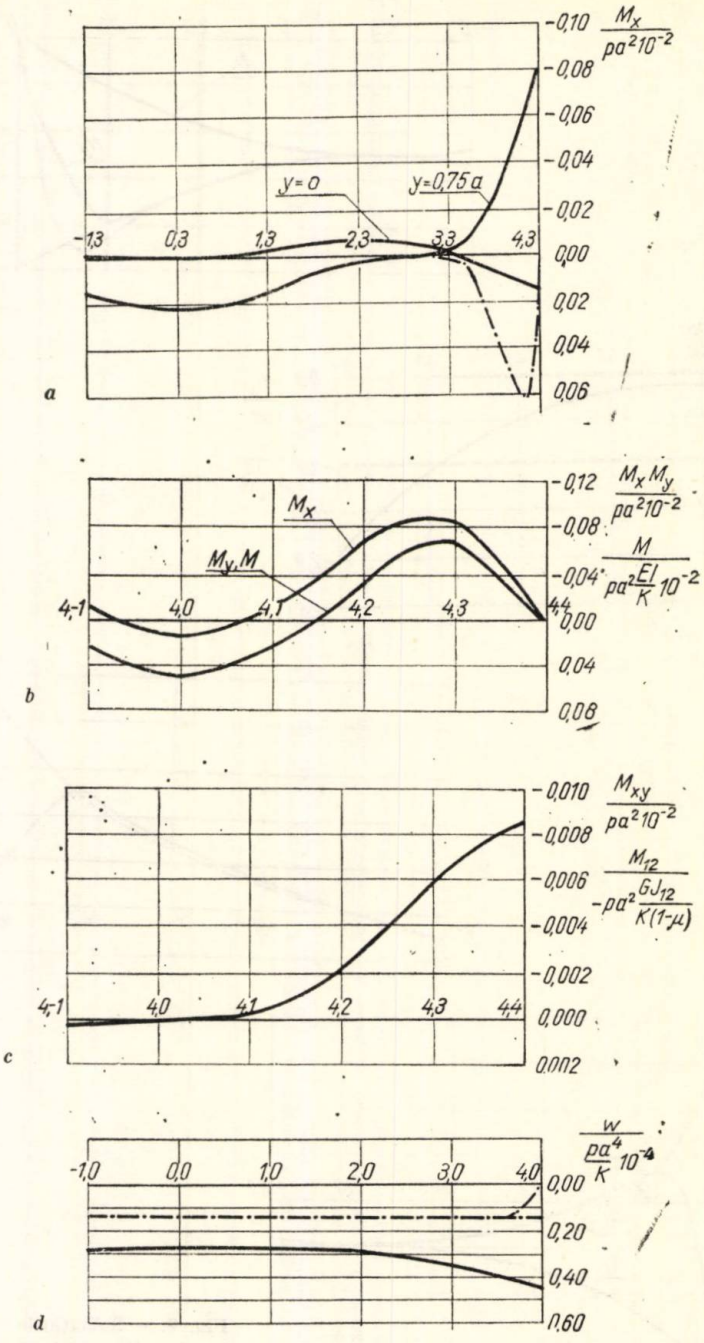


Fig. 10. — Solicitările unitare și deformațiile de placă din încărcarea uniform distribuită: a — M_x pentru $y = 0$ și $y = 0{,}75\ a$; b — M_x, M_y, M pentru $x = a$; c — M_{xy} și M_{12} pentru $x = a$; d — w pentru $y = 0$.

perfectă și ∞ pentru timpanul perfect elastic transversal). Momentele de încastrare sînt de același ordin de mărime ca cele din rezemările rigide (valoarea de lîngă margini), indicate cu linie punctată în figura 10 *a* și mult mai mici decît cele din încastrarea perfectă. Figura 10*c* redă momentul de răsucire M_{xy} pentru marginea $x = a$. În figura 10*d* s-a trasat diagrama deplasărilor verticale w pentru $y=0$. Cu linie întreruptă și punctată s-au redat deplasările din teoria de membrană și teoria de încovoiere cu reazeme rigide. Se constată că, spre deosebire de ipotezele timpanului

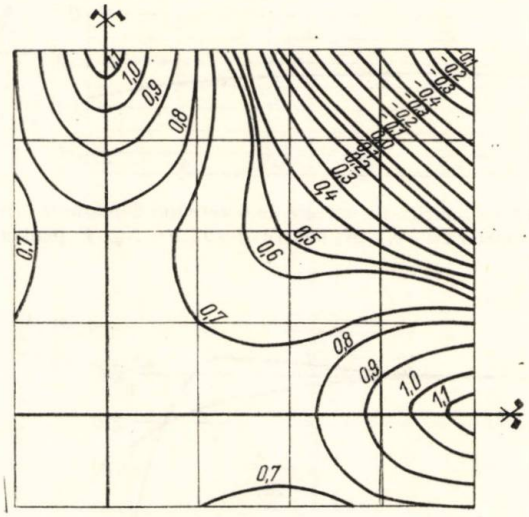


Fig. 11. — Liniile de egală deplasare din încărcarea uniform distribuită.

ideal, deplasările verticale marginale nu sînt nule, ci sînt chiar mai mari decît cele ale centrului plăcii. De asemenea, în urma deformațiilor verticale ale arcelor, deplasările centrului plăcii au crescut de 2,16 ori față de cele calculate, considerînd reazemele rigide. Deplasările plăcii sînt funcție de parametrul plăcii ε și de factorii $\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{Ka}{EI}\right)$ (∞ pentru margini libere și 0 pentru cele rigide) și $\beta_2\left(\frac{A}{\delta a}\right)$ (0 pentru margini libere și ∞ pentru cele rigide).

În figura 11 este redată deformația verticală a unui sfert de placă prin liniile de egală deplasare. Se constată în colțuri o ridicare a plăcii, cauzată de conlucrarea cu arcul marginal.

Solicitările arcului marginal sînt de asemenea reprezentate în figurile 9*b*, 10*b* și 10*c*, ținînd seama de relațiile 13.

7.2. STAREA DE SOLICITARE ȘI DEFORMAȚIE DIN DEPLASAREA ORIZONTALĂ A COLȚURILOR

În figurile 12*a*, *b* s-au trasat diagramele solicitărilor unitare N_x, N_y pentru $y=0$ și N_y pentru $x=a$. În figurile 13*a*, *b* s-au indicat momentele încovoietoare M_x, M_y și M_{xy} pentru $y = 0$, respectiv $x = a$. Deplasările

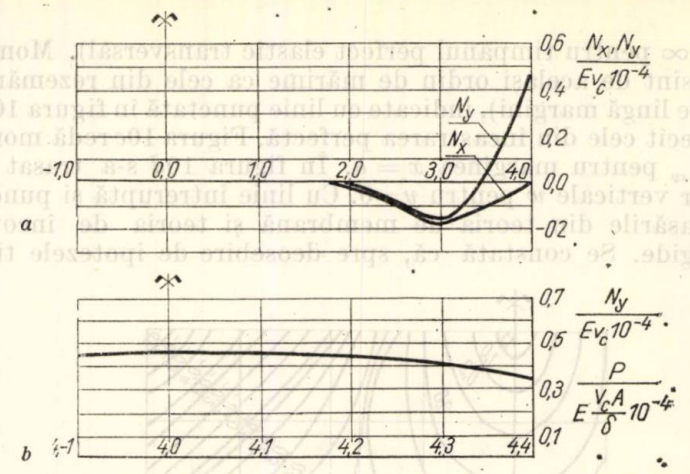


Fig. 12. — Solicitările unitare de perete din deplasarea orizontală a reazemelor : a — N_x, N_y pentru $y=0$; b — N_y, P pentru $x=a$.

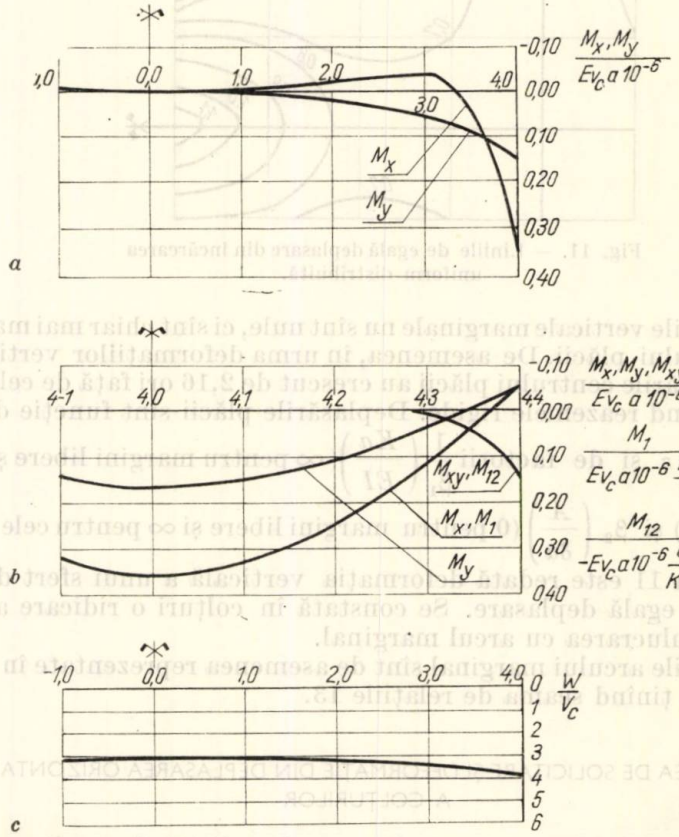


Fig. 13. — Solicitările unitare şi deformaţiile de placă din deplasarea orizontală a reazemelor : a — M_x, M_y pentru $y=0$; b — M_x, M_y, M_{xy}, M_1, M_{12} pentru $x=a$; c — w pentru $y=0$.

verticale w pentru $y = 0$ sînt redate în figura 13 *c*. Deplasarea colțului v_c, în raport cu care sînt scrise toate solicitările, poate să reprezinte fie alungirea tirantului, fie o scurtare a acestuia în urma unei precomprimări a arcului în vederea îmbunătățirii comportării plăcii curbe în exploatare. În cazul alungirii tirantului apar la marginea plăcii și în arc eforturi de întindere care se suprapun peste cele din încărcarea verticală, care sînt compresiuni. Pentru ca în final să nu existe întinderi, deformațiile tirantului ar trebui limitate. Din condiția

$$(N_y)_{\text{înc}} - (N_y)_{\text{depl.}} = 0$$

rezultă

$$\sigma_t \leqslant \eta - \frac{E_t}{E} p \frac{R}{a}, \tag{26}$$

unde σ_t este efortul unitar din tirant în condiții de exploatare, E_t modulul de elasticitate al tirantului, iar η un coeficient funcție de parametrul plăcii curbe ε și de caracteristicile elementelor marginale. Acest coeficient poate fi dat în tabele sau diagrame. Pentru exemplul studiat rezultă

$$\eta = 2830,$$

iar din (26), cu datele problemei, rezultă că tirantul trebuie dimensionat la efortul unitar

$$\sigma_t = 1165 \text{ kgf/cm}^2$$

pentru ca la marginea plăcii și în arce să nu apară eforturi de întindere nedorite. Tirantul va fi astfel dimensionat la un efort cu circa 17% mai mic ca cel obișnuit. Se vede clar de aici că nu este recomandat să se folosească la alcătuirea tiranților oțeluri de calitate superioară fără a se efectua și precomprimarea arcului pentru ca să se anuleze deplasările orizontale ale colțurilor plăcii.

În [7] și [8] s-a arătat experimental că în cazul unor deplasări ale colțurilor plăcii (deplasări care nu au rezultat din alungirea tiranților, ci au fost impuse ca mărimi oarecare), apar momente de încoviere și răsucire foarte mari în placa curbă, deoarece aceste deplasări reprezintă puternice devieri de la condițiile de existență a eforturilor de membrană. Într-adevăr, dacă se calculează solicitările plăcii din deplasarea $v_c = 0{,}666$ cm rezultată din efortul limitat determinat din (26), momentele de încovoiere și de răsucire vor fi de 3, respectiv 11,3 ori mai mari ca cele din încărcarea uniform distribuită. Cu toate acestea, dacă deplasarea colțurilor se limitează după cum am arătat, o armare constructivă obișnuită (însă pe ambele fețe din cauza variației de semn a momentelor de încovoiere), pe lîngă o îngroșare a marginilor plăcii, se poate considera suficientă pentru cazul studiat.

Pentru aceeași deplasare orizontală a colțurilor, centrul plăcii va avea o deplasare verticală de 2,9 ori mai mare decît cea din încărcările verticale.

Pentru alte deplasări ale reazemelor, provenite, de exemplu, din precomprimarea tirantului (mai mare decît cea corespunzătoare anulării alungirii), necesară fie în vederea îmbunătăţirii comportării statice a arcului, fie în vederea decofrării plăcii, trebuie să fie verificate şi solicitările plăcii din aceste deplasări.

7.3. STAREA DE SOLICITARE ŞI DEFORMAŢIE DIN GREUTATEA PROPRIE A ARCULUI

Avînd în vedere zvelteţea mare a arcului $\left(\frac{h}{2a} = \frac{1}{48}\right)$, este de aşteptat că o mare parte din greutatea arcului să fie suportată de placa curbă. În figurile 14*a*, *b* sînt reprezentate solicitările unitare N_y pentru $y=0$ şi $x=a$, iar în figura 15*a* momentele de încovoiere M_x şi M_y pentru $y=0$. Din diagrama deplasărilor verticale w din figura 15*b* se poate observa varia-

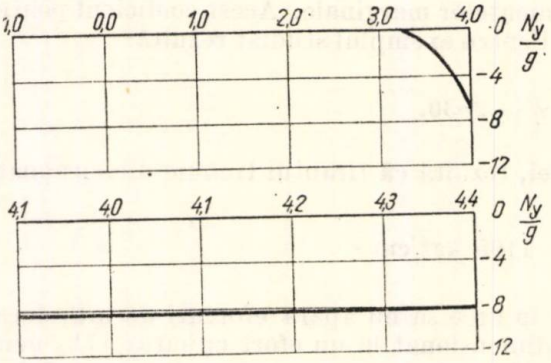


Fig. 14. — Solicitările unitare de perete din greutatea arcelor marginale: *a* — N_y pentru $y = 0$; *b* — N_y pentru $x = a$.

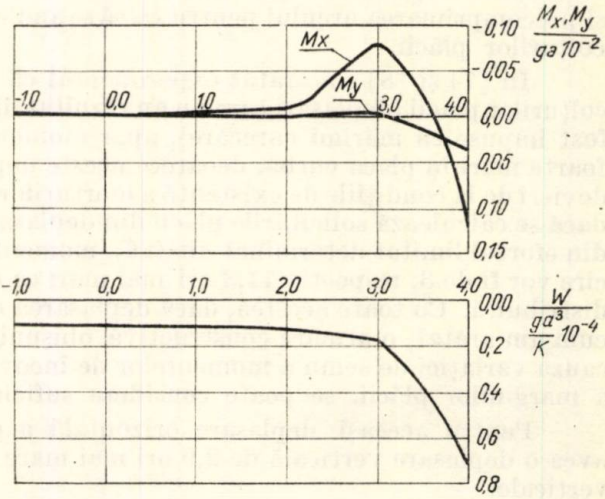


Fig. 15. — Solicitările unitare şi deformaţiile de placă din greutatea arcelor marginale: *a* — M_x, M_y pentru $y = 0$; *b* — w pentru $y = 0$.

ția foarte rapidă spre marginea plăcii curbe. Dacă se compară solicitările unitare cu cele din încărcarea uniform distribuită, se constată (pentru exemplul studiat) că singura solicitare care poate influența dimensionarea plăcii este N_y la marginea $x = a$, care este de 2,6 ori mai mare (celelalte valori sînt sub 10%).

7.4. CONSIDERAȚII SUPLIMENTARE

a) Influența curgerii lente. Avînd în vedere rigiditatea transversală redusă a arcelor marginale, curgerea lentă nu poate influența considerabil solicitările plăcii curbe. Totuși, creșterea deplasărilor verticale în urma curgerii lente poate să facă necesar un calcul de ordinul doi. Considerînd un modul de elasticitate redus din cauza curgerii lente și a neomogenității betonului [3]$E' = 0{,}25\ E$, rezultă o deplasare verticală de 1,02 cm în centrul plăcii și de 1,6 cm la margini. Chiar în ipoteza alungirii tirantului și a considerării deplasărilor din greutatea arcelor, deplasarea verticală nu depășește grosimea plăcii și, prin urmare, calculul de ordinul doi nu influențează mărimea solicitărilor.

b) Coeficientul de siguranță la pierderea stabilității. În lipsa unei soluții exacte pentru paraboloidul de rotație pe contur pătrat rezemat pe arce zvelte, încărcarea limită la pierderea stabilității se poate calcula cu relația (în care s-a ținut seamă și de curgerea lentă) [3]

$$p_{cr} = 0{,}05\ E\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 = 640\ \text{kg/m}^2.$$

Rezultă un coeficient de siguranță

$$c_s = \frac{640}{250} = 2{,}56,$$

care poate fi considerat suficient.

c) Coeficientul de siguranță la starea-limită de rezistență. Starea-limită de rezistență a cupolelor pe contur poligonal este studiată în [22]. Încărcarea limită se calculează cu relația

$$p_{\text{lim}} = 14{,}85 R_{pr}\frac{\delta f}{a}\left[\text{Q} - 0{,}38\frac{(Q+1{,}414q)^3}{(1+4q)^2}\right],$$

unde

$q = \dfrac{\sigma_c A_p}{R_{pr}\delta}$ este un factor al armării plăcii curbe,

$Q = \dfrac{\sigma_c A_t}{R_{pr}\delta a}$ — un factor al armării tirantului,

σ_c — limita de curgere a armăturii,

R_{pr} — rezistența prizmatică a betonului,

A_p — suprafața armăturii din placă raportată la unitatea de lungime,

A_t — suprafața secțiunii transversale a tirantului.

Cu o rețea dublă Φ8/20 cm și secțiunea tirantului calculată cu cele arătate în § 7.2, rezultă

$$p_{\text{lim}} = 1120 \text{ kgf/m}^2.$$

Coeficientul de siguranță va fi

$$c_r = \frac{1120}{250} = 4{,}47.$$

Prin urmare, placa curbă se va distruge, pierzîndu-și stabilitatea.

8. CONCLUZII

Metoda de calcul prezentată permite calculul plăcilor curbe subțiri cu curbură pozitivă la încărcări verticale uniform distribuite, ținînd seama de rigiditatea reală a arcelor de margine, de deplasarea colțurilor plăcii fie în urma alungirii tiranților, fie în urma precomprimării acestuia și de greutatea elementelor de margine. Din exemplul de calcul studiat rezultă următoarele concluzii:

a) reazeme realizate sub formă de arce cu rapoarte $\frac{h}{2a} = \frac{1}{48}$ nu constituie timpane rigide în planul lor, deplasările marginale fiind mai mari decît cele din centrul plăcii;

b) solicitările unitare calculate din teoria de membrană, teoria de încovoiere cu reazeme rigide și cea cu reazeme elastice coincid pe aproape întreaga suprafață a plăcii curbe, cu excepția zonelor marginale și în special spre colțurile plăcii;

c) momentele de încovoiere își schimbă semnul în lungul marginilor plăcii;

d) alungirile tiranților, dacă nu sînt limitate, pot produce solicitări de întindere la marginile plăcii și în arce;

e) greutatea arcelor marginale este suportată în marea majoritate de placa curbă.

★

Autorul mulțumește ing. A. Weiss și ing. I. Mihăiescu (DSAPC Banat) pentru sprijinul acordat la rezolvarea problemei cu ajutorul calculatorului MECIPT-2.

Primită la redacție la 26 octombrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. K. Hruban, *Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, *3—4*, 425—464 (1953).
2. A. Beleș, M. Soare, *Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții*, București, Edit. Academiei, 1964.
3. Academia de construcții și arhitectură a U.R.S.S., *Instrucțiuni pentru proiectarea acoperișurilor și planșeelor din plăci curbe subțiri de beton armat*, București, Edit. tehnică, 1963.
4. V. V. Dikovici, *Pologie priamougolntie b plane obolociki vrașcenia*, Moskva, Gosudarstvennoe izdatelstvo literaturî, 1960.

5. A. Aass, *Simplified Analysis of Rectangular Domes*, Symposium IASS Budapesta, 31 august—3 septembrie 1965.
6. — *Simplified Analysis of Elliptic Paraboloid Shells*, Civil Eng. and Public Works Review. *11*, 1603—1611 (1965).
7. S. Abu—Sitta, *The Stresses in Doubly-Curved Shell Roofs of Pozitive Gaussian Curvature*, Thesis for the degres of Doctor of Philosophy, University College, Londra, 1964.
8. S. Abu-Sitta, *The Influence of Practical Boundary Conditions on Synclinastic Shells*, Symposium IASS, Budapesta, 31 august—3 septembrie 1965.
9. H. C. Shah, *Analysis of Shell Roofs with a Paraboloidical Surface*, The Indian Concrete Journal, *8*, 314—319; *9*, 362—367, *12*, 487—490 (1960).
10. M. N. Keshava-Rao, S. P. Sharma, *Analysis of a Shallow Eliptical Paraboloid Shell with Edge Beams*, The Indian Concrete Journal, *1*, 7—14 (1965).
11. M. Soare, *Contribuții la teoria încovoierii paraboloidului eliptic*, Lucrare de disertație, autoreferat, București, 1963.
12. M. Kristič, *Die in Randträgen eingespannte doppelt gekrümmte Schale*, Die Bautechnik, *8*, 279—282 (1961).
13. J. Padilla, W. C. Schnobrich, *Doubly Curved Shallow Shells with Elastic Supports*, Symposium IASS, Leningrad, 6—9 septembrie, 1966.
14. I. Rajendram, S. H. Simmonds, *Analysis of the Shallow Translational Shells*, Symposium IASS, Budapesta, 31 august—3 septembrie 1965.
15. I. E. Mileikovski, B. C. Kisin, *Rascet pologih obolocek dvoiakoi krivizni s oporntmi diafragnami arocinogo tipa*, Stroitelnoe proektirovanie promîşlennîh predpriatii, *5*, 51—56 (1965).
16. I. V. Cinenkov, M. B. Krakovski, *K rascetî pologih obolocek*, Beton i jelezo-beton, *8*, 40—42 (1966).
17. G. H. Powell, *Interaction of Edge Beams with Doubly Curved Shells*, Journal of the Structural Division, *3*, 57—70 (1966).
18. N. C. Das Gupta, *Edge Disturbances in a Hyperbolic Paraboloid*, Civil Engineering and Public Works Review, *2*, 220—222 (1963).
19. A. Chronowicz, *Reinforced Concrete Roof to Swimming Pool*, Civil Engineering and Public Works Review. *3*, 319—324 (1963).
20. P. Dayaratnam, H. H. Gerstle, *Model Study of a Hyperbolic Paraboloid Shell Supported on Four Elastic Edge Beams*, The Indian Concrete Journal, *4*, 131—135 (1963).
21. Wataru Kato, T. Nishimura, *Analysis and Design of the Shell Roof for the Nügata Prefectural Gymnasium*, World Conference on Shell Structures, San Francisco, 1—4 octombrie 1962.
22. M. Capurso, *Sul calcolo a rottura delle volte in cemento armato*, Giornale del genio civile, *2*, 83—100; *3*, 167—187 (1966).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STADIUL ACTUAL ÎN DINAMICA MECANISMELOR CU CAME. I

de I. SAVA
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea de faţă reprezintă prima parte a sintezei privind stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. Astfel, după o parte introductivă este redat modelul monomasic pentru studiul general al dinamicii mecanismelor cu came împreună cu principalele probleme rezolvate prin considerarea acestuia.

INTRODUCERE ŞI ISTORIC

Ţinînd seama de aplicaţiile la scară mare a mecanismelor cu came în maşinile automate, motoare cu ardere internă, maşini textile etc., în vederea reproducerii diferitelor legi de mişcare a organelor de lucru a elementelor executoare, diferiţi cercetători au acordat o mare atenţie analizei legilor de mişcare a organelor de lucru şi legăturii existente între aceste legi şi structura mecanismelor cu came sau geometria profilelor camelor.

Astfel, la noi în ţară, în ordine cronologică, şi-au adus contribuţia O. Munteanu prin două lucrări referitoare la sinteza unor cazuri particulare de came (cu tachet plan) şi scrierea sub forma seriilor Fourier a legii de mişcare parabolice, D. Tutunaru printr-o contribuţie la proiectarea profilelor cosinusoidale şi sinusoidale printr-o curbă generatoare, apoi prin monografia *Mecanisme cu came*, apărută în 1959, unde introduce noţiunea de mecanism elementar cu camă, raport caracteristic şi o metodă mai exactă pentru determinarea unghiului de presiune.

Noi aparate de investigaţie matematică, destul de complicate, abordează D. Manjeron şi C. Drăgan în lucrarea *Studiul problemelor de sinteză a mecanismelor cu came plane prin metoda tensională.*

La Centrul de mecanică a solidelor al Academiei, începînd din 1966, colectivul sectorului de dinamică a sistemelor mecanice, condus de conf. dr. ing. Chr. Pelecudi, a elaborat o serie de lucrări referitoare la sinteza mecanismelor cu came şi a legilor de mişcare a acestora, precum şi la optimizarea legilor de mişcare a camelor pe baza cronosecţiunii maxime.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1219–1244

Pe plan mondial, numărul autorilor în probleme de came este foarte mare, motiv pentru care se vor aminti, în continuare, numai aceia a căror contribuţie a fost adusă în problema care constituie subiectul prezentei sinteze.

Abia în jurul anului 1930 a început considerarea comportării dinamice a mecanismelor cu came. Pînă la această dată se pare că proiectarea camelor se efectua considerînd numai forma curbei de ridicare a sistemului urmăritor, din aceasta calculînd viteza, acceleraţia şi forţele care acţionează asupra sistemului în ansamblu. Curbele erau în general compuse din arce de cerc şi linii drepte, care nu ridicau dificultăţi la execuţie. De asemenea se mai foloseau curbele logaritmice şi eliptice, racordate cu linii drepte.

Aşa după cum rezultă din lucrările lui Neklutin, legea parabolică era considerată ca cea mai bună, deoarece asigura cea mai joasă acceleraţie posibilă, deşi era bine cunoscut faptul că pentru această lege de mişcare forţele de lucru brusc aplicate, pot produce tensiuni şi deformaţii duble şi chiar triple în comparaţie cu forţele statice de aceeaşi mărime.

Mai tîrziu, în 1954, în lucrările lui Kurz se menţionează că sistemele de distribuţie pentru motoarele cu combustie internă au un profil combinat din arce de cerc, însă schimbarea bruscă a razelor de curbură la conturul camelor provoacă o desfăşurare neuniformă a acceleraţiei, care trebuie înlăturată, dată fiind creşterea turaţiei de funcţionare. Pentru eliminarea acestui dezavantaj, el a propus folosirea unei combinaţii de curbe sinusoidale cu polinomiale.

Vibraţiile care apar în timpul funcţionării, mai ales la regimuri intensive de funcţionare, au reprezentat obiectul de studiu pentru mulţi autori, ca Hrones, Neklutin, R. C. Johnson, Ivar Sevenson etc.

Lucrările lui Neklutin se bazează pe două idei, şi anume :

— forma camei va fi acceptată după selectarea mai multor diagrame de acceleraţii ;

—discontinuităţile în curba camei sînt nedorite.

El analizează un mare număr de diagrame de acceleraţii, precum şi efectul vibraţiilor libere care apar ca urmare a discontinuităţilor în curbele de acceleraţii, conchizînd că maximul tensiunilor datorate vibraţiilor scade cu creşterea numărului de vibraţii din timpul unei curse. Fără a obţine prin calcul, ca soluţia el consideră ca fiind cea mai bună curba sinusoidală.

La aceeaşi concluzie ajunge şi Rothbart, numai dacă precizia de execuţie poate fi menţinută în limitele $\pm$ 0,008 mm.

În lucrările sale, Kennison confirmă calităţile curbei sinusoidale, arătînd că ele se datoresc raporturilor finite de schimbare ale acceleraţiei în toate punctele curbei.

Hrones, Vulifson, Kobrinschi şi alţi autori studiază influenţa amortizării pentru diferite profile asupra curbelor de răspuns ale acceleraţiilor şi a prezenţei forţelor de contact negative între camă şi tachet. Soluţiile obţinute fie prin calcul direct, fie prin rezolvarea cu ajutorul modelării au indicat o reducere a vibraţiilor, dar o creştere a valorilor maxime.

Deoarece o curbă nu poate îndeplini toate cerinţele unei funcţionări bune, s-a pus problema combinării lor în vederea unei optimizări. Kurz combină arce sinusoidale cu arce polinomiale.

Turkish, Nekliutin, Bilaisis şi Johnson studiază alte combinaţii ; arce sinusoidale cu linii drepte, legi trapezoidale modificate, ultimul aplicînd metoda diferenţelor finite pentru rezolvarea problemei proiectării camelor şi în calculul erorilor de execuţie ale profilelor. Pelecudi şi Sava folosesc programarea liniară în vederea obţinerii unei legi de mişcare optime.

Intensificarea regimurilor de funcţionare pentru motoarele cu ardere internă şi maşini textile au determinat ca atenţia multor cercetători să fie îndreptată în direcţia studierii teoretice şi experimentale a mecanismelor cu came în condiţiile vitezelor ridicate de funcţionare.

Dudley a conchis că principala cauză a unei funcţionări defectuoase este flexibilitatea lanţului cinematic corespunzător distribuţiei. El a propus să se facă alegerea mişcării elementului final, iar din ecuaţia de mişcare corespunzătoare să se determine legea de profilare a camei. Dacă se alege ecuaţia de mişcare a camei de formă polinomială, soluţia va fi o curbă care ţine cont şi de comportarea dinamică a sistemului camă-tachet. Această curbă s-a numit polidină, iar procedeul de obţinere a ei „metoda polidină".

Rothbart, Thoren, Engemann, Stoddart şi alţi autori au studiat teoretic şi experimental comportarea curbelor polidine, evidenţiind performanţele acestora.

Din lucrările analizate se desprinde ideea că, oricare ar fi mecanismul care foloseşte în componenţa sa came, între elementul condus şi grupul de elemente conduse şi cama sau camele care impun mişcările acestora există o bază reală generatoare de diferenţieri între curbele de răspuns şi acelea de profilare ale camelor. Factorul important care determină o mişcare diferenţiată a sistemului urmăritor în raport cu diagrama deplasării camei este elasticitatea elementelor lanţului cinematic camă-element condus. Elasticităţii lanţului cinematic i se mai asociază lipsa de rigiditate a fremei, neregularităţile suprafeţei camei ca urmare a procesului de fabricaţie şi uzurii, precum şi jocurile din cuplele cinematice.

Nepotrivirile în curbele de răspuns devin accentuate în condiţiile unui regim de turaţii ridicat, iar în cazul motoarelor pentru avioane şi automobile ignorarea factorilor menţionaţi nu rareori conduc la deteriorarea funcţionării normale prin distrugerea supapelor.

Privit cronologic, filmul metodologiei de studiu al dinamicii mecanismelor cu came reliefează diferitele modele abordate de diverşi autori pentru analizarea comportării camelor în condiţii cît mai reale de funcţionare, efectuînd, în sensul justificării metodelor admise, variate experimentări.

Din bibliografia analizată rezultă că în studiul influenţei diverşilor parametri asupra comportării în regim dinamic a mecanismelor cu came, chiar dacă factorii urmăriţi sînt diferiţi, numărul modelelor dinamice considerate este relativ limitat. Prin urmare, în ideea unei uşoare urmăriri a problemelor de dinamică a mecanismelor cu came studiate pînă în prezent, lucrarea *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came* conţine o sinteză a acestora, urmărite pe modelele considerate, începînd cu modelul manomasic folosit la studiul general al dinamicii mecanismelor cu came.

Concluziile de importanţă majoră conţin şi o justificare mai amplă, neţinîndu-se seama de amănuntele demonstraţiilor care pot fi urmărite în bibliografia indicată.

I. MODELUL MONOMASIC PENTRU STUDIUL GENERAL AL DINAMICII MECANISMELOR CU CAME

Performanţele mecanismelor cu came suferă modificări importante ca urmare a lipsei de rigiditate a elementelor lanţului cinematic. De aceea majoritatea cercetătorilor, înainte de a studia influenţa caracteristicilor dinamice asupra alegerii legilor de mişcare ale elementului condus, pe baza unui sistem de ipoteze şi a unui model intuitiv stabilesc modelul matematic, care de fapt este ecuaţia de mişcare a elementului condus, cu considerarea elasticităţii elementelor lanţului cinematic.

1. ECUAŢIA DE MIŞCARE A SISTEMULUI URMĂRITOR

Stabilirea ecuaţiei şi rezolvarea ei permit găsirea corespondenţei dintre diagrama camei şi diagrama reală a sistemului urmăritor. Corespondenţa este exprimată prin coeficientul de dinamicitate, caracteristică importantă a legilor de mişcare, cînd se pune problema funcţionării la regimuri ridicate de turaţii.

Cel mai simplu model intuitiv considerat este cel reprezentat în figura 1.

La alcătuire s-a avut în vedere următorul sistem de ipoteze :

— masa elementelor lanţului cinematic s-a înlocuit prin masa redusă la elementul final;

— s-a considerat deplasarea unidirecţională a tuturor elementelor lanţului cinematic considerat;

— s-a considerat numai elasticitatea elementului urmăritor în direcţia deplasării;

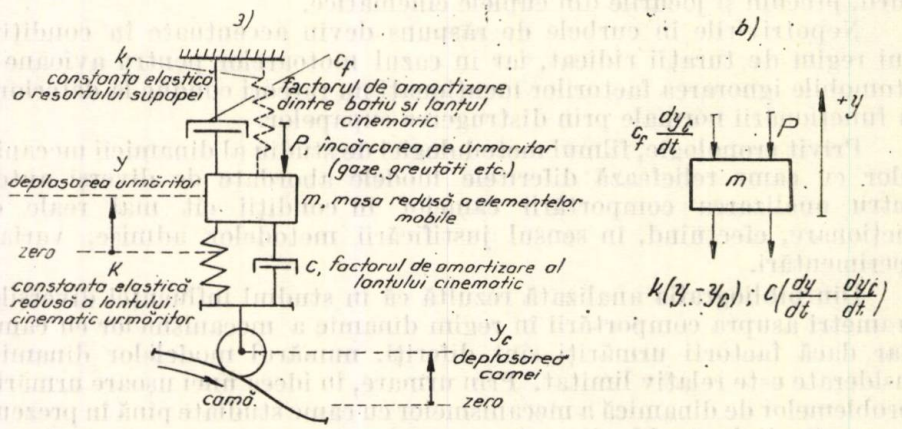


Fig. 1. — Sistemul echivalent al mecanismului camă-tachet.

— s-a considerat numai amortizarea în cuplele inferioare de translaţie, iar factorii de amortizare proporţionali cu vitezele corespunzătoare;

— forţa tehnologică P se presupune că acţionează la extremitatea elementului final.

Primele două ipoteze permit ca sistemul să fie considerat cu un singur grad de libertate, şi pentru figura 1*b* legea a II-a a mecanicii, scrisă sub forma ecuaţiei 1,

$$\Sigma \text{ forţelor} = m\frac{d^2y_e}{dt^2}, \tag{1}$$

conduce la scrierea următorului model matematic:

$$-P - c\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_e}{dt}\right) - c_f\frac{dy}{dt} - K(y - y_e) = m\frac{d^2y}{dt^2}, \tag{2}$$

unde lungimile se măsoară în cm, factorii de amortizare în kgs/cm, constanta elastică în kg/cm, iar masa în kgf²/cm.

Ecuaţia (2) este o expresie generală pentru orice sistem al cărui model intuitiv este cel reprezentat în figura 1. Pentru a găsi curba de răspuns a ultimului element din sistemul urmăritor, se substituie în ecuaţia (2) expresia analitică y_e.

Majoritatea autorilor care au avut ca punct de plecare modelul intuitiv din figura 1, pentru simplitate, neglijează amortizările şi rezistenţele tehnologice, caz în care ecuaţia (2) capătă forma cea mai simplă:

$$-K(y - y_e) = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{sau} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y\omega_n^2 = \omega_n^2 y_e, \tag{3}$$

unde $\omega_n = (K/m)^{\frac{1}{2}}$ şi este frecvenţa naturală neamortizată a sistemului, exprimată în rad/s.

În cazul distribuţiei la motoarele cu ardere internă, modelul intuitiv este întregit cu resortul supapei, redat punctat în figura 1*a*. Pentru acest caz, membrul stîng al ecuaţiei (2) este completat cu termenul $-k_r y$, iar ecuaţia (3) rămîne neschimbată, întrucît $k_r \ll K$ şi deci k_r se neglijează.

În privinţa evaluării termenilor din modelul matematic (3) se pot spune următoarele: Masa m se determină cu relaţia cunoscută pentru determinarea masei reduse:

$$m = \sum_1^n{}_i\, c_i m_i \left(\frac{v_i}{v}\right)^2 + \sum_1^n{}_i\, c_i I_i \left(\frac{\omega_i}{v}\right)^2, \tag{4}$$

unde v este viteza de reducere a punctului de reducere după elementul urmăritorului, m_i, I_i, v_i şi ω_i reprezintă masa, momentul de inerţie în raport cu axa care trece prin centrul masei, viteza centrului de greutate al masei şi viteza unghiulară corespunzătoare elementului de ordinul i al lanţului cinematic şi c_i este o constantă care ţine cont că la elementele elastice nu toată masa intră simultan în mişcare (pentru elementele care se deformează ca arcul supapei $c_i = 1/3$, iar pentru elementele rigide $c_i = 1$).

Constanta elastică redusă K a întregului sistem urmăritor se calculează ca avînd unul dintre capete fixe, iar determinarea sa efectivă se face fie experimental, fie folosind relaţiile furnizate de rezistenţa materialelor.

Modelul matematic (3) a fost utilizat de diverşi autori într-o serie de investigaţii, astfel:

a) alegînd o mişcare convenabilă pentru elementul condus y, se poate determina legea de profilare a camei y_c (polidină);

b) alegînd mişcarea camei y_c, se poate determina legea de deplasare a urmăritorului y;

c) posibilitatea inexistenţei întreruperii lanţului cinematic camă-sistem urmăritor în condiţiile de funcţionare dinamică;

d) determinarea sarcinilor dinamice ca urmare a jocurilor din cuplele cinematice;

e) influenţa discontinuităţii derivatelor legii de mişcare a camei asupra proprietăţilor dinamice;

f) came polidine.

2. DETERMINAREA LEGII DE PROFILARE A CAMEI CUNOSCÎND MIŞCAREA ELEMENTULUI URMĂRITOR

Considerînd cazul concret al unei came folosite la o maşină textilă, se presupun două legi polinomiale pentru sistemul urmăritor:

$$\begin{aligned} y &= 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7, \\ y &= 126x^5 - 420x^6 + 540x^7 - 315x^8 + 70x^9 \end{aligned} \tag{5}$$

şi, folosind modelul matematic (3), la care nu se neglijează rezistenţa tehnologică, se obţine ecuaţia (3'):

$$y_c = \frac{P}{K} + y + \frac{1}{\omega_n^2} y''. \tag{3'}$$

Curbele acceleraţiilor pentru mişcarea dată a masei y şi a legii de profilare a camei y_c obţinute sînt redate în figura 2.

Din diagramele figurate se desprind următoarele: Deplasarea polinomială 5—6—7—8—9 este mai bună decît deplasarea 4—5—6—7, deoarece a doua impune o acceleraţie iniţială la care trebuie să răspundă profilul camei. Or, acest lucru revine la o profilare după o lege cu şoc care înrăutăţeşte funcţionarea mecanismului în ansamblu. Însă, datorită exponenţilor mari, deşi prima pare indicată sub aspect funcţional, dificultăţile ridicate de execuţie nu justifică întotdeauna avantajul menţionat.

Proiectarea camelor după legi polinomiale impune considerarea unor curbe cu racordări destul de line la capete în vederea compensării inconvenientelor aduse de modificările lungimilor datorate temperaturii, jocului, uzurii şi flexibilităţii sistemului urmăritor.

Începutul curbei de ridicare (corespunde preluării jocului dintre elemente), care se mai numeşte şi „rampa camei", privită sub aspectul funcţional, are aceeaşi importanţă la proiectare ca şi cama în sine. De aceea se recurge la profile combinate pe porţiuni, astfel încît să fie satisfăcute dezideratele funcţionale şi de execuţie ale profilului.

O „rampă" a camei proiectată incorect, căreia i se mai asociază ipotezele simplificatoare de calcul, erori de execuţie şi un anume mod de acţionare al sarcinilor exterioare, poate constitui o sursă de vibraţii.

Se poate conclude, ca urmare a acestui mod de a folosi modelul matematic redat prin expresia (3′) la analiza dinamică a mecanismelor cu came de înaltă flexibilitate, că folosirea curbelor polinomiale combinate poate

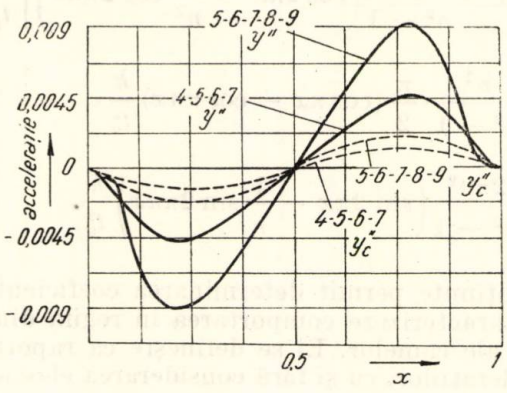


Fig. 2. — Compararea acceleraţiilor camei cu sistemul urmăritor.

contribui la îmbunătăţirea funcţionării acestora, iar utilizarea calculatoarelor pentru determinarea prin puncte a profilului înlătură inconvenientul ridicat de marele volum de muncă cerut de abordarea profilelor polinomiale.

3. DETERMINAREA LEGII DE DEPLASARE A ELEMENTULUI CONDUS CUNOSCÎND PROFILUL CAMEI

Pentru exemplificare se consideră două legi de profilare ale camei :

$$\begin{aligned} &\text{— profil cosinusoidal (P.C.) : } y_c = 0{,}5\ (1 - \cos \pi x)h, \\ &\text{— profil sinusoidal (P.S.) : } y_c = \left(x - \frac{1}{2\pi} \sin\ 2\pi x\right)h, \end{aligned} \tag{6}$$

unde h este cursa totală a urmăritorului, iar $x = t/t_0$ raportul dintre timpul curent şi timpul corespunzător cursei totale h.

Înlocuind aceste expresii în modelul (3), se obţin două ecuaţii diferenţiale neomogene de ordinul doi, ale căror soluţii generale sînt

$$\begin{aligned} y &= 0{,}5\left(1 - \frac{n^2 \cos \pi x + \cos \pi n x}{n^2 - 1}\right), \\ y &= \left[x - \frac{n^2}{2\pi(n^2 - 1)}\left(\sin 2\pi x - \frac{1}{n^3} \sin 2\pi n x\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

unde $n = \omega_n/\omega = \dfrac{\text{pulsaţia proprie a sistemului}}{\text{pulsaţia forţei perturbatoare}} = 1$ la rezonanţă.

Derivînd succesiv ecuaţiile (7), se obţin vitezele şi acceleraţiile:

$$\dot{y} = \left[\frac{n^2}{n^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\pi x - \frac{\pi n}{2(n^2-1)}\sin\pi n x\right]\frac{h}{t_0},$$

$$\dot{y} = \left[1 - \frac{n^2}{n^2-1}\left(\cos 2\pi x - \frac{1}{n^2}\cos 2\pi n x\right)\right]\frac{h}{t_0}. \tag{8}$$

$$\ddot{y} = \frac{n^2}{n^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}(\cos\pi x - \cos\pi n x)\frac{h}{t_0^2},$$

$$\ddot{y} = \frac{2\pi n^2}{n^2-1}\left(\sin 2\pi x - \frac{1}{n}\sin 2\pi n x\right)\frac{h}{t_0^2}. \tag{9}$$

Soluţiile obţinute permit determinarea coeficientului de dinamicitate capabil să caracterizeze comportarea în regim dinamic a diverselor legi de profilare ale camelor. El se defineşte ca raportul dintre valorile maxime ale acceleraţiilor, cu şi fără considerarea elasticităţi elementelor, astfel:

$$K_{\text{din}} = \frac{y_{\max}}{y_{e\max}}. \tag{10}$$

Ţinînd cont de definiţie, coeficienţii de dinamicitate pentru cele două situaţii considerate au expresiile

$$K_{\text{din}} = \frac{n^2}{n^2-1}\left|\cos\pi x - \cos\pi n x\right|_{\max},$$

$$K_{\text{din}} = \frac{n^2}{n^2-1}\left|\sin 2\pi x - \frac{1}{n}\sin 2\pi n x\right|_{\max}. \tag{11}$$

În figura 3 sînt redate curbele caracteristice de răspuns ale deplasării y, vitezei $\dot{y}$ şi aceeleraţiei $\ddot{y}$, suprapuse pe curbele caracteristice ale camei P.C., nealterate de influenţa elasticităţii:

Acestea sînt curbe de răspuns tranzitorii pentru sisteme relativ flexibile, ca, de pildă, sistemele de distribuţie ale motoarelor de avion şi maşinile textile, unde valorile lui n sînt mici ($n = 2, 3, 4$). Din figura 3*a* rezultă că compresiunea dinamică a urmăritorului, de înaltă flexibilitate, este urmată de o relaxare a energiei, generînd oscilaţia acestuia pe camă.

Pentru sisteme mai rigide ($n = 10$), în figura 3′ sînt redate curbele de răspuns ale acceleraţiei pentru camele P.C. (3′*a*) şi P.S. (3′*b*).

Procedeul urmat mai sus permite determinarea curbei de răspuns a elementului final pentru orice profil de camă.

Din analiza redată se desprind următoarele concluzii:

— pentru $\omega_n \gg \omega$ (adică $n > 7$), pentru legile de mişcare fără salturi în graficul acceleraţiei(P.S.) $K_{\text{din}} \simeq 1$, pentru cele cu schimbarea accele-

rației numai ca mărime $K_{din} \simeq 2$ (P.C.), iar pentru acelea cu schimbarea accelerației ca mărime și direcție, se poate demonstra că $K_{din} \simeq 3$;

— pentru valori ale lui n în apropierea rezonanței ($n = 1$), K_{din} crește considerabil pentru toate tipurile de diagrame de accelerații.

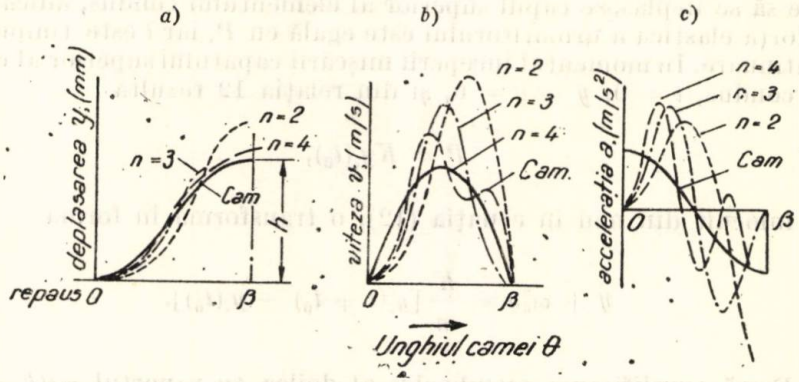


Fig. 3.—Curbele de răspuns pentru camă P.C.: *a* — deplasarea; *b* — viteza; *c* — accelerația.

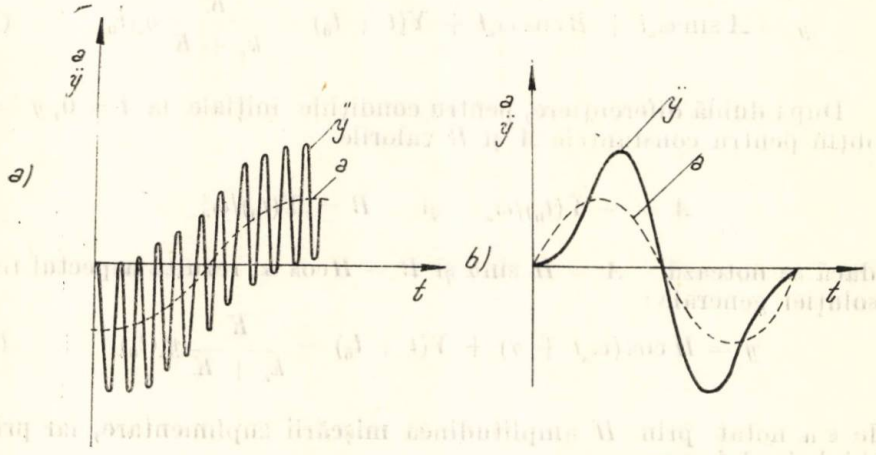


Fig. 3′ — Curbele accelerațiilor pentru profilele P.C. și P.S. pentru $n = 10$.

4. CONDIȚIA NEÎNTRERUPERII LANȚULUI CINEMATIC CÎND SE CONSIDERĂ ELASTICITATEA ELEMENTELOR

Caracteristicile arcului de menținere a urmăritorului pe camă joacă un rol deosebit la menținerea continuității lanțului cinematic camă-urmăritor. Cu considerarea elasticității, problema determinării caracteristicilor arcului se rezolvă în baza soluției modelului matematic 2, scris sub forma

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{K}{m}\left(y_c - \frac{P}{K}\right), \qquad (12)$$

unde în acest caz $\omega_n^2 = (k_r + K)/m$, iar forța P include atît rezistența tehnologică, admisă constantă, cît și forța de prestrîngere a arcului. Ținînd cont de desfășurarea mișcării, se poate scrie $y_c = y_c(t + t_0)$, unde t_0 este timpul scurs de la începutul mișcării camei pînă în momentul cînd începe să se deplaseze capul superior al elementului condus, adică atunci cînd forța elastică a urmăritorului este egală cu P, iar t este timpul scurs în continuare. În momentul începerii mișcării capătului superior al elementului condus, $t = 0$, $\dot{y} = y = 0$, și din relația 12 rezultă

$$P = Ky_c(t_0),$$

care, înlocuit din nou în ecuația (12), o transformă în forma

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \frac{K}{m}[y_c(t + t_0) - y_c(t_0)]. \tag{12'}$$

După amplificarea membrului al doilea cu raportul $m/(k_r + k)$ și notînd $[K/(k_r + K)]\, y_c(t + t_0) = Y(t + t_0)$, soluția generală a ecuației 12′ are forma

$$y = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + Y(t + t_0) - \frac{K}{k_r + K} y_c(t_0). \tag{13}$$

După dublă diferențiere, pentru condițiile inițiale la $t = 0, y = \dot{y}$, se obțin pentru constantele A și B valorile

$$A = -\dot{Y}(t_0)/\omega_n \quad \text{și} \quad B = \ddot{Y}(t_0)/\omega_n^2$$

și, dacă se notează $-A = H \sin\alpha$ și $B = H\cos\alpha$, rezultă aspectul final al soluției generale:

$$y = H \cos(\omega_n t + \alpha) + Y(t + t_0) - \frac{K}{k_r + K} y_c(t_0), \tag{14}$$

unde s-a notat prin H amplitudinea mișcării suplimentare, iar prin α unghiul de defazare.

Întreruperea lanțului cinematic are loc atunci cînd forța elastică a tachetului $K(y_c - y)$, devine zero, adică $y_c = y$.

După înlocuire în ecuația (12) se obține

$$m\ddot{y}_i = -P - k_r y_{ci}, \tag{15}$$

unde indicele $\hat{i}$ corespunde momentului întreruperii lanțului cinematic cînd $y_c = y$.

Introducînd ecuația 14, dublu diferențiată, în ecuația 15 și ținînd cont că în regiunile depărtate de rezonanță deplasarea principală corespunzătoare soluției particulare diferă puțin de deplasarea căpătului inferior al elementului condus, adică $Y(t + t_0) = y_c(t + t_0)$, se obține în final expresia

$$m\omega_n^2 H \cos(\omega_n t_i + \alpha) = my_c(t_i + t_0) + P + k_r y_{ci}. \tag{16}$$

În baza acestei condiții se redă următoarea metodă grafoanalitică pentru controlul discontinuității lanțului cinematic:

1) pentru datele problemei se determină $y_{c0} = P/Ks_0$;

2) după graficele deplasării vitezei și accelerației capătului inferior al urmăritorului se determină v_0 și a_0 corespunzător lui y_{c0} calculat;

3) se calculează produsul $\omega_n^2 H = \sqrt{\omega_n^2 V_0^2 + a_0^2}$, (16')

unde $\dot{Y}(t_0) = \dot{y}_c(t_0) = P/Kt_0$ și $\ddot{Y}(t)_0 = \ddot{s}(t_0) = a_0$;

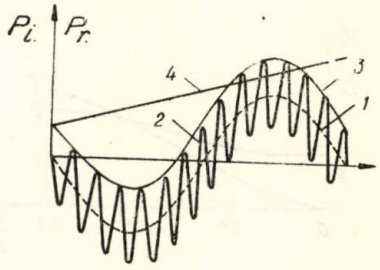


Fig. 4. — Graficul determinării condiției întreruperii lanțului cinematic cu socotirea elasticității.

4) se construiește graficul forței de inerție al mișcării principale în funcție de drumul s, considerînd-o aproximativ ma (curba *1* pe figura 4). Apoi se adaugă la forța de inerție ma forța de inerție corespunzătoare mișcării suplimentare, considerîndu-i aproximativ amplitudinea $m\omega_n^2 H$ (curba *2* pe figura 4), obținîndu-se drept rezultantă curba 3 din figura 4, după care se construiește dreapta $P + y_c k_r$ (dreapta 4 din figura 4).

Deci pentru a nu avea întreruperea continuității lanțului cinematic este necesar ca dreapta 4 să nu intersecteze curba *3*.

5. DETERMINAREA ÎNCĂRCĂRILOR DINAMICE CA URMARE A CIOCNIRII ELEMENTELOR LANȚULUI CINEMATIC

Ciocnirile elementelor lanțului cinematic al mecanismelor cu came se pot produce în două cazuri:

— cînd între elemente există jocuri prevăzute (montaj, preluarea dilatărilor datorită temperaturii etc.);

— cînd legea de mișcare considerată are graficul vitezei cu întreruperi.

În primul caz, unghiul de rotație al camei pînă la intrarea în mișcare al capătului superior al elementului condus este

$$\varphi_0 = \varphi_j + \varphi_e,$$

unde φ_j este unghiul corespunzător preluării jocurilor amintite, iar φ_e unghiul corespunzător preluării prestrîngerii.

Determinarea încărcării dinamice totale se determină cu relația

$$P_i = m(\omega_n^2 H + a_0) = m\left(\sqrt{\omega^2 v_0^2 + a_0^2} + a_0\right), \quad (17)$$

unde notaţiile sînt cunoscute şi corespund parcurgerii de către camă a unghiului φ_0.

Scrisă în coordonate adimensionale, relaţia (17), are forma

$$P_i = \left[\sqrt{\left(2\pi \frac{t_0}{t_n}\right)^2 y'^2 + y''^2} + y''\right] \frac{ms_0}{t_0^2} = \pi \frac{ms_0}{t_2^0}, \tag{18}$$

unde t_n este perioada vibraţiilor proprii ale sistemului.

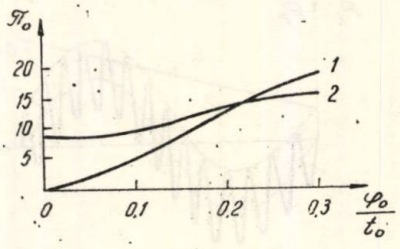


Fig. 5. — Coeficientul încărcării dinamicii π_0: *1* — P.S. *2* — P.C.

Dacă $t_0 \gg t_n$, atunci al doilea termen de sub radical se neglijează şi expresia π_0 devine

$$\pi_0 = 2\pi \frac{t_0}{t_n} y' + y'' \tag{18'}$$

şi pentru valoarea $2\pi \frac{t_0}{t_n} = 10$ legile de mişcare P.C. şi P.S. au pentru coeficientul π_0 reprezentarea grafică din figura 5.

Din figură rezultă avantajul conferit de cama cu profil P.S. lipsit de salt iniţial în diagrama acceleraţiilor.

După un joc mai mare de 0,2, avantajul oferit de P.S. se pierde din cauza măririi coeficienţilor de viteză şi de acceleraţii.

În cazul ciocnirilor datorate discontinuităţii curbei de viteză, relaţia de calcul pentru încărcările dinamice este identică (cu 18), cu deosebirea că valorile coeficienţilor de viteză şi de acceleraţie corespund punctului discontinuităţii din curba vitezei (a_y şi v_y) astfel:

$$P_i = m(\omega_n v_y + a_y) = v_y \sqrt{Km} + ma_y. \tag{19}$$

Din relaţia(19) se constată influenţa pe care o exercită vibraţia proprie a sistemului asupra încărcării dinamice, şi anume reducerea rigidităţii lanţului cinematic al sistemului urmăritor conduce la amortizarea încărcărilor dinamice.

6. INFLUENŢA DISCONTINUITĂŢII DERIVATELOR LEGII DE PROFILARE A CAMEI ASUPRA PROPRIETĂŢILOR DINAMICE

Influenţa variaţiilor bruşte ale curbei acceleraţiei, adică a celei de-a treia derivată a legii de profilare a camei asupra vibraţiilor şi forţelor care însoţesc funcţionarea mecanismelor cu came, a interesat mulţi autori.

Problema referitoare la efectele dinamice ale unei schimbări bruşte a acceleraţiei asupra derivatelor de ordin superior şi a comportării mecanismelor cu came cu funcţionare în regim dinamic a fost tratată luîndu-se drept bază tot modelul matematic (3):

$$\ddot{y}^2 + \omega_n^2 y = \omega_n^2 y_c, \tag{20}$$

iar dacă se admite o lege de mişcare de forma unei serii de puteri, atunci ecuaţia (20) capătă forma

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 \sum k_n \frac{t^n}{n!}, \tag{21}$$

unde indicele n este diferit de exponentul n_i şi unde coeficienţii k_i se pot determina uşor prin calcularea funcţiilor $y_c^{(n)}$ în origine, rezultînd

$$y_c^{(n)} = k_n. \tag{22}$$

Ecuaţia (21) admite o soluţie particulară de forma

$$y_p = \frac{1}{n!} D_n \cdot t^n.$$

iar soluţia generală are forma

$$y = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \sum_n \sum_i \frac{t^n}{n!} (-1)^{i+2} \frac{k(n+2i)}{\omega_n^{2i}}. \tag{23}$$

Primii doi termeni ai ecuaţiei (23) reprezintă vibraţia naturală a sistemului, iar suma dublă corespunde soluţiei particulare.

Se presupune acum că derivata lui y_c de ordinul n creşte cu mărimea Δ_n, imprimînd astfel o creştere a amplitudinilor A şi B cu ΔA şi, respectiv, cu ΔB.

După discontinuitate, ecuaţia curbei y va fi

$$y_c = k_0 + k_1 t + \frac{1}{2!} k_2 t^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} k_{n-1} t^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{n!} (k_n + \Delta_n) t^n + \frac{1}{(n+1)!} \cdot k_{n+1} t^{n+1} + \ldots$$

şi ecuaţia (23), care reprezintă mişcarea masei, se va dezvolta în felul următor:

$$y = (A + \Delta A) \cos \omega_n t + (B + \Delta B) \sin \omega_n t + \left[k_c - \frac{1}{\omega_n^2} k_2 + - \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_n^n} (k_n + \Delta_n) - + \ldots \right] + - \ldots + \left[k_1 - \frac{1}{\omega_n^2} k_3 + - + \ldots \right] t + \tag{24}$$

$$+ \left[k_2 - \frac{1}{\omega_n^2} k_4 + - + \ldots \frac{1}{\omega_n^{n-2}} (k_n + \Delta_n) + \ldots \right] \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

Dacă $4p$ este un număr întreg şi pozitiv, atunci n poate fi scris $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$. Se vor analiza aceste cazuri.

Vitezele pentru deplasarea mesei înainte şi după discontinuitate vor fi

$$\dot{y} = -\omega_n A \sin \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t + \Sigma_n \Sigma_i (-1)^{i+2} \frac{k(n+2i)}{\omega_n^{2i}} \cdot \frac{t^n}{n!}, \tag{25}$$

$$\dot{y} = -\omega(A+\Delta A)\sin \omega t + \omega(B+AB)\cos \omega t + \left[k_1 - \frac{1}{\omega^2} k_3 + - \ldots\right] + \tag{26}$$

$$+\left[k_2 - \frac{1}{\omega^2} k_4 + \ldots - \frac{1}{\omega^{n-2}}(k_n + \Delta_n) + \ldots\right] t + - \ldots$$

Punînd $t = 0$ în ecuaţiile (23) şi (24), rezultă $\Delta A = -\frac{\Delta n}{\omega_n^n}$, iar din (25) şi (26) se obţine $\Delta B = 0$. În cazul discontinuităţilor pentru celelalte valori ale lui n considerate se obţin următoarele expresii pentru modificările amplitudinilor:

$$n = 4p \begin{cases} \Delta A = -\frac{1}{\omega_n^p} \Delta p \text{ sau } \Delta A = -\frac{\Delta_n}{\omega_n^n}, \\ \Delta B = 0, \qquad\qquad \Delta B = 0, \end{cases}$$

$$n = 4p+2 \begin{cases} \Delta A = \frac{\Delta p + 2}{\omega_n^{p+2}} \text{ sau } \Delta A = \frac{\Delta n}{\omega_n^n}, \\ \Delta B = 0, \qquad\qquad \Delta B = 0, \end{cases}$$

$$4p+1 = n \begin{cases} \Delta A = 0, \qquad\qquad \Delta A = 0, \\ \Delta B = -\frac{\Delta_{p+1}}{\omega_n^{p+1}} \text{ sau } \Delta B = -\frac{\Delta_n}{\omega_n^n}, \end{cases}$$

$$n = 4p+3 \begin{cases} \Delta A = 0, \qquad\qquad \Delta A = \text{ş}0, \\ \Delta B = \frac{\Delta_{p+3}}{\omega_n^{p+3}} \text{ sau } \Delta B = \frac{\Delta_n}{\omega_n^n}, \end{cases}$$

iar sub formă generală ele se pot scrie

$$\Delta A = \frac{\Delta_n}{\omega_n^n} \cos \omega t; \quad \Delta B = \frac{\Delta_n}{\omega_n^n} \sin \omega t$$

şi semnele corespund rezultatelor de mai sus astfel:

$$n = 0 \quad -\Delta_0 \cos \omega_n t, \qquad n = 4 \quad -\frac{\Delta_4}{\omega_n^4} \cos \omega_n t,$$

$$n = 1 \quad -\frac{\Delta_1}{\omega_n}\sin\omega_n t, \qquad n = 5 \quad -\frac{\Delta_5}{\omega_n^5}\sin\omega_n t,$$

$$n = 2 \quad \frac{\Delta_1}{\omega_n^2}\cos\omega_n t, \qquad n = 6 \quad \frac{\Delta_6}{\omega_n^6}\cos\omega_n t, \tag{27}$$

$$n = 3 \quad \frac{\Delta_3}{\omega_n^3}\sin\omega_n t, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Înaintea discontinuităţii, vibraţia naturală este

$$y_v = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t, \tag{28}$$

ar după discontinuitate

$$y_v = \left(A - \Delta_0 + \frac{\Delta_2}{\omega_n^2} - + - \ldots\right)\cos\omega_n t + \tag{29}$$

$$+\left(B - \frac{\Delta_1}{\omega_n} + \frac{\Delta_3}{\omega_n^3} - + - \ldots\right)\sin\omega_n t.$$

Rezultă ca vibraţia naturală este influenţată de mărimea şi semnul discontinuităţilor, precum şi de frecvenţa naturală a vibraţiei sistemului.

Influenţa discontinuităţilor calculată mai sus poate fi arătată şi grafic astfel:

— amplitudinea se reprezintă printr-un vector;

— termenii amplificaţi prin cosinus sînt reprezentaţi pe ordonata sistemului cartezian considerat, iar cei amplificaţi prin sinus pe abscisă

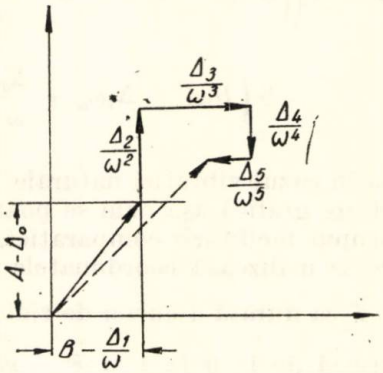


Fig. 6. — Reprezentarea grafică a influenţei discontinuităţilor.

Pentru primele cinci schimbări rezultă următoarea reprezentare grafică redată în figura 6.

Din figură rezultă o confirmare a calculului privind modificarea amplitudinii şi fazei unghiulare ca urmare a schimbărilor bruşte intervenite

în curba de profilare a camei. Modificarea acestor mărimi depinde de faza şi de amplitudinea prezente în punctul de discontinuitate.

Este de observat că, schimbînd condiţiile la limită, una dintre cele două părţi ale soluţiei este posibil să fie eliminată; de pildă, dacă vibraţia naturală este eliminată, mişcarea masei este reprezentată de soluţia particulară şi pentru $t = 0$ rezultă

$$y = (-1)^{n+2} \sum k_{2n} \frac{1}{\omega_n^{2n}},$$

$$\dot{y} = k_1 - \frac{1}{\omega_n^3} k_3 + \frac{k_5}{\omega_n^5} - \frac{k_6}{\omega_n^6} + - + \ldots \tag{30}$$

Se observă că soluţia particulară nu satisface condiţiile la limită, ea fiind divergentă şi deci este o sursă de vibraţii.

Altă cauză pentru vibraţii este diferenţa dintre soluţiile particulare de o parte şi de alta a punctului de discontinuitate.

În privinţa forţelor de vibraţie se poate afirma că sînt generate de vibraţii şi acţionează asupra curbei de ghidare, în resort şi asupra masei mobile. Această forţă suferă schimbări în punctele unde curba de ghidare sau derivatele ei sînt brusc schimbate.

Dacă $\overline{F}_{v_n}$ este vectorul care reprezintă forţa de vibraţie cauzată de schimbarea bruscă Δ_n a celei de-a n-a derivată a funcţiei y, atunci mărimea lui este $F_{v_n} = c \frac{\Delta_n}{\omega_n^n}$, însă $c = m\omega_n^2$ şi deci $F_{v_n} = m\omega_n^{2-n}\Delta_n$. De asemenea F_v mai poate fi calculată ca o forţă de inerţie a masei mobile. Astfel, după dubla derivare a ecuaţiei (29) şi amplificare cu m se obţine

$$F_v = m\left[\left(A\omega_n^2 - \Delta_0\omega_n^2 + \Delta_2 - \frac{\Delta_4}{\omega_n^2} + - + \ldots\right)\cos\omega_n t + \right.$$

$$\left. + \left(B\omega_n^2 - \Delta_1\omega_n + \frac{\Delta_3}{\omega} - + -\right)\sin\omega_n t\right] \tag{31}$$

şi, la fel ca în cazul vibraţiei naturale, schimbarea forţei de vibraţie are o reprezentare grafică aşa cum se poate vedea în figura 8.

În scopul facilitării comparaţiei, la considerarea diverselor curbe de ghidare se utilizează coordonatele adimensionale $y_e = h \cdot f_2(\xi)$, unde $\xi = \frac{t}{T}$ cu T ca durată a cursei de ridicare, iar cînd $f_2(\xi)$ variază de la 0 la 1 ξ variază de la 0 la 1 şi $F = ma\beta = mh\beta/T^2$, iar

$$T = 2\pi\lambda/\omega, \tag{32}$$

cu β şi λ ca forţă de inerţie şi perioadă adimensională, iar h este cursa de ridicare a sistemului urmăritor.

Analiza vibrațiilor și a forțelor. Se consideră pentru studiu o curbă de ghidare de tipul P.R.C. (pauză, ridicare, coborîre). Înainte de a ajunge la curba de ghidare, toate derivatele sînt nule și în acest caz

$$\Delta_0 = k_0;\ \Delta_1 = k_1;\ \ldots;\ \Delta_n = k_n,$$

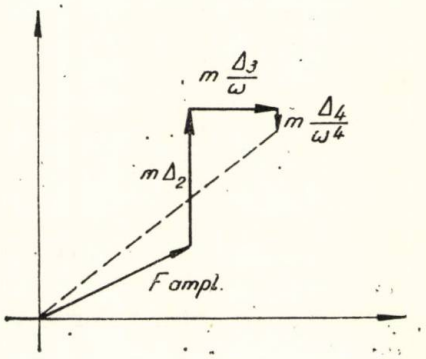


Fig. 7. — Influența discontinuităților asupra forțelor de vibrații.

și dacă se presupune că nu există vibrații naturale înaintea începerii curbei, din ecuațiile (29) și (31) rezultă

$$y_v = \left(-k_0 + \frac{k_2}{\omega_n^2} - \frac{k_4}{\omega_n^4} + - + \ldots\right)\cos\omega_n t + \left(-\frac{k_1}{\omega_n} + \frac{k_3}{\omega_n^3} - + - \ldots\right)\sin\omega_n t,$$

$$F_v = m\left[\left(-k_0\omega_n^2 + k_2 - \frac{k_4}{\omega_n^2} + - + \ldots\right)\cos\omega_n t + \left(-k_1\omega_n + \frac{k_3}{\omega_n} - \frac{k_5}{\omega_n^3} + - + \ldots\right)\sin\omega_n t\right] \tag{33}$$

sau $F_v = m\omega^2 y_v$, care, comparată cu (32), conduce la rezultatele

$$\beta_v = \frac{\omega^2 T^2}{h} y_v = \frac{(2\pi\lambda)^2}{h} y_v \text{ și } y_{v_n} = \frac{\Delta_n}{\omega_n^n} = \frac{k_n}{\omega_n^n} \tag{34}$$

Primii cinci termeni ai ecuației (33) au reprezentarea grafică redată în figura 8.

Exemplu. Se consideră curba polinomială de ghidare $y = h(10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5)$, unde valorile derivatelor se identifică ușor pentru $\xi = 0$ $k_0 = 0$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 60\ h/T^3$, $k_4 = -360h/T^4$, $k_5 = 120\ h/T^5$, iar

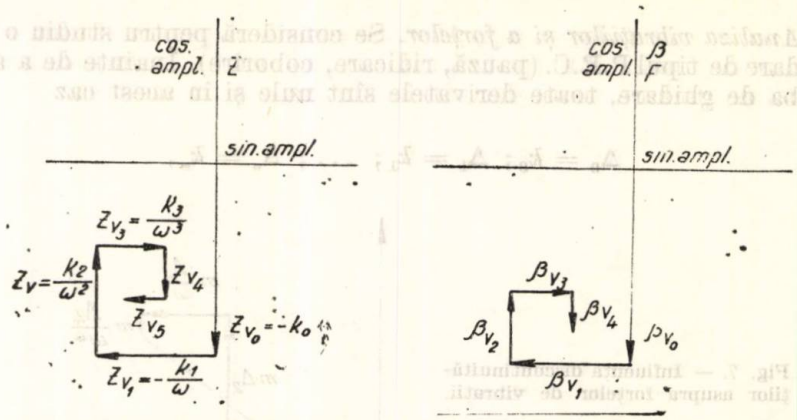


Fig. 8. — Influenţa discontinuităţilor asupra vibraţiilor libere şi a forţelor de vibraţii.

din relaţiile (34) se obţin valorile pentru vibraţiile libere şi forţele de vibraţie :

$$y_{v_0} = y_{v_1} = y_{v_2} = 0,\ y_{v_3} = 60\,h\,\frac{1}{(\omega_n T)^3},\ y_{v_4} = -\frac{360\,h}{(T\omega_n)^4},\ y_{v_5} = \frac{720\,h}{(\omega_n T)^5}$$

$$\beta_{v_0} = \beta_{v_1} = \beta_{v_2} = 0\,;\ \beta_{v_3} = 60/\omega_n T\,;\ \beta_{v_4} = -\frac{360}{(T\omega_n)^2};\ \beta_{v_5} = \frac{720}{(\omega_n T)^3}.$$

Înlocuind pe ωT prin $2\pi\lambda$ şi pentru $\lambda = 2, 4, 8, 16$, se obţin valorile a căror reprezentare grafică este redată în figura 9.

Întrucît importanţa vibraţiilor forţate şi a deplasărilor este evidentă, pentru exemplul tratat se va scrie, conform ecuaţiei (23), soluţia particulară y_p :

$$y_p = \left(k_0 - \frac{k_2}{\omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n^4}k_4\right) + \left(k_1 - \frac{1}{\omega_n^3}k_3 + \frac{1}{\omega_n^5}k_5\right)t + \left(k_2 - \frac{k_4}{\omega_n^4}\right)\frac{t^2}{2!} +$$

$$+ \left(k_3 - \frac{k_5}{\omega_n^5}\right)\frac{t^3}{3!} + k_4\frac{t^4}{4!} + k_5\frac{t^5}{5!}.$$

După înlocuirea coeficienţilor obţinuţi mai sus se obţine

$$y_p = h\left\{-\frac{360}{(2\pi\lambda)^4} + \left[-\frac{60}{(2\pi\lambda)^2} + \frac{720}{(2\pi\lambda)^4}\right]\xi + \frac{180}{(2\pi\lambda)^2}\xi^2 + \right.$$

$$\left. + \left[10 - \frac{120}{(2\pi\lambda)^2}\right]\xi^3 - 15\xi^4 + 16\xi^5\right\}$$

iar

$$\beta_p = \frac{(2\pi\lambda)^2}{h}(y_p - y_c) = 60 - \left\{-\frac{6}{(2\pi\lambda)^2} + \left[\frac{12}{(2\pi\lambda)^2} - 1\right]\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3\right\}.$$

Făcîndu-se soluţiile totale pentru vibraţii şi forţe, se obţin expresiile lor adimensionale redate în figurile 10 şi 11.

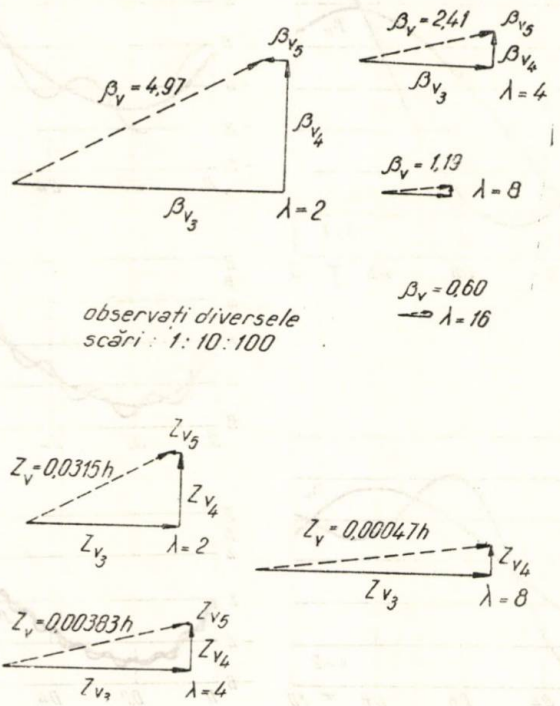


Fig. 9. — Reprezentarea grafică a vibraţiilor naturale şi a forţelor de vibraţii.

Din figură rezultă că diferenţele dintre cele două curbe descresc cu creşterea lui λ.

În cazul forţelor de vibraţie, situaţia este asemănătoare atît pentru β_v, cît şi pentru β_p. De asemenea se observă că pentru valorile lui λ consi-

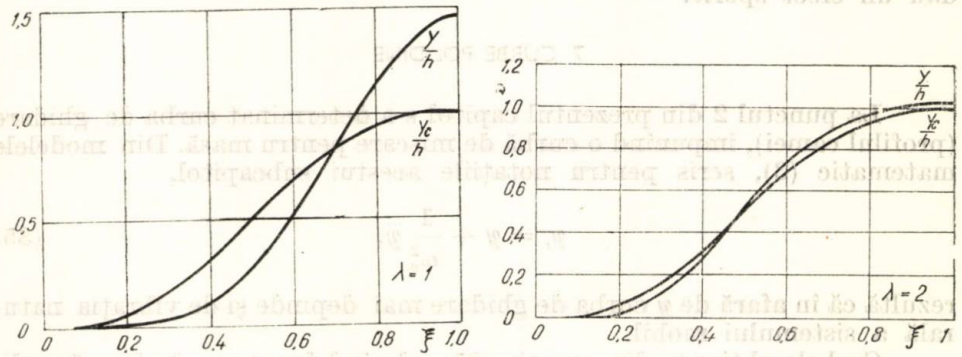


Fig. 10. — Reprezentarea curbei de ghidare şi a drumului masei.

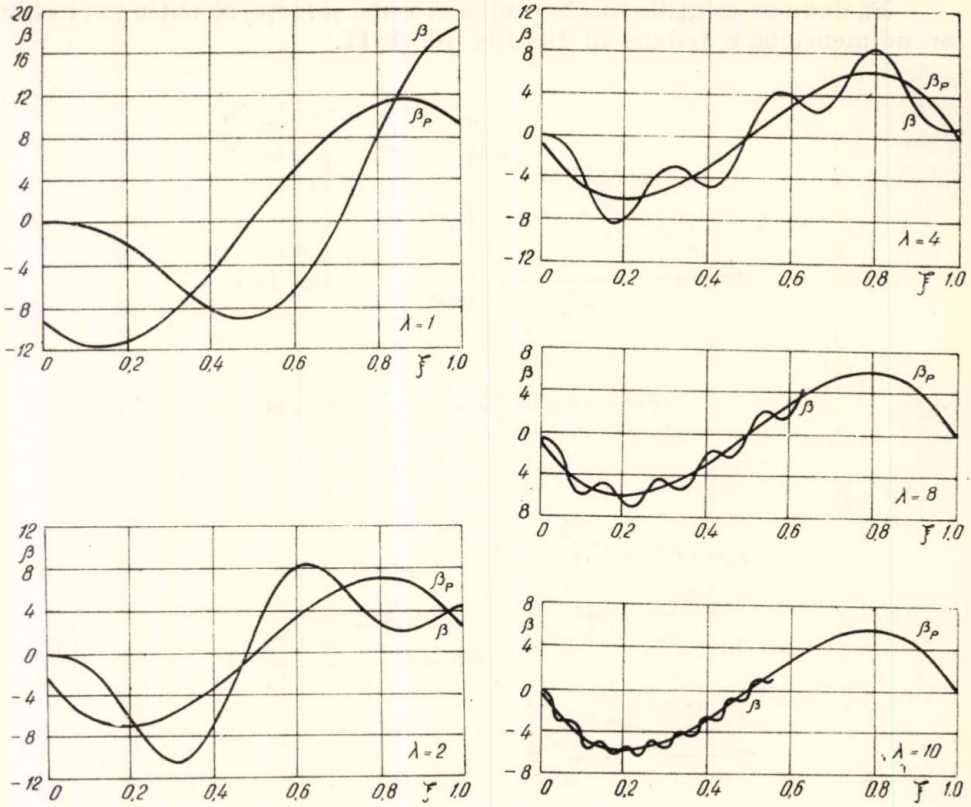


Fig. 11. — Forţele.

derate schimbarea bruscă a celei de a treia derivate dă partea principală a vibraţiei naturale şi efectul schimbării este invers proporţional cu creşterea lui λ.

Pentru valori mici ale lui λ, schimbările derivatelor de ordin superior dau un efect sporit.

7. CURBE POLIDINE

La punctul 2 din prezentul capitol s-a determinat curba de ghidare (profilul camei), impunînd o curbă de mişcare pentru masă. Din modelele matematic (3), scris pentru notaţiile acestui subcapitol,

$$y_c = y + \frac{1}{\omega_n^2}\ddot{y}, \tag{35}$$

rezultă că în afară de y curba de ghidare mai depinde şi de vibraţia naturală a sistemului mobil.

Curbele obţinute din ecuaţia (35), alegînd funcţia y de formă polinomială, se numesc curbe polidine, adică curbele polinomiale, considerînd şi proprietăţile dinamice.

Se observă că curba de ghidare căutată este dependentă de mişcarea şi de viteza curbei însăşi, deci mişcarea dorită pentru masă se obţine numai pentru o mişcare precisă a curbei de ghidare sau, dacă aceasta are o viteză constantă, numai pentru o valoare precisă a acesteia.

Rezultă deci că eliminarea vibraţiilor şi reducerea forţelor de vibraţie care apar la folosirea curbelor polidine pentru o curbă sigură sînt limitate de o curbă precisă a vitezei. De asemenea curbele polidine depind de frecvenţa vibraţiei naturale şi, prin urmare, o mişcare ideală se obţine numai atunci cînd se poate realiza o combinare specială a frecvenţei şi a curbei de mişcare. În plus, primele trei derivate ale funcţiei y trebuie să fie continue. Astfel mişcarea masei y şi primele trei derivate ale sale trebuie să fie date în punctele finale ale curbei.

Pentru a construi o curbă polidină este necesar ca curba de deplasare a masei să aibă forma polinomială

$$y = \sum \frac{1}{n!} q_n \cdot t^n, \tag{36}$$

iar din ecuaţia (35) se obţine

$$y_c = \sum_0^\infty{}_n \left(q_n + \frac{1}{\omega_n^2} q_{n+2} \right) \frac{1}{n!} t^n. \tag{37}$$

Comparînd cu ecuaţia (21)

$$y_c = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!} k_n t^n, \tag{38}$$

rezultă expresia pentru coeficientul general:

$$k_n = q_n + \frac{1}{\omega_n^2} q_{n+2}. \tag{39}$$

Vibraţiile curbelor polidine. În cazul că curba polidină lucrează sub alte condiţii decît cele pentru care s-a proectat, bunăoară o viteză diferită faţă de cea considerată la proiectare, este posibilă apariţia vibraţiilor.

Se alege deplasarea masei curba polinomială (36), din care se va calcula curba de ghidare de forma (38).

Se presupune acum că curba de ghidare, care lucrează la viteza constantă şi timpul total T, corespunde funcţiei y. Se calculează vibraţiile plecînd de la punctele de discontinuitate ale curbei sau derivatelor sale, în timp ce curba lucrează la o altă viteză constantă şi de un alt timp total τ.

În acest caz se obţine o altă funcţie de timp:

$$\bar{y}_c = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!} \bar{k}_n t^n. \tag{40}$$

Însă (38) şi (40) se mai pot scrie

$$y_c = \sum \frac{1}{n!} k_n T^n \left(\frac{t}{T}\right)^n = f\left(\frac{t}{T}\right) \text{ şi } \bar{y}_c = \sum \frac{1}{n!} \bar{k}_n \tau^n \left(\frac{t}{\tau}\right)^n = f\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad (41)$$

dar $f\left(\frac{t}{T}\right)^n$ şi $f\left(\frac{t}{\tau}\right)^n$ sînt aceleaşi funcţii, de unde rezultă $\bar{k}_n = \left(\frac{T}{\tau}\right)^n \cdot k_n$ şi în acest caz ecuaţia (40) capătă forma

$$\bar{y}_c = \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{T}{\tau}\right)^n k_n t^n, \quad (42)$$

iar dacă se înlocuieşte expresia lui k_n dată de (39) rezultă

$$\bar{y}_c = \sum \frac{1}{n!} \left(q_n + \frac{1}{\omega_n^2} q_{n+2}\right) \left(\frac{T}{\tau}\right)^n t^n. \quad (43)$$

Modificarea amplitudinii vibraţiei naturale în ipoteza că înaintea curbei de ghidare $y_c = 0$ pentru timpul total τ, conform ecuaţiei 29, se poate scrie

$$\Delta A = -k_0 + \frac{k^2}{\omega_n^2}\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - \frac{k_4}{\omega_n^4}\left(\frac{T}{\tau}\right)^4 + \dots$$

$$\Delta B = -\frac{k_1}{\omega_n}\left(\frac{T}{\tau}\right) + \frac{k_3}{\omega_n^3}\left(\frac{T}{\tau}\right)^3 - \dots \quad (44)$$

Ţinînd cont de expresia (39) şi de cerinţele impuse de continuitate ($q_0 = q_1 = 0$), apoi notînd $T/t = \varkappa$, se obţin relaţiile

$$\Delta A = \left(\frac{q_2^2}{\omega_n^2}\varkappa^2 - \frac{q_4}{\omega_n^4}\varkappa^4 + \frac{q_5}{\omega_n^6}\varkappa^6 - \dots\right)\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right),$$

$$\Delta B = \left(\frac{q_3}{\omega_n^3}\varkappa^3 - \frac{q_5}{\omega_n^5}\varkappa^5 + \frac{q_7}{\omega_n^7}\varkappa^7 - \dots\right)\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right). \quad (45)$$

Din ecuaţiile (45) rezultă că pentru $\varkappa = 1$ (adică viteza de funcţionare corespunde celei de proiectare) $\Delta A = \Delta B = 0$, adică ceea ce se şi doreşte.

Comparare între curbele polinomiale şi curbele polidine. Ecuaţia (35) poate fi rezolvată fie plecînd de la mişcarea masei (36), fie dînd curba de ghidare :

$$\bar{y}_0 = \sum \frac{1}{n!} q_n t^n. \quad (46)$$

Se pune problema comparării curbelor $y(43)$ cu y_0 (46) sub aspectul proprietăților dinamice și al amplitudinii vibrațiilor care apar cînd ambele lucrează la timpul total τ.

În același mod ca la obținerea lui (42) se obține și

$$\overline{y}_0 = \sum \frac{1}{n!} q_n \left(\frac{T}{\tau}\right)^n t^n, \tag{47}$$

iar pentru $q_0 = q_1 = 0$ și $T/\tau = \varkappa$ se obține variația amplitudinii cînd se dă curba de ghidare (47):

$$\Delta A_0 = \frac{q^2}{\omega_n^2}\varkappa^2 - \frac{q^4}{\omega_n^4}\varkappa^4 + \ldots,$$
$$\Delta B_0 = \frac{q_3}{\omega_n^3}\varkappa^3 - \frac{q^5}{\omega_n^5}\varkappa^5 + \ldots \tag{48}$$

Comparînd expresiile 45 și 48, rezultă

$$\frac{\Delta A}{\Delta A_0} = \frac{\Delta B}{\Delta B_0} = 1 - \frac{1}{\varkappa^2}. \tag{49}$$

Reprezentarea grafică a variației expresiei (49) în funcție de $\varkappa$ este redată în figura 12.

Din reprezentare rezultă că pentru $\varkappa > 0{,}707$ curbele polidine dau cele mai mici vibrații, iar pentru $\varkappa < 0{,}707$ curbele polinomiale sînt mai avantajoase.

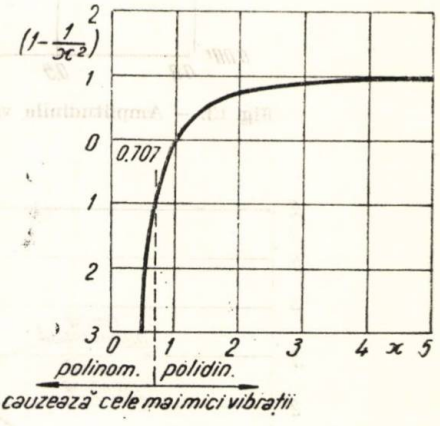


Fig. 12. — Raportul amplitudinei vibrațiilor pentru curbele polinomiale și polidine.

Exemplu. Se dă funcția $y_e = h(35\xi^4 - 84\xi^5 + 70\xi^6 - 20\xi^7)$, numită polinomială, iar funcția obținută din $y = h(35\xi^4 - 84\xi^5 + 70\xi^6 - 20\xi^7)$, conform celor arătate mai sus, se numește curbă polidină. Se cere comparația între creșterile amplitudinilor celor două curbe.

Relaţiile anterioare conduc la următoarele expresii pentru creşterile amplitudinilor :

$$\Delta A = \left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\Delta A_0 = \left(1 - \frac{1}{\varkappa^7}\right) 840\, h \left(\frac{\varkappa}{\omega_n T}\right)^4 \left[60\left(\frac{\varkappa}{\omega_n T}\right)^2 - 1\right],$$
$$\Delta B = \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)\Delta B_0 = \left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\cdot 10.080\, h \left[1 - 10\left(\frac{\varkappa}{\omega_n T}\right)^2\right]. \tag{50}$$

Înlocuind ωT cu $2\pi\lambda$, amplitudinile pot fi calculate pentru diverşi λ, iar pentru λ fixat pentru diverşi $\varkappa$.

Pentru $\lambda = 4$ şi $0 < \varkappa < 1{,}3$, rezultatele calculului sînt redate în figura 13.

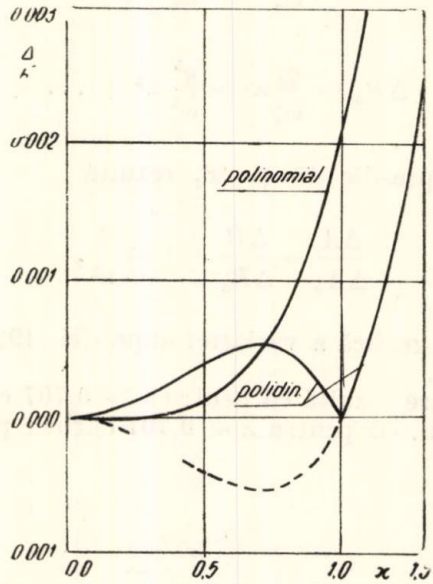


Fig. 13. — Amplitudinile vibraţiilor naturale.

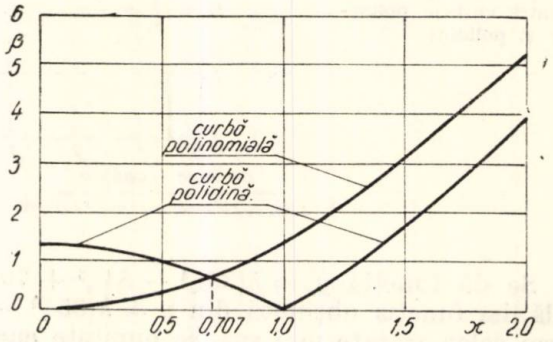


Fig. 14. — Amplitudinea forţelor de vibraţii naturale.

Amplitudinea forței este reprezentată prin factorul adimensional β și redată în figura 14 :

$$\beta = \frac{\omega^2 \tau^2}{h} \Delta = \frac{\omega_n^2 T^2}{\varkappa^2} \cdot \frac{\Delta}{h}, \tag{51}$$

unde Δ reprezintă amplitudinea rezultantă

Observații. Ecuațiile obținute dau rezultate finite numai în următoarele cazuri :

— dacă seriile lui y sînt finite ;

— dacă seriile lui y sînt infinite, dar seriile lui y_e sînt uniform convergente ;

— dacă y_e nu este uniform convergentă, iar numărul derivatelor schimbate este finit ;

— dacă y_e nu este uniform convergentă și numărul derivatelor este infinit, dar soluția particulară este uniform convergentă.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Anderson G. D., *Cam dynamics*, Prod. Eng., *24*, 170 (1953).
2. Barkan P., *Calculations of high-speed valve motion with flexible-overhead linkage*, Trans. SAE, *61*, 687 (1953).
3. — *Spring-driven cam systems*, Mach. Des., **31** (1959).
4. Barrata F. I., J. I. Blum, *When will a cam follower jamp*, Prod. Eng. *25*, 156 (1956).
5. Bilaisis V., *Modified-trapezoid cam profiles*, Mach. Des., *22* (1957).
6. Charles B. H., *Design equations and graphs for finding the dynamic response of cycloidal motion cam systems*, Mach. Des., feb. (1961).
7. Crossley F.R.E., *Dynamics in machines*, New York, 1954.
8. — *Dynamic mechanisme and non linear control-systems*, Proc. Int. Conf. for Teachers of Mechanism, Yale Univ., 1961, p. 123—140.
9. Dudley W. M., *New methods in valve cam design*, Trans. SAE, *1* (1958).
10. Edwards E. A., *Analysis of mechanisms with high-speed Photography*, Mach. Des., *26*, (1954).
11. Edgar S., *Continuous Cam curves*, Mach Des., *1* (1960).
12. Ferdinand F., *On the dynamics of high-speed cam profiles*, International JMS, july 1960.
13. Feldinger M., *Problems of high-speed cam drivers and spring surge*, Eng. Digest, **17**, *4* (1956).
14. Gagne jr. A. F., *Design of high-speed cams*, Mach. Des., **22**, *7* (1950).
15. Gutman A. S., *Cam dynamics*, Mach. Des., **23**, *3* (1951).
16. Garret R. E., *Force cams*, Mach. Des., *19*, 174—176 (1962).
17. Geronimus Ia. L., *Dinamiceskii sintez mehanizmov po Cebîşevu*, Harkov, Izd-vo Universiteta, 1958.
18. Hrones J. A., *Dynamics forces in a cam-driven system*, Trans. ASME, *70*, 467 (1950).
19. — *Dynamics forces in cam mechanisms*, Mach. Des., *1* (1948).
20. Ivar S. S., *The influence of cam curve derivative steps on cam dynamical properties*, Trans. of Chalmares University of Technology Gothenburg, Sweden, 1961.
21. Ionușas P. A., *K voprosu iznosu profilia kulacika*, Tr. litov. AN SSR, 1958.
22. Johnson R. C., *Method of finite differences of cam design*, Mach. Des., **27**, *11* (1955).
23. — *Cam Mechanisms*, Mach. Des., **28**, *2* (1956).
24. — *Cam dynamics*, Mach. Des., **29**, *3* (1957).
25. — *Method of finite differences in cam design*, Mach. Des., **29**, *23*, 159—161 (1957).
26. — *Dynamic analysis of cam mechanisms*, Trans. 5-a. Conf. on mechanisms, Cleveland, 1958.
27. — *A simple numerical method for dynamic analysis and design of flexible cam mechanism*, Mach. Des., sept. 1959.

28. JOHNSON R. C., *The dynamic analysis and design of relatively flexiblecam mechanisms having more than one degree of freedom*, ASME-paer 58-A-192, seria B.J. Eng. f. Industry (Trans. ASME), B**81**, *4*, 323–331 (1959).
29. — *How profile errors affect cam dynamics*, Mach. Des., *2* (1959).
30. JANSSEN B., *Forțe cu acționare reciprocă în mecanisme cu came*, Ind. Anz. *101* (1966).
31. KOBRINSKI A. E., *Vlianie uprugosti zveniev na kinematiku gazoraspredileonaia*, în *Trudi seminara* TMM, vol. *4*, 1947.
32. — *Vlianie uprugosti zveniev na kinematicu nekatorîh kulacikobîh mehanizmov*, Moscova, Oboronghiz, 1948.
33. — *Mehanizmi s uprughimi sviazami. Dinamika i ustoicivosti*, Moscova, „Nauka", 1964.
34. KENNISON G. F., *Cycloidal Motion cams*, Mach. Des., ian. 1956.
35. KURZ D., *Entwurf und Berechnung ruckfreier Nochen*, ATZ, *11* (1954).
36. KRASNIKOV V. F., *Teoreticeskoe i experimentalinoe isledovanie kulacikoboe mehanizma s ucetom tocinosti ego izgotovlenia*, Mașinovedenia, *1* (1965).
37. KOJEVNIKOV S. N., *Dinamika mașinî s uprughimi zveniami*, Kiev, Izd. AN SSSR, 1961.
38. KLOOMOK M., R. V. MUFFLY, *Plate cam design with emphasis on dynamic effectes.*, Product. Engng., **26** (1955).
39. — *Plate cam design, evaluating dynamic loads*, Product. Engng., **27** (1956).
40. LEVITSKI I. N., *Kulacicovoe mehanizmî*, Izd. Mașinostroenie, 1964.
41. MALAROVA V. M., *Dinamika kulacikovîh mehanizmov*, Trudî Sibirskovo matalurg. in-ta, *4A* (1957).
42. MANGERON D., C. DRĂGAN, *Studiul problemelor de sinteză a mecanismelor cu came plane prin metoda tensorială*, Buletinul Inst. polit. Iași, **IV** (1958).
43. MUNTEANU O., *Contribuție la studiul analitic al camelor cu tachet prevăzut cu o talpă plană*, Rev. Univ. „Al. I. Cuza" și a Inst. polit. Iași, **I** (1954).
44. MITCELL D., *Experimentalnoe isledovanie dinamiki ploskih kulacikovîh mehanizmov*, în *Prikladnaia mehanika i Mașinostroenie*, nr. 2, Izd-vo inostr. lit., 1952.
45. MÜLER J., *Isledovanie vlianiа șablonov dlea izgotovlenia kulacikov na dinamiceskie haracteristiki kulacikovîh mehanizmov*, Fertigungstechnik und Betrieb, *1* (1965).
46. MATVEEV K. K., *Nekotoroe voprosî tocinosti kulacikovîh mehanizmov povorota*, Vestnik mașinostroenia, *8* (1963).
47. NEKLUTIN N. C., *Designing cams for controlled inerția and vibration.*, Mach. Des., iunie 1950.
48. — *Vibration Analysis of cams*, Mach. Des., dec. 1954.
49. PELECUDI CHR., I. SAVA, *Asupra analizei și sintezei unitare a mecanismelor cu cuple superioare*, St. cerc. mec. apl., *3* (1966).
50. — *Legile generale ale mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., *4* (1966).
51. — *Asupra analizei și sintezei mecanismelor cu came*, Construcția de mașini, *8–9* (1967).
52. — *Optimizarea legilor de funcționare ale mecanismelor de distribuție*, St. cerc. mec. apl., *3* (1968).
53. — *Optimizarea numerică a legilor de mișcare la mecanismele cu came*, Conf. TMM, Magdeburg, 1968.
54. ROTHBART H. A., *Cams.*, New York, 1956.
55. TUTUNARU D., *Mecanisme cu came*, București, Edit. tehnică, 1959.

A 10-A CONFERINŢĂ DE MECANICĂ A ASOCIAŢIEI AMERICANE A INGINERILOR MECANICI

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Între 7 şi 9 octombrie 1968 a avut loc „A 10-a Conferinţă de mecanisme" la Institutul tehnologic din Atlanta — Georgia (S.U.A.), sub organizarea profesorului F. R. E. Crossley.

Subiectele lucrărilor au făcut parte din mai multe cîmpuri de cercetare al marelui domeniu al mecanismelor. Ea a strîns împreună ingineri şi oameni de ştiinţă care au discutat noi teorii, noi proiecte şi noi metode pentru utilizarea camerelor şi roţilor dinţate, mecanismelor cu bare articulate şi alte dispozitive mecanice şi pentru clarificarea proprietăţilor lor cinetice şi cinematice. Se pot reaminti următoarele secţiuni ale conferinţei : cinematica spaţială ; constrîngeri spaţiale ; sinteza plană ; traiectorii spaţiale ; mecanisme cu intrări multiple ; analiza mecanismelor spaţiale ; practica şi problemele proiectării ; mecanisme patrulatere pentru aproximarea liniei drepte ; echilibrarea mecanismelor ; dinamica mecanismelor spaţiale ; mecanisme cu şase bare ; aplicaţiile calculatoarelor ; mecanisme cu roţi ; sinteza spaţială ; mecanisme speciale.

Peste 70 de lucrări au fost prezentate şi circa 230 de participanţi au fost înregistraţi. A avut un caracter internaţional prin participarea oamenilor de ştiinţă din Germania, Uniunea Sovietică, România, Bulgaria, Japonia, Olanda etc.

Comitetul de pregătire pentru constituirea şi elaborarea statutului noii federaţii internaţionale a teoriei maşinilor şi mecanismelor a avut şedinţe în timpul conferinţei. Au fost prezentate două propuneri de statute şi de dezvoltare a acestei federaţii : una de I. I. Artobolevski, care a fost iniţiată la conferinţa din Bulgaria, alta de F. R. E. Crossley. Ambele vor fi studiate de diferiţi oameni de ştiinţă şi vor fi prezentate, cu îmbunătăţirile necesare, la Conferinţa internaţională din Polonia, care va avea loc anul acesta. Pare mai indicat ca în locul numelui de „Federaţia pentru teoria maşinilor şi mecanismelor" să se adopte fie numele de „Federaţia pentru teoria şi aplicaţia mecanismelor", fie „Federaţia pentru mecanica maşinilor şi mecanismelor".

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 5, 1969, P. 1245—1257

Toate lucrările conferinței au fost tipărite cu ajutorul Asociației americane a inginerilor mecanici (ASME) și au putut fi procurate înainte sau în timpul conferinței. Aceasta a permis participarea la discuții ample, ceea ce a condus la o mai bună înțelegere a diferitelor lucrări. Programul cultural, ca și cel pentru femei, a fost aranjat de corpul profesoral al Institutului tehnologic din Atlanta-Georgia.

Conferința a marcat o nouă etapă în dezvoltarea viitoare a cercetării mecanismelor, utilă industriei și mecanizării. Pentru excelenta sa organizare și desfășurare, meritul revine profesorului F. R. E. Crossley, Institutului tehnologic din Atlanta Georgia și Asociației ASME.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1969

DIN PROBLEMATICA DE MECANICĂ A CONFERINŢEI SOCIETĂŢII NAŢIONALE DE MATEMATICĂ INDUSTRIALĂ ŞI APLICATĂ (SIAM)

(11—14 IUNIE 1968 TORONTO-ONTARIO, CANADA)

de D. MANGERON
Institutul politehnic Iaşi

Conferinţa naţională din 1968 a Societăţii de matematică industrială şi aplicată (SIAM), desfăşurată la Toronto între 11 şi 14 iunie, centrîndu-şi lucrările în jurul unui vast simpozion consacrat problemelor de optimizare şi activităţilor în cadrul secţiilor de programare, statistică şi analiză numerică, a avut şi un adînc conţinut de mecanică aplicată.

După expunerile preşedintelui SIAM, acad. Garrett Birkhoff. şi a cunoscuţilor specialişti George D. Dantzig şi M. I. D. Powell, consacrate respectiv prezentării rezultatelor de seamă în domeniul matematicii aplicate realizate în 1968 şi trecerilor în revistă a teoriei optimizării şi a metodelor de optimizare fără constrîngeri, ţinute în cadrul unor şedinţe plenare, în lucrările pe secţii s-au prezentat următoarele lucrări interesînd îndeaproape mecanica aplicată.

1. D. Mangeron (Institutul politehnic Iaşi) şi M. N. Oğuztöreli (Universitatea din Alberta) expun, referent fiind primul dintre autori, optimizări în studiul referitor la modele matematice ale fenomenelor polivibrante. Interesul deosebit faţă de problematica expusă a fost arătat atît de preşedintele acad. G. Birkhoff, care a şi folosit în lucrările sale cu totul recente „ecuaţii Mangeron", cît şi de reprezentanţi ai şcolii renumite de cercetări în domeniul matematicii şi mecanicii aplicate, îndeosebi a biomecanicii, condusă de R. Bellman.

2. H. M. Hung (Universitatea din Toronto) prezintă problema de ghidare optimală în timp a unui vehicul terestru.

3. G. W. Kimble (Universitatea din Nevada) expune problema optimizării traiectoriei unui vehicul catapultat.

4. W. Powers (Universitatea din Michigan) aplică în analiza optimală a traiectoriilor spaţiale transformări canonice omogene.

5. M. Z. v. Krzywoblocki (Universitatea de stat din Michigan), continuîndu-și seria de lucrări publicate în ultimii ani în „Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de Méchanique Appliquée" și în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", dezvoltă o documentată problematică relativă la optimizare și teoria informației.

6. E. Reissner (Institutul de tehnologie din Massachusetts) trece în revistă stadiul actual al metodelor variaționale în teoria elasticității. Vastă documentare a autorului prezintă cele mai recente rezultate, începînd cu extinderile cu totul recente datorite acad I. N. Vekua (Tbilisi) și terminînd cu aplicații ale programării dinamice în acest domeniu, realizate de R. Bellman și de școala sa.

7. W. V. R. Malkus (Universitatea din California) trece în revistă ansamblul de procedee variaționale actuale de investigație în studiul dinamicii fluidelor. Și în acest caz referentul își permite să sublinieze deosebita satisfacție pe care a resimțit-o văzînd că autorul prezintă cele mai recente rezultate, începînd cu cele datorite acad. Elie Carafoli, oprindu-se în particular asupra teoriei jeturilor, publicată în parte și în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", ca urmare a conferințelor ținute acolo de către ilustrul savant român, și terminînd cu ciclul de articole recente inserate în noua revistă „Journal of Fluid Dynamics", consacrate subiectului lucrării sale.

8. H. J. Finberg (Adelphi University) prezintă rezultatele calculelor executate la o modernă MEC I.B.M. 1720, referitoare la studiul vibrațiilor unei corzi neliniare.

9. J. T. Fleck și D. B. Larson (Laboratorul de aeronautică al Universității Cornell) identifică parametrii unui avion prin metoda cvasiliniarizării, elaborată de R. Bellman și de școala sa. Referentul subliniază în această ordine de idei o lucrare de bază publicată de R. Bellman și S. Dreyfus în „Buletinul Institutului politehnic din Iași".

10. M. R. Scott (Sandia Corporation), L. F. Shampine și G. M. Wing (Universitatea din New Mexico) expun problema implîntării invariante în legătura cu calculul spectrelor sistemelor lui Sturm-Liouville. Cu acest prilej, la discuții se subliniază posibilitatea de extindere a rezultatelor obținute de autori la prototipul ecuațiilor „polivibrante", pentru care D. Mangeron a determinat la timpul său soluții spectrale și a realizat dezvoltări în serii de autofuncții, utile în teoria și practica problemelor de fizică matematică.

11. W. Prager (Universitatea din California), urmînd șirul de lucrări proprii cu totul recente și ale școlii sale, expuse în parte în Trans. ASME, martie 1968, și Appl. Mech. Rev., oct. 1968, prezintă documentat și creator problema optimizării în proiectarea structurilor.

12. Y. C. Ho (Universitatea Harvard), luînd ca punct de plecare șirul de rezultate fundamentale în domeniul jocurilor diferențiale, cristalizat recent de autorul lor în volumul *Jocuri diferențiale* de R. Isaacs, și ținînd seama și de valoroase contribuții în domeniu publicate de acad. L. S. Pontreaghin în DAN SSSR, expune un număr de probleme deosebit de interesante privitoare la jocuri diferențiale deterministe și stohastice.

13. C. S. Holling (Universitatea din Colubia Britanică), ținînd seama de vasta documentare în problemele biomecanicii expusă în „Applied Mechanics Reviews", **21**, *1* (1968) de Yuan-Cheng B. Fung de la Universitatea din California de Sud, prezintă noi modele matematice interesînd procese ecologice.

14. R. K. Mehra (The Analytical Sciences Corporation) și A. E. Bryson, Jr. (Universitatea Harvard) expun metoda conjugată a gradientului și fac o serie de aplicații la optimizarea traiectoriilor de zbor.

15. C. A. Schaffner și H. A. Krieger (Institutul tehnologic din California) elaborează o optimizare globală în mulțimi de semnale incoerente din punctul de vedere al fazei.

16. J. F. Schipper (Aero-Jet General) calculează hamiltonianul pentru interacțiunea relativistă a sistemelor electromagnetice de particule.

17. G. Zoutendijk (Universitatea din Leida) prezintă, după expunerea celor mai recente rezultate în domeniul programării neliniare, un număr de exemple interesînd mecanica și economia.

18. M. L. Juncosa (The RAND Corporation) expune rezultatele studiilor sale referitoare la rațiile de schimb dintre curenți și fluide produse sub unghiuri arbitrare.

Participanții la conferință și-au putut lărgi orizontul și iniția sau întări colaborări științifice noi și vechi, grație unei bune organizări a timpului de lucru, a ședințelor pe secții intercalate cu întruniri libere pe domenii de interese, pentru discuții în specialitate. O bogată expoziție de publicații de matematică și de mecanică și seriile de reviste ale SIAM au permis tuturor celor interesați să se documenteze din plin. La locul de cinste au fost expuse la expoziție și ultimele volume din „Revue roumaine des sciences techniques", série de mécanique appliquée și „Buletinul institutului Politehnic din Iași", aduse din patrie de către referent.

Primită la redacție la 24 decembrie 1968

DIN PROBLEMATICA DE MECANICĂ APLICATĂ EXPUSĂ LA CONFERINŢA DE TEORIE CALITATIVĂ A ECUAŢIILOR NELINIARE DIFERENŢIALE ŞI INTEGRALE

(UNIVERSITATEA DIN WISCONSIN, MADISON, 19—23 AUGUST 1968)

de D. MANGERON
Institutul politehnic Iaşi

În cadrul Conferinţei de teorie calitativă a ecuaţiilor neliniare diferenţiale şi integrale, la care s-au prezentat expuneri importante de sinteză, ca de exemplu acelea datorite lui C. Corduneanu (Iaşi) şi L. Cesari (Ann Arbor, Mich.) sau K. Hale (Brown University), s-au dezbătut şi numeroase cercetări originale, interesînd îndeaproape şi problematica de mecanică aplicată. Astfel de pildă:

1. S. P. Hastings (Universitatea din Dundee, Scoţia) expune teorema de existenţă pentru sistemul diferenţial

$$f_1''' + f_1''(f_1 + cf_2) + (1 - f_1'^2) = 0,$$

$$f_2''' + f_2''\left(\frac{f_1}{c} + f_2\right) + (1 - f_2'^2) = 0,$$

$$f_i(0) = f_i'(0) = 0,\ f_i'(\infty) = 1, \quad i = 1, 2,$$

care modelează curgeri tridimensionale în apropiere de punctul de stagnare (teoria stratului-limită).

2. D. Mangeron (Iaşi) şi M. N. Oğuztöreli (Universitatea din Alberta) prezintă un şir de probleme optimale şi de contur referitoare la diferite tipuri de ecuaţii „polivibrante", numite de diferiţi cercetători şi oameni de ştiinţă, ca de ex. acad. Garrett Birkhoff şi W. Gordon „ecuaţii Mangeron" şi aplicate în diferite domenii tehnice, ca, de pildă, proiectarea automată grafică a formelor libere de suprafeţe.

3. S. Kaniel (Universitatea evreiască din Ierusalim) determină, în cadrul aproximațiilor de ordin superior, o unică soluție generalizată a ecuațiilor lui Navier-Stokes în cazul tridimensional al mișcării unui fluid vîscos incompresibil (tensor de deformație general neliniar).

4. D. Sattinger (Universitatea din California, Los Angeles) prezintă soluția ecuației lui Schrödinger

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (E - V)\, \psi = 0,$$

care, privită ca o ecuație diferențială cu parte principală mică (datorită micimii constantei lui Planck $\hbar$), permite să se interpreteze soluția găsită sub forma de serie asimptotică drept emisie cuantică a unei particule într-un potențial central.

5. M. S. Berger (Universitatea din New York, Institutul „R. Courant") extinde, cu prilejul demonstrației de existență a familiei globale de soluții periodice pentru sisteme hamiltoniene de forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \dot{x}_i\, \dot{x}_j$ fiind o formă pătratică definită pozitivă în $(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ și $U = U(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție de clasă C^2 în $(x_1, \ldots, x_n)$ cu grad $U(0) = 0$, un rezultat al lui Leapunov la cazul de „rezonanță".

6. W. G. Vogt, M. Eisen și Gabe Buis (Universitatea din Pittsburgh) stabilesc condițiile necesare și suficiente de stabilitate Leapunov pentru un anume tip de ecuații cu derivate parțiale și aplică apoi rezultatele obținute la determinarea condițiilor de stabilitate pentru ecuația undelor de amortizare.

7. U. D'Ambrosio (Universitatea din Rhode Island) consideră sisteme dinamice cu memorie și definește noțiunile de mișcare, traiectorie și șir invariant referitoare la atare sisteme.

8. B. J. Matkowsky (Rennselaer Polytechniec Institute) studiază pe baza unei modelări matematice adecvate, cristalizată într-o problemă de contur neliniară cu anume condiții inițiale și de contur, stabilitatea unui strat fluid încălzit de jos (problema clasică a lui Bénard).

9. K. Meyer și J. Palmore (Universitatea din Minnesota) demonstrează existența unor soluții periodice în problema a trei corpuri și stabilesc că atare soluții pot fi considerate ca aparținînd la o familie de soluții periodice care unesc cele două centre ce emană din punctele de librație ale lui Lagrange și au fost prezise de teorema centrului a lui Leapunov.

10. R. Easton (Brown University) discută curgerea în vecinătatea unui punct degenerat critic al unui sistem hamiltonian și demonstrează existența unui șir mărginit invariant situat pe suprafețe de energie ce trec aproape, însă nu chiar prin punctul critic.

11. J. Dettman (Oakland University) demonstrează, de exemplu, că soluția unei probleme a lui Cauchy pentru ecuația căldurii poate fi scrisă ca o transformată Laplace a soluției unei probleme corespunzătoare a lui Cauchy pentru ecuația undelor. Soluția într-un semiplan a problemei lui Dirichlet poate fi scrisă ca transformata lui Laplace a soluției problemei lui Cauchy pentru ecuația căldurii sau ca o transformată Poisson a soluției problemei lui Cauchy pentru ecuația undelor. Atare relații tind să micșoreze, așa cum sublinia referentul la cel de-al IV-lea Congres a matematicienilor români (27 mai—4 iunie 1956) cu prilejul expunerii lucrării sale *Teoria unitară a sistemelor liniare cu derivate parțiale de ordin superior*, importanța clasificării în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale.

Referentul subliniază vaste posibilități de adîncire a colaborării științifice oferite de diferite congrese sau conferințe de specialitate. Astfel, de exemplu, în cadrul lucrărilor Conferinței de la Madison aici analizată, referentul a avut prilejul să perfecteze jaloanele unor noi lucrări în colaborare cu prof. dr. Emilio O. Roxin și să expună, dat fiind interesul arătat de numeroși cercetători în vederea aplicațiilor ulterioare, unele rezultate proprii colegilor americani prof. dr. V. Lakshmikantham, K. Hale, L. Cesari, J. A. Nohel ș.a.

Primită la redacție la 19 decembrie 1968

DIN PROBLEMATICA DE MECANICĂ A CONGRESULUI ESTIV ANUAL AL SOCIETĂŢII MATEMATICE AMERICANE ŞI AL ASOCIAŢIEI DE MATEMATICĂ DIN AMERICA

(27—30 AUGUST, 1968, MADISON, WISCONSIN)

D. MANGERON
Institutul politehnic Iaşi

În cadrul celor peste 200 de lucrări de specialitate prezentate şi dezbătute la Congresul estiv anual al Societăţii matematice americane şi al Asociaţiei de matematică din America, aceasta din urmă promovînd îndeosebi cercetări în domeniul metodologiei şi didacticii ştiinţelor matematice, tematica unui număr îndeajuns de mare este legată sau se referă nemijlocit la variate probleme de mecanică. Referentul indică mai jos foarte succint conţinutul unora dintre lucrările prezentate la congres care răspund la această ordine de idei.

1. K. L. Arora (Panjab Engineering College, Jullundur, India) şi P. R. Gupta (D. A. V. College, Chandigarh, India) studiază curgerea magnetohidrodinamică datorită unui plan infinit oscilant supus la un cîmp transversal magnetic. În prima parte fluidul se extinde la infinit, pe cînd în partea a doua el este mărginit de două plane izolatoare, unul oscilant şi altul fixat. Se neglijează efectul disipativ al viscozităţii în comparaţie cu acela al conductivităţii infinite.

2. W. R. Callahan (St. John's University, Jamaica), utilizînd teoria elaborată de Reissner, Mindlin şi Uflyang, expune modurile de vibraţie ale unei plăci infinite de grosime h în formă de un sector circular. Soluţia modelului matematic al problemei considerate, scrisă în coordonate cilindrice, se determină ţinîndu-se seama de toate cele opt condiţii de contur precizate în teoria respectivă.

3. A. A. Kayande şi M. Rama Mohana Rao (University of Rhode Island), ţinînd seama de consideraţiile practice care au determinat pe Weiss şi Infante (în Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **54**, 44—48, 1965) să introducă noţiuni de stabilitate pentru un timp finit, enunţă principiu de comparaţie şi teoreme inverse pentru stabilitate în timp finit. Aici se

găsesc extinderi ale unor rezultate ce se află în volumul lui Hahn, *Stability of motion*, Berlin, Springer-Verlag, 1967, sau în lucrarea cu totul recentă a lui Weiss (SIAM Control, sub tipar).

4. D. Mangeron (Institutul politehnic din Iaşi) şi M. N. Oğuztöreli (Universitatea din Alberta), luînd ca punct de plecare diferite extinderi ale rezultatelor primului dintre autori referitoare la ceea ce acad. G. Birkhoff, W. Gordon ş.a. (J. Approximation Theory, 1968) le-au numit „ecuaţii Mangeron", studiază, folosind programarea dinamică, problema de optimizare în sisteme de control cu parametri distribuiţi, aplicînd apoi rezultatele obţinute la prototipul ecuaţiilor introduse de D. Mangeron şi numite de el „polivibrante", şi anume $[A(x)u' + aB(x)u]' + a[B(x)u' + C(x)u] = 0$, $u' = \partial^m u/\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $u_{FR} = 0$, $R = [a_i \leqslant x_i \leqslant b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Menţionăm că acad. R. Bellman şi şcoala sa s-a interesat şi se interesează îndeaproape de rezultatele obţinute în această ordine de idei.

5. D. C. Barnes (Washington State University, Pullman, Washington) determină, indicînd o metodă generală, limite pentru cele mai mari autovalori ale unui sistem vibrant.

6. H. D. Sullivan (Eastern Washington State College, Cheney, Washington), luînd în consideraţie lucrarea de sinteză a lui D. Bushaw *Polisisteme dinamice. O trecere în revistă* (Proc. U. S.-Japan Sem. Differential and Functional Equations), introduce structurile temporale în polisisteme abstracte. Cu toată aparenta depărtare a acestei problematici de domeniul mecanicii aplicate, referentul socoate lucrarea interesantă din diferite puncte de vedere teoretice.

7. C. P. Tsokos (University of Rhode Island), studiind unele procese mecanice stohastice, ajunge la modelări matematice sub forma de ecuaţii integrale stohastice de tipul lui Volterra.

8. P. K. Kulshrestha (Louisiana State University, New Orleans, Louisiana) studiază oscilaţii aproape sinusoidale într-un gaz plin de praf. Spaţiul corespunzător se consideră semiinfinit, situat deasupra unei frontiere plane.

9. L. Linnstaedter (Vanderbilt University, Nashville, Tennessee) prezintă rezultate interesante în domeniul calculului multietajat al problemelor variaţionale. Constrîngeri diferenţiale pot fi diferite şi într-un număr diferit pentru fiecare etaj în parte, fapt care dă o flexibilitate de adaptare a teoriei la variate probleme de mecanică şi de tehnică.

10. D. R. Childs (General Dynamics, Quincy, Massachusetts) determină soluţii riguroase ale ecuaţiei monoenergetice de transport. Ţinîndu-se seama de modelarea matematică respectivă, soluţiile găsite conţin funcţii Bessel de ordin $\frac{1}{2}$ şi de argument (ar) şi ecuaţia pentru autovaloare este identică cu aceea găsită de autor în prima parte a lucrării sale (Notices of the American Mathematical Society, *15*, 1968, p. 638). Soluţiile conţin de asemenea polinoamele lui Legendre de prima şi a doua specie.

11. Hiroshi Uehara şi J. E. Dowdy (Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma) determină unele extensiuni ale rezultatelor lui Y. Give (Math. Systems Theory, *1*, 1967, p. 67—78) referitoare la sisteme de tranziţie.

12. K. A. Zischka (University of Windsor, Windsor, Ontario) prezintă o formă integrală pentru ecuația lui Boltzmann referitoare la transportul neutronilor considerați ca celule finite.

13. Elliot Winston (University of Maryland, College Park, Maryland), situîndu-se în cadrul fenomenelor care răspund la modele matematice cu argument întîrziat, demonstrează unicitatea soluției zero pentru o anume ecuație neliniară cu argument întîrziat.

14. Jerome Eisenfeld (Renssellaer Polytechnic Institute, Troy, New York) stabilește un criteriu de tip Schwarzschild referitor la stabilitatea unei atmosfere stratificate orizontal. Aparatul matematic de investigație relativ la spații funcționale este folosit cu prilejul rezolvării unei probleme de autovalori în care parametru intră neliniar.

Condițiile de lucru în timpul congresului, desfășurat ca și Conferința de metode computaționale în ecuații diferențiale și integrale (19—23 august 1968), descrisă parțial într-o altă notă în această revistă, au fost deosebit de prielnice, deoarece Institutul de matematică „Van Vleck Hall" al Universității din Wisconsin este o clădire modernă cu multe etaje, care domină cele patru lacuri ce înconjoară Madisonul.

Primită la redacție la 24 decembrie 1968

RECENZII

T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, XX+592 p. cu 3 fig., 1966. Cloth DM 79.20 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 132)

În lumea ştiinţifică, teoria perturbaţiilor se referă, de regulă, la dinamica analitică, îndeosebi la mecanica cerească sau la mecanica neliniară a vibraţiilor. În acest volum, de prezentare tradiţională excelentă datorită editurii ştiinţifice Julius Springer, „teoria perturbaţiilor" se referă la „teoria perturbaţiilor pentru operatori liniari". În toate cazurile, atare teorie se bazează pe ideea de studiu al unui sistem puţin deviat faţă de un sistem simplu idealizat pentru care se cunoaşte soluţia completă a problemei luate în studiu; însă problemele tratate în cadrul fiecărei teorii a perturbaţiilor şi mijloacele folosite sînt esenţial diferite. În consecinţă, teoria perturbaţiilor pentru operatori liniari este complet independentă de celelalte teorii ale perturbaţiilor.

Volumul analizat este de un deosebit folos pentru oamenii de ştiinţă şi cercetători, atît matematicieni, cît şi mecanicieni şi fizicieni.

Teoria perturbaţiilor pentru operatori liniari constituie un ansamblu de rezultate privitoare la teoria spectrală a operatorilor liniari, iniţiată magistral de Rayleigh şi de Schrödinger.

Ca şi în alte domenii în dezvoltare vertiginoasă astăzi, ca, de exemplu, calculul numeric sau calculul variaţiilor, bazele teoretice ale teoriei aparţin analizei funcţionale. Autorul*), avînd în vedere faptul că volumul elaborat este destinat în bună parte mecanicienilor şi fizicienilor introduce date de analiză funcţională treptat, cu claritate deosebită, aşa încît în fond cititorul, este rugat să aibă iniţiere necesară doar în algebra liniară şi analiza reală şi complexă.

Expunerea subiectului este precedată de un istoric al teoriei, iar cele zece capitole ale lucrării încep printr-un rezumat foarte util. O vastă bibliografie, prezentată separat pentru articole de revistă şi pentru cărţi şi monografii, urmată de indice de simboluri folosite, indice de nume şi indice de materii, ridică şi mai mult valoarea volumului şi subliniază grija minuţioasă de execuţie, caracteristică specialiştilor japonezi, faimoşi astăzi în lumea întreagă pentru „miniaturizare" şi execuţie perfectă.

Referentul, subliniind îndeosebi contribuţiile lui N. Aronszajn, M. Sh. Berman, K. O. Friedrichs, D. Huet, M. G. Krein, S. T. Kuroda, C. R. Putman, F. Rellich, F. W. Schäfke, St.-Nagy B. ş. a. incluse în volum, paralel cu bogata contribuţie, reflectată într-o mare serie de lucrări publicate în reviste de specialitate în ultimele două decenii datorită autorului lucrării, prof. Tosio Kato, se mărgineşte de a da aici doar titlurile capitolelor incluse în volum, fiind

*) Profesor la Universitatea din California (Berkeley).

sigur că cei interesaţi îl vor consulta şi studia fără zăbavă : 1. Teoria operatorilor în spaţii vectoriale cu un număr finit de dimensiuni ; 2. Teoria perturbaţiilor în spaţiu vectorial cu un număr finit de dimensiuni ; 3. Introducere în teoria operatorilor în spaţii Banach ; 4. Teoreme de stabilitate ; 5. Operatori în spaţii Hilbert ; 6. Forme sescviliniare în spaţii Hilbert şi operatori asociaţi ; 7. Teoria analitică a perturbaţiilor ; 8. Teoria asimptotică a perturbaţiilor ; 9. Teoria perturbaţiilor pentru semigrupe de operatori şi 10. Perturbaţia spectrului continuu şi echivalenţa unitară.

Referentul socoate deosebit de utilă traducerea volumului analizat, paralel cu traducerile cunoscutelor volume ale lui Yosida şi Dunford-Schwarz. Atare traduceri vor contribui, printre altele, la cimentarea terminologiei româneşti în aceste domenii de seamă.

D. Mangeron

R. M. OGHIBALOV şi V. F. GRIBANOV, *Termoustuicevosti plastin i obolocek* (Termostabilitatea plăcilor şi învelitorilor), Izdt. Moskovskogo Universiteta, 520 p., 1968

În ultimul timp, ca urmare a evoluţiei impetuoase a tehnologiei moderne, este acordată o atenţie din ce în ce mai mare studiului stabilităţii structurilor de tipul învelitorilor şi plăcilor plasate într-un cîmp de temperatură neuniform.

Lucrarea recenzată are drept obiect studiul acestei categorii de probleme, în ea fiind expuse în mod sistematic metodele de rezolvare ale problemei stabilităţii termoelastice şi termoanelastice a structurilor de tipul învelitorilor şi plăcilor.

În cuprinsul celor patru capitole care alcătuiesc prezenta monografie sînt abordate o serie de probleme în domeniul sus-menţionat, de mare importanţă ştiinţifică şi practică.

Primul capitol al lucrării este consacrat studiului stabilităţii plăcilor plasate într-un cîmp de temperatură neuniform. În cadrul acestui capitol sînt abordate o multitudine de probleme, dintre care remarcăm : punerea problemei termostabilităţii plăcilor elastice şi anelastice, considerînd deplasările mari şi dependenţa de temperatură a constantelor fizico-mecanice ; stabilitatea plăcilor plasate într-un cîmp de temperatură neuniform (avînd o variaţie numai pe grosimea plăcii sau numai în planul median al acesteia) şi ţinînd seama de diversele condiţii la limită ; termostabilitatea şi deformaţiile postcritice a plăcilor, ţinînd seama de diversele condiţii pe contur ; termostabilitatea şi deformaţiile postcritice ale plăcilor plane rezemate pe nervuri elastice şi acţionate de tensiuni termice şi forţe axiale.Se abordează problema flambajului plăcilor dreptunghiulare plasate într-un cîmp de temperatură neuniform. În acelaşi capitol se abordează problema stabilităţii termice a plăcii circulare ; se rezolvă problema termostabilităţii plăcilor ortotrope, ţinînd seama de dependenţa de temperatură a constantelor fizico-mecanice şi de variaţia cîmpului de temperatură atît pe grosime, cît şi în planul median al plăcii.

Este pusă şi rezolvată problema termostabilităţii plăcilor peste limita de elasticitate în diverse condiţii la limită şi de variaţie a cîmpului termic. Este abordată problema influenţei tensiunilor termice asupra flutterului de panou. În fine, în încheierea primului capitol este abordată problema termostabilităţii plăcilor în cazul în care cîmpul termic depinde nu numai de coordonatele spaţiale, şi de coordonata temporală.

În capitolul al doilea al monografiei sînt abordate o serie de probleme de stabilitate termice a învelitorilor subţiri. Astfel sînt expuse probleme legate de : punerea problemei termostabilităţii învelitorilor în limita domeniului de elasticitate în cazul marilor deplasări şi a dependenţei de temperatură a constantelor fizico-mecanice ale materialului ; termostabilitatea cilindrice circulare, ţinînd seama de variaţia cîmpului termic şi de diversele condiţii la limită ; termosta-

bilitatea învelitorilor cilindrice rigidizate prin cadre și lise ; termostabilitatea locală a învelitorilor sferice ; termostabilitatea învelitorilor conice. Este pusă problema termostabilității învelitorilor lucrînd peste limita de elasticitate, termostabilitatea învelitorilor cilindrice plasate într-un cîmp de temperatură neuniform și supuse unei sarcini exterioare și forțe axiale. De asemenea se abordează problema termostabilității dinamice a învelitorilor etc.

În capitolul al treilea este expusă teoria șocului termic și problema acțiunii repetate a temperaturii, fiind prezentată și rezolvată problema șocului termic pe suprafața semispațiului. Este considerată teoria stratului-limită termic. Sînt analizate diverse soluții ale ecuației propagării căldurii. Este abordată problema rezonanței termoparametrice a învelitorilor și se dezvoltă problema vibrațiilor plăcilor supuse la șocuri termice etc.

Capitolul al patrulea conține o serie de rezultate experimentale în problema stabilității termice a învelitorilor și plăcilor. Sînt expuse problemele punerii la punct a experiențelor, a metodelor de încălzire și a funcționării instalației de tensometrie în procesele termice nestaționare. Sînt prezentate rezultatele privind termorezistența învelitorilor cilindrice circulare, rigidizate și nerigidizate, plasate într-un cîmp de temperatură neuniform și supuse la sarcini exterioare. Sînt prezentate rezultate ale cercetărilor experimentale privind flambajul și flutterul panourilor plane etc.

Prin vastitatea materialului prezentat într-un domeniu de mare actualitate științifică și practică, monografia prezintă o valoroasă contribuție la problema termostabilității plăcilor și învelitorilor.

Nu putem încheia fără să nu remarcăm ampla bibliografie de la sfîrșitul lucrării, care dă posibilitatea unei vederi de ansamblu a problemei abordate.

L. Librescu

EGOR P. POPOV, *Introduction to mechanics of solids*, (Introducere în mecanica solidelor), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968, 571 p.

În seria de lucrări de construcții și de inginerie mecanică editate de Prentice-Hall (S.U.A. a apărut lucrarea profesorului E. P. Popov de la Universitatea Berkeley din California. Ea se bazează pe o lucrare mai veche (*Mechanics of Materials*, 1952), revăzută considerabil și completată.

Autorul menționează în prefață că lucrarea este destinată în primul rînd ca manual pentru studenții din toate disciplinele inginerești, însă, fiind mai extinsă decît necesitățile unei programe analitice și cuprinzînd și multe probleme neelementare, poate servi ca referință pentru studii mai dezvoltate după ce a atins scopul inițial. Cunoștințele de bază pe care le necesită sînt cele de matematici (din primii ani de studii) și de statică.

În general, tabla de materii a lucrării concordă cu aceea a cursurilor de rezistență a materialelor din țara noastră (lipsind unele probleme speciale, cum ar fi grinzi pe mediu elastic, bare cu pereți subțiri, vibrații etc.). Lucrarea depășește totuși net, după părerea noastră, cadrul unui curs, reprezentînd efectiv ceea ce anunță și titlul : o introducere în mecanica solidelor.

Cele 14 capitole au următoarele titluri : 1. Introducere ; 2. Forță axială și forță tăietoare moment încovoietor ; 3. Forțe și eforturi unitare axiale ; 4. Deformații specifice, legi de bază (curbe caracteristice), deformații axiale ; 5. Torsiunea ; 6. Eforturi unitare de încovoiere în grinzi ; 7. Eforturi unitare de lunecare în grinzi ; 8. Solicitări compuse ; 9. Eforturi și deformații

în secţiuni înclinate, criterii de curgere şi de rupere; 10. Probleme de analiză a eforturilor; 11. Săgeţile grinzilor; 12. Probleme static nedeterminate; 13. Metode energetice şi 14. Flambajul barelor.

Organizarea materialului este întrucîtva diferită de manualele obişnuite, avînd inserate şi o serie de cunoştinţe de teorie a elasticităţii. O serie de referinţe, dozate cu grijă şi pricepere în cursul lucrării, au darul să stimuleze pe cititorul studios în cercetarea unor lucrări de specialitate.

Tot în scopuri didactice, lucrarea conţine un număr mare de exemple rezolvate şi de probleme propuse. Figurile ilustrează în modul cel mai fericit textul; multe dintre ele sînt desene în perspectivă, într-o tehnică foarte apropiată de cea a fotografiei.

Cartea profesorului Popov reprezintă o contribuţie de o deosebită valoare în prezentarea problemelor fundamentale de mecanică a solidelor, cu aplicare în construcţii, inginerie mecanică, aviaţie etc.

Dr. ing. Mircea Soare

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA

MIȘCAREA FLUIDULUI ÎNTR-UN MEDIU POROS NEOMOGEN DETERMINATĂ DE UN SISTEM ARBITRAR DE SONDE

Se studiază problema în cazul mișcării plane staționare fără a se face vreo ipoteză restrictivă asupra permeabilității. Se scriu ecuațiile generale de mișcare în formă complexă și se exprimă soluția generală. Pentru a pune în evidență eficacitatea metodei se rezolvă cîteva cazuri particulare, demonstrîndu-se coincidența soluțiilor obținute cu cele date în tratatele clasice. În mod special se tratează mișcarea în prezența unui sistem arbitrar de sonde de injecție și de extracție. Rezultatele obținute sînt o generalizare a celor din cazul mediului omogen, în sensul că se deduc din primele, presupunînd permeabilitatea constantă.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1013—1027
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

S. GALEȚUȘE

ASUPRA LUBRIFICAȚIEI LAGĂRELOR DE ALUNGIRE REDUSA FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TURBULENT

În lucrare s-au dedus distribuția de presiuni și rezultanta presiunilor pentru lagăre de alungire redusă funcționînd în regim turbulent, utilizînd legea de variație a gradientului de presiune cu viteza medie laterală, obținută într-o lucrare anterioară, și aproximațiile permise de faptul că alungirea lagărului este redusă.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1029—1040
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. PASCOVICI

ASUPRA INFLUENȚEI TRANSFERULUI CĂLDURII LA MIȘCAREA FLUIDELOR ÎN FILME SUBȚIRI

Se studiază distribuția de temperaturi și de viteze pe grosimea filmului mărginit de suprafețe plane paralele cu luarea în considerare a unei viscozități variabile cu temperatura de forma $\eta = \eta_0^* e^{-\beta T}$. Se pun condiții la limită legate de fluxurile de căldură, ceea ce permite aflarea valorilor absolute a temperaturilor din film.

St. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 5, 1969, p. 1041—1051
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ALEXANDRU NICA, GHEORGHE MARIN

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA DISTRIBUȚIEI DE TEMPERATURI ÎN LAGĂRELE CIRCULARE CU ALUNECARE

Se prezintă evoluția cercetării experimentale a regimului termic din lagărele cu alunecare atît în lumina cercetărilor realizate de autori, cît și în aceea a lucrărilor aparținînd altor cercetători. În continuare se expun o serie de rezultate noi privind distribuția de temperaturi în lagăre și variația debitului de lubrifiant în funcție de parametrii caracteristici, scoțîndu-se în relief influența zonei divergente asupra posibilităților de evacuare a căldurii din lagăr; se studiază totodată și dependența regimului termic de timp.

St. cerc. mec. apl., Tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1053—1062
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GEORGE BĂRĂNESCU, GHEORGHE ZĂTREANU

ÎMBUNĂTĂȚIREA ECHILIBRAJULUI MOMENTELOR FORȚELOR DE INERȚIE PRIN PLASAREA CILINDRILOR ÎN DOUĂ LINII PREVĂZUTE FIECARE CU UN ARBORE COTIT

Sînt cercetate pentru motoarele cu două linii de cilindri posibilitățile de echilibrare a momentului extern rezultant, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de orice armonică a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Sînt stabilite în plus momentele rezultante care se echilibrează simultan, condițiile care asigură echilibrajul optim al momentelor rezultante, momentele rezultante echilibrate prin adoptarea repartiției uniforme a aprinderilor pentru întregul motor și modul de limitare a mărimii momentelor rezultante cînd ehilibrarea lor nu este posibilă.

St. cerc. mec. apl. tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1063—1080
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. M. NIȚĂ

ECUAȚIILE NELINIARE ALE MIȘCĂRII PERTURBATE A VEHICULULUI ORBITAL STAȚIONAR LA O LATITUDINE ARBITRARĂ

Se stabilesc ecuațiile neliniare ale mișcării perturbate, considerînd că deplasarea relativă în longitudine față de poziția staționară poate avea valori oricît de mari, cu reținerea unor termeni de ordin superior în expresia potențialului gravitațional terestru.
Din integrala Jacobi a ecuațiilor mișcării perturbate se deduce ecuația suprafețelor de viteză nulă. Se stabilesc apoi soluții aproximative ale ecuațiilor mișcării.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1081—1092
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

RADU C. BOGDAN, SERGIU CONONOVICI, DAN LARIONESCU

CALCULATORUL ANALOGIC ÎN CERCETAREA MECANISMELOR

În lucrare se dau indicații asupra posibilităților de folosire a calculatorului electronic analogic în cercetarea mecanismelor.
Se studiază posibilitatea realizării derivării succesive la calculatorul analogic și se modelează în diferite variante mecanisme plane articulate simple.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1093—1122
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

IOSIF EGRI

CALCULUL RANDAMENTULUI ȘI BILANȚUL ENERGETIC AL TRANSMISIILOR PRIN CURELE

În lucrare se stabilesc formulele analitice pentru calculul pierderilor și se indică o metodă mai exactă, unitară și generală pentru calculul randamentului la toate tipurile de transmisii prin curele.

St. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 5, 1969, p. 1123—1145
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ION LAZĂRESCU, EUGEN PAY

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA INFLUENȚEI REGIMULUI DE LUCRU ASUPRA PRECIZIEI GROSIMII DINTELUI LA FREZAREA DANTURII ROȚILOR DINȚATE CILINDRICE

Lucrarea analizează deformarea sistemului M—D—S—P datorită forțelor care intervin la prelucrarea prin frezare a danturii roților cilindrice, precum și ca urmare a dilatării termice ținînd seama de abaterile existente la semifabricat (excentricității, etc.) și de eroarea cinematică a sistemului melc-roată dedivizare de la mașina-unealtă. Ea reprezintă un studiu teoretic al obținerii grosimii dintelui roții dințate frezate și o confirmare experimentală a variației acesteia în funcție de regimul de așchiere.
În final, valoarea totală a abaterilor se materializează sub forma unei deplasări relative de corijare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1147—1158
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. D. POPESCU

STABILITATEA DINAMICĂ LA ÎNCOVOIERE A CONSOLELOR

Aplicînd principiul dinamic al stabilității barelor, se determină ecuația diferențială a mișcării de vibrație pentru o consolă solicitată de o sarcină pulsatorie.
Această ecuație se aduce la forma ecuației Mathieu și se rezolvă prin metoda lui Ince, obținîndu-se ecuațiile curbelor care delimitează zonele de stabilitate.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1159—1166
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

FLORIAN VIRGILIU

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL SPAȚIAL AL STRUCTURILOR MULTIETAJATE SIMETRICE CU ETAJ CONSTANT ALCĂTUITE CU DIAFRAGME. I

În lucrare se studiază repartizarea încărcării orizontale a structurii la elementele sale constructive numai în cazul translatării planșeelor, prin asimilarea structurii de rezistență a unei construcții multietajate cu nivel constant, cu o consolă deformabilă prin încovoiere simplă și torsiune și prin asimilarea diferitelor elemente plane verticale cu niște lamele deformabile în planul lor prin încovoiere și forfecare-lunecare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1167—1190
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

VICTOR GIONCU

CALCULUL PLĂCILOR CURBE SUBȚIRI CU DUBLĂ CURBURĂ POZITIVĂ REZEMATE PE ARCE CU TIRANȚI

În lucrare se folosește metoda numerică a diferențelor finite pentru studiul rezemării plăcilor curbe pe arce cu tiranți, ținînd seama de rigiditate reală, de deplasarea colțurilor în urma alungirii tiranților și de greutatea proprie a elementelor marginale. Pe un exemplu de calcul se trag concluzii privind comportarea în aceste condiții a plăcilor curbe subțiri.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 4, 1969, p. 1191—1217
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. SAVA

STADIUL ACTUAL ÎN DINAMICA MECANISMELOR CU CAME. I

Lucrarea de faţă reprezintă prima parte a sintezei privind stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. Astfel, după o parte introductivă este redat modelul monomasic pentru studiul general al dinamicii mecanismelor cu came. Pe acest model se studiază mişcarea ultimului element al următorului, curbele polidine, condiţia continuităţii lanţului cinematic, încărcările dinamice ale elementelor şi influenţa discontinuităţii derivatelor asupra parametrilor cinematici şi dinamici.
Influenţa factorilor prezenţi la funcţionarea reală a mecanismelor cu came este ilustrată grafic printr-un mare număr de figuri care însoţesc textul.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 5, 1969, p. 1219—1244
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 6 1969

S U M A R

S T U D I I

Pag.

P. MARINESCU, V. TOMA, ŞT. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra elementelor de amplificare cu fluid de tip bistabil 1265
DAN MATEESCU, Asupra mişcării conice de ordin doi în jurul sistemelor aripă-fuzelaj 1277
VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene 1303
AL. SOARE, SAHL DENNAOUI, Studiul variaţiei presiunii într-un sistem stratificat 1321
T. OROVEANU, Răcirea găurii de sondă prin circulaţie de lichid 1335
GEORGE BĂRĂNESCU, Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit 1355
FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul spaţial al structurilor multietajate simetrice cu etaj constant alcătuite cu diafragme. II. 1369
IOAN CRĂCIUN, O metodă de calcul al oscilaţiilor de torsiune ale arborilor maşinilor cu ajutorul grafelor liniare 1381
GEORGE BĂRĂNESCU, GHEORGHE ZĂTREANU, DINU TARAZA, Unele probleme privind comportarea la oboseală a asamblărilor cu şurub 1403
CHR. PELECUDI, Sinteza numerică şi structurală a mecanismelor spaţiale de diverse familii 1421
A. RAICU, Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor plane 1457
FL. DUDIŢĂ, Mecanisme spaţiale tripode 1467
GH. VASILCA, VETURIA RASZILLIER, Consideraţii cantitative asupra microgeometriei unor suprafeţe de frecare cu compuşi definiţi în structura materialului 1493

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

ION SAVA, Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. II 1513

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

D. MANGERON, Din problematica de mecanică dezbătută în cadrul celei de a doua Conferinţe internaţionale de metode computaţionale în probleme de optimizare (San Remo, 9—13 septembrie 1968) 1539
D. MANGERON, Din problematica de mecanică şi matematică aplicată expusă şi dezbătută la al VII-lea Congres al matematicienilor Austriaci (Linz, 16—20 septembrie 1968) 1543
D. MANGERON, Conferinţă cu participări internaţionale de teoria mecanismelor şi a maşinilor (Magdeburg, R.D.G., 2—4 octombrie 1968) 1547

RECENZII 1551

INDEX ALFABETIC 1555

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ELEMENTELOR DE AMPLIFICARE CU FLUID DE TIP BISTABIL

P. MARINESCU, V. TOMA, ȘT. SĂVULESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Utilizarea elementelor de amplificare cu fluid în diferite circuite fluidice, necesită în primul rînd cunoaşterea caracteristicilor statice şi dinamice. În lucrarea de faţă s-a urmărit determinarea caracteristicilor statice a unor elemente de amplificare cu fluid de tip bistabil, avînd geometrii interioare diferite, utilizînd o instalaţie de experimentare simplă, existentă deja în cadrul laboratorului de turbulenţă şi strat limită a Institutului de mecanică a fluidelor „Traian Vuia".
Rezultatele experimentale au permis obţinerea unor indicaţii asupra funcţionării şi proiectării elementelor de amplificare cu fluid de tip bistabil şi stabilirea domeniului de variaţie a presiunilor şi debitului de comandă pentru diferite presiuni de alimentare. De asemenea s-a verificat posibilităţile de experimentare în condiţiile utilizării unei instalaţii ieftine, care nu prezintă dificultăţi de procurare pentru oricare laborator dotat pentru cercetări în domeniul aerodinamicii sau al pneumaticii.

I. INTRODUCERE

Amplificatorul bistabil funcţionează după principiul ataşării la perete a unui jet de alimentare (efect Coandă) de presiune p_a şi debit Q_a şi este realizat prin închiderea ermetică a unor conducte şi canale, avînd o configuraţie geometrică optimă pentru producerea unor fenomene aerodinamice.

În figura 1 se arată configuraţia tipică a unui astfel de amplificator. Funcţionarea lui necesită existenţa unor canale de alimentare, de ieşire şi de comandă, în care se produce transformarea energiei potenţiale şi a presiunii în energie cinetică. Elementul are o configuraţie simetrică, plană şi o adîncime a canalelor suficient de mare. În absenţa unui semnal de comandă jetul de alimentare se scurge prin canale spre orificiile de ieşire, fără a avea vre-o preferinţă. Printr-o uşoară asimetrie, provocată de exemplu prin obturarea unuia din cele două canale de comandă, jetul va adera la peretele alăturat de partea obturată. După ataşare, între jet şi perete se formează o zonă de vîrtejuri de presiune redusă.

ST. CERC. MEC., AFL. TOM. 28, NR. 6, P. 1265–1275, 1969

Aplicînd un jet de comandă la orificiul de partea căruia jetul este ataşat, interacţiunea celor două jeturi comută jetul principal către celălalt perete. Cercetările experimentale au arătat existenţa a trei faze în cadrul procesului de comutaţie. În prima fază creşte zona de vîrtejuri sub acţiunea jetului de comandă pînă cînd devine suficient de mare pentru ca jetul să detaşeze de perete. În a doua fază jetul trece dintr-o poziţie în alta, deplasîndu-se către celălalt perete, iar în faza a treia,

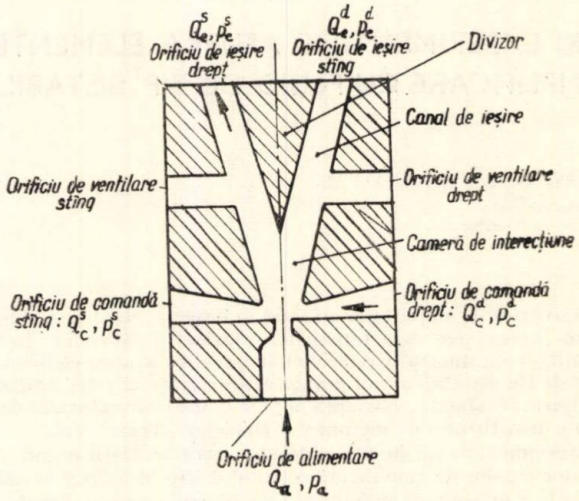


Fig. 1. — Configuraţia amplificatorului cu fluid de tip bistabil.

zona de vîrtejuri nou formată se resoarbe pînă la stabilirea jetului principal în noua poziţie.

Caracteristicile statice stabilesc legătura dintre debit şi presiune în dreptul orificiilor de comandă, de ieşire şi de alimentare. Cele trei tipuri de caracteristici statice ale amplificatorului cu ataşare la perete sînt:

— caracteristica de alimentare $Q_a = f(p_e)$,
— caracteristica de comandă $Q_c = f(p_e)$,
— caracteristica de ieşire $Q_e = f(p_e)$.

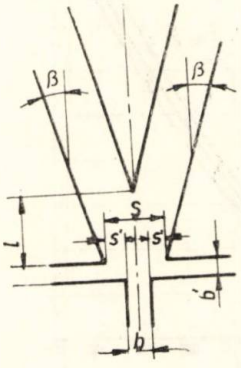
II. DESCRIEREA ELEMENTELOR

Modificarea unor parametrii geometrici afectează funcţionarea elementului producînd schimbări în alura curbelor caracteristice. Pentru a pune în evidenţă aceste modificări s-au construit trei elemente cu geometrii interioare diferite (fig. 2). Fiecare element a fost fabricat din două plăci de plexiglas lipite între ele. Pe placa inferioară s-a gravat prin frezare geometria interioară a elementului. Divizorul s-a păstrat mobil cu scopul de a observa influenţa pe care o produce asupra funcţionării elementului. În limitele de mobilitate determinată de ghidaje divizorul nu a influenţat practic forma curbelor caracteristice, însă, la o apropiere consi-

derabilă de orificiul de ieşire al jetului de alimentare, efectul de ataşare numai la unul din pereţi nu s-a mai produs.

Elementele au fost prevăzute cu orificii de ventilare în atmosferă, cu scopul de a reduce influenţa pe care o are sarcina din dreptul orificiilor de ieşire asupra funcţionării lor.

Orificiile de intrare şi de ieşire au fost prevăzute cu racorduri de legătură. Pentru a nu limita domeniul de variaţie a caracteristicei de ieşire, s-au prevăzut la ieşire racorduri cu o secţiune de trecere maximă posibilă.



	ELEMENT		
	1	2	3
b	1,5	1,5	1,5
s	1,5	1,5	4,5
b'	1,0	2,0	1,0
l	10	10	19
β	17°	17°	17°

Fig. 2. — Geometria interioară a elementelor.

Pentru a se obţine curbe caracteristice identice, în dreptul orificiilor elementului de o parte şi de alta a axei de simetrie a fost necesară o prelucrare de calitate, în cadrul limitelor de toleranţă. Un rol important în obţinerea unei funcţionări simetrice, îl are unghiul β de înclinare al pereţilor şi distanţa s'. Pentru unghiuri β şi distanţe s' diferite de o parte şi de alta a axei de simetrie, elementul devine monostabil şi ca urmare apare o tendinţă pronunţată de ataşare la unul din pereţi.

III. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru ridicarea caracteristicilor statice s-a utiiizat o instalaţie de aer compusă dintr-un compresor de înaltă presiune, de la care s-a obţinut jetul de alimentare şi o suflantă de la care s-a obţinut fluidul de comandă. Compresorul a fost conectat să debiteze într-un rezervor de mare capacitate, cu scopul de a reduce pulsaţiile fluidului la toate vitezele. Rezervorului i s-au prevăzut orificii de scurgere în atmosferă. Prin închiderea sau deschiderea acestora, s-au obţinut diferite presiuni de alimentare. Este de observat că deşi în instalaţia de experimentare au lipsit regulatoarele de presiune, prin utilizarea rezervorului s-a obţinut totuşi o presiune de alimentare constantă, în limite suficient de strînse.

Debitul de alimentare şi comandă s-a măsurat cu ajutorul unor debitmetre de tip rotametru avînd o construcţie specială utilizabilă în cazul montării în circuit.

Robinetul de la intrarea rotametrului a fost utilizat ca sarcină variabilă, pentru debitul de comandă şi de ieşire.

Presiunea jetului de comandă s-a măsurat cu ajutorul unui micromanometru cu alcool, iar presiunea de alimentare cu ajutorul unui manometru cu tub în formă de U. Manometrele s-au montat în dreptul orificiilor elementului ce s-a experimentat, pentru a evita şi reduce erorile în măsurarea presiunilor.

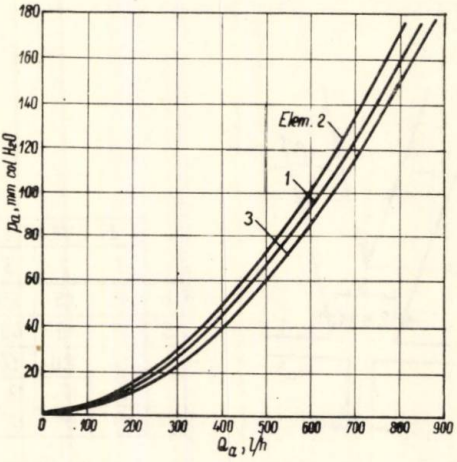


Fig. 3. — Caracteristica de alimentare.

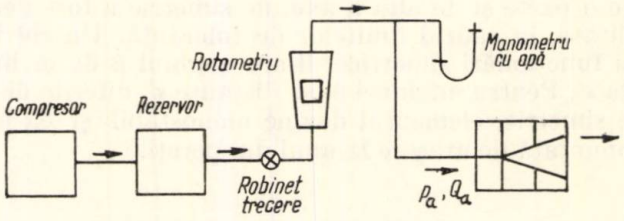
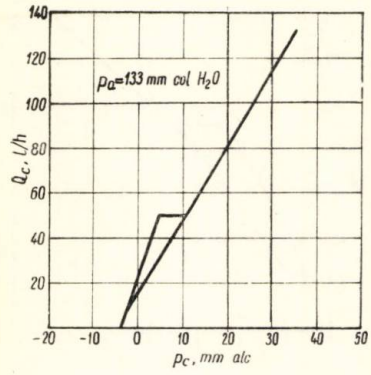


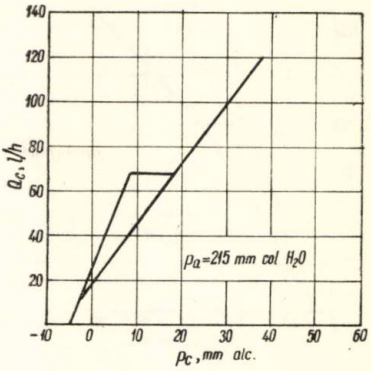
Fig. 4. — Schemă de experimentare.

Caracteristica statică de alimentare stabileşte legătura dintre presiune şi debit în dreptul orificiului de alimentare. Curbele de variaţie a presiunii de alimentare cu debitul sînt arătate în figura 3, pentru cele trei elemente. Se observă că aceste curbe nu sînt modificate substanţial de schimbările aduse geometriei elementelor. Schema de experimentare este arătată în figura 4. Orificiile de comandă şi de ieşire s-au menţinut deschise în atmosferă. Nu s-a constatat modificarea caracteristicei de alimentare în funcţie de poziţia jetului sau în funcţie de poziţia divizorului.

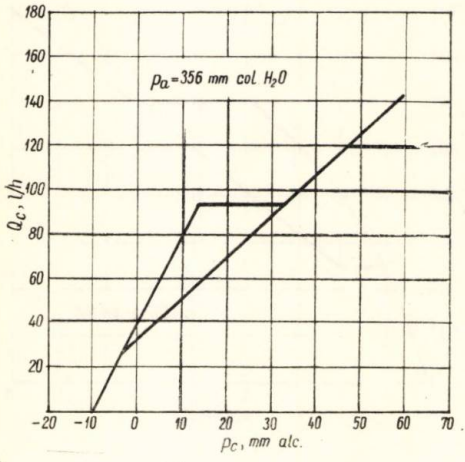
Caracteristica de comandă stabileşte legătura dintre debit şi presiune în dreptul orificiului de comandă. Curbele obţinute experimental pentru cele trei elemente sînt date în figurile 5.1, 5.2, şi 5.3. pentru diferite presiuni de alimentare.



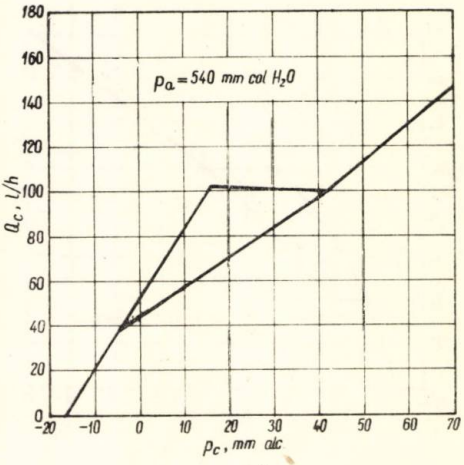
5.1a



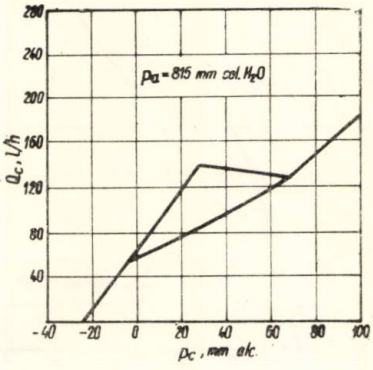
5.1b



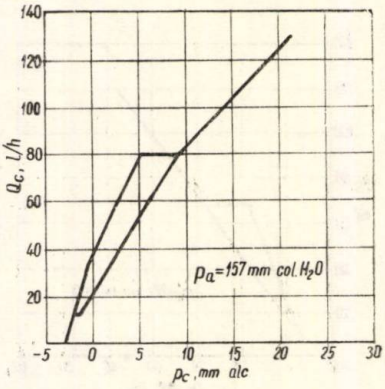
5.1c



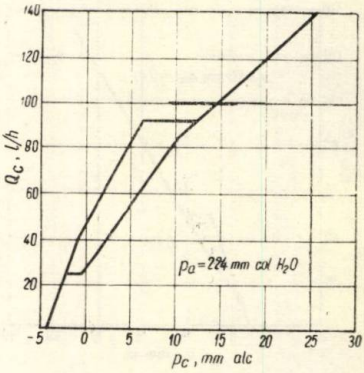
5.1d



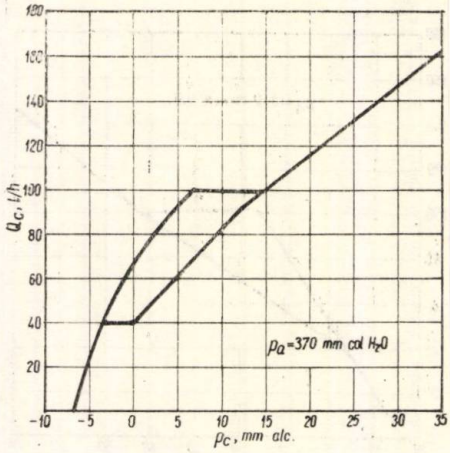
5.1e



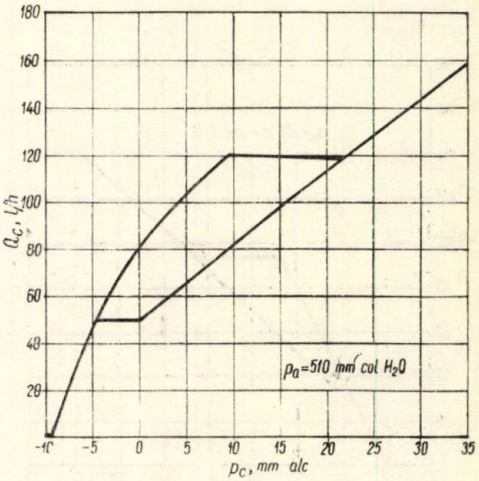
5.2a



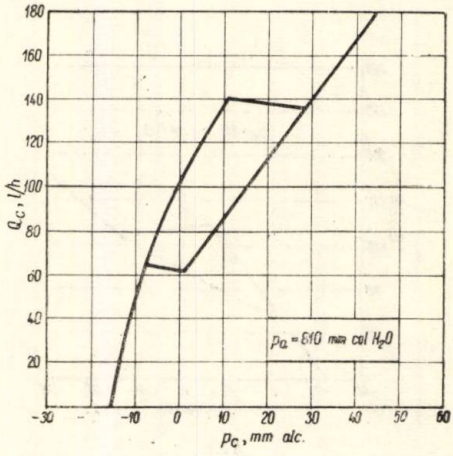
5.2b



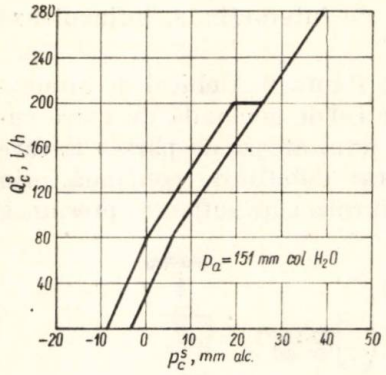
5.2c



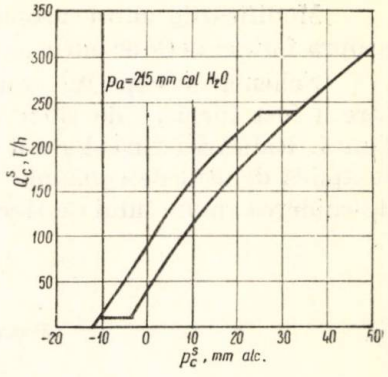
5.2d



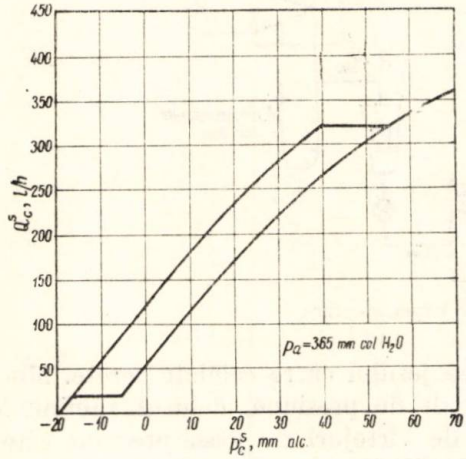
5.2e



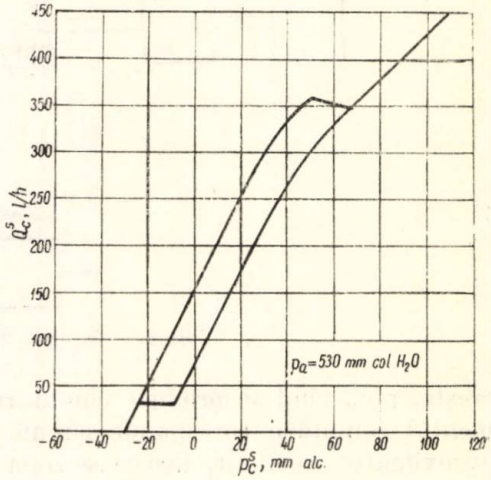
5.3a



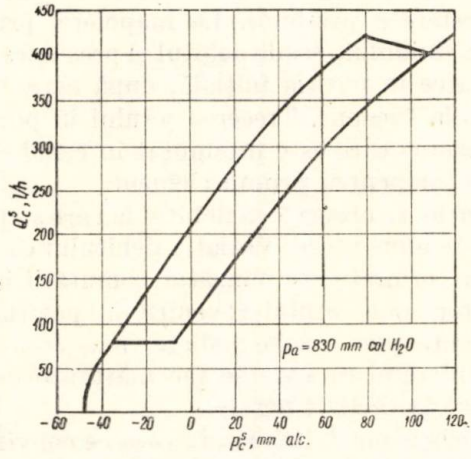
5.3b



5.3c



5.3d



5.3e

Fig. 5.1 *a*, 5.1 *b*, 5.1 *c*, 5.1 *d*, 5.1 *e*, 5.2 *a*, 5.2 *b*, 5.2 *c*, 5.2 *d*, 5.2 *e*. 5.3 *a*, 5.3 *b*, 5.3 *c*, 5.3 *d*, 5.3 *e*, — Caracteristica de comandă.

Modificările aduse geometriei camerei de interacţiune, influenţează asupra formei acestor curbe.

Schema de experimentare este dată în figura 6. Debitul de alimentare a fost furnizat de către compresor, iar cel de comandă de către suflantă. Ridicarea curbelor s-a făcut pentru jetul ataşat de partea la care se aplică debitul de comandă. Crescînd treptat debitul de comandă, prin deschiderea robinetului de trecere a aerului furnizat de suflantă, presiunea

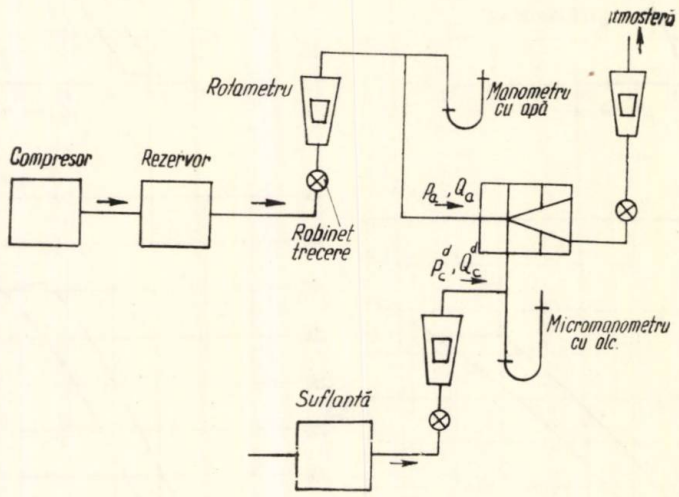


Fig. 6. — Schemă de experimentare.

creşte, pînă cînd se produce comutarea jetului către celălalt perete. Momentul comutării corespunde cu un salt de presiune, debitul rămînînd aproximativ constant, deoarece zona de vîrtejuri de joasă presiune este desfiinţată şi ca urmare apare o nouă distribuţie de presiune de o parte şi de alta a jetului comandat. Creşterea în continuare a debitului de comandă produce o nouă creştere a presiunii. La înapoiere, prin închiderea robinetului de trecere a fluidului, scade debitul şi presiunea de comandă, pînă cînd jetul se reîntoarce în poziţia iniţială, după care curba se suprapune peste cea obţinută la început. Trecerea jetului în poziţia iniţială determină un salt de presiune care este pronunţat în cazul elementului 2 şi 3 şi mai puţin pronunţat pentru primul element.

Urmărind curbele, se observă că debitul la care se produce comutarea, creşte cu presiunea de alimentare. Variaţia debitului cu presiunea prezintă aşadar două paliere, primul corespunzător comutării la peretele opus iar celălalt corespunzător momentului revenirii la poziţia iniţială. Rezultă deci două curbe legate prin aceste paliere, una corespunzătoare jetului ataşat de partea orificiului de care se fac măsurătorile şi alta corespunzătoare jetului ataşat la celălalt perete.

Pe porţiuni, curbele pot fi liniarizate ceea ce convine în cazul interconectării acestor elemente în circuite fluidice.

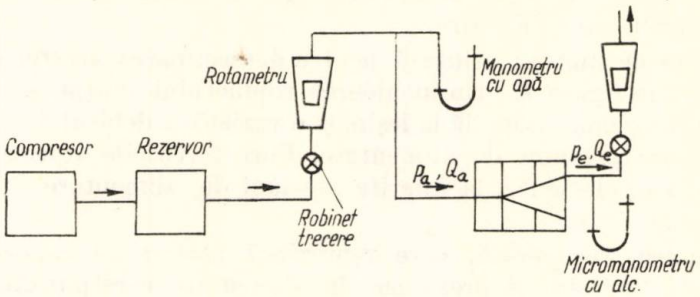
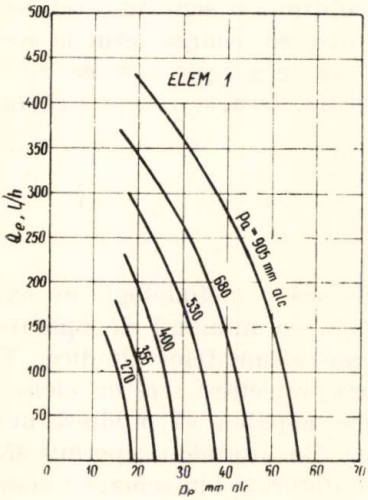
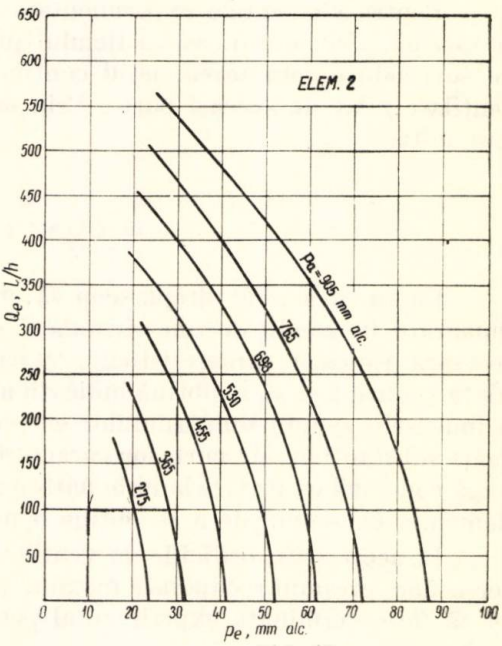


Fig. 7. — Schema de experimentare.

8



9



10

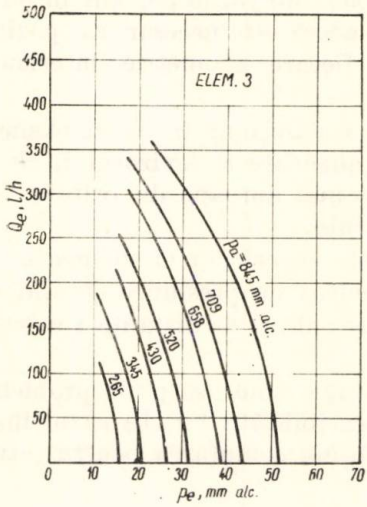


Fig. 8, 9, 10. — Caracteristica de ieşire.

Caracteristica de ieşire determină legătura dintre debit şi presiune în dreptul orificiului de ieşire.

Schema de montaj utilizată pentru determinarea acestei caracteristici se arată în figura 7. Prin închiderea robinetului ataşat rotametrului, s-a obţinut o sarcină variabilă la ieşire şi o variaţie a debitului cu presiunea pentru diferite presiuni de alimentare. Caracteristicile statice de ieşire pentru cele trei elemente, la diferite presiuni de alimentare sînt arătate în figurile 8,9 şi 10.

Presiunea recuperată, care reprezintă procentual raportul dintre presiunea de la ieşire şi presiunea de alimentare corespunzătoare unui debit nul la ieşire, a rezultat în jur de 10%. Forma şi poziţia orificiilor de ventilare are un rol important în obţinerea unei presiuni recuperate maxime.

Pentru elementele experimentate s-a obţinut o sensibilitate redusă la sarcină. Prin obturarea orificiului prin care se scurge jetul la ieşire, nu se produce comutarea, jetul continuînd să se scurgă prin canalul de ventilare aflat de aceeaşi parte. Prin deblocare, jetul se scurge prin orificiul iniţial.

IV. CONCLUZII

Lucrarea a avut drept scop să stabilească o metodologie de experimentare în condiţiile unei instalaţii simple, cu minimul de aparatură necesară ridicării caracteristicilor statice ale elementelor fluidice. Totodată s-a urmărit să se obţină indicaţii asupra proiectării acestor elemente şi îndeosebi asupra dimensiunilor geometrice capabile să producă modificări substanţiale ale curbelor caracteristice. Rezultatele au permis să se tragă concluzii cu privire la îmbunătăţirea configuraţiei interioare a acestor elemente, cu scopul de a se obţine o presiune recuperată maximă.

În acest sens, orificiile de ventilare joacă un rol important în obţinerea unei presiuni recuperate maxime şi de aceea este necesar ca poziţia lor să fie determinată experimental pentru fiecare geometrie interioară dată.

Presiunea recuperată mai mare, care s-a obţinut în cazul elementului 2, s-a datorat formei şi poziţiei mai adecvate a devizorului, cît şi faptului că orificiile de ventilare s-au găsit mai aproape de orificiul de alimentare în comparaţie cu celelalte elemente.

Examinînd caracteristicile de comandă a celor trei elemente se observă că acestea sînt modificate în principal de presiunea jetului de alimentare, de lărgimea b' a canalelor de comandă şi de distanţa s a pereţilor în dreptul orificiului de alimentare.

Parametrii amintiţi sînt importanţi atunci cînd se pune problema optimizării elementului cu scopul măririi sensibilităţii lui. În cazul înserierii acestor elemente este necesar să se obţină comutarea pentru jeturi de comandă de mică intensitate.

BIBLIOGRAFIE

1. R. W. Warren, *Some Parameters Affecting the Design of Bistable Fluid Amplifiers*, Symposium on Fluid Jet Control Devices, ASME, New York, N. Y. November. 28, 1962.
2. W. A. Boothe, *Performance Evaluation of High — Pressure-Recovery Bistable Fluid Amplifier*, Symposium on Fluid Jet Control Devices, ASME, New York, N. Y. November 18, 1962.
3. Silas Katz, Robert J. Dockery, *Fluid Amplification. Staging of Proportional and Bistable Fluid Amplifiers*, TR. — 1165, Harry Diamond Laboratories, August 1963.
4. Warren, R. W. Peperone, S. I., *Fluid Amplification Basic Principles*, TR. 1039, August 1962.

ASUPRA MIŞCĂRII CONICE DE ORDIN DOI ÎN JURUL SISTEMELOR ARIPĂ-FUZELAJ

DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

Prin studiul mişcării conice de ordin doi în jurul sistemelor aripă-fuzelaj, lucrarea permite tratarea în continuare a unor probleme prezentînd un deosebit interes, ca de exemplu problema rotaţiilor de tangaj sau de ruliu ale unui astfel de sistem, ce pot apare în cursul diferitelor evoluţii ale avioanelor supersonice.
După stabilirea unei formule generale de soluţionare a mişcării conice de ordin doi, în lucrare sînt stabilite expresiile vitezei axiale de perturbaţie pentru sistemul aripă delta-fuzelaj în cazurile în care aripa prezintă simetrie sau antisimetrie de incidenţă, precum şi în cazul aripii de grosime simetrică avînd panta distribuită simetric faţă de axa fuzelajului. Sînt luate în consideraţie diferitele poziţii ale bordurilor de atac faţă de conul Mach (borduri subsonice şi supersonice).

NOTAŢII

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat,

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1 x_2 x_3$ — sistem triortogonal de coordonate, axa Ox_1 reprezentînd axa de simetrie a fuzelajului,

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonate adimensionale,

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul vitezelor de perturbaţie,

$\Phi_{q,p,r} = \dfrac{\partial^{q+p+r}\Phi}{\partial x_1^q \partial x_2^p \partial x_3^r}$ — derivate de ordinul $(q + p + r)$ ale potenţialului,

$u = \Phi_{100}$, $v = \Phi_{010}$, $w = \Phi_{001}$ — componentele vitezei de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6, P. 1277–1301, 1969

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Mișcarea conică de ordin doi în jurul sistemului aripă-fuzelaj prezintă o importanță deosebită, deoarece apare în cazul rotațiilor de tangaj și de ruliu ale unui astfel de sistem, precum și în cazul scurgerii supersonice nepermanente în jurul unui asemenea sistem, avînd mișcări oscilatorii de tangaj sau de ruliu, rotații sau oscilații care pot apare într-o serie de evoluții ale avioanelor de mare viteză. De asemenea, această mișcare intervine și în cazul cînd incidența sau panta aripii este distribuită după un polinom omogen de ordin unu, ceea ce poate corespunde cazului cînd suprafața aripii este constituită din arce de parabolă.

Datorită acestui fapt, precum și datorită particularităților pe care le prezintă, spre deosebire de cazul general al mișcărilor conice de un ordin oarecare $n \neq 2$, în cele ce urmează ne propunem să tratăm mișcarea conică de ordin doi în jurul sistemului aripă-fuzelaj.

Să considerăm în acest scop sistemul aripă-fuzelaj din figura 1 care va fi reprezentat în planul auxiliar x

$$x = \mathfrak{y} + i\,\mathfrak{z}, \tag{1}$$

obținut prin transformarea

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{1 - B^2 z^2}\,, \quad \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}\,, \tag{2}$$

prin segmentele $N_j A_j$ corespunzătoare aripii și, considerînd în cadrul ipotezei micilor perturbații că dimensiunile transversale ale fuzelajului nu sînt prea mari față de cele ale conului Mach, adică

$$B^2 c^2 \ll 1, \tag{3}$$

prin cercul de rază c corespunzător fuzelajului.

Prin definiție, potențialul unei mișcări conice de ordin doi este o funcție omogenă de ordin doi, iar vitezele de perturbație sînt funcții omogene de ordin unu, astfel încît, aplicînd teorema lui Euler pentru astfel de funcții, vom putea exprima viteza axială de perturbație pe aripă ($z = 0$) și pe fuzelaj ($y^2 + z^2 = c^2$) sub forma

$$u = \Phi_{100} = x_1 \Phi_{200} + x_2 \Phi_{110} + x_3 \Phi_{101}. \tag{4}$$

Observînd acum că funcțiile $\Phi_{2-k-p,\,k,\,p} (k + p \leqslant 2)$ care sînt funcții omogene de ordin zero, devin funcții armonice în urma transformării (2), ele vor putea fi exprimate în planul x sub forma complexă

$$\Phi_{2-k-p,\,k,\,p} = \operatorname{Re} F_{2-k-p,\,k,\,p} \qquad (0 \leqslant k + p \leqslant 2), \tag{5}$$

între funcțiile complexe $F_{2-k-p,\,k,\,p}$ existînd următoarele relații de compatibilitate deduse din condiția de irotaționalitate:

$$\mathrm{d}F_{200} = (-x)^k \left(\frac{\mathrm{i}\,x}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}\right)^p \mathrm{d}F_{2-k-p,\,k,\,p} \qquad (0 \leqslant k + p \leqslant 2). \tag{6}$$

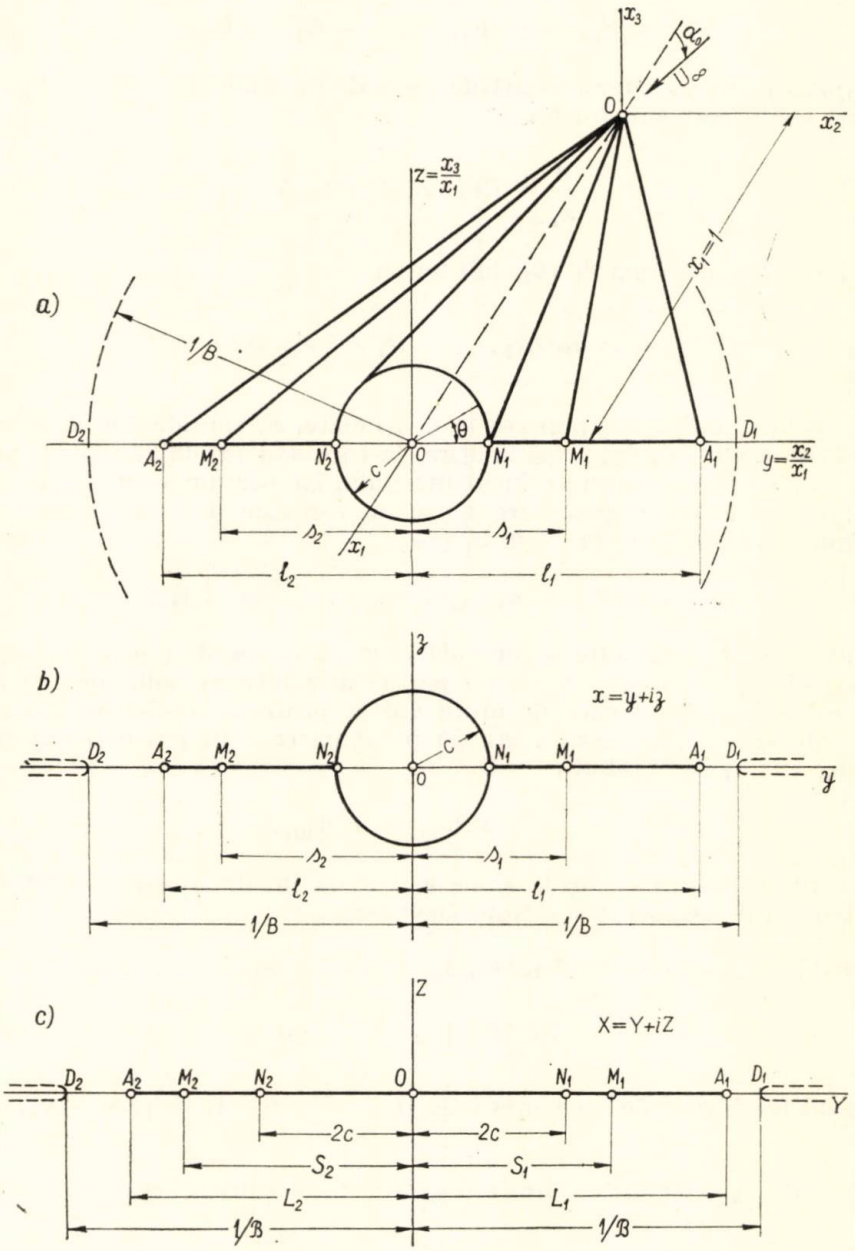

a)
x_3
α_0
U_∞
0
x_2
$z=\frac{x_3}{x_1}$
$x_1=1$
1/B
D_2
A_2
M_2
N_2
c
0
N_1
M_1
A_1
D_1
$y=\frac{x_2}{x_1}$
θ
Δ_2
x_1
Δ_1
l_2
l_1
b)
z
$x=y+iz$
c
y
Δ_2
Δ_1
l_2
l_1
1/B
1/B
c)
Z
$X=Y+iZ$
2c
2c
S_2
S_1
L_2
L_1
1/B
1/B
Y

Fig. 1

Prin integrarea acestor relații și ținînd seama de (3), se poate deduce pe aripă și pe fuzelaj

$$-\mathrm{d}F_{110} = \mathrm{i}\,\mathrm{d}F_{101}, \qquad -\Phi'_{110} = \Phi_{101}, \tag{7}$$

cu ajutorul căreia viteza axială de perturbație poate fi exprimată pe sistemul considerat sub forma

$$\frac{u}{x_1} = \mathrm{Re}(F_{200} + x\,F_{110}) \tag{8}$$

sau încă, ținînd seama de (6), sub forma

$$u = x_1\,\mathrm{Re}\,\mathcal{U}_1, \qquad \mathcal{U}_1 = \int F_{110}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Pentru a ușura expunerea în continuare, să considerăm ca exemplu cazul sistemului fuzelaj-aripă subțire, la care axa fuzelajului și porțiunile centrale $N_j\,M_j$ ale aripii au incidența nulă, iar porțiunile $M_j\,A_j$ ale aripii au incidențele corespunzătoare vitezelor verticale date sub forma unui polinom omogen de ordin 1 în x_1 și x_2

$$w^{(j)} = \alpha_j\,U_\infty = w_{10}^{(j)}\,x_1 + w_{01}^{(j)}\,x_2 \qquad (j = 1, 2), \tag{10}$$

menționînd însă că soluția generală care va fi stabilită pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbație este valabilă pentru cazul general al mișcării conice de ordin doi în jurul sistemului aripă-fuzelaj.

Observînd că viteza verticală pe aripă ($z = 0$) poate fi exprimată analog cu (4) prin relația

$$w = x_1\,\Phi_{101} + x_2\,\Phi_{011}, \tag{11}$$

condițiile la limită pe aripă și pe axa reală în afara aripii pot fi scrise pentru cazul considerat sub forma complexă.

$$\mathrm{Im}\,[F_{110}]_{N_j M_j} = 0, \qquad \mathrm{Im}\,[F_{110}]_{M_j A_j} = C_j = \mathrm{const.}, \quad (\mathrm{j} = 1{,}2) \tag{12a}$$

$$\mathrm{Re}\,[F_{110}]_{-\infty A_2,\, A_1 \infty} = 0 \tag{12b}$$

în cazul bordurilor de atac subsonice ($l_j < \dfrac{1}{B}$, fig. 1) și, respectiv,

$$\mathrm{Im}\,[F_{110}]_{N_j M_j} = 0, \qquad \mathrm{Im}\,[F_{110}]_{M_j D_j} = C_j = \mathrm{const.}, \quad (\mathrm{j} = 1, 2) \tag{13a}$$

$$\mathrm{Re}\,[F_{110}]_{D_j \mathcal{A}_j} = Q_j = \mathrm{const.}, \qquad \mathrm{Re}\,[F_{110}]_{-\infty \mathcal{A}_2,\, \mathcal{A}_1 \infty} = 0 \tag{13b}$$

în cazul bordurilor de atac supersonice ($l_j > \dfrac{1}{B}$, fig. 2).

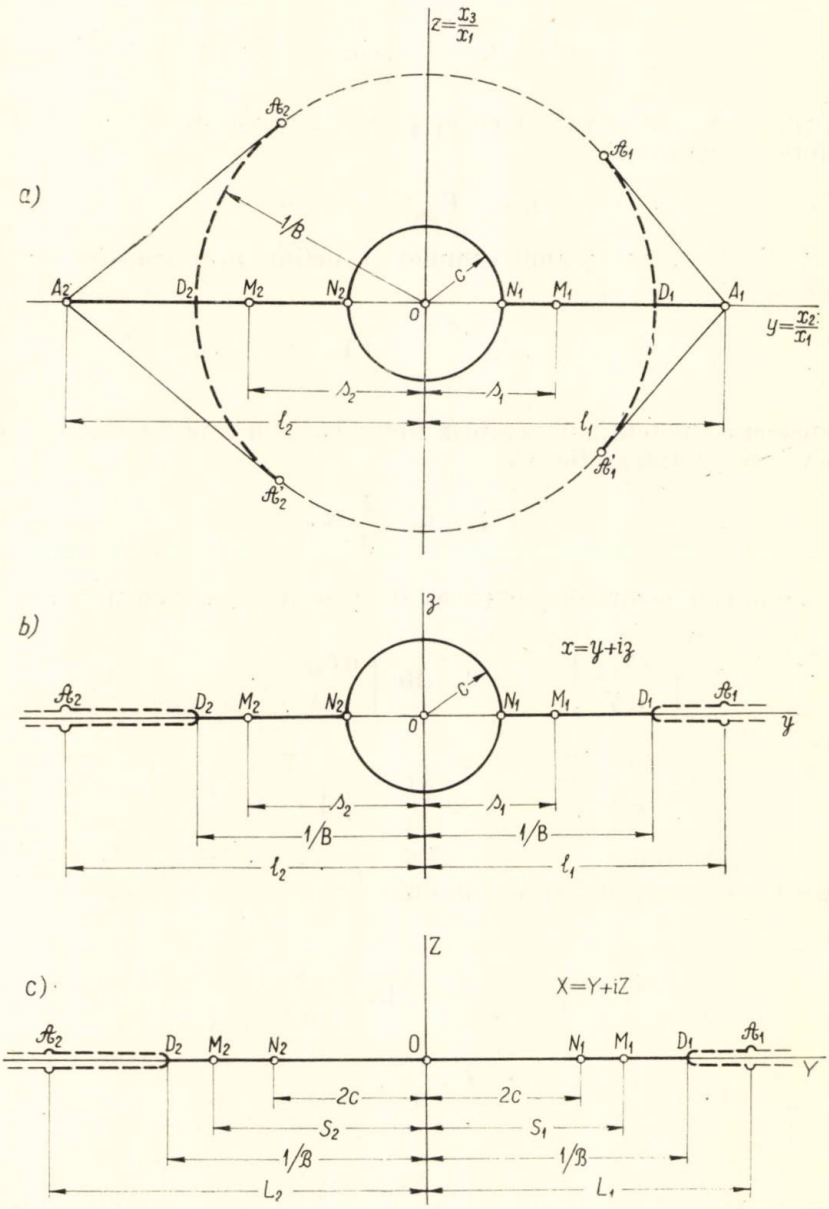

a)
$z=\frac{x_3}{x_1}$
$\mathcal{A}_2$
$\mathcal{A}_1$
1/B
C
A_2
D_2
M_2
N_2
0
N_1
M_1
D_1
A_1
$y=\frac{x_2}{x_1}$
S_2
S_1
l_2
l_1
$\mathcal{A}_1'$
$\mathcal{A}_2'$
b)
z
$x=y+iz$
C
$\mathcal{A}_2$
D_2
M_2
N_2
0
N_1
M_1
D_1
$\mathcal{A}_1$
y
S_2
S_1
1/B
1/B
l_2
l_1
c)
Z
$X=Y+iZ$
$\mathcal{A}_2$
D_2
M_2
N_2
0
N_1
M_1
D_1
$\mathcal{A}_1$
Y
2c
2c
S_2
S_1
1/B
1/B
L_2
L_1

Fig. 2

În ceea ce privește condiția la limită pe fuzelaj, după separarea mișcării axial-simetrice cunoscute în jurul fuzelajului conic vom putea scrie pentru cazul considerat

$$v\cos\theta + w\sin\theta = 0, \qquad \left(\cos\theta = \frac{y}{c}\,,\ \sin\theta = \frac{z}{c}\right) \tag{14}$$

care, prin derivare în raport cu x_1 și ținînd seama de (7), poate fi scrisă sub forma complexă

$$\mathrm{Re}\,[x\,F_{110}]_{x=c\,e^{i\theta}} = 0. \tag{15}$$

Utilizînd acum planul complex X definit prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x} \qquad (X = Y + iZ), \tag{16}$$

să considerăm potențialul complex fictiv F_{100} din care funcția F_{110} derivă ca o viteză complexă fictivă

$$F_{110} = \frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}x}\,. \tag{17}$$

Condițiile la limită vor putea fi scrise în acest nou plan sub forma

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_2 M_1} = 0, \quad \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{-\infty A_2,\ A_1\infty} = 0, \tag{18a}$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_j A_j} = \frac{C_j}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \qquad (j = 1,2) \tag{18b}$$

în cazul bordurilor de atac subsonice $\left(L_j < \frac{1}{\mathcal{B}}\right)$ și respectiv

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_2 M_1} = 0, \quad \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{-\infty \mathcal{A}_2,\ \mathcal{A}_1\infty} = 0, \tag{19a}$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{M_j D_j} = \frac{C_j}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right), \tag{19b}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}\right]_{D_j \mathcal{A}_j} = \frac{Q_j}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \qquad (j = 1,2) \tag{19c}$$

în cazul bordurilor de atac supersonice $\left(L_j > \frac{1}{\mathcal{B}}\right)$; aceste condiții se

referă la configurațiile sistemului din figurile 1*c* și 2*c*, în care noile dimensiuni geometrice sînt date de relațiile

$$\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \quad L_j = l_j + \frac{c^2}{l_j}, \quad S_j = s_j + \frac{c^2}{s_j} \quad (j = 1, 2). \tag{20}$$

Pentru a defini complet mișcarea din planul X va trebui să ținem seama și de singularitățile care prin natura problemei caracterizează comportarea funcției $\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X}$ în proximitatea bordurilor de atac și muchiilor aripii, și anume:

$$\frac{1}{\sqrt{L_j + (-1)^j X}}, \qquad \frac{1}{[L_j + (-1)^j X]^{3/2}} \tag{21}$$

corespunzătoare bordurilor de atac subsonice $\left(l_j < \frac{1}{B}\right)$ și

$$\ln [L_j + (-1)^j X], \quad \frac{1}{L_j + (-1)^j X}, \tag{22a}$$

$$\ln [S_j + (-1)^j X], \quad \frac{1}{S_j + (-1)^j X} \tag{22b}$$

corespunzătoare bordurilor de atac supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$ și respectiv muchiilor aripii.

Avînd în vedere condițiile la limită și singularitățile de mai sus, vom putea admite, prin analogie cu cele arătate în [1] și [2], că mișcarea din planul X corespunde, prin intermediul unei transformări analoage cu (2), unei mișcări conice de același ordin doi în jurul unei aripi triunghiulare fictive cu bordurile de atac situate în punctele A_j ($X = (-1)^{j+1} L_j$) și prezentînd în plus două muchii în punctele M_j ($X = (-1)^{j+1} S_j$) precum și o variație continuă de incidențe pe porțiunile $M_j A_j$ corespunzătoare condițiilor (18 b) sau respectiv (19 b) și (19c).

Notînd cu superindicele (a) funcțiile complexe corespunzătoare acestei mișcări, care sînt legate prin relații analoage cu (6) și (9),

$$\mathrm{d}F^{(a)}_{200} = (-X)^k \left(\frac{\mathrm{i}X}{\sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}}\right)^p \mathrm{d}F^{(a)}_{2-k-p,\,k,\,p} \qquad (0 \leqslant k+p \leqslant 2), \tag{23}$$

$$\mathcal{U}^{(a)}_1 = \int F^{(a)}_{110}\,\mathrm{d}X, \tag{23b}$$

vom putea scrie în virtutea acestei analogii

$$\frac{\mathrm{d}F_{100}}{\mathrm{d}X} = F^{(a)}_{110}. \tag{24}$$

Ţinînd seama de (9), (16), (17), (23b) şi (24), vom putea stabili următoarea relaţie generală, pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbaţie pe sistemului aripă-fuzelaj :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{(a)}, \quad \frac{u}{x_1} = \operatorname{Re} \mathcal{U}_1 = \operatorname{Re} \mathcal{U}_1^{(a)}. \tag{25}$$

Acest rezultat prezintă o importanţă deosebită, deoarece permite ca soluţia problemei în cazul mişcării conice de ordin doi în jurul sistemului aripă-fuzelaj să se obţină direct din funcţia vitezei axiale de perturbaţie corespunzătoare aripii triunghiulare fictive izolate definite mai sus, evitîndu-se în acest mod o serie de integrări deosebit de laborioase care sînt necesare în cazul mişcărilor conice de ordin n mai mare decît 2.

Pentru soluţionarea problemei aripii izolate fictive menţionate mai sus, prin analogie cu cele stabilite în [2], [7], vom asimila incidenţa variabilă de pe porţiunile $M_j A_j$ prin distribuţii continue de muchii elementare pe aceste porţiuni, care să asigure satisfacerea condiţiilor (18b) şi respectiv (19b), (19c).

Pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbaţie în diferite cazuri concrete, în cele ce urmează vom utiliza metoda analogiei hidrodinamice elaborate de E. Carafoli, extinsă la cazul incidenţelor şi pantelor variabile [3]—[6].

2. CAZUL SISTEMULUI ARIPĂ—FUZELAJ AVÎND O ROTAŢIE DE TANGAJ

Să tratăm ca un prim exemplu cazul sistemului aripă-fuzelaj avînd o mişcare de rotaţie de tangaj în jurul axei Ox_2 caracterizată prin viteza unghiulară $\dot{\alpha}$ (fig. 3).

În acest caz, luînd în consideraţie numai efectul mişcării de tangaj, condiţiile la limită pe fuzelaj şi pe aripă sînt, respectiv,

$$v \cos \theta + (w + x_1 \, w_{10}) \sin \theta = 0, \tag{26a}$$

$$w = - x_1 \, w_{10}, \qquad w_{10} = \dot{\alpha} \, U_\infty. \tag{26b}$$

Vom menţiona că aceste condiţii la limită corespund şi cazului cînd întregul plan format din aripă, considerată subţire, şi din axa fuzelajului, este curbat în direcţia axei Ox_1, corespunzător incidenţei $\alpha = x_1 \dfrac{w_{10}}{U_\infty}$.

Considerînd pentru început cazul bordurilor de atac subsonice $\left(l_j < \dfrac{1}{B}\right)$, vom putea stabili următoarele condiţii la limită pentru mişcarea din planul X

$$\operatorname{Im} [F_{110}^{(a)}]_{A_2 A_1} = \operatorname{Im} \left[\frac{\mathrm{d} \mathcal{U}_1^{(a)}}{\mathrm{d}X} \right]_{A_2 A_1} = 0, \tag{27a}$$

$$\operatorname{Re} [F_{110}^{(a)}]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = \operatorname{Re} \left[\frac{\mathrm{d} U_1^{(a)}}{\mathrm{d}X} \right]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = 0. \tag{27b}$$

Ţinînd seama de aceste condiţii la limită şi de singularităţile amintite (21) şi procedînd în modul indicat mai sus, vom putea stabili pentru funcţia $\mathcal{U}_1^{(a)}$ corespunzătoare aripii fictive din planul X expresia

$$\mathcal{U}_1^{(a)} = \frac{A_0 + A_1 X + A_2 X^2}{\sqrt{(L_1 - X)(L_2 + X)}}. \tag{28}$$

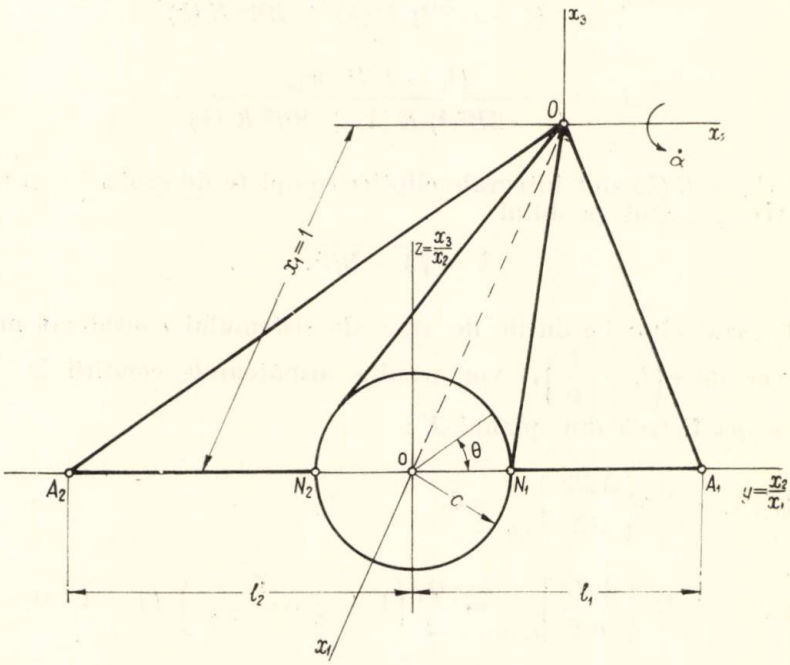


Fig. 3

În cazul cînd aripa este simetrică ($l_1 = l_2 = l$), funcţia vitezei axiale de perturbaţie va avea expresia

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{(a)} = \frac{A_0 + A_2 X^2}{\sqrt{L^2 - X^2}} = \frac{A_0 + A_2\left(x + \dfrac{c^2}{x}\right)^2}{\sqrt{l^2 - x^2}\sqrt{1 - \dfrac{c^4}{l^2 x^2}}} \quad \left(L = l + \frac{c^2}{l}\right) \tag{29}$$

În ceea ce priveşte constantele A_0 şi A_2 care apar în această expresie, acestea se vor determina din condiţiile

$$\operatorname{Im} \int_{y'}^{1/B} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = w_{10}, \tag{30a}$$

$$\operatorname{Im} \int_{y'}^{1/B} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x}\, \frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = 0, \tag{30b}$$

unde y' reprezintă abscisa unui punct situat pe aripă în apropierea bordului A_1.

Efectuarea acestor integrale este însă destul de laborioasă şi conduce la expresii destul de complicate, astfel încît introducînd în relaţiile (30) simplificările care decurg din (3), se pot obţine în cele din urmă pentru constantele A_0 şi A_2 expresiile

$$A_0 = -\frac{2l^2(1-B^2l^2)\,w_{10}}{(1-2B^2l^2)\,E(k)+B^2l^2\,K(k)}, \tag{31a}$$

$$A_2 = \frac{(1-B^2l^2)\,w_{10}}{(1-2B^2l^2)\,E(k)+B^2l^2\,K(k)}, \tag{31b}$$

unde $K(k)$ şi $E(k)$ sînt integrale eliptice complete de speţa I-a şi respectiv a III-a, avînd modulul

$$k = \sqrt{1-B^2l^2}. \tag{32}$$

În cazul cînd bordurile de atac ale sistemului considerat mai sus sînt supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$, vor rezulta următoarele condiţii la limită pentru aripa fictivă din planul X:

$$\operatorname{Im}[F^{(a)}_{110}]_{D_2D_1} = \operatorname{Im}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}^{(a)}_1}{\mathrm{d}X}\right]_{D_2D_1} = 0, \tag{33a}$$

$$\operatorname{Re}[F^{(a)}_{110}]_{D_j\mathcal{A}_j} = \operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}^{(a)}_1}{\mathrm{d}X}\right]_{D_j\mathcal{A}_j} = \frac{Q_j}{2}\left(1+\frac{Y}{\sqrt{Y^2-4c^2}}\right)\ (j=1,\,2), \tag{33b}$$

$$\operatorname{Re}[F^{(a)}_{110}]_{-\infty\mathcal{A}_2,\,\mathcal{A}_1\infty} = \operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}^{(a)}_1}{\mathrm{d}X}\right]_{-\infty\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1\infty} = 0. \tag{33c}$$

Considerînd din nou cazul aripii simetrice ($l_1 = l_2 = l$) pentru care datorită simetriei

$$Q_1 = -Q_2 = Q \tag{34}$$

se va obţine pentru $\mathcal{U}^{(a)}_1$ procedînd în modul indicat mai sus expresia

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{(a)}_1 = {} & (Q'_{20}+Q'_{21}X)\ \arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}L)(1-\mathcal{B}X)}{2\mathcal{B}(L-X)}} + \\ & + (Q'_{20}-Q'_{21}X)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}L)(1+\mathcal{B}X)}{2\mathcal{B}(L+X)}} + \\ & + D_{20}\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2} + \int F^{*(a)}_{110}\,\mathrm{d}X,\end{aligned} \tag{35}$$

în care

$$Q'_{21} = \frac{Q}{\pi}\left(1 + \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{L}^2 - 4c^2}}\right) \tag{36}$$

și $F^{*(a)}_{110}$ reprezintă contribuția distribuției continue de muchii elementare de pe porțiunile $D_j\,\mathcal{A}_j$ corespunzătoare condițiilor (33b), contribuție care se determină în același mod indicat mai sus și are expresia

$$\begin{aligned} F^{*(a)}_{110} = &- \frac{Q}{\pi}\int_{1/\mathcal{B}}^{L} \arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta - X)}}\,\mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) + \\ &+ \frac{Q}{\pi}\int_{1/\mathcal{B}}^{L} \arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta + X)}}\,\mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) = \\ &= -\frac{Q}{\pi}\frac{L}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}\left[\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} - \right. \\ &\left. - \arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}}\right] + \\ &+ \frac{Q}{\pi}\frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2)}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Introducînd această expresie în (35), vom obține după efectuarea calculelor expresia

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(a)}_1 = &(Q_{20} + Q_{21}X)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} + \\ &+ (Q_{20} - Q_{21}X)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} + \\ &+ Q_{21}\left(x - \frac{c^2}{x}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2)}} + \\ &+ D_{20}\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}, \end{aligned} \tag{38}$$

în care am notat

$$Q_{20} = Q'_{20} + \frac{Q}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}, \qquad Q_{21} = \frac{Q}{\pi}. \tag{39}$$

Pentru determinarea constantelor Q_{20} și Q_{21} se vor utiliza condițiile

$$\operatorname{Im}\int_{\sigma_1}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=-w_{10}, \tag{40a}$$

$$\operatorname{Im}\int_{\sigma_1}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=0, \tag{40b}$$

unde integrarea se efectuează pe un semicerc σ_1 de rază foarte mică în jurul bordului A_1.

Rezolvînd acest sistem de ecuații, vom obține, după efectuarea tuturor calculelor, următoarele expresii pentru constantele Q_{20} și Q_{21}:

$$Q_{20}=-\frac{2\,l\,w_{10}}{\pi}\,\frac{B^2l^2-2}{(B^2l^2-1)^{3/2}}, \tag{41a}$$

$$Q_{21}=-\frac{w_{10}}{\pi}\,\frac{1}{(B^2l^2-1)^{3/2}}. \tag{41b}$$

În ceea ce privește constanta D_{20}, aceasta se va determina ca și în cazul aripii izolate din condiția ca funcțiile $F_{1-q,q,1}$ să nu prezinte salturi pe conul Mach, condiție care se poate scrie sub forma

$$\left[\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x}\right]_{x=\frac{1}{B}}=0. \tag{42}$$

3. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ–ARIPĂ DELTA SUBȚIRE CU BORDURI SUPERSONICE

Să considerăm acum sistemul fuzelaj-aripă delta subțire din figura 4, la care incidența aripii este nulă pe porțiunile centrale N_jM_j și este distribuită sub forma polinomială (10) pe portiunile centrale M_jA_j, în timp ce axa fuzelajului are incidența nulă.

Avînd în vedere condițiile la limită (18) și singularitățile (21) și (22b) stabilite pentru mișcarea din planul X corespunzătoare acestui caz, în care vom avea de această dată :

$$L_1=L_2=L=l+\frac{c^2}{l},\qquad S_1=S_2=S=s+\frac{c^2}{s} \tag{43}$$

și procedînd în modul indicat mai sus vom putea deduce pentru funcția $\mathcal{U}_1^{(a)}$ expresia

$$\mathcal{U}_1^{(a)}=\frac{A_{20}+A_{21}X+A_{22}X^2}{\sqrt{L^2-X^2}}+(C'_{20}+C'_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L-X)(L+S)}{2L(S-X)}}+$$

$$+(G'_{20}-G'_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L+X)(L+S)}{2L(S+X)}}+\int F_{110}^{*(a)}\,\mathrm{d}X, \tag{44}$$

în care

$$C'_{20} = \frac{C_1}{\pi}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \quad G'_{20} = \frac{C_2}{\pi}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \tag{45}$$

iar $F^{*(a)}_{110}$ reprezintă contribuţia distribuţiilor continue de muchii elementare de pe porţiunile $D_j\ A_j$ corespunzătoare condiţiilor (18 b), pentru care rezultă următoarea expresie:

$$F^{*(a)}_{110} = \frac{C_1}{\pi}\int_S^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L - X)(L + \eta)}{2L(\eta - X)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{C_2}{\pi}\int_S^L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L + X)(L + \eta)}{2L(\eta + X)}}\,\mathrm{d}\eta. \tag{46}$$

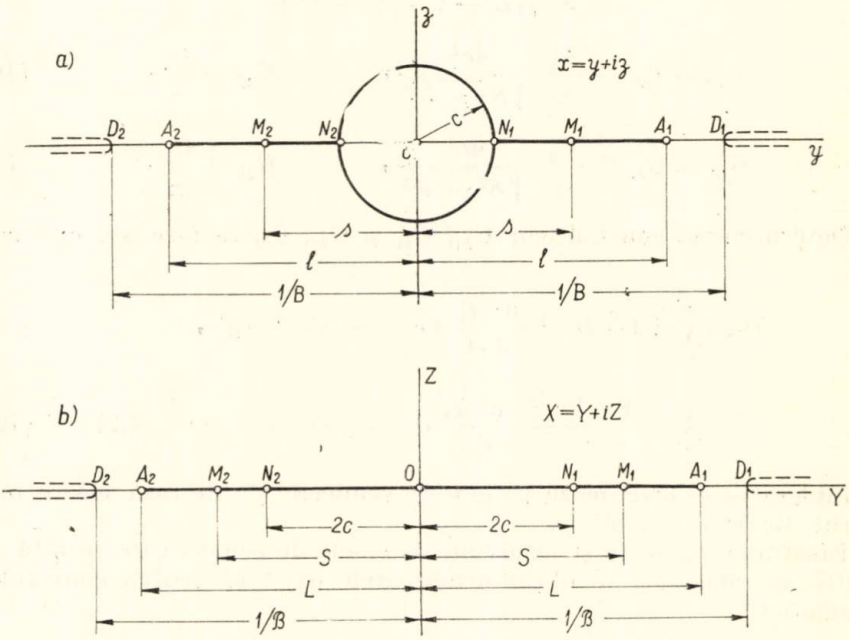


Fig. 4

Introducînd această relaţie în (43) şi ţinînd seama de (25), vom obţine pentru $\mathcal{U}_1$ expresia

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{(a)} = \frac{A_{20} + A_{21}X + A_{22}X^2}{\sqrt{L^2 - X^2}} + (C_{20} + C_{21}X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L-X)(L+S)}{2L(S - X)}} +$$

$$+ (G_{20} - G_{21}X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L + X)(L + S)}{2L(S + X)}} +$$

$$+ C_{21}(X^2 - 4c^2)(L^2 - X^2)\int_S^L \frac{\mathrm{d}\eta}{2(\eta - X)\sqrt{\eta^2 - 4c^2}\sqrt{L^2 - \eta^2}} +$$

$$+ G_{21}(X^2 - 4c^2)(L^2 - X^2)\int_S^L \frac{\mathrm{d}\eta}{2(\eta + X)\sqrt{\eta^2 - 4c^2}\sqrt{L^2 - \eta^2}} +$$

$$+ \frac{C_{21} - G_{21}}{2}\left[R_0 \arcsin\frac{X}{L} + R_1 X\sqrt{L^2 - X^2}\right], \tag{47}$$

în care am notat

$$R_0 = \int_S^L \sqrt{L^2 - \eta^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right), \tag{48a}$$

$$R_1 = \int_S^L \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(L^2 - \eta^2)(\eta^2 - 4c^2)}}, \tag{48b}$$

$$C_{20} = C'_{20} + \frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}, \qquad C_{21} = \frac{C_1}{\pi}, \tag{48c}$$

$$G_{20} = G'_{20} + \frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}, \qquad G_{21} = \frac{C_2}{\pi}. \tag{48d}$$

Determinarea constantelor C_{20}, C_{21} și G_{20}, G_{21} se face aplicînd condițiile

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma_j} \sqrt{1 - B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right) = (-1)^{j+1}\,w_{10}^{(j)}, \tag{49a}$$

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma_j} \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right) = (-1)^j\,w_{01}^{(j)} \quad (j = 1,2) \tag{49b}$$

unde integrarea se efectuează pe cîte un semicerc γ_j de rază foarte mică în jurul fiecărei muchii M_j.

Efectuînd calculele și rezolvînd sistemele de ecuații care rezultă din condițiile de mai sus, se obțin următoarele expresii pentru constantele menționate:

$$C_{20} = \frac{2s}{\pi}\frac{(2 - B^2s^2)\,w_{10}^{(1)} + s\,w_{01}^{(1)}}{(1 - B^2s^2)^{3/2}}, \tag{50a}$$

$$C_{21} = -\frac{1}{\pi}\frac{w_{10}^{(1)} + B^2s^3w_{01}^{(1)}}{(1 - B^2s^2)^{3/2}}, \tag{50b}$$

$$G_{20} = \frac{2s}{\pi}\frac{(2 - B^2s^2)\,w_{10}^{(2)} - s\,w_{01}^{(2)}}{(1 - B^2s^2)^{3/2}}, \tag{50c}$$

$$G_{21} = -\frac{1}{\pi}\frac{w_{10}^{(2)} - B^2s^3w_{01}^{(2)}}{(1 - B^2s^2)^{3/2}}. \tag{50d}$$

În ceea ce privește constantele A_{20}, A_{21}, A_{22}, acestea se determină într-un mod asemănător din condiții de forma

$$\operatorname{Im} \int_{y_j}^{(-1)^{j+1}1/B} (-x)^{-q} \sqrt{1-B^2x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = w^{(j)}_{1-q,q}, \quad (j = 1, 2) \tag{51}$$

unde y_j reprezintă abscisa a două puncte oarecare situate pe aripă în apropierea bordului respectiv A_j.

Cazul cînd aripa prezintă simetrie de incidență

Să considerăm acum cazul simetriei de incidență, pentru care vom avea

$$w^{(1)}_{10} = w^{(1)}_{10} \quad w^{(2)}_{10} = -w^{(2)}_{01} \tag{52a}$$

$$G_{20} = C_{20},\ G_{21} = C_{21},\ A_{21} = 0 \tag{52b}$$

Introducînd aceste relații în (47) și efectuînd calculele se va obține pentru $\mathcal{U}_1$, în cazul simetriei de incidență expresia

$$\mathcal{U}_1 = \frac{A_{20} + A_{22}X^2}{\sqrt{L^2 - X^2}} + (C_{20} + C_{21}X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L-X)(L+S)}{2L(S-X)}} +$$

$$+ (C_{20} - C_{21}X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L+X)(L+S)}{2L(S+X)}} +$$

$$+ C_{21}\sqrt{X^2 - 4c^2} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L^2-X^2)(S^2-4c^2)}{(S^2-X^2)(L^2-4c^2)}}, \tag{53}$$

în care valorile constantelor C_{20} și C_{21} sînt date în (49) în care se introduc particularizările (52 a), iar constantele A_{20} și A_{22} se determină din relațiile

$$\operatorname{Im} \int_{y'}^{1/B} \sqrt{1-B^2x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = w^{(1)}_{10}, \tag{54a}$$

$$\operatorname{Im} \int_{y'}^{1/B} \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\, \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\, \mathrm{d}x = -w^{(1)}_{01}, \tag{54b}$$

unde y' este abscisa unui punct situat pe porțiunea M_1A_1 a aripii.

În cazul cînd pe întreaga aripă incidența sau respectiv viteza verticală de perturbație este distribuită de aceleași relații (10), (52 a), caz în

care muchiile M_j se vor confunda cu intersecţiile N_j dintre aripă şi fuzelaj ($s = c$), expresia (53) va deveni

$$\mathcal{U}_1 = \frac{A_{20} + A_{22}\left(x + \frac{c^2}{x}\right)^2}{\sqrt{(l^2 - x^2)\left(1 - \frac{c^4}{l^2 x^2}\right)}} +$$

$$+ \left[C^*_{20} + C^*_{21}\left(x + \frac{c^2}{x}\right)\right] \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(l+c)^2 (l-x)(c^2 - lx)}{2l(l^2 + c^2)(x-c)^2}} +$$

$$+ \left[C^*_{20} - C^*_{21}\left(x + \frac{c^2}{x}\right)\right] \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(l+c)^2 (l+x)(c^2 + lx)}{2l(l^2 + c^2)(x+c)^2}} +$$

$$+ \frac{i\pi}{2} C^*_{21}\left(x - \frac{c^2}{x}\right), \tag{55}$$

în care

$$C^*_{20} = \frac{2c}{\pi} \frac{(2 - B^2 c^2) w^{(1)}_{10} + c\, w^{(1)}_{01}}{(1 - B^2 c^2)^{3/2}}, \tag{56a}$$

$$C^*_{21} = -\frac{1}{\pi} \frac{w^{(1)}_{10} + B^2 c^3 w^{(1)}_{01}}{(1 - B^2 c^2)^{3/2}}. \tag{56b}$$

Cazul cînd aripa prezintă antisimetrie de incidenţă

În cazul antisimetriei de incidenţă vom avea

$$w^{(2)}_{10} = -w^{(1)}_{10}, \quad w^{(2)}_{01} = w^{(1)}_{01}, \tag{57a}$$

$$G_{20} = -C_{20}, \; G_{21} = -C_{21}, \; A_{20} = A_{22} = 0. \tag{57b}$$

Vom menţiona că în acest caz al antisimetriei de incidenţă se încadrează şi cazul mişcării de rotaţie de ruliu a sistemului considerat, în care vom avea

$$w^{(j)}_{10} = 0, \; w^{(j)}_{01} = \dot{\psi} \; (w = \dot{\Psi} x_2), \tag{58}$$

unde am notat prin $\dot{\Psi}$ viteza unghiulară a rotaţiei de ruliu.

Introducînd aceste relaţii în (47) şi considerînd că pe întreaga aripă incidenţa este dată de aceeaşi relaţie ($s = c$), vom obţine după efectuarea calculelor următoarea expresie pentru funcţia vitezei axiale de perturbaţie :

$$\mathcal{U}_1 = \frac{A_{21} X}{\sqrt{L^2 - X^2}} + (C^*_{20} + C^*_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(L - X)(L + 2c)}{2L(2c - X)}} -$$

$$-(C_{20}^{*}-C_{21}^{*}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(L+X)(L+2c)}{2L(2c+X)}}-4cC_{21}^{*}\sqrt{L^2-X^2}\left[\Pi(\rho,k)-\right.$$

$$\left.-\Pi\left(\frac{k^2}{\rho},\ k\right)\right]-C_{21}^{*}R_0\arcsin\frac{X}{L}\mathbf{i}+\mathrm{i}\Psi\sqrt{X^2-4c^2}\,, \tag{59}$$

în care $\Pi(\rho, k)$ şi $\Pi\left(\frac{k^2}{\rho},\ k\right)$ sînt integrale eliptice de speţa a III-a, unde

$$k=\frac{(l-c)^2}{(l+c)^2},\qquad \rho=-\frac{(l-c)^2(x+c)^2}{(l+c)^2(x-c)^2}, \tag{60}$$

şi în care

$$\Psi=\frac{\pi}{2}C_{21}^{*}\ \text{pe porţiunea}\ M_1A_1\ (2c<X=Y<L),$$

$$\Psi=-\frac{\pi}{2}C_{21}^{*}\ \text{pe porţiunea}\ M_2A_2\ (-L<X=Y<-2c),$$

$\Psi=0$ pe restul aripii fictive $(-2c<X=Y<2c)$.

În expresia de mai sus constantele C_{20}^{*} şi C_{21}^{*} sînt date de relaţiile (55), iar constanta A_{21} se determină din condiţia (54).

4. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPA DELTA SUBŢIRE CU BORDURILE SUPERSONICE

Considerînd acelaşi sistem fuzelaj-aripă subţire ca şi în cazul precedent, cu singura deosebire că bordurile de atac sînt supersonice $\left(l>\frac{1}{B},\right.$ fig. 5$\left.\right)$ şi ţinînd seama de condiţiile la limită (19) şi de singularităţile (22) stabilite mai sus, vom putea deduce pentru funcţia $\mathcal{U}_1^{(a)}$ expresia

$$\mathcal{U}_1^{(a)}=(K_{20}'+K_{21}'X)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}}+$$

$$+(H_{20}'+H_{21}'X)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}}+\int F_{110}^{**(a)}\mathrm{d}X+$$

$$+(C_{20}'+C_{21}'X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S-X)}}+$$

$$+ (G'_{20} - G'_{21} X) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S + X)}} +$$

$$+ \int F^{*(a)}_{110} \, dX + D_{20} \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2}, \tag{61}$$

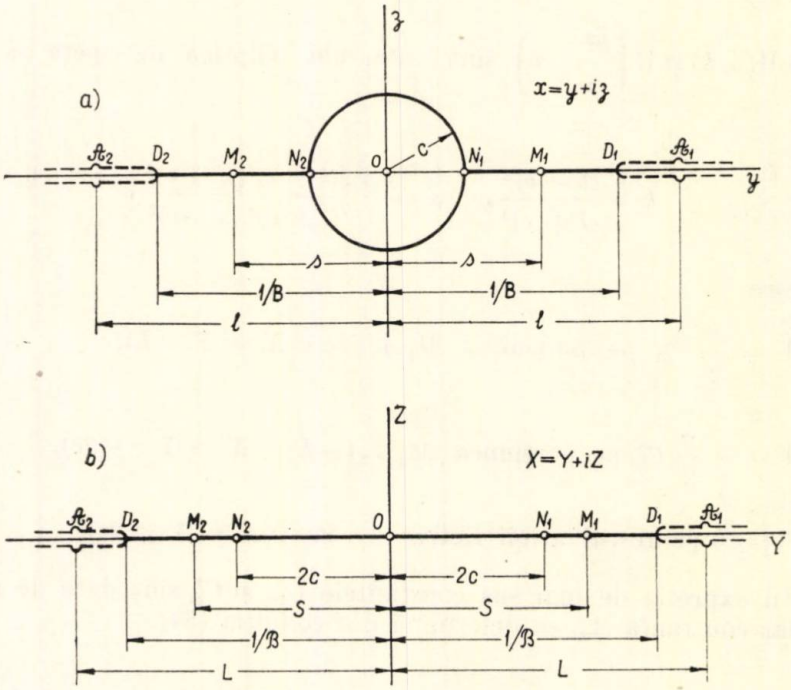


Fig. 5

în care

$$K'_{21} = \frac{Q_1}{\pi}\left(1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}\right), \quad H'_{21} = \frac{Q_2}{\pi}\left(1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}\right), \tag{62 a}$$

$$C'_{21} = \frac{C_1}{\pi}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \quad G'_{21} = \frac{C_2}{\pi}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \tag{62 b}$$

iar $F^{*(a)}_{110}$ şi $F^{**(a)}_{110}$, contribuţiile distribuţiilor continue de muchii elementare de pe porţiunile $M_j D_j$ (19b), respectiv de pe porţiunile $D_j A_j$ (19c), se vor determina din relaţiile

$$F^{*(a)}_{110} = \frac{C_1}{\pi} \int_S^{1/\mathcal{B}} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta - X)}} \, d\eta -$$

$$- \frac{C_2}{\pi} \int_S^{1/\mathcal{B}} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta + X)}} \, d\eta, \tag{63 a}$$

$$F_{110}^{**(a)} = -\frac{Q_1}{\pi}\int_{1/\mathcal{B}}^{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta-X)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{Q_2}{\pi}\int_{1/\mathcal{B}}^{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta+X)}}\,\mathrm{d}\eta. \tag{63b}$$

Introducînd aceste expresii în (61) vom obține

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{(a)} = (K_{20}+K_{21}X)\arccos\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} +$$

$$+(H_{20}+H_{21}X)\arccos\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} +$$

$$+(X^2-4c^2)\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}\int_{1/\mathcal{B}}^{L}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(\mathcal{B}^2\eta^2-1)(\eta^2-4c^2)}}\left[\frac{K_{21}}{2(\eta-X)} -\right.$$

$$\left.-\frac{H_{21}}{2(\eta+X)}\right]+(C_{20}+C_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S-X)}} +$$

$$+(G_{20}-G_{21}X)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S+X)}} +$$

$$+(X^2-4c^2)\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}\int_{S}^{1/\mathcal{B}}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{B}^2\eta^2)(\eta^2-4c^2)}}\left[\frac{C_{21}}{2(\eta-X)} +\right.$$

$$\left.+\frac{G_{21}}{2(\eta+X)}\right]+\left(\frac{K_{21}+H_{21}}{2\mathcal{B}}P_0+\frac{C_{21}-G_{21}}{2\mathcal{B}}R_0\right)\arcsin\mathcal{B}X -$$

$$-\left(\frac{K_{21}+H_{21}}{2}P_1-\frac{C_{21}-G_{21}}{2}R_1\right)X\sqrt{(1-\mathcal{B}^2X^2}+D_{20}\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}\,, \tag{64}$$

în care am notat:

$$P_0 = -\int_{1/\mathcal{B}}^{L}\sqrt{\mathcal{B}^2\eta^2-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right), \qquad P_1 = -\int_{1/\mathcal{B}}^{L}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(\mathcal{B}^2\eta^2-1)(\eta^2-4c^2)}}, \tag{65 a}$$

$$R_0 = \int_{S}^{1/\mathcal{B}}\sqrt{1-\mathcal{B}^2\eta^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4c^2}}\right), \qquad R_1 = \int_{S}^{1/\mathcal{B}}\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{B}^2\eta^2)(\eta^2-4c^2)}}, \tag{65 b}$$

$$K_{20}= K'_{20}+\frac{Q_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{L^2-4c^2}}, \qquad K_{21}= \frac{Q_1}{\pi}, \tag{65c}$$

$$H_{20}= H'_{20}-\frac{Q_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{L^2-4c^2}}, \qquad H_{21}= \frac{Q_2}{\pi}, \tag{65d}$$

$$C_{20}= C'_{20}+\frac{C_1}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{S^2-4c^2}}, \qquad C_{21}= \frac{C_1}{\pi}, \tag{65e}$$

$$G_{20}= G'_{20}+\frac{C_2}{\pi}\frac{4c^2}{\sqrt{S_1^2-4c^2}}, \qquad G_{21}= \frac{C_2}{\pi}. \tag{65f}$$

În expresia de mai sus constantele C_{20}, C_{21} şi G_{20}, G_{21} au valorile date de relaţiile (50) care au fost deduse din condiţiile (49), în timp ce constantele K_{20}, K_{21} şi H_{20}, H_{21} se vor determina din condiţiile

$$\operatorname{Im}\int_{\sigma_j}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=(-1)^j\,w_{10}^{(j)}, \tag{66a}$$

$$\operatorname{Im}\int_{\sigma_j}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_1}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=(-1)^{j+1}\,w_{01}^{(j)} \quad (j=1,2). \tag{66b}$$

Vor rezulta după efectuarea calculelor următoarele expresii pentru constantele K_{20}, K_{21} şi H_{20}, H_{21}:

$$K_{20}=-\frac{2l}{\pi}\frac{(B^2l^2-2)\,w_{10}^{(1)}-lw_{01}^{(1)}}{(B^2l^2-1)^{3/2}}, \tag{67a}$$

$$K_{21}=-\frac{1}{\pi}\frac{w_{10}^{(1)}+B^2l^3\,w_{01}^{(1)}}{(B^2l^2-1)^{3/2}}, \tag{67b}$$

$$H_{20}=-\frac{2l}{\pi}\frac{(B^2l^2-2)\,w_{10}^{(2)}+lw_{01}^{(2)}}{(B^2l^2-1)^{3/2}}, \tag{67c}$$

$$H_{21}=\frac{1}{\pi}\frac{w_{10}^{(2)}-B^2l^3\,w_{01}^{(2)}}{(B^2l^2-1)^{3/2}}. \tag{67d}$$

În ceea ce priveşte constanta D_{20}, aceasta se determină utilizînd condiţia (42).

Cazul simetriei de incidenţă

Considerînd cazul cînd incidenţa este simetrică şi este dată de aceeaşi relaţie pe întreaga aripă

$$w_{10}^{(2)}=w_{10}^{(1)}, \quad w_{01}^{(2)}=-w_{01}^{(1)}, \quad s=c, \tag{68a}$$

$$H_{20} = K_{20},\quad H_{21} = -K_{21},\quad G_{20} = C_{20} = C^*_{20},\quad G_{21} = C_{21} = C^*_{21}, \tag{68b}$$

vom obține pentru funcția vitezei axiale, după efectuarea calculelor, expresia

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 = {} & (K_{20} + K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} + \\ & + (K_{20} - K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} + \\ & + K_{21} \sqrt{X^2 - 4c^2} \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^2)(L^2 - 4c^2)}{(L^2 - X^2)(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} + \\ & + (C^*_{20} + C^*_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B} X)(1 + 2\mathcal{B} c)}{2\mathcal{B}(2c - X)}} + \\ & + (C^*_{20} - C^*_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} X)(1 + 2\mathcal{B} c)}{2\mathcal{B}(2c + X)}} + \\ & + \frac{i\pi}{2} C^*_{21} \sqrt{X^2 - 4c^2} + D_{20} \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2},\end{aligned} \tag{69}$$

în care constantele C_{20} și C_{21} sînt date de relațiile (56).

Cazul antisimetriei de incidență

În cazul cînd incidența aripii este antisimetrică, fiind dată de aceeași relație pe întreaga aripă

$$w^{(2)}_{10} = -w^{(1)}_{10},\quad w^{(2)}_{01} = w^{(1)}_{01},\quad s = c, \tag{70 a}$$

$$H_{20} = -K_{20},\ H_{21} = K_{21},\ G_{20} = -C_{20} = -C^*_{20},\ G_{21} = -C_{21} = -C^*_{21} \tag{70b}$$

vom obține în cele din urmă pentru funcția vitezei axiale de perturbație expresia

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 = {} & (K_{20} + K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} - \\ & - (K_{20} - K_{21} X) \arccos \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B} X)(1 + \mathcal{B} L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} + \\ & + K_{21} \frac{1 - 2\mathcal{B} c}{1 + 2\mathcal{B} c} \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2} \left[\frac{X + 2c}{\mathcal{B} X - 1} \Pi(\varphi_0, \rho_1, k_0) - \right.\end{aligned}$$

$$-\frac{X-2c}{\mathcal{B}X+1}\Pi(\varphi_0,\ \rho_2,\ k_0)\Big]+(C^*_{20}+C^*_{21}X)\operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c-X)}}-$$

$$-(C^*_{20}-C^*_{21}X)\operatorname{arg ch}\sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}}-$$

$$-4cC^*_{21}\sqrt{(1-\mathcal{B}^2X^2}\left[\Pi(\rho,k)-\Pi\left(\frac{k^2}{\rho},\ k\right)\right]-\left(\frac{K_{21}}{\mathcal{B}}P_0+\right.$$

$$\left.+\frac{C^*_{21}}{\mathcal{B}}R_0\right)\arcsin\mathcal{B}X+f\sqrt{X^2-4c^2}+\mathrm{i}\,\Psi\sqrt{X^2-4c^2},\tag{71}$$

în care constantele K_{20}, K_{21} și C^*_{20}, C^*_{21} sînt date de relațiile (67), respectiv de (56) și în care

$$k=\frac{(1-Bc)^2}{(1+Bc)^2},\qquad \rho=\frac{(1-Bc)^2(x+c)^2}{(1+Bc)^2(x-c)^2},\tag{72a}$$

$$k_0=\frac{\sqrt{8\mathcal{B}c}}{1+2\mathcal{B}c},\qquad \varphi_0=\arcsin\sqrt{\frac{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}L-1)}{2\mathcal{B}(L-2c)}},\tag{72b}$$

$$\rho_1=-\frac{2\mathcal{B}(X-2c)}{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}X-1)},\quad \rho_2=-\frac{2\mathcal{B}(X+2c)}{(1+2\mathcal{B}c)(\mathcal{B}X+1)},\tag{72c}$$

iar funcțiile f și ψ sînt definite pe sistemul considerat sub forma :

$f=\frac{\pi}{2}K_{21}$ pe porțiunile $D_j\mathcal{A}_j\ (1/\mathcal{B}<|Y|<L)$,

$f=0$ pe restul aripii fictive $\left(-\frac{1}{\mathcal{B}}<Y<\frac{1}{\mathcal{B}}\right)$,

$\Psi=\frac{\pi}{2}C^*_{21}$ pe porțiunea $M_1A_1\ (S<Y<1/\mathcal{B})$,

$\Psi=-\frac{\pi}{2}C^*_{21}$ pe porțiunea $M_2A_2\ (-1/\mathcal{B}<Y<-S)$,

$\Psi=0$ pe restul aripii fictive ($|Y|<S$, $|X|>1/\mathcal{B}$).

5. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ—ARIPĂ DELTA DE GROSIME SIMETRICĂ

Să considerăm sistemul format dintr-un fuzelaj fără incidenţă şi o aripă de grosime simetrică, de asemenea fără incidenţă, avînd panta nulă pe porţiunile centrale $N_j M_j$, iar pe porţiunile $M_j A_j$ avînd pantele $\pm \gamma_j$ corespunzătoare vitezei verticale dată pe extradosul acestor porţiuni sub forma

$$w = \gamma_j U_\infty = x_1 (w_{10}^{(j)} + y\, w_{01}^{(j)}) \qquad (j = 1, 2). \tag{73}$$

După cum am arătat şi în [2], pe extradosul unui astfel de sistem mişcarea este echivalentă cu cea de pe extradosul unui sistem fuzelaj-aripă subţire, avînd aceeaşi distribuţie a vitezei verticale, şi prelungit pînă în afara conului Mach printr-o placă fără incidenţă.

Ţinînd seama de această observaţie şi procedînd într-un mod analog ca în cazurile precedente, vom obţine în cele din urmă pentru funcţia $\mathcal{U}_1^{(a)}$, în cazul bordurilor subsonice, expresia

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1^{(a)} = {} & (K''_{20} + K''_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L - X)}} + \\
& + (H''_{20} - H''_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L + X)}} + \int F''^{(a)}_{110}\, \mathrm{d}X + \\
& + (C'_{20} + C'_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S - X)}} + \\
& + (G'_{20} - G'_{21} X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S + X)}} + \int F^{*(a)}_{110}\, \mathrm{d}X + \\
& + D_{20} \sqrt{1 - \mathcal{B}^2 X^2},
\end{aligned} \tag{74}$$

unde

$$C'_{21} = \frac{C_1}{2}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \quad G'_{21} = \frac{C_2}{2}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4c^2}}\right), \tag{75a}$$

$$K''_{21} = \frac{G_1}{2}\left(1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}\right), \quad H''_{21} = \frac{G_2}{2}\left(1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 - 4c^2}}\right), \tag{75b}$$

şi în care $F^{*(a)}_{110}$ şi $F''^{(a)}_{110}$, contribuţiile distribuţiilor continue de muchii elementare de pe porţiunile $M_j D_j$ şi respectiv $D_j A_j$, vor fi date de relaţiile (63 a) şi respectiv

$$\begin{aligned}
F''^{(a)}_{110} = {} & \int_L^{1/\mathcal{B}} \left[\frac{G_1}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta - X)}} - \right. \\
& \left. - \frac{G_2}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X)(1 + \mathcal{B}\eta)}{2\mathcal{B}(\eta + X)}} \right] \mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right).
\end{aligned} \tag{76}$$

Introducînd aceste expresii în (74), se va obține pentru $\mathcal{U}_1$ expresia

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{(a)} = (K_{20}^* + K_{21}^* X) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} +$$

$$+ (H_{20}^* + H_{21}^* X) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} +$$

$$+ (X^2 - 4c^2)\sqrt{1-\mathcal{B}^2 X^2} \int_L^{1/\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{B}^2\eta^2)(\eta^2-4c^2)}} \left[\frac{K_{21}^*}{2(\eta - X)} + \right.$$

$$\left. + \frac{H_{21}^*}{2(\eta + X)} \right] + (C_{20} + C_{21} X) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S-X)}} +$$

$$+ (G_{20} - G_{21} X) \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}S)}{2\mathcal{B}(S+X)}} +$$

$$+ (X^2 - 4c^2)\sqrt{1-\mathcal{B}^2 X^2} \int_S^{1/\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{B}^2\eta^2)(\eta^2-4c^2)}} \left[\frac{C_{21}}{2(\eta - X)} + \right.$$

$$\left. + \frac{G_{21}}{2(\eta + X)} \right] + \left(\frac{K_{21}^* - H_{21}^*}{2} P_0^* + \frac{C_{21} - G_{21}}{2} R_0 \right) \arcsin \mathcal{B}X +$$

$$+ \left(\frac{K_{21}^* - H_{21}^*}{2} P_1^* + \frac{C_{21} - G_{21}}{2} R_1 \right) X \sqrt{1-\mathcal{B}^2 X^2} + D_{20}\sqrt{1-\mathcal{B}^2 X^2} \tag{77}$$

în care R_0, R_1 sînt date de relațiile (65 b), iar P_0^*, P_1^* de relațiile

$$P_0^* = \int_L^{1/\mathcal{B}} \sqrt{1-\mathcal{B}^2\eta^2}\, \mathrm{d}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}} \right), \quad P_1^* = \int_L^{1/\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{B}^2\eta^2)(\eta^2-4c^2)}} \tag{78}$$

și constantele C_{20}, C_{21} și G_{20}, G_{21} au valorile date în relațiile (50), în timp ce constantele K_{20}^*, K_{21}^* și H_{20}^*, H_{21}^* au expresiile

$$K_{20}^* = -\frac{2l}{\pi} \frac{(2 - B^2 l^2) w_{10}^{(1)} + l w_{01}^{(1)}}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}, \tag{79a}$$

$$K_{21}^* = \frac{1}{\pi} \frac{w_{10}^{(1)} + B^2 l^3 w_{01}^{(1)}}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}, \tag{79b}$$

$$H_{20}^* = -\frac{2l}{\pi} \frac{(2 - B^2 l^2) w_{10}^{(2)} - l w_{01}^{(2)}}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}, \tag{79c}$$

$$H_{21}^* = \frac{1}{\pi} \frac{w_{10}^{(2)} - B^2 l^3 w_{01}^{(2)}}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}. \tag{79d}$$

Considerînd cazul cînd panta aripii este simetrică şi dată de aceeaşi relaţie pe întreaga aripă

$$w_{10}^{(2)} = w_{10}^{(1)},\ w_{01}^{(2)} = -w_{01}^{(1)},\ s = c, \tag{80 a}$$

$$H_{20}^* = K_{20}^*,\ H_{21}^* = K_{21}^*,\ G_{20} = C_{20} = C_{20}^*,\ G_{21} = C_{21} = C_{21}^* \tag{80 b}$$

va rezulta pentru funcţia $\mathcal{U}_1$ expresia

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 = {} & (K_{20}^* + K_{21}^* X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L-X)}} + \\ & + (K_{20}^* - K_{21}^*) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+\mathcal{B}L)}{2\mathcal{B}(L+X)}} + \\ & + K_{12}^* \sqrt{X^2 - 4c^2} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}^2X^2)(L^2-4c^2)}{(L^2-X^2)(1-4\mathcal{B}^2c^2)}} + \\ & + (C_{20}^* + C_{21}^* X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1-\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}C)}{2\mathcal{B}(2c-X)}} + \\ & + (C_{20}^* - C_{21}^* X) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+\mathcal{B}X)(1+2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c+X)}} + \\ & + \frac{i\pi}{2} C_{21}^* \sqrt{X^2 - 4c^2} + D_{20} \sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}. \end{aligned} \tag{81}$$

În cazul cînd bordurile sînt supersonice ($l < 1/B$), funcţia viteze axiale de perturbaţie $\mathcal{U}_1$ va avea aceeaşi expresie (64) sau respectiv (69) ca în cazul sistemului fuzelaj-aripă subţire cu bordurile subsonice.

BIBLIOGRAFIE

1. Carafoli E., Mateescu D., *High order conical flow around a delta wing fitted with conical body*, Proceedings of the Seminar on Aeronautical Sciences (Nov. 27, Dec., 2, 1961, Bangalore, India), p. 249–69.
2. — *The wing-conical body interference in high order conical flow*, Revue de Méc. Appl., **7**, *3* (1962).
3. Carafoli E., *High-speed aerodynamics*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
4. Carafoli E., Mateescu D., *Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogènes en régime supersonique*, Rev. roum. sci. techn. Méc. Appl., **10**, *2* (1965).
5. Mateescu D., *Tragflügel mit besonderer Abschlussfläche in Uberschallstromung*, Revue de Méc. Appl., **8**, *1* (1963).
6. — *Supersonic flow around polygonal wings*, Thin wings and wings of symetrical thickness, Rev. Roum. sci. tech. Méc. Appl., **11**, *3* (1966).
7. — *Cruciform wings and tails fitted with conical bodies in supersonic flow. II High order conical flow.*, Rev. Roum. sci. tech., Méc. Appl., **14**, *1* (1969).

DEZLOCUIREA INTEGRALĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE NEOMOGENE

de VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Se studiază dezlocuirea unui fluid de către altul într-un mediu poros neomogen, în ipoteza că între cele două fluide există un front de separare. Nu se face nici o ipoteză restrictivă asupra permeabilităţii. Ecuaţiile de mişcare se scriu sub formă complexă referitoare la alte funcţii necunoscute şi condiţiile la limită se transpun pentru aceste funcţii. Problema generală a mişcării este redusă la rezolvarea unei probleme la limită de tip Riemann generalizat în clasa funcţiilor analitice generalizate. Soluţia problemei se aplică la unele cazuri particulare rezultatele comparîndu-se cu cele date în literatură pentru cazuri similare.

INTRODUCERE

În lucrarea [1] ne-am ocupat de studiul mişcării unui fluid într-un mediu poros neomogen oarecare, supunînd funcţia $k\ (x,\ y)$ de distribuţie a permeabilităţii numai condiţiei $k(x,\ y) > 0$ în tot planul complex z. Faţă de rezultatele obţinute pînă în prezent în literatură [2], [3], în care se presupune variaţia unidimensională a permeabilităţii sau permeabilitatea cu variabilele separate, credem că aceasta reprezintă o generalizare. În această ipoteză am formulat problema matematică şi am exprimat soluţia generală, fără a ţine seama de condiţiile la limită. În cazul mişcării în prezenţa unui sistem arbitrar de sonde de injecţie şi de extracţie plasate în planul complex, am exprimat potenţialul de mişcare în funcţie de debitele sondelor.

În ceea ce priveşte studiul dezlocuirii integrale a unui fluid care saturează un mediu poros la distanţă finită mărginit de pereţi impermeabili, de către altul introdus sub presiune în zăcămînt, prin faptul că problema matematică este mult mai complicată, datorită frontului de dezlocuire, simplificările făcute sînt mult mai restrictive. În această direcţie nu s-a depăşit cu mult cazul neomogeneităţii unidimensionale [4].

În lucrarea de faţă ne propunem să abordăm studiul dezlocuirii integrale într-un mediu neomogen oarecare în care distribuţia permeabi-

ST. CERC. MEC. AP L., tom. 28, NR. 6, P. 1303–1320, 1969

lității este supusă numai condiției de a fi pozitivă în plan. În acest caz vom da o soluție generală a problemei care poate fi aplicată la diferite cazuri particulare, dificultățile reducîndu-se la integrarea unor ecuații de tip Fredholm.

Problema generală a mișcării este redusă la rezolvarea unei probleme la limită liniare de tip Riemann generalizat în clasa funcțiilor analitice generalizate, problemă de care ne-am ocupat într-o altă lucrare [5]. Rezultatele obținute în această lucrare vor fi utilizate direct în rezolvarea problemei de care ne ocupăm, fără a mai justifica exactitatea lor.

I. PROBLEMA GENERALĂ A DEZLOCUIRII ÎN MEDIU NEOMOGEN

În acest prim capitol al lucrării vom expune condițiile mecanice de mișcare și ipotezele în care ne situăm și vom formula problema matematică la care se reduce studiul mișcării.

1. *Considerații generale asupra mișcării.* În lucrarea de față vom face ipoteza că mișcarea este plană și că neglijăm efectul gravitației. În ceea ce privește configurația geometrică presupunem că avem n sonde de injecție în punctele z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ plasate în interiorul frontului de dezlocuire L care variază pe măsură ce injecția progresează (fig. 1). În

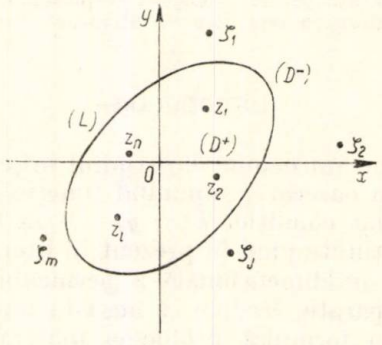


Fig. 1

exteriorul lui L se găsesc m sonde de extracție plasate în punctele ζ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ în așa fel încît debitul total injectat să fie egal cu cel extras

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^+ = \sum_{j=1}^{m} Q_j^-,$$

unde Q_i^+ este debitul sondei din z_i, iar Q_j^- debitul sondei din ζ_j.

Curba L separă în planul z domeniul ocupat de fluidul de injecție cu viscozitate μ_1 de domeniul ocupat de fluidul de extracție cu viscozitate μ_2. Trebuie să remarcăm că această configurație a dezlocuirii plane nu este cea mai generală posibilă deoarece am presupus că toate sondele de injecție se găsec în interiorul frontului la momentul inițial. Se poate

întîmpla ca fiecare sondă de injecție în parte sau grupe de sonde de injecție să fie cuprinse în interiorul unui front de separare. În acest caz, domeniul ocupat de fluidul de injecție este multiplu conex. Studiul acestei probleme îl vom aborda într-o altă lucrare.

În domeniul D^+ ocupat de fluidul de injecție de viscozitate μ_1, cîmpul de viteze are expresia,

$$\overline{V}^+ = -\frac{k(x, y)}{\mu_1} \nabla p^+(x, y), \tag{1}$$

iar în domeniul D^-, ocupat de fluidul de extracție de viscozitate μ_2, cîmpul de viteze are expresia,

$$\overline{V}^- = -\frac{k(x, y)}{\mu_2} \nabla p^-(x, y). \tag{2}$$

În domeniile respective cele două cîmpuri de viteze satisfac ecuațiile de continuitate

$$\nabla \overline{V}^+(x, y) = \nabla \overline{V}^-(x, y) = 0. \tag{3}$$

Funcțiile $p^+(x, y)$ și $p^-(x, y)$ sînt distribuțiile de presiuni în domeniile D^+ respectiv D^-. Pornind de la ecuațiile (1), (2) și (3) vom stabili problema la limită la care se reduce studiul mișcării, oprindu-ne numai la ceea ce este caracteristic dezlocuirii, căci problema mișcării generale în mediul neomogen a fost pusă în lucrarea citată [1].

2. *Problema matematică a dezlocuirii în mediul neomogen.* Dacă aplicăm ecuațiilor (1) și (2) operatorul ∇ și ținem seama de ecuațiile (3) obținem în cele două domenii de mișcare respectiv,

$$\Delta p^+(x, y) + \nabla f(x, y) \nabla p^+(x, y) = 0, \tag{4}$$

$$\Delta p^-(x, y) + \nabla f(x, y) \nabla p^-(x, y) = 0, \tag{4'}$$

unde am notat

$$f(x, y) = \ln k(x, y).$$

Este evident, din cele de mai sus, că elementele notate $(\ )^+$ se referă la domeniul D^+ iar cele notate $(\ )^-$ se referă la D^-, convenție pe care o vom păstra în tot cursul lucrării.

Dacă introducem notațiile

$$u^+(x, y) = \frac{\partial p^+(x, y)}{\partial x}; \quad v^+(x, y) = -\frac{\partial p^+(x, y)}{\partial y}, \tag{5}$$

ecuaţia (4) este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale :

$$\frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial v^+}{\partial y} = - u^+ \frac{\partial f}{\partial x} + v^+ \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial y} + \frac{\partial v^+}{\partial x} = 0,$$

care poate fi scris la rîndul său în formă complexă (înmulţind ultima ecuaţie cu i şi adunînd cu prima)

$$\frac{\partial U^+(z)}{\partial \bar{z}} = A(z)\, U^+(z) + \overline{A(z)}\ \overline{U^+(z)}, \tag{6}$$

unde am notat

$$U^+(z) = u^+(x, y) + \mathrm{i}\, v^+(x, y),$$

$$A(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \tag{5'}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Remarcăm că $U^+(z)$ şi $A(z)$ sînt funcţii complexe de x şi y care depind de z şi $\bar{z}$ prin relaţiile

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

Deoarece z şi $\bar{z}$ nu sînt independente, păstrăm în funcţiile scrise notaţiile făcute, cu specificarea faptului că ele nu sînt olomorfe.

Ecuaţia (15) poate fi adusă la o formă mai simplă prin schimbarea de funcţie,

$$U^+(z) = V^+(z)\, \mathrm{e}^{\omega^+(z)}, \tag{7}$$

unde $\omega^+(z)$ are expresia

$$\omega^+(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^+} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta,$$

iar $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$. Funcţia $\omega^+(z)$ satisface în D^+ ecuaţia [6]

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial \bar{z}} = A(z).$$

Ţinînd seama de substituţia (7), noua funcţie necunoscută $V(z)$ va satisface ecuaţia

$$\frac{\partial V^+(z)}{\partial \bar{z}} = B^+(z)\,\overline{V^+(z)}, \tag{8}$$

unde

$$B^+(z) = \overline{A(z)}\,e^{\overline{\omega^+(z)} - \omega^+(z)}.$$

Raţionînd într-un mod similar pentru ecuaţia (4') se ajunge, făcînd aceleaşi substituţii ca mai sus, unde schimbăm indicele $(\ )^+$ cu $(\ )^-$ (ceea ce înseamnă că ne referim la domeniul D^-), la ecuaţia,

$$\frac{\partial V^-(z)}{\partial \bar{z}} = B^-(z)\,\overline{V^-(z)}. \tag{8'}$$

Problema este cu acestea redusă la integrarea ecuaţiilor (8) şi (8') în domeniile complementare D^+ şi D^-, separate prin curba L, pe care valorile limită $V^+(t)$ şi $V^-(t)$ ale funcţiilor $V^+(z)$ respectiv $V^-(z)$ satisfac o relaţie ce trebuie dedusă din condiţiile fizice de mişcare la trecerea peste L. Acestea sînt :

$$p^+(x, y) = p^-(x, y), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial p^-}{\partial n}, \tag{9'}$$

prima relaţie reprezentînd egalitatea presiunilor şi cea de a doua egalitatea debitelor la traversarea lui L. Deoarece ecuaţiile (4) şi (4') pentru presiune au fost aduse la formele (8) şi (8'), va trebui să exprimăm condiţiile la limită în $V^+(z)$ şi $V^-(z)$ pe L. Pentru aceasta derivăm relaţia (9) în lungul lui L şi obţinem,

$$\frac{\partial p^+}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial p^+}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial p^-}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial p^-}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Condiţia (9') se scrie în forma,

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p^+}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p^+}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial p^-}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p^-}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\right).$$

Ţinînd seama de notaţiile (5) şi (5') în domeniile D^+ şi D^-, relaţiile precedente se scriu,

$$(U^+ + \overline{U}^+)\frac{dx}{ds} - \frac{U^+ - \overline{U}^+}{i}\frac{dy}{ds} = (U^- + \overline{U}^-)\frac{dx}{ds} - \frac{U^- - \overline{U}^-}{i}\frac{dy}{ds}, \tag{10}$$

$$(U^+ + \overline{U}^+)\frac{dy}{ds} + \frac{U^+ - \overline{U}^+}{i}\frac{dx}{ds} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left[(U^- + \overline{U}^-)\frac{dy}{ds} + \frac{U^- - \overline{U}^-}{i}\frac{dx}{ds}\right] \tag{10'}$$

Condițiile precedente se mai pot încă transforma ținînd seama de ecuația curbei sub formă complexă

$$\tau(s) = x(s) + \mathrm{i}\, y(s),$$

de unde se deduce

$$\tau'(s) = x'(s) + \mathrm{i}\, y'(s)$$

și deci putem scrie relațiile

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\tau' + \bar{\tau}'}{2}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\tau' - \bar{\tau}'}{2\mathrm{i}}.$$

Înmulțind cu i relația (10′) și adunînd-o cu (10) se deduce după calcule ușor de urmărit,

$$U^+ - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} U^- + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} \overline{U}^- = 0, \tag{11}$$

unde am ținut seama de ecuația curbei.

Vom avea acum în vedere relația dintre U^+ și V^+ și apoi relația dintre U^- și V^- pe L. Ținînd seama de faptul că funcția $\omega(z)$ este continuă la traversarea frontierei, acestea se scriu :

$$U^+(t) = V^+(t)\ \mathrm{e}^{\omega^+(t)},$$

$$U^-(t) = V^-(t)\ \mathrm{e}^{\omega^-(t)},$$

după care relația (11) devine,

$$\mathrm{e}^{\omega^+(t)}\ V^+(t) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} \mathrm{e}^{\omega^-(t)}\ V^-(t) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} \mathrm{e}^{\overline{\omega^-(t)}}\ \overline{V^-(t)} = 0. \tag{12}$$

Va trebui deci să găsim funcțiile analitice generalizate $V^+(z)$ și $V^-(z)$ definite în domeniile D^+ respectiv D^-, soluții ale ecuațiilor (8) respectiv (8′) ale căror valori limită pe L satisfac relația (12).

În condiția la limită de mai sus recunoaștem o condiție ce definește o problemă de tip Riemann generalizată, atît în sensul că funcțiile $V^+(z)$ și $V^-(z)$ sînt analitice generalizate cît și în acela că față de condiția lui. Riemann clasică în relația (12) apare în plus termenul care conține pe $\overline{V^-(t)}$.

În clasa funcțiilor analitice generalizate se cere ca soluțiile problemelor la limită să fie regulate în tot domeniul lor de existență, după cum în clasa funcțiilor olomorfe se cere ca soluțiile să fie olomorfe. În cazul problemei pe care o studiem sondele introduc singularități care trebuie excluse. Pentru aceasta, ca și în cazul mișcării în mediul omogen [7], vom scădea din soluția problemei la limită potențialul mișcării unui singur fluid în același mediu poros datorat acelorași sonde pozitive și negative. Prin aceasta problema la limită pentru funcția diferență va conduce la o soluție regulată. În cele ce urmează ne vom ocupa de această chestiune.

II. SOLUȚIA PROBLEMEI LA LIMITĂ A DEZLOCUIRII

În acest capitol ne vom ocupa de formularea problemei la limită a mișcării și de exprimarea soluției ecuației potențialului de mișcare în care punctele singulare din sonde au fost izolate.

1. *Eliminarea singularităților din potențialul de mișcare.* Pentru a scoate singularitățile din domeniul de existență al soluțiilor problemei la limită formulată mai sus, facem schimbarea de funcție,

$$W(z) = V(z) - V_0(z), \tag{13}$$

unde $W(z)$ este noua funcție necunoscută iar $V_0(z)$ este expresia potențialului de mișcare al unui singur fluid în prezența sistemului de $m+n$ sonde, în mediul neomogen studiat, a cărei expresie a fost dedusă în [1],

$$V_0(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - \zeta_j} + \iint_E \Gamma_1(z, \zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\zeta - z_i} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{\zeta - \zeta_j} \right] d\xi\, d\eta + \iint_E \Gamma_2(z, \zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{A}_i}{\bar{\zeta} - \bar{z}_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{B}_j}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_j} \right] d\xi\, d\eta.$$

Funcția $W(z)$ va satisface ecuația

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = B_1(z)\, \overline{W(z)} + c_1(z), \tag{15}$$

în care coeficienții $B_1(z)$ și $C_1(z)$ sînt discontinui pe L și au expresiile,

$$B_1^+(z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} e^{\bar{\omega}^+ - \omega^+} \qquad \text{în } D^+,$$

$$B_1^-(z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} e^{\bar{\omega}^- - \omega^-} \qquad \text{în } D^-,$$

$$C_1^+(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \left(1 - e^{\bar{\omega}^+ - \omega^+}\right) \overline{V}_0(z) \qquad \text{în } D^+,$$

$$C_1^-(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} (1 - e^{\bar{\omega}^- - \omega^-}) \overline{V}_0(z) \qquad \text{în } D^-.$$

Soluția generală a ecuației (15) este soluția generală a ecuației omogene la care se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene. Ea va avea expresia [6],

$$W^+(z) = \Phi^+(z) + \iint_{D+} \Gamma_1^+(z, \zeta)\, \Phi^+(\zeta)\, d\xi\, d\eta + \iint_{D+} \Gamma_2^+(z, \zeta)\, \overline{\Phi^+(\zeta)}\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ W_0^+(z), \tag{16}$$

$$W^-(z) = \Phi^-(z) + \iint_{D_-} \Gamma_1^-(z,\zeta)\,\Phi^-(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \iint_{D_-} \Gamma_2^-(z,\zeta)\,\overline{\Phi^-(\zeta)}\,d\xi\,d\eta + \\ + W_0^-(z), \tag{16'}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcție olomorfă pe porțiuni arbitrară și am notat,

$$W_0^{\pm}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\zeta - z} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \Gamma_1^{\pm}(z,\zeta)\left[\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi_1,\eta_1)}{\zeta_1 - \zeta}\,d\xi_1\,d\eta_1\right] d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \Gamma_2^{\pm}(z,\zeta)\left[\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi_1,\eta_1)}{\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}}\,d\xi_1\,d\eta_1\right] d\xi d\eta \tag{17}$$

expresia soluției particulare a ecuației neomogene în care semnele se corespund. Faptul că expresia (16) este o soluție a ecuației (15) se verifică imediat. Să arătăm întîi că expresia

$$E(z) = \Phi^+(z) + \iint_{D^+} \Gamma_1^+(z,\zeta)\,\Phi^+(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \iint_{D^+} \Gamma_2^+(z,\zeta)\,\overline{\Phi^+(\zeta)}\,d\xi d\eta$$

este soluția ecuației omogene (15) ($C_1(z) = 0$). Pentru simplificarea scrierii să punem expresia E sub forma

$$E(z) = \Phi^+(z) + U_1(z) + U_2(z),$$

în care notațiile sînt evidente. Avem

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial U_2}{\partial \bar{z}},$$

căci $\Phi^+(z)$ este olomorfă în D^+. Primul termen al expresiei de mai sus este

$$\frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\iint_{D^+} \Gamma_1^+(z,\zeta)\,\Phi(\zeta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\iint_{D^+} \frac{K_{2j}^+(z,\zeta)}{\pi^{2j}}\,\Phi(\zeta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}}\iint_{D^+} \frac{\partial K_{2j}^+(z,\zeta)}{\partial \bar{z}}\,\Phi(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Ţinem acum seama de relaţiile de recurenţă care definesc funcţiile $K_j^+(z, \zeta)$.

$$K_1^+(z, \zeta) = \frac{B_1(\xi, \eta)}{\zeta - z}; \quad K_n(z, \zeta) = \iint_{D^+} K_1(z, \zeta)\, \overline{K_{n-1}(\zeta_1, \zeta)}\, d\xi_1\, d\eta_1,$$

în care $B_1(z)$ este coeficientul ecuaţiei pe care vrem s-o verificăm calculat în punctul ζ, iar $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ este un punct curent în D^+. Cu aceasta derivata lui $U_1(z)$ în raport cu $\bar{z}$ se scrie,

$$\frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}} \iint_{D^+} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\iint_{D^+} K_1(z, \zeta)\, \overline{K_{2j-1}(\zeta_1, \zeta)}\, d\xi_1\, d\eta_1 \right] \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}} \iint_{D^+} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\iint_{D^+} \frac{B_1(\xi_1, \eta_1)}{\zeta_1 - z}\, \overline{K_{2j-1}(\zeta_1, \zeta)}\, d\xi_1\, d\eta_1 \right] \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}} \iint_{D^+} (-\pi) \left[B_1(x, y)\, \overline{K_{2j-1}(z, \zeta)} \right] \Phi(\zeta) d\xi\, d\eta =$$

$$= B_1(x, y) \iint_{D^+} \left[-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j-1}}\, \overline{K_{2j-1}(z, \zeta)} \right] \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= B_1(x, y) \iint_{D^+} \overline{\Gamma_2(z, \zeta)}\, \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta = B_1(x, y)\, \overline{U_2(z)}.$$

Pentru calculul în raport cu $\bar{z}$ a derivatei funcţiei $U_2(z)$ vom scrie pe $\Gamma_2(z, \zeta)$ în forma,

$$\Gamma_2(z, \zeta) = -\frac{K_1(z, \zeta)}{\pi} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{K_{2j-1}(z, \zeta)}{\pi^{2j-1}} = -\frac{1}{\pi} \frac{B_1(x, y)}{\zeta - z} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{K_{2j-1}}{\pi^{2j-1}}$$

după care se deduce succesiv

$$\frac{\partial U_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint_{D^+} \Gamma_2(z, \zeta)\, \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi d\eta = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{K_{2j-1}(z, \zeta)}{\pi^{2j-2}}\, \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \frac{B_1(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta \right] =$$

$$= B_1(x, y) \overline{\Phi(z)} + \iint_{D^+} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j-2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\frac{1}{\pi} K_{2j-1}(z, \zeta) \right] \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta.$$

Dacă ţinem seama de expresia lui $K_{2j-1}(z, \zeta)$ avem

$$\frac{\partial U_2}{\partial \bar{z}} = B_1(x, y)\,\overline{\Phi(z)} + \iint_{D^+} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j-2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \frac{B_1(\xi_1, \eta_1)}{\zeta_1 - z}\, \overline{K_{2j-2}(\zeta_1, \zeta)}\, d\xi_1\, d\eta_1 \right] \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta = B_1(x, y)\,\overline{\Phi(z)} +$$

$$+ \iint_{D^+} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j-2}} \left[B_1(x, y)\, \overline{K_{2j-2}(z, \zeta)} \right] \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta = B_1(x, y)\,\overline{\Phi(z)} +$$

$$+ B_1(x, y) \iint_{D^+} \overline{\Gamma_1(z, \zeta)}\ \overline{\Phi(\zeta)}\ d\xi\, d\eta = B_1(x, y)\,\overline{\Phi(z)} + B_1(x, y)\,\overline{U_1(z)}.$$

Grupînd rezultatele obţinute se deduce imediat

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial U_2}{\partial \bar{z}} = B_1(x, y)\,[\overline{\Phi(z)} + \overline{U_1(z)} + \overline{U_2(z)}] =$$

$$= B_1(x, y)\,\overline{E(z)},$$

ceea ce justifică afirmaţia că $E(z)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene (15). Rămîne să verificăm că expresia

$$E_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \frac{C_1^+(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \Gamma_1^+(z, \zeta) \left[\iint_{D^+} \frac{C_1^+(\xi_1, \eta_1)}{\zeta_1 - \zeta}\, d\xi_1\, d\eta_1 \right] d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{D^+} \Gamma_2^+(z, \zeta) \left[\iint_{D^+} \frac{C_1^+(\xi_1, \eta_1)}{\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}}\, d\xi_1\, d\eta_1 \right] d\xi\, d\eta$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (15). Trebuie să atragem atenţia că $C_1(z)$ are singularităţi polare simple în sonde după cum se vede imediat din expresia sa scrisă mai sus. În afară de aceste puncte verificarea afirmaţiei este imediată urmînd acelaşi procedeu ca mai înainte.

Noi am verificat numai că expresia (16) este soluţia generală a ecuaţiei (15) în domeniul D^+. Verificarea pentru D^- este identică şi nu mai insistăm asupra ei.

În soluţia scrisă mai sus (16) şi (16′) a ecuaţiei (15), a rămas nedeterminată funcţia olomorfă pe porţiuni $\Phi(z)$ pe care o vom deduce din condiţia la limită (12) transcrisă pentru noua funcţie necunoscută $W(z)$.

2. *Problema la limită a mișcării. Soluție.* Dacă ținem seama de schimbarea de funcție efectuată (13) condiția la limită (12) ia forma,

$$W^+(t) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} e^{\omega^-(t)-\omega^+(t)} W^-(t) +$$

$$+ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(t)}-\omega^+(t)} \overline{W^-(t)} = G(t), \tag{18}$$

unde am notat

$$G(t) = \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} e^{\omega^-(t)-\omega^+(t)} - 1\right] V_0(t) -$$

$$- \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(t)}-\omega^+(t)} \overline{V_0(t)}.$$

Ecuația neomogenă (15) poate fi adusă la o ecuație omogenă cu ajutorul substituției

$$Y(z) = W(z) - W_0(z), \tag{19}$$

unde $Y(z)$ este noua funcție necunoscută iar $W_0(z)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene (15) scrisă mai sus sub forma (17). Conform substituției (19) condiția la limită (18) devine,

$$Y^+(t) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} e^{\omega^-(t)-\omega^+(t)} Y^-(t) +$$

$$+ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(t)}-\omega^+(t)} \overline{Y^-(t)} = G_1(t) \tag{20}$$

cu notația,

$$G_1(t) = G(t) - W_0^+(t) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} e^{\omega^-(t)-\omega^+(t)} W_0^-(t) -$$

$$- \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(t)}-\omega^+(t)} \overline{W_0^-(t)}.$$

Am redus așadar problema la integrarea ecuației omogene

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} = B_1(z) \overline{Y(z)}, \tag{21}$$

cu condiția la limită (20). Această problemă a fost rezolvată într-un caz mai general în lucrarea citată [5]. Partea reală a funcției $Y^+(t)\,(t \in L)$ pe care o vom nota $y_1^+(s)$ este soluția ecuației singulare,

$$f_1(s)\,y_1(s) + f_2(s)\int_L \frac{y_1^+(\sigma)\,d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \frac{N_1(t)}{\pi}\int_L y_1^+(\sigma)\,f_3(\sigma, t)\,d\sigma = f_2(s),$$

în care coeficienții $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(\sigma, t)$ și $J_2(s)$ se exprimă în funcție de coeficienții ecuației (21) și de cei ai condiției la limită (20). Cunoscîndu-se funcția $y_1^+(s)$ se deduce $Y^+(z)$ ca soluție a unei probleme a lui Dirichlet. Din condiția la limită (20) se deduce expresia lui $Y^-(t)$ cu ajutorul căreia se obține $Y^-(z)$ printr-o formulă analogă integralei de tip Cauchy. Ținînd seama de substituțiile făcute, se deduce funcția $U^{\pm}(z)$ cu ajutorul căreia se pot calcula toate elementele mișcării.

3. *Evoluția frontului de dislocuire.* Ca și în cazul mediului omogen vom determina poziția frontului de dezlocuire la momente succesive, pornind de la o poziție inițială considerată cunoscută. Deplasarea frontului de dezlocuire va fi determinată de succesiunea pozițiilor sale la diferite momente, pentru care avem de rezolvat o problemă la limită de tipul celei studiate mai sus și care permite determinarea elementelor hidrodinamice necesare calculului poziției frontului la momentul următor.

Pînă acum ne-am ocupat de problema dezlocuirii unui fluid de către altul în prezența unui sistem de sonde de injecție și de extracție plasate în tot planul. Cazul cînd sistemul de sonde se află într-un domeniu mărginit de un perete impermeabil, poate fi adus la cazul mișcării de dezlocuire în întregul plan printr-o reprezentare conformă.

Să considerăm că sondele sînt situate în domeniul D din figura 2 separate prin frontul L la poziția inițială, care împarte domeniul D în domeniile D_1 și D_2. Pe frontul L avem o condiție la limită similară cu (20) iar curba C trebuie să fie linie de curent în tot timpul mișcării.

În D_1 și D_2 potențialul mișcării satisface ecuații similare cu (21).

Reprezentăm domeniul D pe semiplanul superior al planului complex $Z = X + iY$ (fig. 3) prin transformarea,

$$z = z(Z).$$

Prin aceasta curba C devine axa reală a planului iar curba L o curbă situată în semiplanul superior, sprijinită pe axa reală, care împarte semiplanul în domeniile D_1 și D_2 unde sînt amplasate sondele de injecție, respectiv de extracție. Ecuațiile pe care le satisface potențialul de mișcare în cele două domenii,

$$\frac{\partial U^{\pm}}{\partial \bar{z}} = A^{\pm}(z)\,\overline{U^{\pm}(z)},$$

devin după transformarea efectuată,

$$\frac{\partial U^{\pm}}{\partial \overline{Z}} = A^{\pm}(Z)\,\frac{\overline{\partial z}}{\partial Z}\,\overline{U^{\pm}(Z)},$$

de același tip cu ecuația inițială. Condiția pe L va păstra o formă similară cu (20). Pentru a satisface condiția pe axa reală (de a fi linie de curent în tot timpul mișcării) vom presupune că mișcarea este generată de sis-

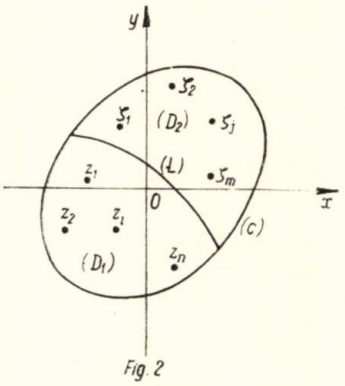


Fig. 2

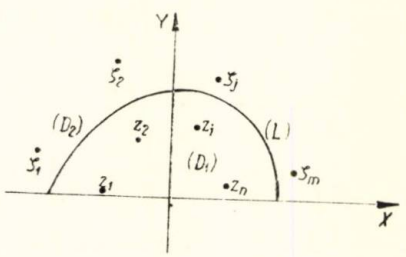


Fig. 3

temul de sonde din figura 3 la care adăugăm un sistem simetric cu el față de axa reală situat într-un mediu neomogen cu aceeași simetrie. Se obține astfel o configurație geometrică identică cu cea din figura 1 studiată mai sus, dacă, prin transformare, curba L rămîne netedă.

În acest fel se rezolvă formal problema generală a mișcării de dezlocuire integrală a două fluide într-un mediu poros neomogen, în sensul că se poate exprima soluția în termeni finiți. Acest lucru a fost posibil datorită faptului că am reușit să rezolvăm problema la limită de tip Riemann generalizat (20), ea însăși un caz particular a unei probleme la limită ce generalizează liniar problema lui Riemann pentru funcțiile analitice generalizate de care ne-am ocupat în lucrarea [5].

III. CAZURI PARTICULARE

Soluțiile problemelor la limită formulate mai sus și rezolvate pot fi aplicate la cazuri concrete de mișcări ce se întîlnesc în mod obișnuit în practica extracției petrolifere. În această lucrare ne vom limita la adaptarea metodelor utilizate și a rezultatelor obținute la studiul unor probleme mai simple rezolvate prin metode directe. Ne vom ocupa anume de problema dezlocuirii într-un mediu neomogen de permeabilitate variabilă după o singură direcție (dezlocuire liniară) și de dezlocuirea într-un mediu cu permeabilitate variabilă după razele ce pleacă din sonda de injecție (dezlocuire radială). Vom arăta că rezultatele obținute pe cele două căi coincid.

1. *Dezlocuirea liniară.* Vom considera mediul poros neomogen cuprins între dreptele paralele cu ecuații $x = x_s$ care este linie de alimentare și $x = x_c$ linie de recuperare ($x_s < x_c$). Se presupune că planul de mișcare este orizontal și că permeabilitatea nu depinde decît de variabila x. În aceste condiții, presupunînd că presiunea este constantă în lungul liniei $x = x_s$, frontul de dezlocuire va ocupa în fiecare moment o poziție paralelă cu cei doi pereți de ecuație $x = X$. Va trebui să rezolvăm ecuațiile

$$\frac{\partial U^+}{\partial \bar{z}} = A^+ U^+ + \overline{A^+}\,\overline{U^+} \tag{22}$$

în domeniul $x_s \leqslant x \leqslant X$ și

$$\frac{\partial U^-}{\partial \bar{z}} = A^- U^- + \overline{A^-}\,\overline{U^-} \tag{23}$$

în domeniul $X \leqslant x \leqslant x_s$, pe linia $x = X$ fiind satisfăcută relația

$$U^+ - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} U^- + \frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \overline{U^-} = 0. \tag{24}$$

În conformitate cu cele deja expuse în cadrul teoriei generale,

$$U^+ = u^+ + iv^+ = u^+; \qquad U^- = u^- + iv^- = u^-,$$

căci,

$$\frac{\partial p^+}{\partial y} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial p^-}{\partial y} = 0.$$

Ecuațiile scrise mai sus devin în acest caz,

$$\frac{\partial U^+}{\partial \bar{z}} = 2A^+ U^+ \quad \text{și} \quad \frac{\partial U^-}{\partial \bar{z}} = 2A^- U^-,$$

deoarece funcțiile $A^\pm$ și $U^\pm$ sînt reale și depind numai de variabila x. Funcțiile $A^\pm(x)$ au aceeași expresie analitică,

$$A^\pm(x) = -\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4}\frac{1}{k(x)}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}$$

dar definite în domenii diferite.

Soluțiile ecuațiilor scrise se pot deduce imediat [7]. Ele au forma

$$U^+ = \frac{C_1}{k(x)}; \qquad U^- = \frac{C_2}{k(x)},$$

unde C_1 și C_2 sînt numere reale arbitrare, independente de x, dar dependente de poziția frontului care se află la $x = X$. Putem deduce cu ușu-

rință o relație între aceste două constante folosind condiția (24) care trebuie să fie satisfăcută de funcțiile U^+ și U^- pe frontul de dezlocuire. Vom ține seama că în acest caz ecuația complexă a frontului este

$$\tau(y) = X + iy,$$

în care s-a ales ca parametru chiar variabila y. Remarcînd că

$$\frac{\overline{\tau'(y)}}{\tau'(y)} = -1,$$

relația amintită devine,

$$\frac{C_1}{k(x)} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2}\frac{C_2}{k(x)} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2}\frac{C_2}{k(x)} = 0,$$

care ne dă imediat

$$\frac{C_1}{\mu_1} = \frac{C_2}{\mu_2}.$$

Pentru a putea determina fiecare dintre constantele C_1 și C_2 vom introduce debitul mișcării prin unitatea de lățime și grosime a mediului considerat. Acesta se scrie,

$$Q = v^+ = -\frac{k}{\mu_1}\frac{dp^+}{dx} = -\frac{k}{\mu_1}U^+ = -\frac{k(x)}{\mu_1}\frac{C_1}{k(x)} = -\frac{C_1}{\mu_1},$$

$$Q = v^- = -\frac{k}{\mu_2}\frac{dp^-}{dx} = -\frac{k}{\mu_2}U^- = -\frac{k(x)}{\mu_2}\frac{C_2}{k(x)} = -\frac{C_2}{\mu_2},$$

de unde se deduce

$$C_1 = -Q\mu_1, \qquad C_2 = -Q\mu_2.$$

Datorită faptului că C_1 și C_2 depind de X, și debitul Q va depinde de poziția frontului.

Cu acestea putem deduce presiunile

$$p^+(x) = -Q\mu_1\int_{x_s}^{x}\frac{dx}{k(x)} + C_3; \qquad p^-(x) = -Q\mu_2\int_{x_c}^{x}\frac{dx}{k(x)} + C_4,$$

constantele C_3 și C_4 putînd fi determinate dacă se impun condițiile

$$p^+(x) = p_s \quad \text{pentru} \quad x = x_s,$$
$$p^-(x) = p_c \quad \text{pentru} \quad x = x_c.$$

Se deduce

$$C_3 = p_s; \qquad C_4 = p_c.$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Soluția poate fi dedusă numai în funcție de aceste constante eliminînd debitul. Într-adevăr, scriind egalitatea presiunilor pe linia $x = X$ se deduce

$$p_s - p_c = Q\left[\mu_1 \int_x^X \frac{\mathrm{d}x}{k(x)} - \mu_2 \int_{x_c}^X \frac{\mathrm{d}x}{k(x)}\right],$$

din care rezultă expresia lui Q.

Rezultatele obținute coincid cu cele din tratatele clasice (de ex. [4] și [8]) iar dependența deplasării frontului de timp se face pe calea indicată în acestea.

2. *Dezlocuirea radială.* Pe o cale asemănătoare se poate rezolva problema dezlocuirii radiale într-o coroană circulară mărginită de circumferințele concentrice de raze r_s și r_c ($r_s < r_c$) pe care sînt date respectiv presiunile constante p_s și p_c. Dacă permeabilitatea mediului depinde numai de r, presiunea va depinde de asemenea numai de r, iar viteza va avea numai componentă radială. Dacă se presupune că circumferința de rază r_s este frontieră de alimentare ($p_s > p_c$) prin care pătrunde un fluid de viscozitate μ_1, frontul va păstra forma circulară în tot timpul dezlocuirii; la un moment oarecare T va avea raza R.

Va trebui deci să determinăm funcțiile $U^+(z)$ și $U^-(z)$ respectiv în coroanele $r_s \leqslant r \leqslant R$ și $R \leqslant r \leqslant r_c$, soluții ale ecuațiilor (22) respectiv (23) care să satisfacă relația (24) atunci cînd în $U^+(z)$ și $U^-(z)$ facem $r = R$.

Rezultatele obținute în cadrul teoriei generale se transpun cu ușurință la acest caz. Avem în vedere că

$$U^+ = u^+ + \mathrm{i}v^+; \qquad U^- = u^- + \mathrm{i}v^-,$$

$$u^+ = \frac{\partial p^+}{\partial x}; \quad v^+ = -\frac{\partial p^+}{\partial y}; \quad u^- = \frac{\partial p^-}{\partial x}; \quad v^- = -\frac{\partial p^-}{\partial y}$$

sau, după trecerea în coordonate polare,

$$u^\pm = \frac{\partial p^\pm}{\partial r}\cos\theta; \qquad v^\pm = -\frac{\partial p^\pm}{\partial r}\sin\theta; \qquad U^\pm = \frac{\partial p^\pm}{\partial r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Coeficienții $A^\pm$ din ecuațiile (22) și (23) au de asemeni aceiași expresie analitică

$$A^\pm = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\cos\theta + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\sin\theta\right) = -\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

A^+ fiind definit în coroana $r_s \leqslant r \leqslant R$ și A^- în coroana $R \leqslant r \leqslant r_c$.

Ecuațiile (22) și (23) devin în acest caz

$$\frac{\mathrm{d}U^\pm}{\mathrm{d}\bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}p^\pm}{\mathrm{d}r},$$

dar ținînd seama de expresiile lui U^+ și U^- ca funcții de r și θ, scrise mai sus, ecuațiile precedente iau forma

$$\frac{\partial U^{\pm}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\frac{df}{dr}e^{i\theta}\cdot U^{\pm},$$

de același tip cu cea obținută în cazul dezlocuirii liniare.

Soluțiile acestor ecuații sînt deduse în [7] și au forma,

$$U^{+} = \frac{C_1 e^{-i\theta}}{rk(r)}; \qquad U^{-} = \frac{C_2 e^{-i\theta}}{rk(r)},$$

în care C_1 și C_2 depind de poziția frontului. Ca și mai înainte vom impune acestor soluții să satisfacă relația (24). În acest caz ecuația frontului va fi

$$\tau = Re^{i\theta}$$

și deci vom avea,

$$\frac{\overline{\tau'(\theta)}}{\tau'(\theta)} = -\frac{1}{e^{2i\theta}},$$

iar relația (24) se scrie,

$$\frac{C_1 e^{-i\theta}}{rk(r)} - \frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_2}\cdot\frac{C_2 e^{-i\theta}}{rk(r)} - \frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_2}\frac{1}{e^{2i\theta}}\cdot\frac{C_2 e^{i\theta}}{rk(r)} = 0.$$

După efectuarea calculelor se deduce aceeași relație ca în cazul liniar,

$$\frac{C_1}{\mu_1} = \frac{C_2}{\mu_2}.$$

În continuare, urmărind raționamentul deja folosit la cazul precedent, putem scrie

$$Q = \int_C V_r\, ds = -\int_0^{2\pi} \frac{k(r)}{\mu_1}\frac{C_1}{rk(r)} r\, d\theta = -2\pi\frac{C_1}{\mu_1}$$

pentru cazul cînd C este un cerc de rază r ($r_s \leqslant r \leqslant R$) și, în mod asemănător,

$$Q = -2\pi\frac{C_2}{\mu_2}$$

pentru ($R \leqslant r \leqslant r_c$). Putem scrie deci presiunile

$$p^{+}(r) = -\frac{Q\mu_1}{2\pi}\int_{r_s}^{r}\frac{dr}{rk(r)} + p_s,$$

$$p^{-}(r) = -\frac{Q\mu_2}{2\pi}\int_{r_c}^{r}\frac{dr}{rk(r)} + p_c.$$

Din condiția ca aceste expresii să fie egale pentru $r = R$ se poate deduce dependența debitului de poziția frontului. Nu insistăm asupra legăturii dintre poziția frontului și timp deoarece această chestiune este rezolvată în [8].

Cazurile particulare considerate și coincidența cu rezultatele cunoscute în literatură sînt o verificare a rezultatelor generale obținute în lucarea de față.

Primită la redacție la 9 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Mișcarea fluidului într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde*, St. cerc. mec. apl., **28**, *5* (1969).
2. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Editura Academiei, București, 1963.
3. Șt. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Editura Academiei, București, 1966.
4. N. Cristea, *Hidraulica subterană*, Edit. tehnică, București, 1956.
5. V. Ionescu, C. Cozma, *Problema lui Riemann generalizată în clasa funcțiilor analitice generalizate*, St. cerc. mat. **21**, *10* (1969).
6. F. D. Gahov, *Kraevîie zadaci*, Gostehizdat, Moskva, 1963.
7. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
8. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Editura Academiei, București, 1966.

STUDIUL VARIAȚIEI PRESIUNII ÎNTR-UN SISTEM STRATIFICAT

de AL. SOARE și SAHL DENNAOUI
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Se tratează variația presiunii într-un zăcămînt închis format din două strate cu permeabilități diferite exploatat la presiune constantă. Studiul se face în special pentru cazul existenței intercomunicației de fluid între strate.
Rezultatele obținute se compară cu cele pentru cazul cînd stratele nu comunică hidrodinamic între ele și cu cele ale unui zăcămînt omogen. Calculele au fost efectuate cu ajutorul calculatorului I.M.B. 360.

INTRODUCERE

Una din principalele probleme ale ingineriei de zăcămînt este găsirea modului în care neuniformitatea influențează variația parametrilor hidrodinamici sau a prevederii comportării zăcămintelor. Pentru găsirea acestor influențe s-au folosit atît modele matematice propriu-zise cît și modele statistice (cazul zăcămintelor fisurate). Considerînd că cel puțin pînă în prezent folosirea unui model matematic propriu-zis are mai multe șanse de succes, vom considera un zăcămînt format din două strate orizontale și adiacente între care fluidul poate comunica sau nu. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele ale unui zăcămînt format din două strate dar fără comunicație de fluid între ele și cu cele ale cazului ideal (curgerea radial plană perfectă).

Cercetările teoretice și experimentale publicate pînă în prezent conduc la următoarele concluzii mai importante:

— comportarea nestaționară a unui sistem în care stratele comunică între ele este aceeași ca la un sistem omogen în toată perioada primară de exploatare cu excepția perioadei foarte timpurii [5, 6, 7, 9]. De aceea detectarea comunicației între strate este posibilă numai în această perioadă;

— sistemul eterogen diferă de unul omogen prin faptul că, curgerea staționară este atinsă după o perioadă de 20 de ori mai mare.

STABILIREA ECUAȚIILOR DE CALCUL

Cazul I. Stratele comunică între ele. Zăcămîntul este format din două strate orizontale și adiacente cu limitele superioară, inferioară și exterioară impermeabile. Sonda este centrală și penetrează complet stratele (fig. 1).

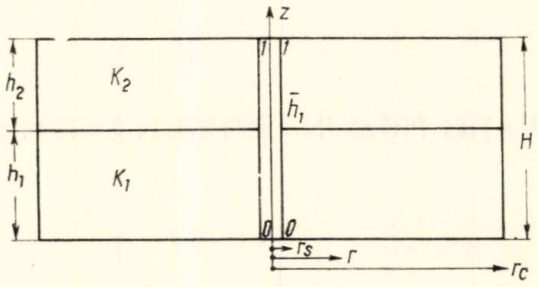


Fig. 1

Ecuația care descrie această curgere are în coordonate cilindrice următoarea formă :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[kr\frac{\partial p}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[k\frac{\partial p}{\partial z}\right]=m\,\mu\,\beta\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{1}$$

Pentru rezolvarea ei se fac următoarele ipoteze :

— fiecare strat este omogen și izotrop în raport cu permeabilitatea, porozitatea și grosimea ;

— zăcămîntul este complet umplut cu un fluid de compresibilitate mică și constantă în raport cu presiunea ;

— viscozitatea este independentă de presiune ;

— legea lui Darcy este valabilă datorită efectelor capilare și gravitaționale neglijabile ;

— la timpul zero zăcămîntul are o presiune p_i, presiune inițială, care se menține tot timpul mai mare ca zero dacă sonda va produce în așa fel încît presiunea la limita interioară se menține la o valoare constantă.

Dacă vom considera următoarele variabile adimensionale :

$$\bar{p}=\frac{p-p_s}{p_c-p_s},\quad \bar{t}=\frac{k_{\text{med}}\,t}{m\,\mu\,\beta\,r_s^2},\quad \bar{r}=\frac{r}{r_s},\quad R=\frac{r_c}{r_s},\quad \bar{k}=\frac{k_1}{k_2},$$

$$\bar{z}=\frac{z}{H},\quad \bar{h}=\frac{h_1}{H},\quad \bar{k}_i=\frac{k_i}{k_{\text{med}}},\quad i=1,\,2,\ldots,$$

ecuația (1) devine

$$\bar{k}\left(\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}\right)+\frac{r_s^2}{H^2}\bar{k}\left(\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial\bar{z}^2}\right)=\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}. \tag{2}$$

Condițiile inițiale, la limită și pe suprafețele de discontinuitate sînt următoarele :

$$\overline{p}\,(\overline{r},\ \overline{z},\ 0) = 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \overline{p}\,(\overline{r},\ 0,\ \overline{t})}{\partial \overline{z}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{p}\,(\overline{r},\ 1,\ \overline{t})}{\partial \overline{z}} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \overline{p}\,(R,\ \overline{z},\ \overline{t})}{\partial \overline{r}} = 0, \tag{6}$$

$$\overline{p}\,(1,\ \overline{z},\ \overline{t}) = 0 \tag{7}$$

și

$$(\overline{p})_{z=h_1+\varepsilon} = (\overline{p})_{z=h_1-\varepsilon}, \tag{8}$$

$$k_1\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}}\right)_{z=h_1+\varepsilon} = k_2\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}}\right)_{z=h_1-\varepsilon}. \tag{9}$$

Rezolvarea ecuației (2) se face prin metoda separării variabilelor căutînd o soluție de forma

$$\overline{p} = X\,(\overline{r})\,Z\,(\overline{z})\,T\,(\overline{t}), \tag{10}$$

astfel ca condițiile (3) — (9) să fie satisfăcute.

Ecuațiile diferențiale ordinare rezultate din această separare a variabilelor, împreună cu condițiile la limită, conduc la

$$\begin{aligned} &T' + \varphi T = 0, \\ &\lim_{\overline{t}\to 0} .\ T = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &X'' + \frac{1}{\overline{r}}\,X' + \xi\,X = 0, \\ &X\,(1) = X'\,(R) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

și

$$\begin{aligned} &Z'' + \frac{H^2}{r_s^2}\left(\frac{\varphi^2}{k} - \xi^2\right)Z = 0, \\ &Z'\,(0) = Z'\,(1) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Soluţiile ecuaţiilor (11), (12) şi (13) vor fi:

$$T = c_1 \, e^{-\varphi^2 \bar{t}}, \tag{14}$$

$$X = c_2 \, [J_0(\xi \bar{r}) . Y_1(\xi R) - Y_0(\xi \bar{r}) . J_1(\xi R)], \tag{15}$$

cu ecuaţia caracteristică pentru rădăcinile ξ.

$$U(\xi) = J_0(\xi) . Y_1(\xi R) - Y_0(\xi) . J_1(\xi R) = 0. \tag{16}$$

Ecuaţia (13) mai poate fi scrisă

$$Z'' + \gamma^2 Z = 0, \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h}, \tag{17}$$

$$Z'' + \delta^2 Z = 0, \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1, \tag{18}$$

unde

$$\gamma = \frac{H}{r_s} \sqrt{\frac{\varphi^2}{\bar{k}_1} - \xi^2} = \frac{H}{r_s} \sqrt{\frac{\varphi^2 \, [\bar{h} \, (\bar{k} - 1) + 1]}{\bar{k}} - \xi^2} \tag{19}$$

şi

$$\delta = \frac{H}{r_s} \sqrt{\frac{\varphi^2}{\bar{k}_2} - \xi^2} = \frac{H}{r_s} \sqrt{\varphi^2 \, [\bar{h} \, (\bar{k} - 1) + 1] - \xi^2}. \tag{20}$$

Atunci

$$Z = c_3 \sin \gamma \bar{z} + c_4 \cos \gamma \bar{z}, \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h}, \tag{21}$$

$$Z = c_6 \sin \delta \bar{z} + c_6 \cos \delta \bar{z}, \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1. \tag{22}$$

Folosind condiţia (4) vom obţine

$$Z = c_4 \cos \gamma \bar{z}, \quad 0 < \bar{z} < \bar{h}, \tag{23}$$

iar condiţia (5) va conduce la

$$Z = \frac{c_6}{\cos \delta} \cdot \cos \delta \, (1 - \bar{z}), \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1. \tag{24}$$

Din condiţiile (8) şi (9) transcrise sub forma

$$c_4 \cos \gamma \bar{h} = \frac{c_6}{\cos \delta} \cos \delta \, (1 - \bar{h}) \tag{25}$$

şi

$$- k_1 \, c_4 \gamma \sin \gamma \bar{h} = \frac{c_6}{\cos \delta} \, \delta . k_2 \sin \delta \, (1 - \bar{h}), \tag{26'}$$

în care dacă vom face determinantul coeficienților (condiția de soluții netriviale) vom obține ecuația caracteristică pentru rădăcinile φ sub forma

$$\delta \sin \delta \,(1 - \bar{h}) \cos \gamma \bar{h} + \bar{k}\, \gamma \sin \gamma \bar{h} \,.\, \cos \delta (1 - \bar{h}) = 0, \qquad (26)$$

care în mod implicit definește o infinitate de rădăcini φ pentru fiecare valoare a lui ξ.
Din (25) cu (23) și (24) putem scrie

$$Z = c_4 \cos \gamma \bar{z}, \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h} \qquad (27)$$

și

$$Z = c_4 \frac{\cos \gamma \bar{h}}{\cos \delta \,(1 - \bar{h})} \cos \delta (1 - \bar{z}), \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1.$$

Înlocuind pe (14), (15) și (27) în (10), obținem:

$$\bar{p} = C.\mathrm{e}^{-\varphi^2 \bar{t}} \cos \gamma \bar{z} \,.\, U(\xi \bar{r}), \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h}, \qquad (28)$$

$$\bar{p} = C \,.\, \mathrm{e}^{-\varphi^2 \bar{t}} \left[\frac{\cos \gamma \bar{h}}{\cos \delta \,(1 - \bar{h})} \cdot \cos \delta (1 - \bar{z}) \right] \cdot U(\xi \bar{r}), \quad \bar{h} < \bar{z} < 1. \qquad (29)$$

Pentru a găsi valoarea constantei C care să satisfacă condiția inițială (3), se reprezintă această ecuație printr-o serie infinită dublă

$$\int_1^R r \,.\, U_m(\xi \bar{r}) \,.\, U_n(\xi \bar{r}) \,.\, \mathrm{d}\bar{r} = 0, \qquad m \neq n. \qquad (30)$$

Cu aceasta, ecuațiile (28) și (29) devin:

$$1 = C \,.\, U(\xi \bar{r}) \,.\, \cos \gamma \bar{z}, \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h},$$

$$1 = C \,.\, U(\xi \bar{r}) \cdot \frac{\cos \gamma \bar{h}}{\cos \delta \,(1 - \bar{h})} \cdot \cos \delta (1 - \bar{z}), \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1$$

sau

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C.Z \right] U(\xi \bar{r}). \qquad (31)$$

Dacă înmulțim ambele părți ale ecuației (31) cu $\bar{r} U(\xi \bar{r})$, și integrăm, se obține

$$\sum_{n=1}^{\infty} CZ = \frac{2 \xi \, V(\xi)}{\xi^2 . V^2(\xi) - 4/\pi^2} = F(\xi), \qquad (32)$$

în care

$$V(\xi) = J_1(\xi) \cdot Y_1(\xi R) - Y_1(\xi) \cdot J_1(\xi R). \tag{33}$$

Atunci

$$C_{mn} = \frac{C}{F(\xi)} = \frac{\int_0^1 Z \mathrm{d}\bar{z}}{\int_0^1 Z^2 \mathrm{d}\bar{z}}. \tag{34}$$

Punînd în (34) valoarea lui Z ca sumă a ecuațiilor (27), și integrînd se obține

$$C_{mn} = \frac{4 \cos \delta (1 - \bar{h}) \left[\delta \sin \gamma \bar{h} \cdot \cos \delta (1 - \bar{h}) + \gamma \cos \gamma \bar{h} \cdot \sin \delta (1 - \bar{h})\right]}{\delta \cos^2 \delta (1 - \bar{h}) (2\gamma \bar{h} + \sin 2\gamma \bar{h}) + \gamma \cos^2 \gamma \bar{h} \left[2\delta (1 - \bar{h}) + \sin 2\delta (1 - \bar{h})\right]}. \tag{35}$$

În acest caz ecuația (10) devine

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \mathrm{e}^{-\varphi^2 \bar{t}} Z_{mn}\right]_m F(\xi) \cdot U(\xi \cdot \bar{r}), \tag{36}$$

în care

$$Z_{mn} = \cos \gamma \bar{z}, \qquad 0 < \bar{z} < \bar{h},$$

$$= \frac{\cos \gamma \bar{h}}{\cos \delta (1 - \bar{h})} \cos \delta (1 - \bar{h}), \qquad \bar{h} < \bar{z} < 1,$$

$$F(\xi) = \frac{2\xi \cdot V(\xi)}{\xi^2 \cdot V^2(\xi) - \frac{4}{\pi^2}}$$

și

$$U(\xi \bar{r}) = J_0(\xi \bar{r}) \cdot Y_1(\xi R) - Y_0(\xi \bar{r}) \cdot J_1(\xi R).$$

Cazul II. Curgerea radial plană în zăcăminte omogene. Dacă se consideră modelul din figura 1, dar cu mediu omogen, curgerea va fi radial plană, iar ecuația ce descrie această curgere scrisă în coordonate cilindrice va fi

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}\right) = 0. \tag{37}$$

Folosind aceleași supoziții și aceeași procedură de rezolvare ca la ecuația (1), relația care va da distribuția de presiune va avea forma

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \mathrm{e}^{-\xi^2 \bar{t}} U(\xi \bar{r}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} F(\xi) \cdot \mathrm{e}^{-\xi^2 \bar{t}} \cdot U(\xi \bar{r}). \tag{38}$$

Se poate arăta că relația (38) este identică cu cea folosită mai des în literatură obținută de Van Everdingen și W. Hurst, dar se preferă forma de mai sus pentru o mai bună corespondență între expresiile presiunilor în toate cele trei cazuri discutate.

Cazul III. Stratele nu comunică între ele. Dacă stratele nu comunică hidrodinamic între ele, fiecare strat va produce independent, iar ecuațiile de curgere va prezenta următoarele soluții:

$$\bar{p}_1(\bar{r},\ \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{-\xi^2 \bar{t}_1} \cdot U(\xi \bar{r}) \tag{39}$$

și

$$\bar{p}_2(\bar{r},\ \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{-\xi^2 \bar{t}_2} \cdot U(\xi \bar{r}), \tag{40}$$

care diferă între ele numai prin mărimea timpilor adimensionali care vor avea expresii (scrise astfel pentru a scoate în evidență influența grosimilor stratelor asupra curbelor de presiune, influență neidentificată în lucrările anterioare) deduse din expresia timpului adimensional

$$\bar{t} = \frac{k_{\text{med}} \cdot t}{m\, \mu\, \beta\, r_s^2}.$$

Dacă vom folosi expresia

$$k_{\text{med}} = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{h_1(k_1 - k_2) + H k_2}{H},$$

se obține

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{k_{\text{med}}} = \frac{\dfrac{k_1}{k_2}}{\dfrac{h_1}{H}\left(\dfrac{k_1}{k_2} - 1\right) + 1} = \frac{\bar{k}}{\bar{h}(\bar{k} - 1) + 1} \tag{41}$$

și

$$\bar{k}_2 = \frac{k_2}{k_{\text{med}}} = \frac{1}{\bar{h}(\bar{k} - 1) + 1}. \tag{42}$$

Acum se poate scrie

$$\bar{t}_1 = \frac{k_1 t}{m\, \mu\, \beta\, r_s^2} \frac{k_{\text{med}}}{k_{\text{med}}} = \frac{\dfrac{k_1}{k_2}}{\dfrac{h_1}{H}\left(\dfrac{k_1}{k_2} - 1\right) + 1} \bar{t} = \frac{\bar{k}\bar{t}}{\bar{h}(\bar{k} - 1) + 1} \tag{43}$$

și

$$\bar{t}_2 = \frac{\bar{t}}{\bar{h}(\bar{k} - 1) + 1}. \tag{44}$$

EVALUAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR

Evaluarea numerică a ecuațiilor a fost efectuată cu ajutorul calculatoarelor electronice C.D.C. 6400 și I.B.M. Astfel evaluarea ecuației (36) a fost efectuată pentru următoarele valori ale parametrilor : $\bar{r} = 5$, 10, 20, 50, 100, 200, 1000, și 2000 ; $R = 2000$: $\bar{z} = 0.0 - 1.0$ cu trepte de 0,1 ; $\bar{h} = 0{,}3 : 0{,}5 : 0{,}8$: $\bar{k} = 0{,}1 : 0{,}2 : 0{,}5 : 2{,}0 : 5.0$ și 15 valori pentru $\bar{t}$ cuprinse între 1 și 10^7. Numărul de rădăcini necesare pentru a obține precizia dorită ($\pm$ 1 în 10^6) a fost de 10. Dacă se va lucra numai cu 5 rădăcini ξ eroarea rezultatelor va fi de numai 0,5%. Ecuația caracteristică care dă rădăcinile φ și care este o expresie implicită a fost rezolvată prin metoda iterației. Pentru obținerea preciziei dorite au fost necesare numai două rădăcini φ chiar și pentru valoarea raportului r_s/H de 0,001.

Evaluarea numerică a ecuațiilor (38), (39) și (40) a fost făcută cu aceleași valori ale parametrilor comuni, iar seria de rădăcini ξ a fost complet convergentă după 10 termeni.

DISCUȚII ȘI REZULTATE

Cu datele obținute s-a trasat variația presiunii cu raza și timpul (adimensionale) pentru diferite valori ale parametrilor $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{h}$, $\bar{k}$. S-a obținut modul în care presiunea este influențată de parametrii stratului, geometria sistemului și timp. A fost posibilă compararea curbelor de presiune corespunzătoare unui sistem omogen cu cele ale unui sistem eterogen cu sau fără comunicație între strate.

Studierea diagramelor scoate la iveală următoarele : Presiunea în stratul mai permeabil, descreşte continuu în timp, iar în stratul mai puțin permeabil (fig. 2), după o perioadă inițială mare, atinge un maxim între $\bar{t} = 50 - 500$ și apoi descreşte pentru a fi identică cu cea din stratul mai permeabil. Normal, aceste două curbe devin identice mai repede la valori mici ale lui $\bar{r}$. Această variație a presiunii în stratul mai puțin permeabil, oarecum curioasă, poate fi explicată prin faptul că la valori mici ale lui $\bar{t}$ (prima perioadă a exploatării) comunicația între strate nu a început, fluidul din acest strat avînd tendința de a curge direct spre sondă. Maximul curbei de presiune ar corespunde începutului comunicației între strate.

De asemeni, după cum era de aşteptat, gradienții mari de presiune se localizează în stratul mai permeabil (fig. 2 și 5) și descresc de la $\bar{z} = 0$ spre $z = 1{,}0$. Gradienții mari de presiune îi vom găsi în sistemele cu valori mari pentru $\bar{h}$ (fig. 4), adică în stratele cele mai groase și mai permeabile.

Este destul de semnificativă influența permeabilității ($\bar{k}$) asupra curbelor de presiune. Sistemul va prezenta gradienții mari de presiune pentru $\bar{k} = 0{,}5$ și 0,2 și mai mici pentru $\bar{k} = 5{,}2$ și 0,1. De menționat că sistemul în care stratul inferior este de două ori mai permeabil decît cel superior (fig. 6), curba de presiune este aproximativ aceeași cu a unui sistem în care stratul superior este de zece ori mai permeabil. Diferența variază între 10,5% la $\bar{r} = 2$ și 0,12% la $\bar{r} = 50$.

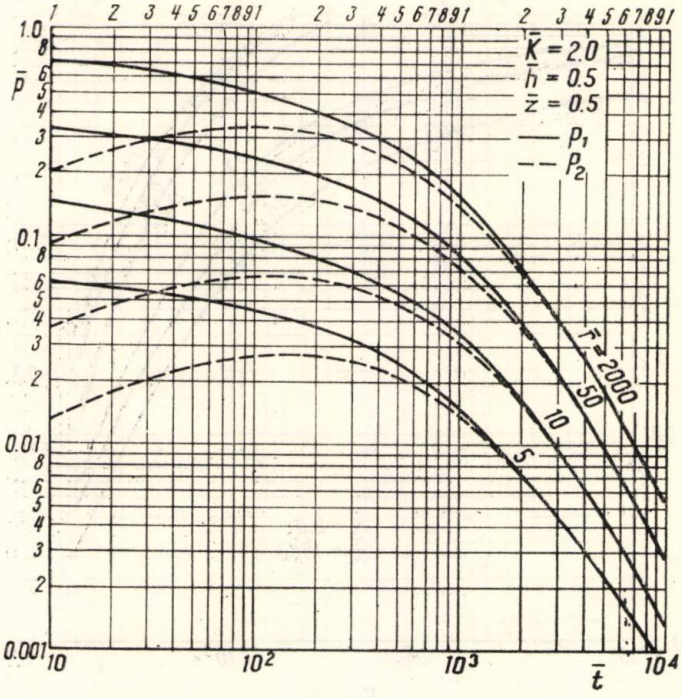

$\bar{K} = 2.0$
$\bar{h} = 0.5$
$\bar{z} = 0.5$
p_1
p_2
$\bar{r} = 2000$
50
10
5
$\bar{p}$
$\bar{t}$

Fig. 2

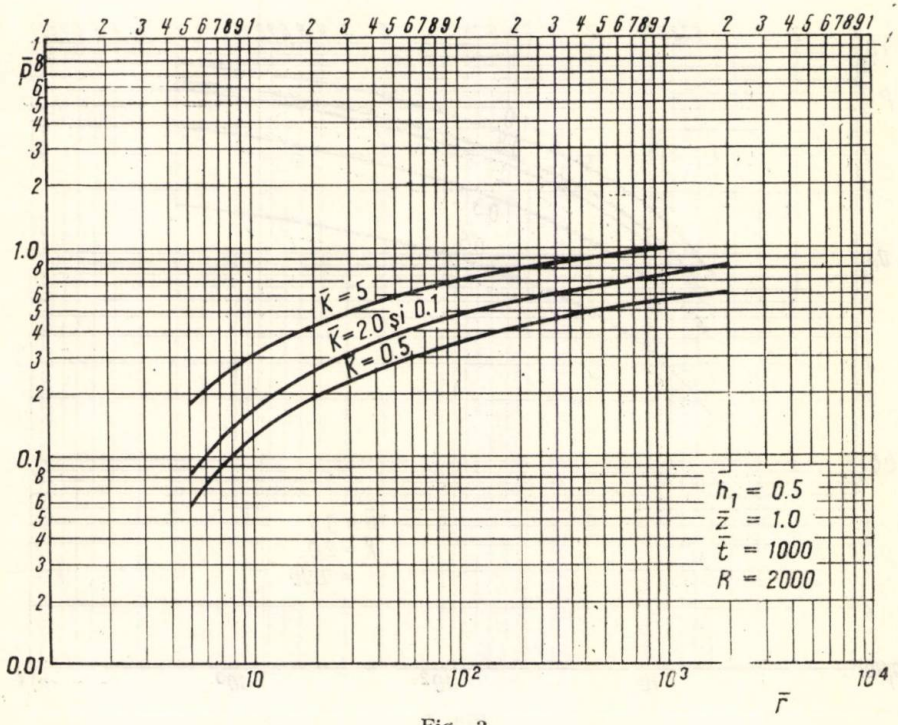

$\bar{K} = 5$
$\bar{K} = 2.0$ şi 0.1
$\bar{K} = 0.5$
$\bar{h}_1 = 0.5$
$\bar{z} = 1.0$
$\bar{t} = 1000$
$R = 2000$
$\bar{p}$
$\bar{r}$

Fig. 3

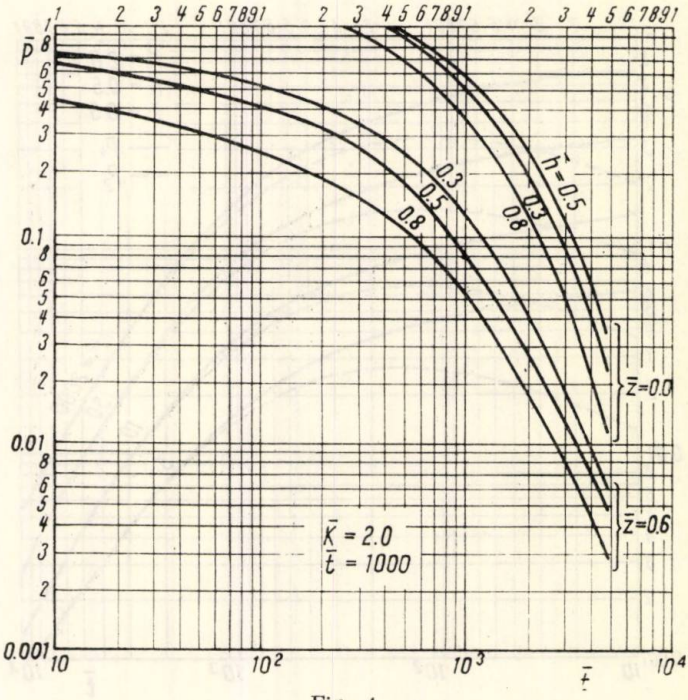

$\bar{p}$
$\bar{h}$=0.5
0.3
0.5
0.8
0.3
0.8
$\bar{z}$=0.0
$\bar{z}$=0.6
$\bar{K}$ = 2.0
$\bar{t}$ = 1000
$\bar{t}$

Fig. 4

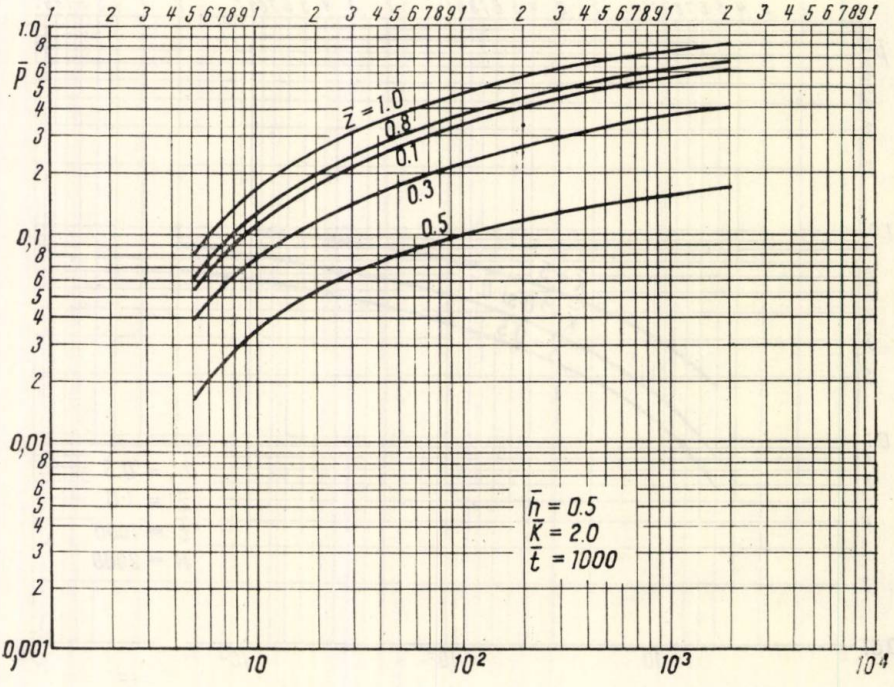

$\bar{p}$
$\bar{z}$ = 1.0
0.8
0.1
0.3
0.5
$\bar{h}$ = 0.5
$\bar{K}$ = 2.0
$\bar{t}$ = 1000

Fig. 5

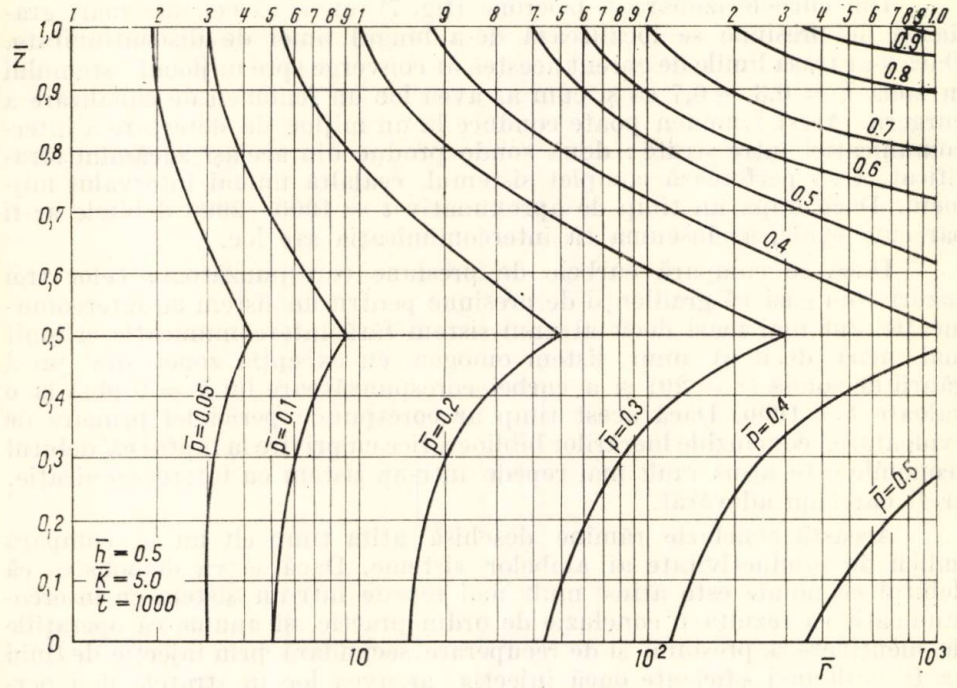

$\bar{z}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
$\bar{p}$=0.05
$\bar{p}$=0.1
$\bar{p}$=0.2
$\bar{p}$=0.3
$\bar{p}$=0.4
$\bar{p}$=0.5
$\bar{h}$ = 0.5
$\bar{K}$ = 5.0
$\bar{t}$ = 1000
10
10^2
10^3
$\bar{r}$

Fig. 6

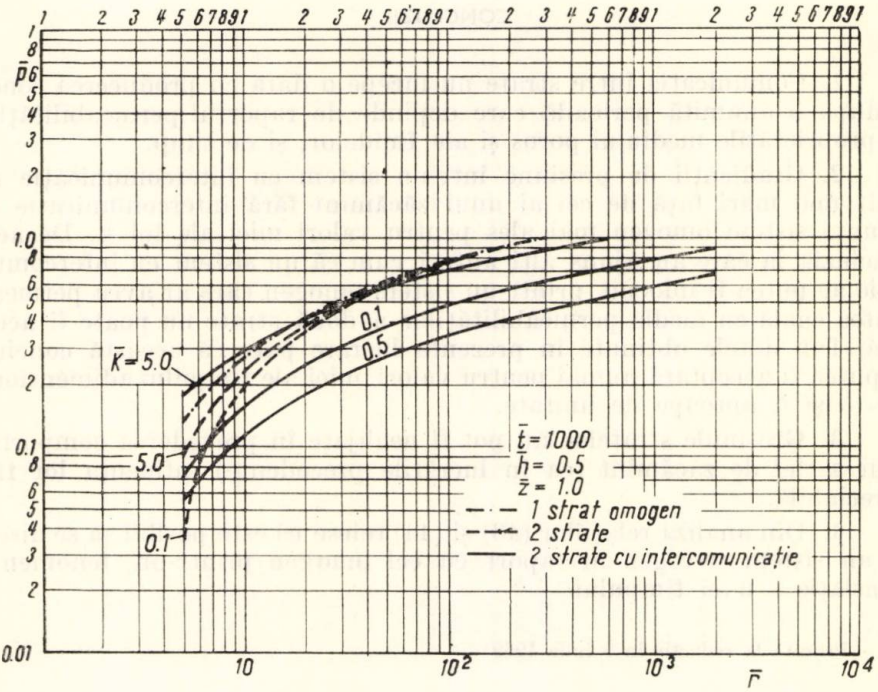

$\bar{p}$
$\bar{K}$=5.0
5.0
0.1
0.1
0.5
$\bar{t}$ = 1000
$\bar{h}$ = 0.5
$\bar{z}$ = 1.0
1 strat omogen
2 straie
2 straie cu intercomunicație
0.01
10
10^2
10^3
10^4
$\bar{r}$

Fig. 7

Din curbele izobare şi izocrone (fig. 7) reiese că cei mai mari gradienţi de presiune se localizează de-a lungul liniei de discontinuitate. Dacă s-ar trasa liniile de curent acestea ar converge spre mijlocul sistemului în zona $\bar{z} = 0{,}3 - 0{,}7$ ca şi cum ar avea loc un fenomen de canalizare a curgerii. Acest fenomen poate conduce la un mijloc de detectare a intercomunicaţiei între strate : două sonde produc din acelaşi zăcămînt stratificat. Una perforează complet sistemul, cealaltă numai intervalul mijlociu. Dacă după un timp de aproximativ $\bar{t} = 1000-2000$ debitele ar fi oarecum egale, ar însemna că intercomunicaţia are loc.

Dacă se compară curbele de presiune corespunzătoare celor trei cazuri vom găsi că gradienţii de presiune pentru un sistem cu intercomunicaţie sînt mai mari decît ai unui sistem fără intercomunicaţie şi mult mai mari decît ai unui sistem omogen, cu excepţia zonei din jurul găurii de sondă ($\bar{r} = 20$) şi a curbei corespunzătoare lui $\bar{k} = 5$ pînă la o valoare $\bar{t} = 1000$. Dacă acest timp ar corespunde perioadei primare de exploatare, concluziile lucrărilor bibliografice cu privire la faptul că debitul economic este atins mult mai repede într-un sistem cu intercomunicaţie, ar fi oarecum adevărat.

Această concluzie rămîne deschisă atîta timp cît nu se compară indicii de productivitate ai ambelor sisteme. Dacă se va demonstra că debitul economic este atins mult mai repede într-un sistem cu intercomunicaţii va rezulta o concluzie de ordin practic, şi anume că operaţiile de menţinere a presiunii şi de recuperare secundară prin injecţie de fluid ar fi mult mai eficiente dacă injecţia ar avea loc în stratele mai permeabile ale sistemului.

CONCLUZII

1. Comunicaţia între strate nu începe o dată cu producerea sondei, ci după o anumită perioadă care depinde de raportul permeabilităţilor, de proprietăţile mediului poros şi ale fluidelor, şi de timp.

2. Gradienţii de presiune într-un sistem cu intercomunicaţie sînt mult mai mari faţă de cei ai unui zăcămînt fără intercomunicaţie sau ai unui sistem omogen mai ales pentru valori mici ale lui $\bar{k}$. De aceea concluzia la care au ajuns alţi autori cum că un sistem cu intercomunicaţie ar putea fi înlocuit printr-un sistem omogen care ar avea permeabilitatea egală cu media permeabilităţilor a două strate nu poate fi acceptată. Din datele obţinute în prezenta lucrare pare că această concluzie ar putea fi acceptată numai pentru valori mici ale timpului adimensional, $\bar{k} > 5$ şi $\bar{h}$ aproape de unitate.

3. Grosimile stratelor nu pot fi neglijate în prevederea comportării unui astfel de zăcămînt (ca în lucrările precedente) influenţa lor fiind apreciabilă.

4. Din analiza relaţiilor (43) şi (44) reiese că este posibil să se discute de un sistem eterogen în raport cu cel omogen printr-un fenomen de translaţie a axei timpului.

Primită la redacţie la 9 iulie 1969

LISTA NOTAȚIILOR

h_i — grosimea stratelor,
H — grosimea totală a sistemului,
$\overline{k}_i$ — permeabilitatea adimensională,
$\overline{k}$ — raportul permeabilităților celor două strate (k_1/k_2),
k_{med} — permeabilitatea medie $(k_1h_1 + k_2h_2/h_1 + h_2)$,
p_i — presiunea inițială a sistemului,
$\overline{p}$ — presiunea adimensională,
p_s — presiunea la limita inferioară,
$\overline{r}$ — raza adimensională,
r_s — raza interioară a sistemului,
r_e — raza exterioară a sistemului,
$\overline{R}$ — raza exterioară adimensională a sistemului,
z — variabila verticală,
$\overline{z}$ — variabila verticală adimensională (z/H),
μ — viscozitate dinamică,
m — porozitatea,
β — compresibilitatea,
φ, ζ — rădăcinile ecuațiilor caracteristice.

BIBLIOGRAFIE

1. Katz, L. M., Tek, M., *A Theoretical Study of Pressure Distribution and Fluid Flux in Bounded Stratified Porous System with Crossflow*, Trans AIME, **225**, *68*, (1962).
2. Katz, L. M., *Fluid Flow and Heat Transfer in Stratified System*, PHD Thesis, Univ. of Michigan (1960).
3. Levcovits, H. C., Hazebrock, P., Allen, E. I., Mathews, C. C., *A Study of the Behavior of Bounded Reservoirs Composed of Bounded Layers*, Trans. AIME, **222**, *43* (1961).
4. Pelissier, F., Sequier, P., *Analyse Numerique des Equations des Biouches*, Revue I.F.P., **XVI**, *10*, (1961).
5. Pendaragrass, D. T., Berry, V. Jr., *Pressure Transient Performance of a Multilayed Reservoir with Crossflow*, Trans. AIME, **225**, *347* (1962).
6. Pikering, H., Ch., Crowford, P. B., *A Study of Flow in Stratified Reservoirs by Use of the Thermal Analogy*. Trans., AIME, **222**, *215* (1961).
7. Russell D. C., Prats, M., *The Practical Aspects of Interlayer Crosflow*, Jour. Petr. Tech. (June, 1962), 589.
8. Russell D. C., Prats, M., *Performance of Layered Reservoirs with Crossflow-Single Compressible Fluid Case*, Trans. AIME, **225**, *53* (1962).
9. Templelaor-Lietz, M., *The Efect of the Rate of oil Production upon the Performance of wells Productivity for more than one Horizont*, Trans. AIME, **222**, *26* (1961).

RĂCIREA GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIE DE LICHID

de T. OROVEANU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Se studiază problema scăderii temperaturii la talpa unei sonde prin realizarea circulației continue de lichid în gaura de sondă. Se consideră ambele variante posibile și anume introducerea lichidului prin tubing sau prin spațiul inelar. Metoda de rezolvare este o adaptare a aceleia utilizate în [3] pentru o problemă diferită și se bazează pe o serie de presupuneri simplificatoare, necesare datorită complexității problemei. În ambele variante studiate, se ajunge la formule care permit determinarea variației în timp a temperaturii la talpa sondei.

1. *Introducere.* Într-o gaură de sondă, temperatura crește o dată cu adîncimea, putînd atinge la talpă valori destul de mari. În cazul în care se efectuează anumite tratamente cu fluide ale căror proprietăți sînt afectate de creșterea temperaturii, se pune problema răcirii prealabile a găurii de sondă. O astfel de situație se poate prezenta, de exemplu, la un tratament de acidizare, dacă inhibitorii utilizați pentru evitarea coroziunii țevilor își pierd eficacitatea la temperaturi mai ridicate. Dacă adîncimea găurii de sondă nu este prea mare, se poate realiza răcirea cu ajutorul unei circulații de lichid. Practic, problema care se pune este aceea a calculării debitului de lichid necesar pentru a se realiza o anumită temperatură la talpa sondei. Tratarea riguroasă a acestei probleme, luîndu-se ca punct de plecare ecuația transmisiei căldurii în fluide (ecuația energiei) și căutîndu-se soluția cu condiții inițiale și la limită adecvate, este foarte dificilă. Din acest motiv, vom recurge la un procedeu aproximativ care a fost utilizat de H. J. Ramey Jr. [3], bazat pe utilizarea valorilor medii într-o secțiune normală pe direcția de mișcare a lichidului. Pentru calculele practice, acest procedeu poate conduce la rezultate suficient de exacte.

În problema tratată în [3], fiind vorba de injectarea unui fluid cald în stratul productiv, se presupune că acesta curge prin țevile interioare (tubing) în spațiul inelar dintre acesta și burlane neexistînd mișcare. În cazul de care ne ocupăm, este necesar să se obțină o evacuare de căldură, ceea ce presupune o circulație a lichidului atît prin tubing cît și prin spațiul inelar. Operația poate fi principial executată în două variante

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6, P. 1335–1353, 1969

şi anume fie introducînd lichidul prin tubing şi evacuîndu-l prin spaţiul inelar, fie invers. În cele ce urmează, vom trata pe rînd ambele variante, în ordinea pe care am precizat-o.

2. *Prima variantă* (*introducerea lichidului prin tubing*). Dacă operaţia de evacuare a căldurii se efectuează cu ajutorul unui lichid, care poate fi presupus incompresibil, procedeul aproximativ constă în utilizarea unor relaţii simple de bilanţ energetic. În literatura de specialitate, a fost tratată pe această cale, aşa cum am mai amintit, problema injectării unui fluid cald în strat [3], [4], care este mai simplă. Adaptarea aceluiaşi procedeu la cazul de care ne ocupăm, nu prezintă însă dificultăţi deosebite.

Astfel, dacă notăm cu Q debitul de lichid, cu T_1 temperatura medie a lichidului într-o secţiune transversală a tubingului şi cu T_2 temperatura medie într-o secţiune transversală a spaţiului inelar, ambele la aceeaşi adîncime z, rezultă

$$QC\,\mathrm{d}T_1 = 2\pi r_1 k_1 (T_2 - T_1)\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

admiţînd că schimbul de căldură se efectuează numai în direcţia radială.

În această relaţie, C reprezintă căldura specifică a lichidului, r_1 raza interioară a tubingului şi k_1 coeficientul total de transmisie a căldurii de la lichidul din spaţiul inelar la cel din tubing. Temperatura T_2 este mai mare decît T_1 deoarece lichidul se încălzeşte în timpul circulaţiei ($\mathrm{d}T_1 > 0$). Precizăm că axa verticală Oz are origina la suprafaţă şi sensul pozitiv de sus în jos (fig. 1).

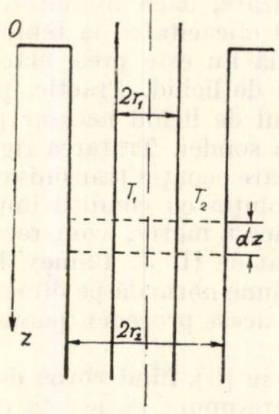


Fig. 1.

În ceea ce priveşte coeficientul k_1, în acesta trebuie inclusă transmisia căldurii prin convecţie de la lichidul din spaţiul inelar la peretele tubingului, prin conducţie în metalul din care sînt construite ţevile şi

prin convecție de la peretele interior al tubingului la lichidul din interiorul acestuia. După cum se știe [2], pentru calculul coeficientului k_1 se utilizează expresia

$$\frac{1}{k_1 \, \mathrm{d}\sigma_{1i}} = \frac{1}{\alpha_{2i} \, \mathrm{d}\sigma_{1e}} + \frac{\delta_1}{\lambda_1 \, \mathrm{d}\sigma_{1m}} + \frac{1}{\alpha_1 \, \mathrm{d}\sigma_{1i}}, \tag{2}$$

în care $\mathrm{d}\sigma_{1i} = 2\pi r_1 \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\sigma_{1e} = 2\pi r_1' \mathrm{d}z$, r_1' fiind raza exterioară a tubingului,

$$\mathrm{d}\sigma_{1m} = 2\pi \frac{r_1' - r_1}{\ln \dfrac{r_1'}{r_1}} \mathrm{d}z$$

și $\delta_1 = r_1' - r_1$ grosimea peretelui tubingului. Cu α_{2i} și α_1 am notat coeficienții de transmisie a căldurii prin convecție, în ordinea indicată mai sus, corespunzătoare modului în care se produce fenomenul, iar cu λ_1 conductivitatea termică a metalului din care sînt construite țevile.

Relația (1) este de aceeași formă cu aceea dedusă în [3], expresia cantității de căldură primită de lichid în unitatea de timp, care apare în membrul stîng, rezultînd din considerații bazate pe primul principiu al termodinamicii, cu neglijarea unor termeni de ordin secundar.

Pentru a stabili o relație asemănătoare, referitoare la variația temperaturii T_2 a lichidului din spațiul inelar, vom observa că aceasta se datorește pe de o parte schimbului de căldură cu lichidul din tubing, iar pe de alta schimbului de căldură cu roca.

Astfel, dacă notăm cu T_2' temperatura suprafeței exterioare a burlanelor, obținem

$$-QC\mathrm{d}T_2 = 2\pi r_2 k_2 (T_2' - T_2) \, \mathrm{d}z - 2\pi r_1 k_1 (T_2 - T_1) \, \mathrm{d}z, \tag{3}$$

relație în care, în afara mărimilor pe care le-am definit mai înainte, apar raza interioară r_2 a burlanelor și coeficientul total de transmisie a căldurii k_2 de la lichidul din spațiul inelar la suprafața exterioară a burlanelor. Acesta din urmă rezultă dintr-o expresie similară cu (2) și anume

$$\frac{1}{k_2 \, \mathrm{d}\sigma_{2i}} = \frac{1}{\alpha_{2e} \, \mathrm{d}\sigma_{2i}} + \frac{\delta_2}{\lambda_2 \, \mathrm{d}\sigma_{2m}}, \tag{4}$$

unde

$$\mathrm{d}\sigma_{2m} = 2\pi \frac{r_2' - r_2}{\ln \dfrac{r_2'}{r_2}} \mathrm{d}z,$$

r_2' fiind raza exterioară a burlanelor și $\delta_2 = r_2' - r_2$ grosimea burlanelor. Cu α_{2e} am notat coeficientul de transmisie a căldurii prin convecție de la lichidul din spațiul inelar la peretele burlanelor și cu λ_2 conductivitatea termică a metalului din care sînt construite burlanele.

În relația (3) apare temperatura T_2' care este determinată de schimbul de căldură cu roca. Notînd cu T_e temperatura acesteia din urmă, care este o funcție de adîncimea z, cu λ_e conductivitatea termică a rocii și cu q_e cantitatea de căldură schimbată în unitatea de timp, putem scrie

$$T_e - T_2' = \frac{1}{4\pi\lambda_e}\frac{dq_e}{dz} f(\tau), \tag{5}$$

$f(\tau)$ fiind o funcție de timpul adimensional τ.

Pentru a găsi forma acestei funcții este necesar să se studieze problema schimbului de căldură între gaura de sondă, în cazul în care în aceasta există o circulație de lichid, și formația înconjurătoare. După cum se observă în [3], problema este dificilă deoarece atît temperatura cît și fluxul de căldură sînt variabile. O estimare a valorilor acestei funcții, în condiții simplificate, se poate face prin utilizarea unor soluții cunoscute din teoria transmisiei căldurii. Deoarece formația are dimensiuni mari în raport cu gaura de sondă, aceasta din urmă poate fi considerată ca o sursă liniară, care absoarbe căldură din formația presupusă a fi un sistem radial infinit. În cazul în care cantitatea de căldură nu variază în timp, soluția are forma

$$T_e - T = -\frac{1}{4\pi\lambda_e}\frac{dq_e}{dz} Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right), \tag{6}$$

în care T este temperatura la o rază oarecare r, q_e are semnificația precizată mai sus și

$$\varkappa = \frac{\lambda_e}{\rho_e C_e}, \tag{7}$$

ρ_e și C_e fiind masa specifică, respectiv căldura specifică a rocii.

Pe suprafața exterioară a burlanelor avem deci

$$T_e - T_2' = -\frac{1}{4\pi\lambda_e}\frac{dq_e}{dz} Ei\left(-\frac{r_2'^2}{4\varkappa t}\right) \tag{8}$$

și comparația cu (5) arată care este funcția $f(\tau)$ în acest caz $\left(\tau = \frac{4\varkappa t}{r_2'^2}\right)$.

În [3] se mai prezintă și alte cazuri posibile de determinare a funcției $f(\tau)$ din soluții cunoscute ale ecuației căldurii. Aceste considerații pot fi aplicate și la problema de care ne ocupăm ținîndu-se seama însă de faptul că schimbul de căldură se efectuează în sens contrar. Mai remarcăm faptul, semnalat de altfel și în [3] că utilizarea unei soluții de forma (8) sau asemănătoare presupune un contact perfect între burlane și rocă. În cazul în care contactul nu îndeplinește această condiție, conductivitatea termică trebuie modificată în consecință. Această remarcă

rămîne valabilă şi pentru cazul în care burlanele sînt cimentate. Dificultăţi mai pot proveni şi din faptul că cimentarea nu este totdeauna efectuată de la suprafaţă pînă în stratul productiv precum şi din variaţia conductivităţii termice a formaţiei pe verticală.

Din relaţia (5) rezultă

$$dq_e = \frac{4\pi \lambda_e (T_e - T_2')}{f(\tau)} dz \tag{9}$$

şi dacă observăm că aceeaşi cantitate de căldură are şi expresia

$$dq_e = 2\pi r_2 k_2 (T_2' - T_2), \tag{10}$$

găsim numaidecît

$$T_2' = \frac{T_e + \frac{r_2 k_2 f(\tau)}{2\lambda_e} T_2}{1 + \frac{r_2 k_2 f(\tau)}{2\lambda_e}} \tag{11}$$

şi putem astfel elimina temperatura T_2' din relaţia (3), care devine

$$-QC\, dT_2 = 4\pi \lambda_e \frac{T_e - T_2}{\frac{2\lambda_e}{r_2 k_2} + f(\tau)} dz - 2\pi r_1 k_1 (T_2 - T_1)\, dz. \tag{12}$$

Termenul al doilea din membrul drept reprezintă cantitatea de căldură cedată de lichidul din spaţiul inelar lichidului din tubing. Acest termen este deci identic cu membrul drept al relaţiei (1), cu semnul schimbat. Primul termen din membrul drept al relaţiei precedente reprezintă cantitatea de căldură pe care lichidul din spaţiul inelar o primeşte de la rocă. Acest termen este presupus pozitiv ($T_e > T_2$) deoarece am admis că în punctul cel mai de jos lichidul care începe să se mişte în sus prin spaţiul inelar are o temperatură mai mică decît aceea a formaţiei. Atît timp cît diferenţa celor doi termeni din membrul drept al relaţiei (12) este pozitivă, temperatura lichidului din spaţiul inelar creşte. Datorită modului în care am ales sensul pozitiv al axei Oz, derivata $\frac{dT_2}{dz}$ este deci negativă, ceea ce explică semnul minus din membrul stîng al relaţiilor (3) şi (12). Se poate întîmpla însă ca membrul drept al acestor relaţii să devină negativ, fie deoarece primul termen al diferenţei este mai mic decît al doilea, fie deoarece primul termen devine negativ ($T_2 > T_e$). În acest caz temperatura lichidului din spaţiul inelar începe să scadă ($dT_2 < 0$), dar se observă că acest lucru nu afectează forma relaţiei (12). Semnul diferenţei $T_e - T_2$ depinde evident şi de felul în care T_e este funcţie de z însă, oricare ar fi forma acestei funcţii, apare plauzibil ca, pentru valori mici ale lui z (în apropiere de suprafaţă),

temperatura lichidului din spațiul inelar să fie mai mare decît T_e. Precizăm în încheierea acestor considerații că, întocmai ca și în (1), cantitățile de căldură care apar în (12) sînt raportate la unitatea de timp.

Problema revine așadar la găsirea soluțiilor sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{QC}(T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{dz} &= \frac{2\pi r_1 k_1}{QC}(T_2 - T_1) - \frac{4\pi \lambda_e}{QC\left[\frac{2\lambda_e}{r_2 k_2} + f(\tau)\right]}(T_2 - T_1), \end{aligned} \tag{13}$$

cu anumite condiții pe care le vom preciza mai departe.

Pentru ușurarea calculelor, apare util să introducem variabila adimensională

$$\zeta = \frac{z}{h}, \tag{14}$$

unde h este adîncimea sondei, precum și notațiile

$$A = \frac{2\pi r_1 k_1 h}{QC}, \quad B(\tau) = \frac{4\pi \lambda_e h}{QC\left[\frac{2\lambda_e}{r_2 k_2} + f(\tau)\right]}, \tag{15}$$

A fiind o constantă, deoarece debitul Q este presupus de asemenea constant, iar $B(\tau)$ o funcție numai de tipul adimensional τ.

În felul acesta, sistemul (13) devine

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\zeta} &= A(T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{d\zeta} &= (A + B)T_2 - AT_1 - BT_e \end{aligned} \tag{16}$$

și pentru rezolvarea lui vom utiliza transformata lui Laplace. În acest scop, trebuie să admitem că domeniul de variație al lui ζ este $(0, +\infty)$, lăsînd pentru moment la o parte condiția pe care trebuie să o satisfacă temperaturile T_1 și T_2 la $\zeta = 1$. Găsim astfel

$$\int_0^\infty \frac{dT_1}{d\zeta} e^{-p\zeta} d\zeta = p\overline{T}_1 - T_{10} \tag{17}$$

și

$$\int_0^\infty \frac{dT_2}{d\zeta} e^{-p\zeta} d\zeta = p\overline{T}_2 - T_{20}, \tag{18}$$

unde

$$\overline{T}_1 = \int_0^\infty T_1 \, e^{-p\zeta} \, d\zeta, \qquad \overline{T}_2 = \int_0^\infty T_2 \, e^{-p\zeta} \, d\zeta, \tag{19}$$

iar T_{10} și T_{20} sînt valorile temperaturilor T_1, respectiv T_2, la $\zeta = 0$. Aceste valori reprezintă condițiile pe care le-am amintit mai înainte.

Prin aplicarea transformatei lui Laplace, sistemul de ecuații diferențiale liniare (16) se transformă în sistemul liniar de ecuații algebrice

$$\begin{aligned} (p + A)\,\overline{T}_1 - A\overline{T}_2 &= T_{10}, \\ A\overline{T}_1 + (p - A - B)\,\overline{T}_2 &= T_{20} - B\overline{T}_e, \end{aligned} \tag{20}$$

în care trebuie să mai precizăm forma transformatei T_e. Mai înainte de aceasta, observăm că determinantul sistemului (20) este diferit de zero și prin urmare soluțiile pot fi găsite.

Pentru funcția $T_e(z)$ considerăm expresia uzuală

$$T_e = az + b = ah\,\zeta + b, \tag{21}$$

în care a și b sînt constante; de aci rezultă

$$\overline{T}_e = \frac{ah}{p^2} + \frac{b}{p}, \tag{22}$$

iar sistemul (20) devine

$$\begin{aligned} (p + A)\,\overline{T}_1 - A\overline{T}_2 &= T_{10}, \\ A\overline{T}_1 + (p - A - B)\overline{T}_2 &= T_{20} - \frac{B}{p}\left(\frac{ah}{p} + b\right) \end{aligned} \tag{23}$$

și are soluțiile

$$\overline{T}_1 = \frac{AT_{20}\,p^2 - AB\,(ah + bp) + T_{10}\,p^2\,(p - A - B)}{p^2\,(p^2 - Bp - AB)}, \tag{24}$$

respectiv

$$\overline{T}_2 = \frac{T_{20}\,p^2\,(p + A) - B\,(ah + bp)\,(p + A) - AT_{10}\,p^2}{p^2\,(p^2 - Bp - AB)}. \tag{25}$$

Originalele acestor transformate pot fi găsite fără dificultăți [1]. Astfel, dacă examinăm expresia (24) a lui $\overline{T}_1$ se observă că aceasta con-

ține trei termeni pe care îi vom considera separat. Primul dintre aceștia este

$$\frac{AT_{20}}{p^2 - Bp - AB} = \frac{AT_{20}}{\left(p - \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p - \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

și are originalul [1]

$$\frac{AT_{20}\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}.$$

Pentru cel de al doilea termen

$$-\frac{AB(ah+bp)}{p^2(p^2-Bp-AB)} = -$$

$$= -\frac{ABb\left(p+\frac{a}{b}h\right)}{p^2\left(p-\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p-\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

originalul este [1]

$$-ABb\left[\frac{-\frac{a}{b}h+\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\frac{B^3}{4}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)^2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - \right.$$

$$-\frac{-\frac{a}{b}h+\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\frac{B^3}{4}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)^2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} +$$

$$\left. +\frac{\frac{a}{b}h}{AB}\zeta + \frac{\frac{a}{b}hB-AB}{A^2B^2}\right].$$

În sfîrșit, cel de-al treilea termen

$$\frac{T_{10}(p-A-B)}{p^2-Bp-AB}=\frac{T_{10}(p-A-B)}{\left(p-\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p-\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

are originalul

$$T_{10}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}-1\right)-A\right]e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}+$$

$$+T_{10}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}+1\right)+A\right]e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}.$$

Colectînd aceste rezultate obținem după cîteva calcule simple,

$$T_1=\frac{1}{2}\left(T_{10}+\frac{ah}{A}-b\right)\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}+e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[T_{20}\frac{A}{B}-\frac{1}{2}\left(1+2\frac{A}{B}\right)\left(T_{10}-\frac{ah}{A}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{2}\right]\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}-e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]+$$

$$+ah\zeta+b-\frac{ah}{A} \qquad (26)$$

sau, sub o altă formă,

$$T_1=\left(T_{10}+\frac{ah}{A}-b\right)e^{\frac{B}{2}\zeta}\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)+$$

$$+\left[2T_{20}\frac{A}{B}-\left(T_{10}-\frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right)+b\right]e^{\frac{B}{2}\zeta}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}+$$

$$+ah\zeta+b-\frac{ah}{A}. \qquad (27)$$

Este uşor de constatat că expresia temperaturii T_1 satisface condiţia

$$\zeta = 0, \qquad T_1 = T_{10}. \tag{28}$$

Trecînd acum la expresia (25) a lui $\overline{T}_2$, observăm că, din cei trei termeni pe care îi conţine aceasta numai unul singur are o formă pe care n-am întîlnit-o mai sus. Într-adevăr, termenul

$$\frac{T_{20}(p+A)}{p^2 - Bp - AB} = \frac{T_{20}(p+A)}{\left(p - \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p - \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

are originalul

$$T_{20}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}+1\right)+A\right]e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} +$$

$$+ T_{20}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}-1\right)-A\right]e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}},$$

iar pentru termenul

$$-\frac{AT_{10}}{p^2 - Bp - AB} = -$$

$$-\frac{AT_{10}}{\left(p - \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p - \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

originalul este

$$-\frac{AT_{10}\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}.$$

Cel de-al treilea termen are forma

$$-\frac{Bb\left[p^2+\left(A+\frac{a}{b}h\right)p+\frac{a}{b}hA\right]}{p^2(p^2-Bp-AB)}=$$

$$=-\frac{Bb\left[p^2+\left(A+\frac{a}{b}h\right)p+\frac{a}{b}hA\right]}{p^2\left(p-\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p-\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

la care corespunde originalul [1]

$$-Bb\left[\frac{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left[\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+A+\frac{a}{b}h\right]+\frac{a}{b}hA}{\frac{B^3}{4}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)^2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\cdot\right.$$

$$\cdot e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}-$$

$$-\frac{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left[\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+A+\frac{a}{b}h\right]+\frac{a}{b}hA}{\frac{B^3}{4}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)^2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\cdot$$

$$\left.\cdot e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\cdot\frac{\frac{a}{b}h}{B}\zeta-\frac{1}{B}\right].$$

Cu aceste rezultate găsim

$$T_2=\frac{1}{2}\left(T_{20}-b\right)\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}+e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[T_{10}\frac{A}{B}-\frac{1}{2}\left(T_{20}-\frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right)-\frac{ah}{2A}+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{2}\right]\left[e^{\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}-e^{\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]+ah\zeta+b \qquad (29)$$

sau, dacă procedăm la fel ca mai înainte,

$$T_2 = (T_{20} - b)\, e^{\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) - \left[2\,T_{10}\frac{A}{B} - \right.$$

$$\left. - \left(T_{20} - \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) - \frac{ah}{A} + b\right] e^{\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} +$$

$$+ ah\zeta + b. \tag{30}$$

Şi de rîndul acesta se poate verifica imediat că temperatura T_2 satisface condiţia

$$\zeta = 0, \qquad T_2 = T_{20}. \tag{31}$$

Pe de altă parte însă, dacă temperatura T_{10} este cunoscută, fiind aceea pe care lichidul o are la introducerea în gaura de sondă, nu acelaşi lucru se poate afirma despre temperatura T_{20}. Determinarea acesteia, care nu mai este o constantă ci o funcţie de timp, se poate face ţinînd seama de faptul că trebuie să se realizeze şi condiţia

$$\zeta = 1, \qquad T_1 = T_2. \tag{32}$$

Prin urmare, dacă punem $\zeta = 1$ atît în (27) cît şi în (30) şi egalăm expresiile ce rezultă, obţinem o ecuaţie de gradul întîi în raport cu necunoscuta T_{20} şi anume

$$\left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right] T_{20} = 2b\,\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) -$$

$$- \left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right]\left(T_{10} + \frac{ah}{A}\right) - \tag{33}$$

$$- \frac{\frac{ah}{A}\, e^{-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)},$$

de unde rezultă

$$T_{20} = \frac{\left(2b - T_{10} - \frac{ah}{A}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \left(T_{10} + \frac{ah}{A}\right)\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} -$$

$$- \frac{\frac{ah}{A} e^{-\frac{B}{2}} \sqrt{1+4\frac{A}{B}}}{sh\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\, ch\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}. \quad (34)$$

Odată găsită expresia lui T_{20}, din (27) sau (30) se poate calcula variaţia în timp a temperaturii la $\zeta = 1$ ($z = h$). Astfel, din (27) găsim

$$T_{1h} = \left(T_{10} + \frac{ah}{A} - b\right) e^{\frac{B}{2}} ch\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) +$$

$$+ \left[\frac{4\left(b - T_{10} - \frac{ah}{A}\right)\frac{A}{B} sh\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - 2\frac{ah}{B} e^{\frac{B}{2}}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}{sh\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\, ch\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} - \right.$$

$$\left. - T_{10} - \frac{a}{A} + b \right] \frac{e^{\frac{B}{2}} sh\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\frac{A-1}{A} + b, \quad (35)$$

expresie în care intervin numai mărimi cunoscute. În felul acesta problema este rezolvată, deoarece formula precedentă permite să se aprecieze, cu o exactitate suficientă pentru calculele practice, care este efectul injecţiei de lichid la o adîncime dată h, atunci cînd se cunoaşte debitul Q.

3. *A doua variantă* (*introducerea lichidului prin spaţiul inelar*). Pe aceeaşi cale se poate rezolva fără dificultăţi problema şi în cazul în care lichidul utilizat pentru răcire se injectează prin spaţiul inelar şi iese din nou la suprafaţă prin tubing. Păstrînd notaţiile pe care le-am utilizat mai înainte, se poate constata imediat că în loc de relaţia (12) avem

$$QC\,dT_2 = 4\pi\lambda_e \frac{T_e - T_2}{\frac{2\lambda_e}{r_2 k_2} + f(\tau)}\,dz + 2\pi r_1 k_1 (T_1 - T_2)\,dz, \quad (36)$$

deoarece temperatura T_2 a lichidului din spaţiul inelar creşte o dată cu z iar temperatura T_1 a lichidului din tubing este mai mare decît T_2.

De asemenea, în loc de (1) găsim

$$QC\,dT_1 = 2\pi r_1 k_1 (T_1 - T_2)\,dz \quad (37)$$

datorită faptului că T_1 scade pe măsură ce lichidul se apropie de suprafaţă.

În felul acesta, ajungem la sistemul de ecuații

$$\frac{dT_1}{dz} = \frac{2\pi r_1 k_1}{QC}(T_1 - T_2),$$
$$\frac{dT_2}{dz} = \frac{4\pi\lambda_e}{QC\left[\frac{2\lambda_e}{r_2 k_2} + f(\tau)\right]}(T_e - T_2) + \frac{2\pi r_1 k_1}{QC}(T_1 - T_2), \tag{38}$$

iar dacă utilizăm variabila adimensională (14) și notațiile (15), obținem

$$\frac{dT_1}{d\zeta} = A(T_1 - T_2),$$
$$\frac{dT_2}{d\zeta} = AT_1 - (A + B)T_2 + BT_e. \tag{39}$$

Pentru rezolvare, vom introduce și de data aceasta transformatele lui Laplace ale temperaturilor T_1, T_2 și T_e, ajungînd astfel la sistemul de ecuații algebrice

$$(p - A)\overline{T}_1 + A\overline{T}_2 = T_{10},$$
$$A\overline{T}_1 - (p + A + B)\overline{T}_2 = -T_{20} - BT_e, \tag{40}$$

în care T_{10} și T_{20} au aceleași semnificații ca și mai înainte. Determinantul acestui sistem este diferit de zero și prin urmare găsirea soluțiilor lui nu pune nici o problemă.

Dacă admitem pentru T_e expresia (21), a cărei transformată este (22), sistemul (40) devine

$$(p - A)\overline{T}_1 + A\overline{T}_2 = T_{10},$$
$$A\overline{T}_1 - (p + A + B)\overline{T}_2 = -T_{20} - \frac{B}{p}\left(\frac{ah}{p} + b\right) \tag{41}$$

și are soluțiile

$$\overline{T}_1 = \frac{T_{10}p^2(p + A + B) - AB(ah + bp) - AT_{20}p^2}{p^2(p^2 + Bp - AB)}, \tag{42}$$

respectiv

$$\overline{T}_2 = \frac{T_{20}p^2(p - A) + B(ah + bp)(p - A) + AT_{10}p^2}{p^2(p^2 + Bp - AB)}. \tag{43}$$

Problema găsirii originalelor acestor transformate se rezolvă cu aceeaşi uşurinţă ca şi în cazul precedent, cu ajutorul tabelelor [1]. Expresia (42) a lui $\overline{T}_1$, conţine trei termeni dintre care primul,

$$\frac{T_{10}(p+A+B)}{p^2+Bp-AB}=\frac{T_{10}(p+A+B)}{\left(p+\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)},$$

are originalul

$$T_{10}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+A\right]e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}-$$

$$-T_{10}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)+A\right]e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}},$$

al doilea,

$$-ABb\frac{p+\frac{a}{b}h}{p^2(p^2+Bp-AB)}=-ABb\frac{p+\frac{a}{b}h}{\left(p+\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

are originalul

$$\frac{1}{2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[\frac{ah}{A}\left(1+2\frac{A}{B}\right)+b\right]\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{ah}{A}+b\right)\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]+ah\zeta+b+\frac{ah}{A},$$

iar la al treilea care este

$$-\frac{AT_{20}}{p^2+Bp-AB}=-\frac{AT_{20}}{\left(p+\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)},$$

corespunde originalul

$$A T_{20} \frac{e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}.$$

Însumarea acestor rezultate parțiale ne dă

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{10} - \frac{ah}{A} - b\right)\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[\frac{1}{2}\left(1+2\frac{A}{B}\right)\left(T_{10} - \frac{ah}{A}\right) - \frac{b}{2} - T_{20}\frac{A}{B}\right]\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} -\right.$$

$$\left. - e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b + \frac{ah}{A} \qquad (44)$$

sau

$$T_1 = \left(T_{10} - \frac{ah}{A} - b\right)e^{-\frac{B}{2}\zeta}\ \mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) +$$

$$+ \left[\left(1+2\frac{A}{B}\right)\left(T_{10} - \frac{ah}{A}\right) - b - 2T_{20}\frac{A}{B}\right]e^{-\frac{B}{2}\zeta}\ \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} +$$

$$+ ah\zeta + b + \frac{ah}{A}, \qquad (45)$$

expresii care satisfac condiția (28).

Procedînd la fel pentru expresia (43) a lui $\overline{T}_2$, considerăm mai întîi primul termen al acesteia

$$\frac{T_{20}(p-A)}{p^2 + Bp - AB} = \frac{T_{20}(p-A)}{\left(p + \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p + \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)},$$

care are originalul

$$T_{20}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}-1\right)-A\right]e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}+$$

$$+\,T'_{20}\frac{\left[\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{A}{B}}+1\right)+A\right]e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}},$$

apoi cel de-al doilea termen

$$Bb\,\frac{p^2+\left(\frac{a}{b}h-A\right)p-\frac{a}{b}hA}{p^2(p^2+Bp-AB)}=$$

$$=\frac{Bb\left[p^2+\left(\frac{a}{b}h-A\right)p-\frac{a}{b}hA\right]}{p^2\left(p+\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)},$$

al cărui original este

$$\frac{1}{2\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[b+\frac{ah}{A}-\frac{ah}{A}\left(1+2\frac{A}{B}\right)\right]\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]-\frac{b}{2}\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right]+ah\zeta+b$$

și, în sfîrșit, ultimul termen

$$\frac{AT_{10}}{p^2+Bp-AB}=\frac{AT_{10}}{\left(p+\frac{B}{2}-\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\left(p+\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}$$

al cărui original este

$$A T_{10} \frac{e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}}{B\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}.$$

Colectînd aceste rezultate, găsim

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(T_{20} - b\right)\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} + e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}\left[T_{10}\frac{A}{B} - \frac{1}{2}\left(T_{20} + \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) + \frac{ah}{2A} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{2}\right]\left[e^{-\frac{B}{2}\left(1-\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta} - e^{-\frac{B}{2}\left(1+\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)\zeta}\right] + ah\zeta + b \qquad (46)$$

sau

$$T_2 = (T_{20} - b)\, e^{-\frac{B}{2}\zeta} \operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right) +$$

$$+ \left[2T_{10}\frac{A}{B} - \left(T_{20} + \frac{ah}{A}\right)\left(1+2\frac{A}{B}\right) + \frac{ah}{A} + \right.$$

$$\left. + b\right] e^{-\frac{B}{2}\zeta} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\zeta\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah\zeta + b, \qquad (47)$$

expresii care satisfac condiția (31).

De data aceasta, temperatura T_{20} este o constantă cunoscută, în timp ce temperatura T_{10} este o funcție necunoscută de timp. Pentru determinarea acesteia, vom recurge ca și mai înainte la condiția (32). După ce punem $\zeta = 1$ atît în (45) cît și în (47) și egalăm expresiile astfel obținute, rezultă ecuația

$$\left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right]\left(T_{10} - \frac{ah}{A}\right) = 2b\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) -$$

$$- \left[\operatorname{th}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right] T_{20} - \frac{\frac{ah}{A}\, e^{\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\operatorname{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}, \qquad (48)$$

care ne dă

$$T_{10} = \frac{(2b - T_{20})\,\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + T_{20}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} -$$

$$- \frac{\frac{ah}{A}\,\mathrm{e}^{\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} + \frac{ah}{A}. \tag{49}$$

Putem calcula deci, din (45) sau din (47) variația în timp a temperaturii la $\zeta = 1$ ($z = h$); astfel, din (47) găsim

$$T_{2h} = (T_{20} - b)\,\mathrm{e}^{-\frac{B}{2}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) +$$

$$+ \left[\frac{4(b - T_{20})\frac{A}{B}\,\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) - 2\frac{ah}{B}\,\mathrm{e}^{\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}}}{\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right) + \sqrt{1+4\frac{A}{B}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)} -\right.$$

$$\left. - T_{20} + b\right] \frac{\mathrm{e}^{-\frac{B}{2}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2}\sqrt{1+4\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{1+4\frac{A}{B}}} + ah + b.$$

Acest ultim rezultat reprezintă soluția problemei propuse.

4. *Concluzii.* Prin adaptarea unui procedeu simplu am putut ajunge la formulele care permit să se determine efectul injecției de lichid atunci cînd se urmărește răcirea găurii de sondă. Aceste formule sînt relativ simple și, în cadrul ipotezelor admise, au o precizie suficientă pentru calculele practice.

Primită la redacție la 30 iulie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaționnomu iscisleniiu*, G.I.T.T.L.,Moskva, Leningrad, 1951, p. 113, 114, 115.
2. Gröber/Erk, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Dritte völlig neubearbeitete Auflage von Dr.-Ing. Ulrich Grigull, 2. verbesserter Neudruck, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961, p. 156–157.
3. H. J. Ramey, Jr., *Wellbore Heat Transmission*, Transactions AIME, 225, 1962.
4. C. R. Smith, *Mechanics of Secondar Oil Recovery*, Reinhold Publishing Corporation, New York, 1966, p. 428–444.

INTERPRETĂRI VECTORIALE ALE FORȚEI DE INERȚIE A MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE AFERENTE ECHIPAJULUI MOBIL AL CILINDRULUI UNUI MOTOR CU ARDERE INTERNĂ, CU CONSIDERAREA VARIAȚIEI VITEZEI UNGHIULARE DE ROTAȚIE A ARBORELUI COTIT

de GEORGE BĂRĂNESCU
membru corespondent al Academiei
Republicii Socialiste România

Se elaborează două interpretări vectoriale ale forței de inerție a maselor cu mișcare de translație pentru echipajul mobil al unui cilindru de motor cu ardere internă. Interpretările, care țin seama de variația vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit, se bazează pe descompunerea expresiei forței de inerție într-o serie cu coeficienți variabili.

1. INTRODUCERE

În cercetarea problemelor de dinamică a motoarelor cu ardere internă folosirea unor interpretări vectoriale ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație antrenează mari înlesniri în raționamente și în calcule. Astfel de interpretări sînt realizate în cazul simplificat cînd forțele de inerție se evaluează fără să se țină seama de variația vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit.

Lucrarea de față are ca obiect stabilirea unei interpretări vectoriale a forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație cînd se ține seama și de variația vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit. S-a considerat cazul mecanismelor bielă-manivelă normale și dezaxate, care este cazul general pentru motoarele în linie; interpretările rămîn principial valabile pentru orice tip de mecanism bielă-manivelă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6. P 1355–1368, 1969

2. DESCOMPUNEREA ÎN SERIE A FORȚEI DE INERȚIE A MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE

Fie un mecanism bielă-manivelă normal și dezaxat (fig. 1). Deplasarea pistonului este egală cu deplasarea punctului B; măsurînd deplasarea acestui punct față de poziția sa moartă interioară B_i se poate scrie

$$x_B = O_1B_i - O_1B. \tag{1}$$

Distanța O_1B se obține proiectînd conturul OAB pe direcția axei cilindrului

$$O_1B = R\cos\alpha + L\cos\beta. \tag{2}$$

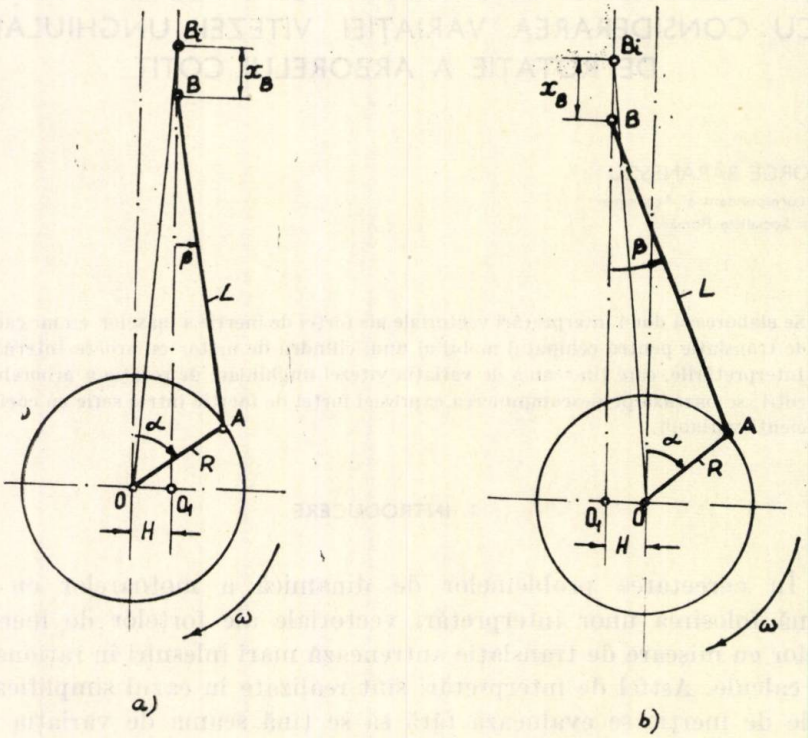


Fig. 1. — Schema mecanismului bielă-manivelă normal și dezaxat.

Distanța O_1B_i are expresia

$$O_1B_i = \sqrt{O\,B_i^2 - OO_1^2} = \sqrt{(R+L)^2 - H^2} = R\sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2}, \tag{3}$$

unde s-a notat $\lambda = \frac{R}{L}$ și $h = \frac{H}{R}$.

Înlocuind în (1) expresiile (2) și (3) rezultă

$$x_B = R\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left(\cos\alpha + \frac{1}{\lambda}\cos\beta\right)\right]. \tag{4}$$

Proiectînd conturul OAB pe normala la axa cilindrului se obține pentru cele două cazuri de dezaxare

$$R\sin\alpha = \pm H + L\sin\beta,$$

din care se deduce

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}, \tag{5}$$

semnul minus se referă la dezaxarea în sensul de rotație (fig. 1*a*) iar semnul plus la dezaxarea în sensul invers sensului de rotație al arborelui cotit (fig. 1*b*).

Eliminînd cos β între relațiile (4) și (5) expresia deplasării pistonului în funcție de variabila independentă α devine:

$$x_B = R\left\{\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \left[\cos\alpha + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}\right]\right]\right\}. \tag{6}$$

Pentru transformarea formulei (6) într-o serie se dezvoltă radicalul în serie. Aplicînd formula binomului se obține

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}(\sin\alpha \mp h)^{2j}.$$

Dezvoltînd și expresia din paranteză rezultă

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}\sum_{q=0}^{q=2j}(\mp 1)^q\binom{2j}{q}h^q\sin^{2j-q}\alpha.$$

Se pune în evidență termenul pentru $q = 2j$

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}h^{2j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}\sum_{q=0}^{q=2j-1}(\mp 1)^q\binom{2j}{q}h^q\sin^{2j-q}\alpha.$$

Ultima sumă conține numai termeni în sin α la puteri pare sau impare. Pentru o valoare oarecare a lui j se obține :

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \sin^{2j-q}\alpha = (\mp 1)^1 \binom{2j}{1} h \sin^{2j-1}\alpha +$$

$$+ (\mp 1)^3 \binom{2j}{3} h^3 \sin^{2j-3}\alpha + \ldots + (\mp 1)^{2j-1} \binom{2j}{2j-1} h^{2j-1} \sin\alpha +$$

$$+ (\mp 1)^0 \binom{2j}{0} h^\circ \sin^{2j}\alpha + (\mp 1)^2 \binom{2j}{2} h^2 \sin^{2j-2}\alpha + \ldots$$

$$\ldots + (\mp 1)^{2j-2} \binom{2j}{2j-2} h^{2j-2} \sin^2\alpha$$

sau

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \cdot \sin^{2j-q}\alpha = \sum_{n=1}^{n=j} (\mp 1)^{2n-1} \binom{2j}{2n-1} h^{2n-1} \cdot \sin^{2j-2n+1}\alpha +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=j-1} (\mp 1)^{2n} \binom{2j}{2n} h^{2n} \cdot \sin^{2n-2n}\alpha.$$

Dacă se notează în prima sumă $j - n = k - 1$, iar în a doua sumă $j - n = k$ rezultă

$$\sum_{q=0}^{q=2j-1} (\mp 1)^q \binom{2j}{q} h^q \cdot \sin^{2j-q}\alpha = \sum_{k=j}^{k=1} \mp \binom{2j}{2j-2k+1} h^{2j-2k+1} \cdot \sin^{2k-1}\alpha +$$

$$+ \sum_{k=j}^{k=1} \binom{2j}{2j-2k} h^{2j-2k} \cdot \sin^{2k}\alpha .$$

Înlocuind această expresie în (7) se obține

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2 (\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{k=j}^{k=1} \mp \binom{2j}{2j-2k+1} h^{2j-2k+1} \sin^{2k-1}\alpha +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{k=j}^{k=1} \binom{2j}{2j-2k} h^{2j-2k} \cdot \sin^{2k}\alpha . \qquad (8)$$

În formula (8) al doilea și al treilea termen reprezintă, respectiv, puterile impare și puterile pare ale funcțiunii sin α. Dacă de exemplu în termenul al doilea se dau valorile lui j în intervalul $1 < j < \infty$ și se reținu numai puterile $2k - 1$ ale sinusului (unde k are o valoare determinată), rezultă o expresie de forma

$$\sin^{2k-1}\alpha \sum_{j=k}^{\infty} \mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k+1} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k+1}.$$

În vederea obținerii tuturor puterilor impare se aplică relația precedentă pentru toate valorile lui k

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k-1}\alpha \sum_{j=k}^{\infty} \mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k+1} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k+1}.$$

Această expresie este echivalentă cu al doilea termen din formula (8). Transformînd în mod analog al treilea termen, formula (8) devine:

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} + \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k-1}\alpha \sum_{j=k}^{\infty} \mp$$

$$\mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k+1} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k}\alpha \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k}.$$

Folosind formulele

$$\sin^{2k-1}\alpha = \frac{1}{2^{2k-2}} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^{p-1} \binom{2k-1}{k-p} \sin(2p-1)\alpha,$$

$$\sin^{2k}\alpha = \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{2k}{k-p} \cos 2p\alpha + \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k},$$

rezultă

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-2}} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^{p-1} \binom{2k-1}{k-p} \sin(2p-1)\alpha \sum_{j=k}^{\infty} \mp$$

$$\mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k+1} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{p=1}^{p=k} (-1)^p \binom{2k}{k-p} \cos 2p\alpha \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k} =$$

$$= B + C + D. \tag{9}$$

În expresia

$$B = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k},$$

se pune în evidență limita $j = 0$ pentru primul termen și limita $j = k$ pentru al doilea termen

$$B = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2k} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2k}. \tag{10}$$

Se observă că prima sumă are valoarea $\frac{1}{\lambda}$ pentru $k = 0$. Cu notația

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}, \tag{11}$$

se poate scrie

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - A_0.$$

Notînd $j - k = u$ în ultima sumă a formulei (10) se deduce

$$B = \frac{1}{\lambda} - A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{k+u} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \lambda^{2k+2u-1} \cdot h^{2u}. \tag{12}$$

Ultimul termen al formulei (12) poate fi grupat. Pentru o valoare determinată a lui u se obține

$$\frac{1}{2}(-1)^u \lambda^{2u} \cdot h^{2u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

și sumînd pentru toate valorile lui u rezultă

$$\frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2u} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}.$$

Notînd $j = u$ în prima sumă din (12) și ținînd seama de egalitatea

$$\binom{2k+2u}{2u} = \binom{2k+2u}{2k}, \tag{13}$$

expresia B devine :

$$B = \frac{1}{\lambda} - A_0 + \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \binom{\frac{1}{2}}{u} \lambda^{2u} \cdot h^{2u} \left[\frac{1}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\binom{\frac{1}{2}}{u}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \right]. \tag{14}$$

În mod analog se procedează cu expresia C din formula (9). Ținînd seama de egalitatea

$$\binom{2j}{2j-2k+1} = \binom{2j}{2k-1},$$

grupînd primele două sume și notînd în a treia sumă $j - k = u$, expresia C ia forma

$$C = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \sin(2p-1)\alpha \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^1}{2^{2k-2}} \binom{2k-1}{k-p} \sum_{u=0}^{\infty} \mp$$

$$\mp (-1)^{k+u} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \lambda^{2k+2u-1} h^{2u+1}.$$

Prin gruparea ultimelor două sume rezultă

$$C = \sum_{p=1}^{\infty} \pm (-1)^p \sin(2p-1)\alpha \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u+1} h^{2u+1} \times$$

$$\times \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-2}. \tag{15}$$

Grupînd primele două sume, folosind în a treia sumă notaţia $j - k = u$ şi ţinînd seama de egalitatea (13) expresia D devine :

$$D = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p\alpha \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} \binom{2k}{k-p} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{k+u} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \times$$

$$\times \lambda^{2k+2u-1} \cdot h^{2u}.$$

Se grupează ultimele două sume :

$$D = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p\alpha \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \times$$

$$\times \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1},$$

şi se pune în evidenţă limita $u = 0$

$$D = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos 2p\alpha \left[\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \right]. \tag{16}$$

Înlocuind în (9) expresiile B, C şi D, date respectiv de formulele (14), (15), (16), înlocuind radicalul din (9) în (6) şi folosind notaţiile :

$$A_0^* = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - h^2} - \frac{1}{\lambda} + A_0 -$$

$$- \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \binom{\frac{1}{2}}{u} \lambda^{2u} h^{2u} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\binom{\frac{1}{2}}{u}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \right],$$

(17)

$$A^*_{2p-1} = -$$

$$- \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u+1} \cdot h^{2u+1} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k-1}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-2}, \quad (18)$$

$$A^*_{2p} = A_{2p} -$$

$$- \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k+u} \binom{2k+2u}{2k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}, \quad (19)$$

$$A_{2p} = - \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k-p} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}, \quad (20)$$

rezultă:

$$x_B = R\left[A^*_0 - \cos\alpha + \sum_{p=1}^{\infty} \pm (-1)^p A^*_{2p-1} \sin(2p-1)\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^*_{2p} \cos 2p\alpha\right],$$

sau:

$$x_B = RA^*_0 - R[(\cos\alpha + A^*_2 \cos 2\alpha - A^*_4 \cos 4\alpha + A^*_6 \cos 6\alpha - + \ldots) \pm$$

$$\pm (A^*_1 \sin\alpha - A^*_3 \sin 3\alpha + A^*_5 \sin 5\alpha - + \ldots)]. \quad (21)$$

Această formulă constituie seria Fourier a deplasării pistonului.

Dacă mecanismul este axat, $h = 0$ și deci $A^*_0 = A_0$, $A^*_{2p} = A_{2p}$ și $A^*_{2p-1} = 0$. Seria (21) păstrează în acest caz numai armonica întîia și toate armonicile pare; armonicile impare, începînd cu armonica treia, lipsesc.

Viteza pistonului este dată de relația:

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Folosind formula (21) se deduce:

$$v_B = R\omega[(\sin\alpha + 2A^*_3 \sin 2\alpha - 4A^*_4 \sin 4\alpha + 6A^*_6 \sin 6\alpha - + \ldots) \mp$$

$$\mp (A^*_1 \cos\alpha - 3A^*_3 \cos 3\alpha + 5A^*_5 \cos 5\alpha - + \ldots)].$$

O nouă derivare în raport cu timpul conduce la expresia acceleraţiei pistonului

$$j_B = R\omega^2[(\cos\alpha + 2^2A_2^*\cos 2\alpha - 4^2A_4^*\cos 4\alpha + 6^2A_6^*\cos 6\alpha - + \ldots) \pm$$

$$\pm (A_1^*\sin\alpha - 3^2A_3^*\sin 3\alpha + 5^2A_5^*\sin 5\alpha - + \ldots)] +$$

$$+ R\theta[(\sin\alpha + 2A_2^*\sin 2\alpha - 4A_4^*\sin 4\alpha + 6A_6^*\sin 6\alpha - + \ldots) \mp$$

$$\mp (A_1^*\cos\alpha - 3A_3^*\cos 3\alpha + 5A_5^*\cos 5\alpha - + \ldots)].$$

Prin gruparea termenilor formula precedentă poate fi pusă sub forma

$$j_B = R\{[(\omega^2 \mp \theta A_1^*)\cos\alpha + (\pm\omega^2 A_1^* + \theta)\sin\alpha] +$$

$$+ A^*[(2\omega)^2\cos 2\alpha + 2\theta\sin 2\alpha] \pm A_3^*[3\theta\cos 3\alpha - (3\omega)^2\sin 3\alpha] -$$

$$- A_4^*[(4\omega)^2\cos 4\alpha + 4\theta\sin 4\alpha] \mp A_5^*[5\theta\cos 5\alpha - (5\omega)^2\sin 5\alpha] +$$

$$+ A_6^*[(6\omega)^2\cos 6\alpha + 6\theta\sin 6\alpha] \mp A_7^*[7\theta\cos 7\alpha - (7\omega)^2\sin 7\alpha] -$$

$$- A_8^*[(8\omega)^2\cos 8\alpha + 8\theta\sin 8\alpha] \mp A_9^*[9\theta\cos 9\alpha - (9\omega)^2\sin 9\alpha] + \ldots\}.$$

Folosind această relaţie, forţa de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie are următoarea expresie :

$$F_t = -m_t j_B = \frac{m_t R}{\cos\sigma}\omega^2\cos(\alpha \pm \sigma + \pi) + \theta\sin(\alpha \pm \sigma + \pi)] +$$

$$+ m_t R\sum_{p=1}^{\infty} A_{2p}^*[(2p\omega)^2\cos(2p\alpha + p\pi) + 2p\theta\sin(2p\alpha + p\pi)] \pm$$

$$\pm m_t R\sum_{p=1}^{\infty} A_{2p+1}^*\left\{[(2p+1)\omega]^2\cos\left[(2p+1)\alpha + \pi\left(p + \frac{1}{2}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + (2p+1)\theta\sin\left[(2p+1)\alpha + \pi\left(p + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}, \qquad (22)$$

unde m_t este masa pieselor cu mişcare de translaţie, iar σ unghiul definit de relaţia $\operatorname{tg}\sigma = -A_1^*$.

Folosind notaţiile

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\theta}{p\omega^2}, \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= m_t R \frac{\omega^2}{\cos\sigma \cos\varphi_1}, \\ T_p &= m_t R A_p^* \frac{(p\omega)^2}{\cos\varphi_p} \qquad (p<1), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\psi_p = \Omega_p + \varphi_p, \tag{25}$$

unde $\Omega_1 = \pm\sigma + \pi$, $\Omega_{2p} = p\pi$, $\Omega_{2p+1} = \pi\left(p + \frac{1}{2}\right)$ în cazul mecanismului dezaxat în sensul de rotație și $\Omega_{2p+1} = \pi\left(p + \frac{3}{2}\right)$ în cazul mecanismului dezaxat în sens invers sensului de rotație, relația (22) devine:

$$F_t = T_1 \cos(\alpha + \psi_1) + T_2 \cos(2\alpha + \psi_2) + T_3 \cos(3\alpha + \psi_3) + \ldots + \\ + T_p \cos(p\alpha + \psi_p) + \ldots . \tag{26}$$

Formula (26) descompune forța de inerție a maselor cu mișcare de translație într-un număr infinit de termeni, fiecare termen fiind o funcție periodică; pentru termenul de ordinul p perioada este cel mai mic multiplu comun al perioadei funcțiunii ω și al perioadei $\frac{2\pi}{p}$.

În cazul ω = const. coeficienții T_p și unghiurile ψ_p sînt invariabile și prin urmare seria (26) devine o serie Fourier. Astfel termenul de ordinul p al seriei (26) poate fi considerat drept armonica de ordinul p a forței de inerție a maselor cu mișcare de translație, „modulată" din cauza variației vitezei unghiulare ω.

3. INTERPRETAREA VECTORIALĂ A TERMENULUI DE ORDINUL p –

Termenul de ordinul p al seriei (26) este susceptibil de următoarea interpretare vectorială. Se consideră un vector, egal în fiecare moment cu valoarea corespunzătoare a coeficientului T_p, care se rotește în sensul de rotație al manivelei cu viteza unghiulară ω_p^* definită de formula

$$\omega_p^* = p\omega\left(1 + \frac{2\theta^2 - \omega\frac{d\theta}{dt}}{p^2\omega^4 + \theta^2}\right). \tag{27}$$

În momentul $\alpha = 0$ vectorul face cu direcția Ox în sensul lui de rotație unghiul

$$\psi_p^{(0)} = \Omega_p + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\theta_0}{p\omega_0^2}\right),$$

ω_0 şi θ_0 fiind respectiv viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară a manivelei în momentul considerat (fig. 2*a*). După scurgerea timpului t, în care manivela s-a rotit cu unghiul $\alpha = \int_0^t \omega \, dt$ vectorul s-a rotit cu unghiul

$$\gamma = \int_0^t \omega_p^* \, dt = p \int_0^t \omega dt + \int_0^t p\omega \, \frac{2\theta^2 - \omega \frac{d\theta}{dt}}{p^2\omega^4 + \theta^2} \, dt$$

sau

$$\gamma = p\alpha + \int_0^t \frac{1}{1 + \left(\frac{\theta}{p\omega^2}\right)^2} \cdot \frac{-\frac{d\theta}{dt} p\omega^2 + 2p\,\omega\theta^2}{(p\omega^2)^2} \, dt = p\alpha +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{1 + \left(\frac{\theta}{p\omega^2}\right)^2} \frac{d}{dt}\left(-\frac{\theta}{p\omega^2}\right) dt = p\alpha + \int_0^t \frac{d}{dt} \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\theta}{p\omega^2}\right) dt,$$

deci

$$\gamma = p\alpha + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\theta}{p\omega^2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\theta_0}{p\omega_0^2}\right).$$

În momentul t vectorul are mărimea T_p şi face cu direcţia Ox, în sensul lui de rotaţie, unghiul

$$\gamma + \psi_p^{(0)} = p\alpha + \Omega_p + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\theta}{p\omega^2}\right) = p\alpha + \psi_p.$$

Proiecţia vectorului pe direcţia Ox este deci egală cu mărimea termenului de ordinul p în momentul respectiv (fig. 2*b*).

În baza acestui rezultat se poate formula următoarea teoremă: termenul de ordinul p al seriei (26) este în fiecare moment egal cu proiecţia pe direcţia Ox a unui vector de mărime variabilă, egală cu valoarea corespunzătoare a coeficientului T_p, care se roteşte în sensul manivelei cu viteza unghiulară variabilă ω_p^* şi care face cu direcţia Ox în sensul lui de rotaţie şi în momentul $\alpha = 0$, unghiul $\psi_p^{(0)}$.

Formula (27) arată că viteza unghiulară ω_p^* este aceeaşi pentru toţi cilindrii unui motor policilindric.

Potrivit formulei (22), în locul vectorului T_p din figura 2 pot fi consideraţi vectorii $T_{p\nu} = m_t R A_p^* (p\omega)^2$ şi $T_{p\tau} = m_t R A_p^* p\theta$, care se rotesc în sensul manivelei cu viteza unghiulară $p\omega$, care sînt permanent

perpendiculari între ei, vectorul T_{p_ν} făcînd cu direcția Ox, în sensul lui de rotație, unghiul $p\alpha + \Omega_p$ (fig. 3); pentru termenul de ordinul întîi

$$T_{1_\nu} = \frac{m_i R\omega^2}{\cos\sigma} \text{ și } T_{1_\tau} = \frac{m_i R\theta}{\cos\sigma}.$$

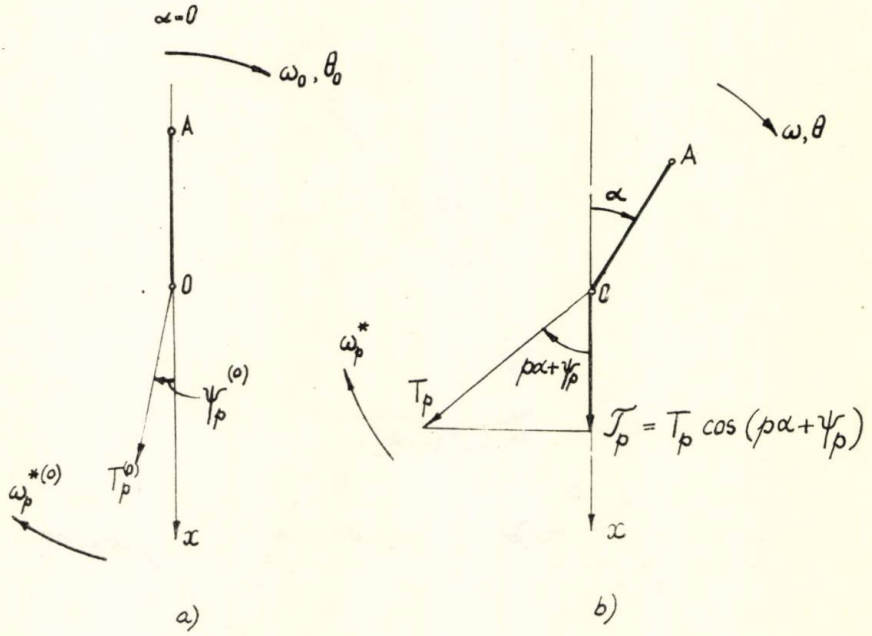


Fig. 2. — Interpretarea vectorială a termenului de ordinul p al seriei (26).

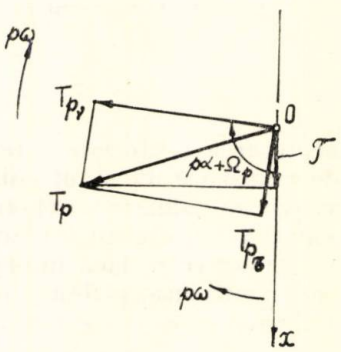


Fig. 3. — Interpretarea vectorială a termenului de ordinul p al seriei (22).

Interpretînd din nou relația (22) se constată că fiecare termen al seriei poate fi realizat prin rezultanta forțelor de inerție a două mase egale, de mărime $m_1 = \frac{1}{2}\frac{m_i R}{\rho\cos\sigma}$ pentru termenul de ordinul întîi și $m_p = \frac{1}{2}\frac{m_i RA_p^*}{\rho}$ pentru ceilalți termeni, concentrate la distanța ρ de

axa de rotaţie, care se rotesc în sensuri contrare cu vitezele unghiulare $+ p\omega$ respectiv $- p\omega$, care rămîn permanent simetrice faţă de Ox, dreapta care uneşte centrul de rotaţie cu centrul masei ce se roteşte în sensul manivelei făcînd cu direcţia Ox unghiul $+ \Omega_p$ în momentul $\alpha = 0$ (fig. 4).

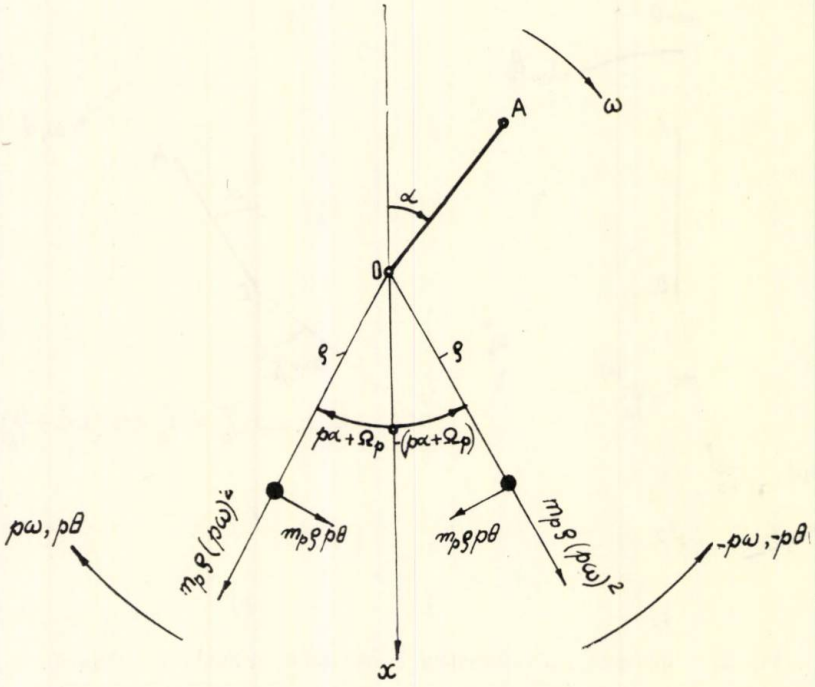


Fig. 4. — Interpretarea mecanică a termenului de ordinul p al seriei (22).

4. CONCLUZII

Interpretarea vectorială a termenilor forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie ale unui cilindru este posibilă şi cînd se consideră variaţia vitezei unghiulare a arborelui cotit. Vectorii ce interpretează termenii în cauză au viteze unghiulare variabile, care sînt multipli ai vitezei unghiulare a manivelei dacă interpretarea este realizată prin doi vectori.

Termenii sînt susceptibili şi de o interpretare mecanică, realizată cu ajutorul unor mase care se rotesc în sensuri contrare cu viteze unghiulare variabile.

Primită la redacţie la 11 februarie 1969

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL SPAȚIAL AL STRUCTURILOR MULTIETAJATE SIMETRICE CU ETAJ CONSTANT ALCĂTUITE CU DIAFRAGME. II

de FLORIAN VIRGILIU

Institutul de petrol, gaze și geologie, București

Structura sistemului de ecuații obținut în partea întîia a lucrării (unde se indică rezolvarea lui prin mijloacele moderne de calcul) oferă posibilitatea rezolvării lui numerice și prin mijloacele tradiționale de calcul. În această parte a lucrării se dau două procedee de rezolvare numerică aproximativă a acestor ecuații, numai prin sistematizarea operațiunilor de calcul, astfel încît aproximațiile respective nu implică concesii de ordin teoretic în rezolvarea problemei propuse.

În partea I a lucrării s-a prezentat algoritmul de calcul privind încărcarea, dintr-o acțiune orizontală, a diferitelor elemente portante și de contravîntuire a structurilor multietajate. Acesta a condus la sistemul de ecuații (2.6) a cărui rezolvare este indicată a fi încredințată unui calculator electronic. În acest scop sistemul de ecuații respectiv a fost pus sub forma (3.3).

Structura sistemului de ecuații (2.6) permite de asemenea rezolvarea lui numerică prin mijloacele tradiționale de calcul, fără concesii deci de ordin teoretic și fără ca prin amploarea lor calculele respective să devină prohibitive. Aceasta se realizează prin sistematizarea lor, precum și prin folosirea unor calcule preefectuate, date în tabelele din [4].

6. CALCULUL PRIN MIJLOACE TRADIȚIONALE UZUALE

În cele ce urmează se indică două procedee de rezolvare numerică aproximativă a sistemului de ecuații (2.6), în ordinea crescîndă a aproximației pe care o include, în situația că fiecare lamelă echivalentă poate

fi caracterizată, din punct de vedere fizic-geometric, numai prin caracteristicile $I_{l'}$ şi $\Delta_{l'}$.

În consecinţă, este valabilă observaţia 6) din partea I-a a lucrării.

De asemenea, în această parte a lucrării se arată condiţiile în care metoda distribuirii încărcării totale, proporţional cu momentele de inerţie echivalente ale diferitelor elemente portante verticale, poate fi aplicată, fără a comite erori inadmisibile.

6.1. CALCULUL APROXIMATIV, CU LUAREA ÎN CONSIDERARE A VALORII CARACTERISTICII RELATIVE DE FORFECARE A CONSOLEI ECHIVALENTE (Δ'_k) DIFERENŢIATĂ PE NIVELE

Se consideră în mod aproximativ că valoarea caracteristicii relative la forfecare a consolei echivalente variază liniar în raport cu numărul de ordine (k) al nivelului, pe primele r nivele, adică

$$\Delta'_k \simeq \Delta_n - (n - k) \cdot \delta, \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots, r. \tag{6.1}$$

În acest fel, condiţiile geometrice (8) se pot pune iniţial numai la aceste r nivele. Numărul r rezultă din relaţia (egalizarea numărului de ecuaţii cu cel al necunoscutelor pe care le cuprinde)

$$r \cdot m'_1 + (r + 1) + 1 = (r + 1) \cdot m'_1 + 2. \tag{6.2}$$

Rezultă deci

$$r = m'_1, \tag{6.3}$$

unde m'_1 este numărul de grupuri de lamele care au aceeaşi caracteristică relativă de forfecare $\Delta_{l'}$.

Vor trebui rezolvate astfel iniţial ecuaţiile:

$$\beta_{kl'} \cdot M'_{0\,l'} + 6\,(k-1) \cdot M'_{1\,l'} + \ldots + 6\,(k-i) \cdot M'_{i\,l'} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{l'} \cdot M'_{k\,l'} - \eta_{l'} \cdot d_k \cdot [\Delta_n - (n-k) \cdot \delta] = \eta_{l'} \cdot D_k,$$

a) pentru $\begin{cases} k = 1, 2, \ldots, r, \\ l' = 1,2,\ldots, m'_1; \end{cases}$ (6.4)

b) $$\sum_{l'} M'_{k\,l'} = M_k$$

pentru $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots, r;$

c) $$\sum_{l'} \Delta_{l'} \cdot M'_{0\,l'} - \Delta_n \cdot M_0 = 0.$$

Se observă că ecuația (c) din sistemul (6.4) de mai sus, rezultă din particularizarea, pentru $k = n$, a relației (2.9), (adică din punerea globală a condiției geometrice la ultimul nivel).

În grupul (a) de ecuații, s-a notat

$$d_k = M_0 - M_k, \tag{6.5}$$

unde M_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sînt momentele forțelor exterioare pe întreaga structură ($M_n = 0$).

Rezolvarea sistemului (6.4) de ecuații se poate face în mod simplu astfel:

— Din grupul (a) de ecuații se determină succesiv expresiile

$$M'_{k\,l'} = f_{kl'}\,(M'_{0\,l'},\ \Delta_n,\ \delta) \tag{6.6}$$

$$\text{pentru} \quad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, r, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'_1. \end{cases}$$

— Se aplică acestora condițiile de echivalență (b), completîndu-se relațiile obținute cu condiția (b) pentru $k = 0$, precum și cu relația (c). Se obține astfel sistemul de $r + 2 = m'_1 + 2$ ecuații de forma

$$\sum_{l'} f_{kl'} = M_k$$

$$\text{pentru } k = 1, 2, \ldots r, \tag{6.7}$$

$$\sum_{l'} M'_{0\,l'} = M_0,$$

$$\sum_{l'} \Delta_{l'} \cdot M'_{0\,l'} - M_0 \cdot \Delta_n = 0.$$

Determinarea necunoscutelor cuprinse în aceste ecuații și anume

$$M'_{0\,l'} \quad (l' = 1, 2, \ldots, m'_1),$$

$$\Delta_n \text{ și } \delta,$$

se poate face simplu prin eliminare.

După aflarea acestora, celelalte necunoscute,

$$M'_{k\,l'} \qquad \text{pentru} \quad \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, r, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'_1, \end{cases}$$

se determină cu ajutorul expresiilor (6.6).

În continuare, necunoscutele

$$M'_{k\,l'} \qquad \text{pentru} \qquad \begin{cases} k = r+1, \ldots, n-1, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'_1 \end{cases}$$

și

$$\Delta'_k \qquad \text{pentru} \qquad k = r+1, \ldots, n-1,$$

se determină, punînd condițiile geometrice (8) succesiv la nivelele $(r+1)$, $(r+2)$, $\ldots$, $(n-1)$, adică scriind pe rînd ecuații de forma (a) din sistemul (4.4).

Astfel, presupunînd că au fost calculate necunoscutele de mai sus, pînă la $k = q-1$, punînd condițiile geometrice (adică scriind ecuația de forma (a), pentru $k = q-1$), se determină expresiile :

$$M'_{q\,l'} = f_{ql'}(\Delta'_q). \tag{6.8}$$

Se pune apoi condiția de echivalență (ecuația de tipul (b) din sistemul (6.4)), pentru $k = q$:

$$\sum_{l'} f_{ql'} = M_q. \tag{6.9}$$

Din (6.9) rezultă astfel necunoscuta Δ'_q, care — introdusă în (6.8) — permite determinarea necunoscutelor

$$M'_{q\,l'} \quad (l' = 1, 2, \ldots, m'_1).$$

Observație

Metoda expusă poate fi aplicată, în modul arătat, numai pentru

$$n \geqslant m'_1 + 1. \tag{6.10}$$

Dacă însă

$$n = m'_1 - a, \tag{6.11}$$

unde a este un număr întreg oarecare, problema se rezolvă, completînd sistemul (6.7) de ecuații cu $(a+1)$ ecuații, care se obțin prin egalarea expresiilor momentelor $M'_{n-1,\,l'}$, rezultate din grupul (a) al ecuațiilor (6.4), pentru $k = n-1$ și pentru $k = n$.

Vom avea deci :

$$\beta_{n-1,\,l'}\cdot M'_{0l'} + 6\,[(n-1)-1]\cdot M'_{1l'} + \ldots + 6\,[(n-1)-\mathrm{i}]\cdot M'_{il'} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{l'}\cdot M'_{n-1,\,l} - \eta_{l'}\cdot d_{n-1}\cdot(\Delta_n - \delta) = \eta_{l'}\cdot D_{n-1},$$

$$\beta_{nl'}\cdot M'_{0l'} + 6\,(n-1)\cdot M'_{1l'} + \ldots + 6\,(n-\mathrm{i})\cdot M'_{il'} + \ldots \qquad (6.11)$$

$$\ldots + 6\,M'_{n-1,\,l'} - \eta_{l'}\cdot d_n\cdot\Delta_n = \eta_{l'}\cdot D_n,$$

din care rezultă

$$M'_{n-1,\,l'} = f_{n-1,\,l'}\,(M'_{0l'},\,\Delta_n,\,\delta),$$

$$M'_{n-1,\,l'} = g_{n-1,\,l'}\,(M'_{0\,l'},\,\Delta_n). \qquad (6.12)$$

Cele $(a+1)$ ecuaţii suplimentare vor fi deci de forma

$$f_{n-1,\,l'} = g_{n-1,\,l'},$$

$$\text{pentru } (a+1) \text{ valori ale lui } l'. \qquad (6.13)$$

În total, se rezolvă astfel iniţial tot $(m'_1 + 2)$ ecuaţii, cu aceleaşi necunoscute ca şi în cazul general.

6.2. CALCULUL APROXIMATIV, CU LUAREA ÎN CONSIDERARE A UNEI CARACTERISTICI RELATIVE LA FORFECARE A CONSOLEI ECHIVALENTE, CU O VALOARE MEDIE ÎNTRE PRIMELE NIVELE ALE ACESTEIA

Dacă valorile caracteristicilor relative la forfecare ale diferitelor lamele echivalente $(\Delta_{l'})$ sînt de acelaşi ordin de mărime, se poate considera că valoarea caracteristicii corespunzătoare a consolei echivalente este constantă pe primele r nivele ale structurii.

Luînd această valoare egală cu cea care se obţine din expresia (2.9), pentru $k = n$,

$$\Delta' = \frac{\sum\limits_{l'} \Delta_{l'}\cdot M'_{0l'}}{M_0}, \qquad (6.14)$$

condiţiile geometrice se vor putea pune iniţial la aceste r nivele. Numărul r rezultă din ecuaţia

$$r\cdot m'_1 + r + 2 = (r+1)\cdot m'_1 + 1 \qquad (6.15)$$

şi anume

$$r = m'_1 - 1. \qquad (6.16)$$

Rezolvarea problemei urmează a se face în acest caz astfel:
— se scriu condițiile geometrice la primele r nivele:

$$\beta_{kl'} \cdot M'_{0l'} + \ldots + 6\,(k - \mathrm{i}) \cdot M'_{il'} + \ldots + \alpha_{l'} \cdot M'_{kl'} - \\ - \eta_{l'} \cdot d_k \cdot \Delta' = \eta_{l'} \cdot D_k \tag{6.17}$$

$$\text{pentru} \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, r, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'_1; \end{cases}$$

— se determină succesiv, din aceste ecuații, expresiile

$$M'_{kl'} = f_{kl'}\,(M'_{0l'}, \Delta'),$$

$$\text{pentru} \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, r, \\ l' = 1, 2, \ldots, m'_1; \end{cases} \tag{6.18}$$

— se aplică condițiile de echivalență

$$\sum_{l'} f_{kl'} = M_k,$$

$$\text{pentru } k = 1,\ 2, \ldots r,$$

$$\sum_{l'} M'_{0l'} = M_0, \tag{6.19}$$

$$\sum_{l'} \Delta_{l'} \cdot M'_{0l'} - \Delta' \cdot M_0 = 0;$$

— din aceste ecuații, în număr de $(m'_1 + 1)$, rezultă — prin eliminarea mai întîi a necunoscutei Δ' din primele r ecuații, cu ajutorul ultimei ecuații — necunoscutele

$$M'_{0l'}\,(l' = 1, 2, \ldots m'_1)$$

și apoi Δ', din ultima ecuație,
— cu ajutorul expresiilor (6.18) se determină apoi necunoscutele

$$M'_{kl'} \text{ pentru } \begin{cases} k = 1,\ 2, \ldots, r, \\ l' = 1,\ 2, \ldots, m'_1. \end{cases}$$

In continuare, celelalte necunoscute se determină în mod similar ca în cazul (6.1), expus mai sus.

Observație

Metoda expusă poate fi aplicată, în modul arătat, numai pentru

$$n \geqslant m_1'. \tag{6.20}$$

Dacă

$$n = m_1' - a, \tag{6.21}$$

sistemul de ecuații (6.19) se completează cu a ecuații, care se obțin la fel ca în metoda anterioară (6.1), însă pentru a valori ale lui l'.

6.4. CALCULUL APROXIMATIV AL UNOR VALORI INDICATIVE ALE MOMENTELOR $M'_{kl'}$ ȘI A CARACTERISTICII RELATIVE LA FORFECARE A CONSOLEI ECHIVALENTE, VALABILĂ PE TOATĂ ÎNĂLȚIMEA ACESTEIA

Se consideră, în mod aproximativ, ca valabilă o lege de distribuție a încărcării între diferitele lamele de forma

$$M'_{kl'} \simeq c_{l'} \cdot M_k. \tag{6.22}$$

Din condițiile geometrice impuse la fiecare nivel, rezultă

$$c_{l'} \cdot \left[6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} M_j - (M_0 - M_k) - 3k \cdot M_0 + \Delta_{l'} \cdot (M_0 - M_k) \right] =$$

$$= \eta_{l'} \cdot \left[6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} M_j - (M_0 - M_k) - 3k \cdot M_0 + \Delta' \cdot (M_0 - M_k) \right] + R_{kl'}, \tag{6.23}$$

$$\text{pentru} \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n \\ l' = 1, 2, \ldots, m_1' \end{cases}$$

unde $R_{kl'}$ sînt abaterile care apar datorită aplicării legii aproximative (4.22).

Din (6.23), rezultă

$$R_{kl'} = \left[6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} M_j - (M_0 - M_k) - 3k \cdot M_0 \right] \cdot (c_{l'} - \eta_{l'}) + \\ + (M_0 - M_k) \cdot (c_{l'} \cdot \Delta_{l'} - \eta_{l'} \cdot \Delta'). \tag{6.24}$$

Pentru ca aceste abateri să fie minime, este necesar ca:

a) termenul cel mai important (primul termen) din relația de mai sus să fie nul. Rezultă astfel

$$c_{l'} = \eta_{l'}, \tag{6.25}$$

b) suma abaterilor $R_{kl'}$ să fie nulă, la fiecare nivel. Rezultă

$$\Delta' = \frac{\sum_{l'} \Delta_{l'} \cdot I_{l'}}{I'}. \tag{6.26}$$

Aşadar, valorile indicative ale momentelor $M'_{k\nu}$ — în situaţia (6.22) — pot fi calculate cu formula aproximativă

$$M'_{kl'} \simeq \eta_{l'} \cdot M_k. \tag{6.27}$$

Valorile abaterilor $R_{kl'}$, în aceste condiţii, sînt

$$R_{kl'} = (M_0 - M_k) \cdot \eta_{l'} \cdot (\Delta_{l'} - \Delta'). \tag{6.28}$$

Rezultă deci că valorile momentelor $M'_{k\nu}$, calculate cu formula (6.27), sînt acceptabile, din punctul de vedere al ipotezei rigidităţii şaibelor orizontale (abateri R_k suficient de mici), *numai dacă valorile caracteristicelor* $\Delta_{l'}$ *ale diferitelor lamele echivalente sînt suficient de apropiate între ele ca mărime.*

7. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră aceeaşi structură, pentru care — în partea I-a a lucrării — a fost redat calculul cu ajutorul calculatorului electronic C.I.F.A. 102.

7.1. CALCULUL CU AJUTORUL MIJLOACELOR UZUALE, PRIN METODA APROXIMATIVĂ (6.1)

De asemenea calculul este redat numai pentru direcţia transversală de acţiune a forţelor exterioare.

Întrucît

$$m'_1 = 2,$$

rezultă că condiţia geometrică se pune iniţial la primele două nivele, adică

$$r = 2.$$

Termenii d_{k1} (adică în primul mod de vibraţie), calculaţi cu ajutorul tabelelor nr. 2 din /4/ sînt:

k	a_{k1}	$b_{k1} \cdot \Delta'$	d_{k1}
1	0,1000	0,1728	−0,2728
2	0,1955	0,3252	−0,5207
3	0,2750	0,4388	−0,7138
4	0,3231	0,4998	−0,8229

Factorii de moment m_k, calculați cu ajutorul tabelelor nr. 1 din /4/, sînt:

k	m_{k1}	$\Gamma_k \cdot \Delta'$	m_k
0	3,2305	4,9980	−8,2285
1	2,2305	3,2701	−5,5006
2	1,2760	1,7457	−3,0217
3	0,4805	0,6105	−1,0910
4	0	0	0

Ecuațiile din grupul (a) al sistemului (6.4) sînt:

$$k=1 \begin{cases} 62\, m_{0,\mathrm{I}} - 59\, m_{1,\mathrm{I}} + 0{,}55 \cdot 0{,}2728\, (\Delta_4 - 3\delta) = -12{,}08, \\ 8\, m_{0.\mathrm{II}} - 5\, m_{1,\mathrm{II}} + 0{,}45 \cdot 0{,}2728\, (\Delta_4 - 3\delta) = -9{,}88, \end{cases}$$

$$k=2 \begin{cases} 65\, m_{0.\mathrm{I}} + 6\, m_{1.\mathrm{I}} - 59\, m_{2.\mathrm{I}} + 0{,}55 \cdot 0{,}5207\, (\Delta_4 - 2\delta) = -42{,}44, \\ 11\, m_{0.\mathrm{II}} + 6\, m_{1.\mathrm{II}} - 5\, m_{2.\mathrm{II}} + 0{,}45 \cdot 0{,}5207\, (\Delta_4 - 2\delta) = -34{,}72, \end{cases}$$

Din aceste ecuații, se formează expresiile de forma (6.6):

$$(1) \quad \begin{cases} m_{1.\mathrm{I}} = 1{,}0508\, m_{0.\mathrm{I}} + 0{,}002545\, \Delta_4 - 0{,}007635\, \delta + 0{,}2047, \\ m_{1.\mathrm{II}} = 1{,}600\, m_{0.\mathrm{II}} + 0{,}024570\, \Delta_4 - 0{,}073710\, \delta + 1{,}9760, \\ m_{2.\mathrm{I}} = 1{,}2086\, m_{0.\mathrm{I}} + 0{,}005111\, \Delta_4 - 0{,}010480\, \delta + 0{,}7401, \\ m_{2.\mathrm{II}} = 4{,}1200\, m_{0.\mathrm{II}} + 0{,}076328\, \Delta_4 - 0{,}182130\, \delta + 9{,}3152. \end{cases}$$

Formînd ecuațiile de tipul (6.7), avem

$$\begin{aligned} 1{,}0508\, m_{0,\mathrm{I}} + 1{,}600\, m_{0.\mathrm{II}} + 0{,}027115\, \Delta_4 - 0{,}081345\, \delta &= -7{,}6812, \\ 1{,}2086\, m_{0.\mathrm{I}} + 4{,}1200\, m_{0.\mathrm{II}} + 0{,}081439\, \Delta_4 - 0{,}192610\, \delta &= -13{,}0763, \\ m_{0.\mathrm{I}} + m_{0.\mathrm{II}} &= -8{,}2285, \\ 600\, m_{0.\mathrm{I}} + 60\, m_{0.\mathrm{II}} + 8{,}2285\, \Delta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Din rezolvarea acestui sistem, prin eliminarea mai întîi pe rînd a necunoscutelor δ și Δ_4, rezultă valorile:

$$m_{0.\mathrm{I}} = -2{,}4823 \qquad \begin{cases} m_{01} = -1{,}3540, \\ m_{02} = -1{,}1283, \end{cases}$$

$$m_{0.\mathrm{II}} = -5{,}7482; \qquad m_{03} = -5{,}7482,$$

$$\Delta_4 = 222{,}86,$$

$$\delta = 23{,}59.$$

Din expresiile (1) de mai sus, se obține:

$$m_{1,I} = -2{,}0166, \qquad \begin{cases} m_{11} = -1{,}1000, \\ m_{12} = -0{,}9166, \end{cases}$$

$$m_{1,II} = -3{,}4841; \qquad m_{13} = -3{,}4841,$$

$$m_{2,I} = -1{,}3682, \qquad \begin{cases} m_{21} = -0{,}7463, \\ m_{22} = -0{,}6219, \end{cases}$$

$$m_{2,II} = -1{,}6528, \qquad m_{23} = -1{,}6528.$$

Scriind ecuațiile de tipul (a) din sistemul (6.4), pentru $k = 3$, avem:

$$68\, m_{0,I} + 12\, m_{1,I} + 6\, m_{2,I} - 59\, m_{3,I} + 0{,}55 \cdot 0{,}7138\, \Delta_3 = -83{,}15,$$

$$14\, m_{0,II} + 12\, m_{1,II} + 6\, m_{2,II} - 5\, m_{3,II} + 0{,}45 \cdot 0{,}7138\, \Delta_3 = -68{,}05,$$

de unde rezultă expresiile de tipul (6.8):

$$(2) \qquad \begin{cases} m_{3,I} = -2{,}0009 + 0{,}006654\, \Delta_3, \\ m_{3,II} = -12{,}8302 + 0{,}064242\, \Delta_3. \end{cases}$$

Aplicînd condiția de echivalentă se obține ecuația:

$$-14{,}8311 + 0{,}070896\, \Delta_3 = -1{,}0910,$$

din care rezultă

$$\Delta_3 = 193{,}81.$$

Introducînd această valoare în expresiile (2), se obține

$$m_{3,I} = -0{,}7112 \qquad \begin{cases} m_{31} = -0{,}3879, \\ m_{32} = -0{,}3233; \end{cases}$$

$$m_{3,II} = -0{,}3797, \qquad m_{33} = -0{,}3797.$$

Recapitulînd, valorile tuturor eforturilor, la cele patru nivele, în cele trei elemente portante, sînt

k \ l'	1	2	3
0	− 1,3450	− 1,1283	− 5,7482
1	− 1,1000	− 0,9166	− 3,4841
2	− 0,7463	− 0,6219	− 0,6528
3	− 0,3879	− 0,3233	− 0,3797

Comparînd valorile obţinute mai sus (prin mijloacele uzuale — maşina manuală de calcul), cu cele obţinute direct (printr-un calculator electronic), se constată diferenţe foarte mici, de ordinul a circa 3% la primele nivele şi de cca. 8%, la penultimul nivel.

8. CONCLUZII

După cum se poate constata, calculele redate mai sus nu implică nici o dificultate. Este necesar însă să se respecte o anumită succesiune a calculelor numerice, sistematizîndu-le deci, în conformitate cu explicaţiile teoretice date în cele ce preced.

Faptul că se păstrează acelaşi algoritm de calcul în aplicaţiunile practice ca şi în cazul rezolvării acestora cu ajutorul calculatoarelor electronice, precum şi buna apropiere de valorile furnizate de acestea din urmă, asigură încrederea necesară în rezultatele obţinute.

Folosirea tabelelor din [4] este indicată, atît pentru determinarea încărcărilor din primele trei moduri de vibraţie ale întregii structuri, cît şi pentru determinarea caracteristicilor fizice-geometrice ($I_{i'}$ şi $\Delta_{i'}$), ale diferitelor elemente portante verticale ale structurii, conform formulelor (3.28) din partea I-a a lucrării.

Primită la redacţie la 15 februarie 1969

O METODĂ DE CALCUL AL OSCILAȚIILOR DE TORSIUNE ALE ARBORILOR MAȘINILOR CU AJUTORUL GRAFELOR LINIARE

de IOAN CRĂCIUN
Institutul politehnic, Cluj

Se prezintă o metodă de calcul al oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor bazată pe teoria grafelor liniare. Ambele variante ale metodei, atît cea exactă cît și cea aproximativă, conduc la o importantă reducere a volumului de calcule în comparație cu metodele matriciale.

1. INTRODUCERE

Calculul oscilațiilor liniare de torsiune ale arborilor mașinilor comportă, ca etape principale, stabilirea pulsațiilor proprii, calculul amplitudinilor oscilațiilor forțate de torsiune în afara zonelor de rezonanță, calculul amplitudinilor oscilațiilor de torsiune în cadrul zonelor de rezonanță și calculul eforturilor unitare ce apar în arbore în urma oscilațiilor de torsiune. Aceste calcule se efectuează de obicei prin metode matriciale.

Pentru sistemele cu mulți volanți calculele devin deosebit de laborioase și posibilitățile de apariție a erorilor, cresc. În general nu este totuși justificată utilizarea unui calculator electronic. În cazuri similare, din punct de vedere al complexității calculelor, cum ar fi cel al analizei circuitelor electrice [1], [7], se preferă metoda bazată pe teoria grafelor liniare, care prezintă avantaje chiar în cazul folosirii mașinilor electronice de calcul [5], [6].

În cele ce urmează, teoria grafelor liniare este aplicată la calculul oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor, obținîndu-se astfel o metodă care reduce esențial volumul de muncă. Alături de varianta exactă se prezintă și o variantă aproximativă, simplificată, cu rezultate satisfăcătoare în practică.

Literatura cunoscută nu cuprinde indicații privitoare la aplicarea, pînă în prezent, a grafelor liniare la calculul oscilațiilor de torsiune. În lucrarea [3] apărută la noi în țară, se utilizează pentru prima dată grafele liniare la calculul pulsației fundamentale de vibrație a structurilor elastice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6, P. 1381–1401 1969.

2. NOTAȚII

k — numărul de ordine al volanților sistemului oscilant;
n — numărul volanților sistemului oscilant;
J_k — momentul de inerție al volantului k;
$C_{k-1,k}$ — constanta elastică a porțiunii de arbore cuprinsă între volanții $k-1$, k;
M_k — momentul perturbator ce acționează asupra volantului k;
ν — numărul de ordine al armonicilor momentului perturbator M_k;
s — numărul de armonici la care se oprește analiza momentului M_k;
$a_{k,\nu}$, $b_{k,\nu}$ — coeficienții termenilor în cosinus, respectiv sinus ai armonicii de ordinul ν a momentului M_k;
ω — viteza unghiulară de rotație a sistemului oscilant;
t — timpul;
p_q — pulsația proprie de ordinul q a sistemului ($q = 1,2,\ldots,n-1$);
$\varphi_{k,\nu}$ — unghiul de rotație față de poziția de echilibru al volantului k, corespunzător armonicilor de ordinul ν ale momentelor M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$);
$A_{k,\nu}$, $B_{k,\nu}$ — coeficienții termenilor în cosinus, respectiv sinus ai funcției $\varphi_{k,\nu}$;
$\Phi_{k,\nu}$, $f_{k,\nu}$ — notații cu următoarele semnificații:

pentru $\Phi_{k,\nu} = A_{k,\nu}$; $f_{k,\nu} = a_{k,\nu}$;

pentru $\Phi_{k,\nu} = B_{k,\nu}$; $f_{k,\nu} = b_{k,\nu}$;

$\Phi_{k,q}$ — amplitudinea oscilațiilor libere ale volantului k pentru modul q de vibrație;
$\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\nu}$ — diferența dintre coeficienții termenilor în cosinus sau sinus ai funcțiilor $\varphi_{k-1,\nu}$ și $\varphi_{k,\nu}$;
$\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,q}$ — diferența dintre amplitudinile oscilațiilor libere ale volanților $k-1$ și k pentru modul q de vibrație;
$M_{k-1,\,k,\nu}$ — momentul de torsiune pe porțiunea $k-1$, k corespunzător armonicilor de ordinul ν ale momentelor M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$);
$-\varepsilon_{k-1,\,k,\nu}$ — unghiul de fază al momentului $M_{k-1,\,k,\nu}$ dat de relația

$$\varepsilon_{k-1,\,k,\nu} = \arccos \frac{\delta_{A,\,k-1,\,k,\nu}}{\sqrt{\delta^2_{A,\,k-1,\,k,\nu} + \delta^2_{B,\,k-1,\,k,\nu}}};$$

$M_{k-1,\,k,\nu,\max}$ — amplitudinea momentului $M_{k-1,\,k,\nu}$;
α — coeficienții diverșilor termeni ai ecuației pulsațiilor proprii;

$t_{i,k-1,k,\nu}$ — transmitanța drumului elementar (unic) de la vîrful $f_{i,\nu}$ la vîrful $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ al grafului oscilațiilor forțate, corespunzător armonicilor de ordinul ν;

$D_{i,k-1,k,\nu}$ — determinantul subgrafului neadiacent la drumul elementar de la vîrful $f_{i,\nu}$ la vîrful $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ al grafului oscilațiilor forțate corespunzător armonicilor de ordinul ν;

$D_{n,\nu}$ — determinantul grafului oscilațiilor forțate al sistemului cu n volanți corespunzător armonicilor de ordinul ν;

z — numărul de bucle al unui subgraf redus (identic cu numărul de bucle al subgrafului corespunzător);

h — numărul de ordine al buclelor subgrafului redus cu z bucle ($h = 1, 2, \ldots, z$);

j — numărul de ordine al buclei unui subgraf redus, care nu este adiacentă la bucla următoare;

$D_{z,j}$ — determinantul subgrafului redus cu z bucle la care buclele j și $j+1$ nu sînt adiacente;

v — numărul de ordine al termenilor determinantului $D_{z,j}$;

$T_v(z,j)$ — termenul v al determinantului $D_{z,j}$;

u — numărul total de termeni ai determinantului $D_{z,j}$;

$t_{b,h,z,j}$ — transmitanța buclei h a subgrafului redus cu z bucle la care buclele j și $j+1$ nu sînt adiacente; în cazul în care nu pot apare confuzii s-a notat $t_{b,h}$;

$N(v,z,j)$ — numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,j)$;

$N_1(v,z,0)$ — numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$ ce conțin transmitanța $t_{b,1,z,0}$;

P — numărul de ordine al poziției transmitanței $t_{b,h,z,0}$ în cadrul diverselor produse ce alcătuiesc subtermenii lui $T_v(z,0)$;

$N_h(v,z,0)$ — numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$ ce conțin transmitanța $t_{b,h,z,0}$;

$N_h^P(v,z,0)$ — numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$ ce conțin transmitanța $t_{b,h,z,0}$ în poziția P;

$t_{b,z,j}$ — transmitanța de buclă de valoare minimă a subgrafului redus cu z bucle, la care buclele j și $j+1$ nu sînt adiacente.

$t_{B,z,j}$ — transmitanța de buclă de valoare maximă a subgrafului redus cu z bucle, la care buclele j și $j+1$ nu sînt adiacente.

$(D_{z,j})'$ — determinantul subgrafului redus cu z bucle la care buclele j și $j+1$ nu sînt adiacente și la care transmitanțele tuturor buclelor au valoarea $t_{b,z,j}$;

$(D_{z,j})''$ — idem, la care transmitanțele tuturor buclelor au valoarea $t_{B,z,j}$;

$T'_v(z,j)$, $T''_v(z,j)$ — termenii v ai determinanților $(D_{z,j})'$ respectiv $(D_{z,j})''$;

$(D_{z,j})_{\text{aprox}}$, $(D_{z,j})'_{\text{aprox}}$, $(D_{z,j})''_{\text{aprox}}$ — valorile aproximative ale determinanților $D_{z,j}$, $(D_{z,j})'$, $(D_{z,j})''$;

e, e', e'' — erorile relative ce se fac prin aproximațiile de mai sus.

3. STABILIREA ECUAȚIILOR DE BAZĂ

Se consideră sistemul oscilant liniar cu n volanți reprezentat schematic în figura 1. Asupra volantului k acționează momentul perturbator

$$M_k = \sum_{\nu=0}^{s} (a_{k,\nu} \cos \nu\omega t + b_{k,\nu} \sin \nu\, \omega\, t). \tag{1}$$

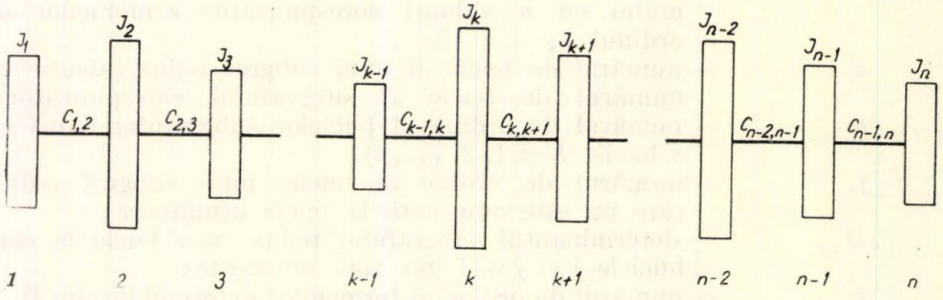


Fig. 1

În continuare studiul se face separat pentru fiecare armonică a momentului M_k.

În afara zonelor de rezonanță $\left(\frac{\nu\omega}{p_q} < 0{,}75 \text{ și } \frac{\nu\omega}{p_q} > 1{,}25\right)$ amortizarea nu mai are, practic, efect asupra amplitudinilor oscilațiilor forțate [2] și deci, pentru armonica de ordinul ν, studiul mișcării volanților se poate face pe baza sistemului de ecuații diferențiale:

$$J_k \ddot{\varphi}_{k,\nu} - C_{k-1,k}(\varphi_{k-1,\nu} - \varphi_{k,\nu}) + C_{k,k+1}(\varphi_{k,\nu} - \varphi_{k+1,\nu}) = a_{k,\nu} \cos \nu\omega t + b_{k,\nu} \sin \nu\, \omega t \tag{2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Neglijînd vibrația proprie a sistemului, soluțiile acestor ecuații sînt:

$$\varphi_{k,\nu} = A_{k,\nu} \cos \nu\, \omega\, t + B_{k,\nu} \sin \nu\omega t \tag{3}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Prin derivare de două ori și înlocuire în sistemul de ecuații diferențiale se obțin două sisteme de ecuații algebrice liniare avînd ca necunoscute coeficienții $A_{k,\nu}$ și $B_{k,\nu}$ și care, ținînd seama de notațiile introduse, pot fi scrise concentrat:

$$-C_{k-1,k}\Phi_{k-1,\nu} + [-J_k(\nu\,\omega)^2 + C_{k-1,k} + C_{k,k+1}]\Phi_{k,\nu} - C_{k,k+1}\Phi_{k+1,\nu} = f_{k,\nu} \tag{4}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru cele ce urmează este util să se folosească notația:

$$\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\,\nu} = \Phi_{k-1,\,\nu} - \Phi_{k,\,\nu}, \tag{5}$$

cu convenția:

$$\delta_{\Phi,\,0,\,1,\,\nu} = -\,\Phi_{1,\,\nu}.$$

Prin transformări elementare asupra relațiilor (4) și (5) se obțin două sisteme de cîte $2n-1$ ecuații cu $2n-1$ necunoscute:

$$J_k\,\Phi_{k,\nu} = -\,\frac{C_{k-1,\,k}}{(\nu\omega)^2}\,\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\,\nu} + \frac{C_{k,\,k+1}}{(\nu\omega)^2}\,\delta_{\Phi,\,k,\,k+1,\,\nu} - \frac{f_{k,\,\nu}}{(\nu\omega)^2},$$

$$\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\,\nu} = \frac{J_{k-1}\,\Phi_{k-1,\,\nu}}{J_{k-1}} - \frac{J_k\,\Phi_{k,\,\nu}}{J_k} \tag{6}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Considerînd momentele perturbatoare nule, sistemele (6) se reduc la un singur sistem ce dă amplitudinile relative și diferențele amplitudinilor relative ale oscilațiilor libere și care, cu modificările de notații corespunzătoare, se scrie:

$$J_k\,\Phi_{k,\,q} = -\,\frac{C_{k-1,\,k}}{(p_q)^2}\,\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\,q} + \frac{C_{k,\,k+1}}{(p_q)^2}\,\delta_{\Phi,\,k,\,k+1,\,q},$$

$$\delta_{\Phi,\,k-1,\,k,\,q} = \frac{J_{k-1}\,\Phi_{k-1,\,q}}{J_{k-1}} - \frac{J_k\,\Phi_{k,\,q}}{J_k} \tag{7}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

În afara zonelor de rezonanță, momentul de torsiune pe porțiunea $k-1, k$ corespunzător armonicilor de ordinul ν, este:

$$M_{k-1,\,k,\,\nu} = C_{k-1,\,k}\,(\varphi_{k-1,\,\nu} - \varphi_{k,\,\nu}) =$$

$$= C_{k-1,\,k}\,(\delta_{A,\,k-1,\,k,\,\nu}\cos\nu\omega t + \delta_{B,\,k-1,\,k,\,\nu}\sin\nu\omega t)$$

sau, ținînd seama de notațiile stabilite:

$$M_{k-1,\,k,\,\nu} = C_{k-1,\,k}\sqrt{\delta^2_{A,\,k-1,\,k,\,\nu} + \delta^2_{B,\,k-1,\,k,\,\nu}}\cos(\nu\omega t - \varepsilon_{k-1,\,k,\,\nu}).$$

Rezultă momentul de torsiune maxim pe porțiunea $k-1, k$ datorită armonicilor de ordinul ν:

$$M_{k-1,\,k,\,\nu,\,\max} = C_{k-1,\,k}\sqrt{\delta^2_{A,\,k-1,\,k,\,\nu} + \delta^2_{B,\,k-1,\,k,\,\nu}}. \tag{8}$$

Cunoscînd momentele de torsiune maxime pe diverse porțiuni ale arborelui și pentru diferite armonici, se pot calcula cu ușurință eforturile unitare maxime ce apar în sistem în afara zonelor de rezonanță. Calculul

momentelor de torsiune maxime pentru diverse porţiuni şi armonici în cadrul zonelor de rezonanţă se face cunoscînd diferenţele amplitudinilor relative ale oscilaţiilor libere $\delta_{\Phi, k-1, k, q}$ şi ţinînd seama de amortizare, prin metode dezvoltate în lucrările [2] şi [4].

4. CALCULUL MĂRIMILOR SISTEMULUI OSCILANT CU AJUTORUL GRAFELOR LINIARE

4.1. CALCULUL EXACT

Sistemele de ecuaţii (6) şi (7) pot fi rezolvate cu ajutorul teoriei grafelor liniare [6], [5], [1], [7] care, în cele ce urmează, se consideră cunoscută. Utilizînd explicitarea variabilelor dată de aceste sisteme de ecuaţii s-au construit grafele liniare corespunzătoare. În figura 2 s-a reprezentat graful oscilaţiilor forţate ale sistemului pentru armonicile de ordinul ν ale momentelor perturbatoare. Ţinînd seama de semnificaţiile lui $\Phi_{k,\nu}$, $f_{k,\nu}$ şi $\delta_{\Phi, k-1, k, \nu}$ acest graf constituie de fapt o reprezentare unică a două grafe, cel corespunzător termenilor în cosinus şi cel corespunzător termenilor în sinus ai armonicilor de ordinul ν ale momentelor perturbatoare. În figura 3 s-a reprezentat graful oscilaţiilor libere ale sistemului pentru pulsaţia proprie de ordinul q. Se constată similitudinea structurală a acestor grafe cu schema sistemului oscilant(fig.1) ceea ce permite trasarea lor directă.

Necunoscutele ce interesează, adică $\delta_{\Phi, k-1, k, \nu} (k = 1, 2, \ldots, n)$ pot fi determinate cu ajutorul grafelor corespunzătoare, fie aplicînd regula lui Mason, fie prin reducerea grafelor, această ultimă metodă fiind preferată în cazul în care interesează numai valorile unora din necunoscute.

Cele $n-1$ pulsaţii proprii se obţin punînd condiţia ca sistemul (7) să admită soluţii diferite de soluţia banală, deci ca determinantul grafului oscilaţiilor libere să fie nul. Se obţine o ecuaţie de gradul $n-1$ în p_q^2 de tipul:

$$(p_q^2)^{n-1} - \alpha_1 (p_q^2)^{n-2} + \alpha_2 (p_q^2)^{n-3} - \alpha_3 (p_q^2)^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-2} \alpha_{n-2} (p_q^2) + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} = 0, \tag{9}$$

ale cărei rădăcini pozitive reprezintă pulsaţiile proprii $p_q (q = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Considerînd $\Phi_{1,q} = 1$, diferenţele amplitudinilor relative ale oscilaţiilor libere se obţin din aproape în aproape cu ajutorul relaţiilor:

$$\delta_{\Phi, k, k+1, q} = \frac{J_k \Phi_{k,q} + \frac{C_{k-1,k}}{(p_q^2)} \delta_{\Phi, k-1, k, q}}{\frac{C_{k,k+1}}{(p_q)^2}},$$
$$\frac{J_{k+1} \Phi_{k+1,q}}{J_{k+1}} = \frac{J_k \Phi_{k,q}}{J_k} - \delta_{\Phi, k, k+1, q}, \tag{10}$$

ce rezultă pe baza grafului din figura 3.

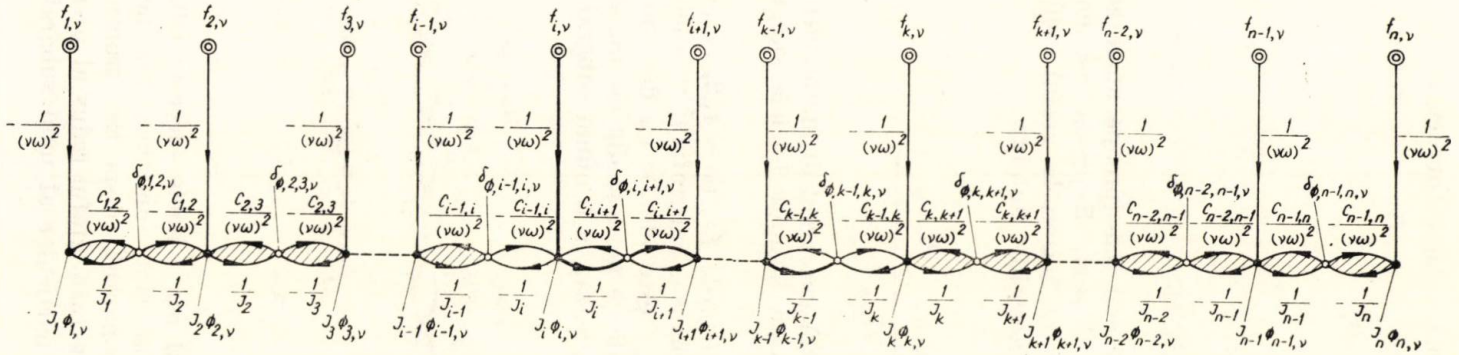


Fig. 2

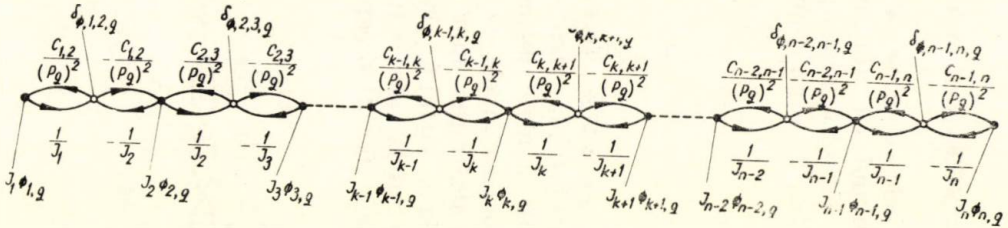


Fig. 3

Sumînd primele ecuații (7) se obține relația cunoscută:

$$\sum_{k=1}^{n} J_k \Phi_{k,q} = 0,$$

ce poate fi utilizată pentru verificare.

4.2. CONSIDERAȚIUNI ASUPRA CALCULULUI CU AJUTORUL REGULEI LUI MASON

În cele ce urmează se examinează mai îndeaproape unele aspecte ale calculului cu ajutorul regulei lui Mason. Expresia necunoscutei $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ obținută prin aplicarea regulei lui Mason la graful oscilațiilor forțate (fig. 2) este, ținînd seama de notațiile stabilite:

$$\delta_{\Phi,k-1,k,\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{i,\nu} \cdot t_{i,k-1,k,\nu} \cdot D_{i,k-1,k,\nu}}{D_{n,\nu}}. \tag{11}$$

În figura 2 s-a trasat cu linie groasă parcursul drumului elementar de la vîrful $f_{i,\nu}$ la vîrful $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ și s-au hașurat buclele subgrafului neadiacent la acest drum.

Deoarece arcele ce pornesc din vîrfurile $f_{k,\nu}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nu intră în alcătuirea unor bucle, determinantul subgrafului neadiacent la drumul de la vîrful $f_{i,\nu}$ la vîrful $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ este identic cu determinantul unui subgraf la care vîrfurile $f_{k,\nu}$ și arcele ce pornesc din ele nu au mai fost trasate (fig. 4) și care, în cele ce urmează, va fi numit subgraf redus.

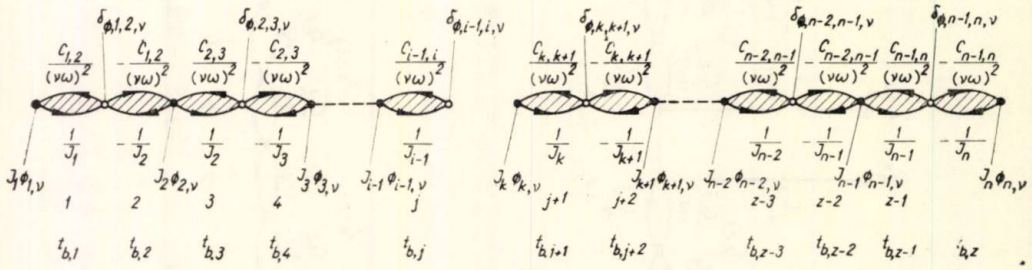


Fig. 4

Subgraful redus este alcătuit în general din z bucle succesiv adiacente, cu excepția buclelor j și $j+1$ care nu sînt adiacente. S-a notat cu $D_{z,j}$ și $t_{h,h,z,j}$ $(h = 1, 2, \ldots, z)$ determinantul, respectiv transmitanța buclei h a acestui subgraf redus. Ca structură, graful redus al oscilațiilor forțate poate fi considerat ca un caz particular al unui subgraf redus pentru care $j = 0$ sau $j = z$.

Avînd în vedere lista de notații, se poate scrie:

$$D_{z,j} = T_1(z,j) - T_2(z,j) + T_3(z,j) - T_4(z,j) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{v-1} T_v(z,j) + \ldots + (-1)^{u-1} T_u(z,j), \tag{12}$$

unde $T_1(z,j) = 1$ iar termenul general $T_v(z,j)$ este o sumă de produse de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente, suma extinzîndu-se pentru toate combinațiile de cîte $v-1$ bucle neadiacente posibile. Ca urmare, termenul $T_v(z,j)$ reprezintă o sumă de subtermeni alcătuiți din produse de cîte $v-1$ factori.

Se notează cu $N(v,z,j)$ numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,j)$ al determinantului subgrafului redus. Pentru a obține expresia lui $N(v,z,j)$ se consideră determinantul unui subgraf redus cu $j=0$, avînd z bucle. Notînd cu $N(v,z,o)$ numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$ și cu $N_1(v,z,0)$ numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$ ce conțin transmitanța $t_{b,1,z,0}$, se va demonstra că

$$\begin{aligned} N_1(v,z,0) &= N(v-1,\ z-1,\ 0) - N_1(v-1,\ z-1,\ 0), \\ N(v,z,0) &= C_{z-v+2}^{v-1}, \\ N_1(v,z,0) &= C_{z-v+1}^{v-2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Într-adevăr, subgraful cu z bucle, numerotate $1, 2, 3, \ldots, z$ și $j=0$ poate fi considerat ca fiind obținut din subgraful cu $z-1$ bucle numerotate $2, 3, \ldots, z$ prin adăugarea în față a buclei 1. În acest caz, conform regulei lui Mason, toți subtermenii lui $T_v(z,0)$ ce conțin transmitanța $t_{b,1,z,0}$, în număr de $N_1(v,z,0)$ se obțin înmulțind $t_{b,1,z,0}$ cu toți subtermenii lui T_{v-1} $(z-1,0)$ în număr de $N(v-1,\ z-1,\ 0)$ din care se renunță la cei ce conțin transmitanța $t_{b,2,z,0}$ (bucla 2 fiind adiacentă la bucla 1). Deoarece bucla 2 a grafului cu z bucle este prima buclă a grafului cu $z-1$ bucle, acești din urmă subtermeni sînt în număr de $N_1(v-1,\ z-1,\ 0)$ și deci prima dintre relațiile (13) este demonstrată.

Ultimele două relații (13) se verifică pentru $v = 1, 2, 3, \ldots, z = 1, 2, 3, \ldots$ și se presupun valabile pînă la $v-1$ și $z-1$, deci pentru T_{v-1} $(z-1, 0)$, adică

$$\begin{aligned} N(v-1,\ z-1,\ 0) &= C_{z-v+2}^{v-2}, \\ N_1(v-1,\ z-1,\ 0) &= C_{z-v+1}^{v-3}. \end{aligned} \tag{14}$$

Din prima relație (13) și din (14), rezultă:

$$N_1(v,z,0) = C_{z-v+2}^{v-2} - C_{z-v+1}^{v-3} = C_{z-v+1}^{v-2}. \tag{15}$$

Din (15) rezultă:

$$N_1(v+1,\ z+1,\ 0) = C_{z-v+1}^{v-1}, \tag{16}$$

iar din prima relaţie (13), din (15) şi (16),

$$N(v, z, 0) = N_1(v+1, z+1, 0) + N_1(v, z, 0) = C_{z-v+1}^{v-1} +$$

$$+ C_{z-v+1}^{v-2} = C_{z-v+2}^{v-1}. \tag{17}$$

Relaţiile (15) şi (17) demonstrează valabilitatea ultimelor două relaţii (13).

Scriind în cadrul produselor ce alcătuiesc diverşii subtermeni ai termenului $T_v(z,0)$, transmitanţele diferitelor bucle în succesiunea dată de numărul de ordine al buclei, transmitanţa $t_{b,h,z,0}$ ocupă în general, pe rînd, poziţiile 1, 2, 3,..., P, ..., $v-1$. Se notează cu $N_h(v, z, 0)$ numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z, 0)$ ce conţin transmitanţa $t_{b,h,z,0}$ şi cu $N_h^P(v, z, 0)$ numărul de subtermeni ai termenului $T_v(z, 0)$ ce conţin transmitanţa $t_{b,h,z,0}$ în poziţia P. Ţinînd seama de regula lui Mason se poate considera că aceşti din urmă subtermeni sînt alcătuiţi din totalitatea produselor dintre toţi subtermenii termenului $T_{P+1}(h, 0)$ al subgrafului format din buclele $h, h-1, \ldots, 2, 1$ ce conţin transmitanţa $t_{b,h,z,0}$ şi toţi subtermenii termenului $T_{v-P+1}(z-h+1,0)$ al subgrafului format din buclele $h, h+1, \ldots, z$ ce conţin transmitanţa $t_{b,h,z,0}$. Deoarece amîndouă aceste din urmă subgrafe au ca primă buclă, bucla h, rezultă pe baza relaţiei (13):

$$N_h^P(v, z, 0) = C_{h-P}^{P-1} \cdot C_{z-h-v+P+1}^{v-P-1}$$

şi

$$N_h(v, z, 0) = \sum_{P=1}^{v-1} C_{h-P}^{P-1} \cdot C_{z-h-v+P+1}^{v-P-1}. \tag{18}$$

Revenind la un subgraf redus cu z bucle avînd buclele j şi $j+1$ neadiacente, diferiţii termeni ai determinantului corespunzător, $D_{z,j}$, pot fi consideraţi ca fiind egali cu termenii unui subgraf redus cu $z+1$ bucle la care toate buclele sînt adiacente, bucla $j+1$ avînd transmitanţa nulă. Ţinînd seama de această observaţie, se poate scrie:

$$N(v, z, j) = N(v, z+1, 0) - N_{j+1}(v, z+1, 0) = C_{z-v+3}^{v-1} -$$

$$- \sum_{P=1}^{v-1} C_{j-P+1}^{P-1} \cdot C_{z-j-v+P+1}^{v-P-1}. \tag{19}$$

A doua relaţie (13) rezultă ca un caz particular al relaţiei (19), pentru $j = 0$.

4.3. CALCULUL APROXIMATIV

Metoda de calcul al oscilațiilor de torsiune cu ajutorul grafelor liniare descrisă mai sus este o metodă exactă, mai puțin laborioasă decît metodele matriceale utilizate de obicei. Totuși, în cazul sistemelor cu mulți volanți, volumul de muncă rămîne încă important, în special la stabilirea ecuației pulsațiilor proprii cît și la calculul diverșilor determinanți de tipul $D_{z,j}$ ce intervin în relația (11). În cele ce urmează se prezintă o metodă de calcul aproximativă, simplificată, cu rezultate satisfăcătoare în practică.

4.3.1. Calculul aproximativ al pulsațiilor proprii ale sistemului oscilant

După cum s-a arătat, în cazul aplicării metodei grafelor liniare, ecuația pulsațiilor proprii se obține punînd condiția ca determinantul grafului oscilațiilor libere să fie nul.

Spre deosebire de cazul metodelor matriceale, în cazul de față calculul coeficienților diverșilor termeni ai acestei ecuații se face independent, pentru fiecare termen în parte. Acest lucru reprezintă un mare avantaj atunci cînd rezolvarea ecuației pulsațiilor proprii se face prin metoda Gräffe [4] și interesează numai valorile aproximative ale pulsațiilor proprii inferioare ($q = 1, 2, 3, \ldots$) și superioare ($q = \ldots, n-3, n-2, n-1$). Într-adevăr, valorile aproximative ale pulsațiilor proprii inferioare depind numai de valorile coeficienților ultimilor termeni ai ecuației pulsațiilor proprii (9) și anume de un număr cu atît mai mare dintre acești coeficienți, cu cît numărul de iterații și deci precizia, este mai mare. De exemplu, într-o primă aproximare, p_1^2 depinde de α_{n-1}, α_{n-2}, α_{n-3} iar p_2^2 depinde de α_{n-1}, α_{n-2}, α_{n-3}, α_{n-4}, α_{n-5}. La fel, valorile aproximative ale pulsațiilor proprii superioare depind numai de valorile coeficienților primilor termeni ai ecuației pulsațiilor proprii. Astfel, într-o primă aproximare, p_{n-1}^2 depinde de α_1 și α_2 iar p_{n-2}^2 depinde de α_1, α_2, α_3, α_4.

4.3.2. Calculul aproximativ al determinanților de tipul $D_{z,j}$

Înlocuind în determinantul $D_{z,j}$ toate transmitanțele buclelor prin transmitanțele minimă, $t_{b,z,j}$ și maximă, $t_{B,z,j}$ se obțin, respectiv, determinanții :

$$\begin{aligned}(D_{z,j})' &= T_1'(z,j) - T_2'(z,j) + T_3'(z,j) - T_4'(z,j) + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{v-1} T_v'(z,j) + \ldots + (-1)^{u-1} T_u'(z,j), \\ (D_{z,j})'' &= T_1''(z,j) - T_2''(z,j) + T_3''(z,j) - T_4''(z,j) + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{v-1} T_v''(z,j) + \ldots + (-1)^{u-1} T_u''(z,j),\end{aligned} \tag{20}$$

unde :

$$\begin{aligned}T_v'(z,j) &= N(v,z,j) \cdot t_{b,z,j}^{v-1}, \\ T_v''(z,j) &= N(v,z,j) \cdot t_{B,z,j}^{v-1}.\end{aligned} \tag{21}$$

În cazul în care

$$T'_1(z,j) < T'_2(z,j) < T'_3(z,j) < T'_4(z,j) < \ldots < T'_v(z,j) < \ldots < T'_u(z,j), \tag{22}$$

avînd în vedere că termenul general $T_v(z,j)$ este o funcție liniară crescătoare în raport cu fiecare din transmitanțele strict pozitive $t_{b,h,z,j}$ $(h \in [1,z])$ ce intră în alcătuirea sa, sînt valabile, de asemenea, inegalitățile:

$$\begin{aligned} &T_1(z,j) < T_2(z,j) < T_3(z,j) < T_4(z,j) < \ldots < T_v(z,j) < \ldots < T_u(z,j), \\ &T''_1(z,j) < T''_2(z,j) < T''_3(z,j) < T''_4(z,j) < \ldots < T''_v(z,j) < \ldots < T''_u(z,j). \end{aligned} \tag{23}$$

Ținînd seama de (21) rezultă că pentru determinantul $D_{z,j}$ existența inegalităților (22) și deci, implicit, (23) este asigurată cînd, pentru orice v din intervalul $[1,u]$,

$$t_{b,z,j} > \frac{N(v-1,z,j)}{N(v,z,j)}. \tag{24}$$

Pentru valorile, relativ mari, ale transmitanțelor $t_{b,h,z,j}$ ce asigură îndeplinirea condiției (24) valorile primilor $u-1$ termeni ai determinanților $D_{z,j}$, $(D_{z,j})'$, $(D_{z,j})''$ pot fi neglijate în raport cu valorile ultimilor termeni, adică se pot face aproximațiile:

$$\begin{aligned} (D_{z,j})_{\text{aprox}} &= (-1)^{u-1} T_u(z,j), \\ (D_{z,j})'_{\text{aprox}} &= (-1)^{u-1} T'_u(z,j), \end{aligned} \tag{25}$$

$$(D_{z,j})''_{\text{aprox}} = (-1)^{u-1} T''_u(z,j). \tag{26}$$

Notînd e, e' și e'' erorile relative comise prin aceste aproximații, adică

$$e = \frac{D_{z,j} - (D_{z,j})_{\text{aprox}}}{D_{z,j}} = 1 - \frac{(D_{z,j})_{\text{aprox}}}{D_{z,j}},$$

$$e' = \frac{(D_{z,j})' - (D_{z,j})'_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})'} = 1 - \frac{(D_{z,j})'_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})'},$$

$$e'' = \frac{(D_{z,j})'' - (D_{z,j})''_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})''} = 1 - \frac{(D_{z,j})''_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})''},$$

se va demonstra că valoarea erorii e este cuprinsă în intervalul $[e', e'']$.

Într-adevăr, $D_{z,j}$ și $(D_{z,j})_{\text{aprox}}$ sînt polinoame de gradul 0 sau 1 în raport cu fiecare din transmitanțele $t_{b,h,z,j}$ și nu se anulează pentru $t_{b,z,j} \leqslant t_{b,h,z,j} \leqslant t_{B,z,j}$, cînd $t_{b,z,j}$ îndeplinește condiția (24).

Ca urmare $\dfrac{(D_{z,j})_{\text{aprox}}}{D_{z,j}}$ este o funcție monotonă în raport cu fiecare din transmitanțele $t_{b,h,z,j}$ $(h \in [1, z])$ și deci

$$\frac{(D_{z,j})_{\text{aprox}}}{D_{z,j}} \in \left[\frac{(D_{z,j})'_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})'};\ \frac{(D_{z,j})''_{\text{aprox}}}{(D_{z,j})''}\right].$$

Rezultă că și

$$e \in [e';\ e''].$$

Valoarea aproximativă a determinantului $D_{z,j}$ dată de (25) este evident, mult mai ușor de calculat decît valoarea exactă dată de (12). De asemenea, erorile e' și e'' sînt ușor de calculat, ținînd seama de (20), (21), (19) și deci intervalul în care se plasează eroarea e poate fi apreciat cu ușurință.

5. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră sistemul oscilant cu șase volanți din figura 5.

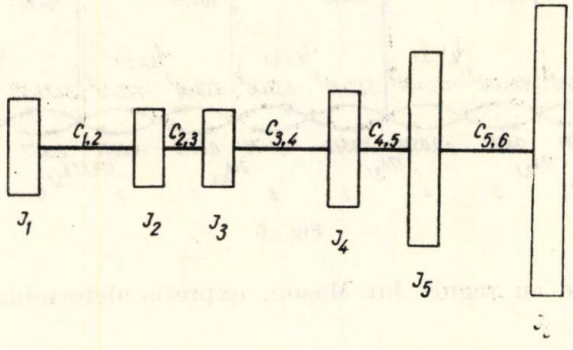


Fig. 5

Se cere :

1. Să se stabilească și să se rezolve ecuația pulsațiilor proprii. Să se stabilească valoarea aproximativă a pulsației proprii p_1, utilizînd o singură iterație a metodei Gräffe.

2. Să se determine valoarea $\delta_{4,4,5,1}$, atît prin metoda exactă cît și prin metoda aproximativă.

Se dau :

$$J_1 = 20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \qquad C_{1,2} = 7\cdot 10^7\ \text{N}\cdot\text{m/rad},$$
$$J_2 = 17\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \qquad C_{2,3} = 2{,}4\cdot 10^7\ \text{N}\cdot\text{m/rad},$$
$$J_3 = 17\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \qquad C_{3,4} = 7\cdot 10^7\ \text{N}\cdot\text{m/rad},$$
$$J_4 = 21\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \qquad C_{4,5} = 3\cdot 10^7\ \text{N}\cdot\text{m/rad},$$
$$J_5 = 129{,}87\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \qquad C_{5,6} = 7{,}2\cdot 10^7\ \text{N}\cdot\text{m/rad},$$
$$J_6 = 1250\ \text{kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$a_{1,1} = -3000\ \text{N}\cdot\text{m}, \qquad a_{4,1} = 720\ \text{N}\cdot\text{m},$$
$$a_{2,1} = 1250\ \text{N}\cdot\text{m}, \qquad a_{5,1} = 1250\ \text{N}\cdot\text{m},$$
$$a_{3,1} = 720\ \text{N}\cdot\text{m}, \qquad a_{6,1} = -3000\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Sistemul oscilant este antrenat în mişcare de rotaţie cu turaţia $n_r = 345$ rot/min.

5.1. STABILIREA ŞI REZOLVAREA ECUAŢIEI PULSAŢIILOR PROPRII. STABILIREA VALORII APROXIMATIVE A PULSAŢIEI p_1

În figura 6 s-a reprezentat graful oscilaţiilor libere ale sistemului.

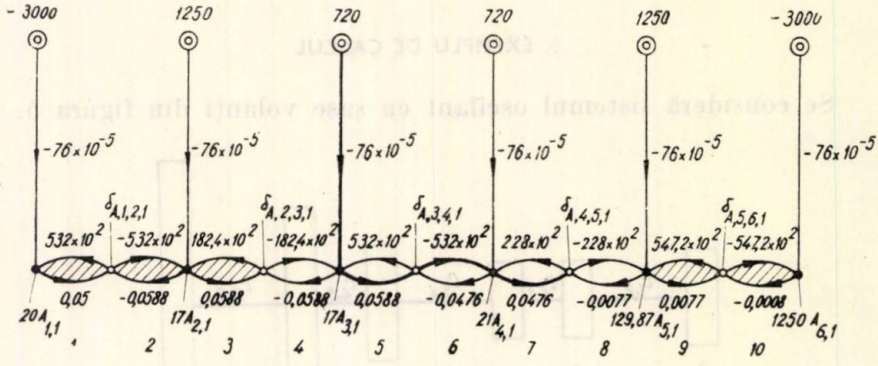


Fig. 6

În conformitate cu regula lui Mason, expresia determinantului acestui graf, este :

$$D_{q,6} = 1 - \left\{\sum_{h=1}^{10} t_{b,h}\right\} + \left\{t_{b,1}\sum_{h=3}^{10} t_{b,h} + t_{b,2}\sum_{h=4}^{10} t_{b,h} + t_{b,3}\sum_{h=5}^{10} t_{b,h} + \right.$$

$$+ t_{b,4}\sum_{h=6}^{10} t_{b,h} + t_{b,5}\sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6}\sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7}\sum_{h=9}^{10} t_{b,h} +$$

$$\left. + t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right\} - \left\{t_{b,1}\left(t_{b,3}\sum_{h=5}^{10} t_{b,h} + t_{b,4}\sum_{h=6}^{10} t_{b,h} + t_{b,5}\sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + \right.\right.$$

$$+ t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,2} \Big(t_{b,4} \sum_{h=6}^{10} t_{b,h} +$$

$$+ t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) +$$

$$+ t_{b,3} \Big(t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) +$$

$$+ t_{b,4} \Big(t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,5} \Big(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} +$$

$$+ t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big\} + \Big\{ t_{b,1} \Big[t_{b,3} \Big(t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} +$$

$$+ t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,4} \Big(t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} +$$

$$+ t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} - t_{b,10} \Big) + t_{b,5} \Big(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big] +$$

$$+ t_{b,2} \Big[t_{b,4} \Big(t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) +$$

$$+ t_{b,5} \Big(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) +$$

$$+ t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big] + t_{b,3} \Big[t_{b,5} \Big(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big] +$$

$$+ t_{b,4} [t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10}] \Big\} - \Big\{ t_{b,1} \Big[t_{b,3} \Big[t_{b,5} \Big(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big) + t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big] +$$

$$+ t_{b,4} \cdot t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big] + t_{b,2} \cdot t_{b,4} \cdot t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} \Big\}.$$

Valorile transmitanțelor diverselor bucle ale acestui graf, sînt:

$$t_{b,1} = \frac{0{,}3500 \cdot 10^7}{(p_q)^2}; \qquad t_{b,6} = \frac{0{,}3332 \cdot 10^7}{(p_q)^2},$$

$$t_{b,2} = \frac{0{,}4116 \cdot 10^7}{(p_q)^2}; \qquad t_{b,7} = \frac{0{,}1428 \cdot 10^7}{(p_q)^2},$$

$$t_{b,3} = \frac{0{,}1411 \cdot 10^7}{(p_q)^2}; \qquad t_{b,8} = \frac{0{,}0231 \cdot 10^7}{(p_q)^2},$$

$$t_{b,4} = \frac{0{,}1411 \cdot 10^7}{(p_q)^2}; \qquad t_{b,9} = \frac{0{,}0554 \cdot 10^7}{(p_q)^2},$$

$$t_{b,5} = \frac{0{,}4116 \cdot 10^7}{(p_q)^2}; \qquad t_{b,10} = \frac{0{,}0058 \cdot 10^7}{(p_q)^2}.$$

Se calculează produsele şi expresiile ce se repetă în expresia determinantului grafului oscilaţiilor libere, şi anume :

În etapa I-a.

$$\sum_{h=1}^{10} t_{b,h} = \frac{2{,}0157 \cdot 10^7}{(p_q)^2}.$$

În etapa a II-a :

$$t_{b,1} \sum_{h=3}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}4389 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4}; \qquad t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}0935 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4},$$

$$t_{b,2} \sum_{h=4}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}4581 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4}; \qquad t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}0281 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4},$$

$$t_{b,3} \sum_{h=5}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}1371 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4}; \qquad t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}0087 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4},$$

$$t_{b,4} \sum_{h=6}^{10} t_{b,h} = \frac{0{,}0791 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4}; \qquad t_{b,8} \cdot t_{b,10} = \frac{0{,}0001 \cdot 10^{14}}{(p_q)^4}.$$

În etapa a III-a, pe baza valorilor obţinute în etapa a II-a:

$$t_{b,1}\left(t_{b,3} \sum_{h=5}^{10} t_{b,h} + t_{b,4} \sum_{h=6}^{10} t_{b,h} + t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10}\right) = \frac{0{,}1213 \cdot 10^{21}}{(p_q)^6},$$

$$t_{b,2}\left(t_{b,4} \sum_{h=6}^{10} t_{b,h} + t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10}\right) = \frac{0{,}0862 \cdot 10^{21}}{(p_q)^6},$$

$$t_{b,3}\left(t_{b,5} \sum_{h=7}^{10} t_{b,h} + t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10}\right) = \frac{0{,}0184 \cdot 10^{21}}{(p_q)^6},$$

$$t_{b,4}\left(t_{b,6} \sum_{h=8}^{10} t_{b,h} + t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10}\right) = \frac{0{,}0052 \cdot 10^{21}}{(p_q)^2},$$

$$t_{b,5}\left(t_{b,7} \sum_{h=9}^{10} t_{b,h} + t_{b,8} \cdot t_{b,10}\right) = \frac{0{,}0036 \cdot 10^{21}}{(p_q)^6},$$

$$t_{b,6} \cdot t_{b,8} \cdot t_{b,10} = \frac{0{,}00003 \cdot 10^{21}}{(p_q)^6}.$$

În etapa a IV-a, pe baza valorilor obținute în etapa a III-a.

$$t_{b,1}\left[t_{b,3}\left(t_{b,5}\sum_{h=7}^{10}t_{b,h}+t_{b,6}\sum_{h=8}^{10}t_{b,h}+t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+\right.$$

$$+t_{b,4}\left(t_{b,6}\sum_{h=8}^{10}t_{b,h}+t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,5}\left(t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+\right.$$

$$\left.\left.+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right]=\frac{0{,}0095\cdot 10^{28}}{(p_q)^8},$$

$$t_{b,2}\left[t_{b,4}\left(t_{b,6}\sum_{h=8}^{10}t_{b,h}+t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,5}\left(t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right]=\frac{0{,}0036\cdot 10^{28}}{(p_q)^8},$$

$$t_{b,3}\left[t_{b,5}\left(t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right]=\frac{0{,}0005\cdot 10^{28}}{(p_q)^8},$$

$$t_{b,4}[t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}]=\frac{0{,}000004\cdot 10^{28}}{(p_q)^8}.$$

În etapa a V-a, pe baza valorilor obținute în etapa a IV-a :

$$t_{b,1}\left|t_{b,3}\left[t_{b,5}\left(t_{b,7}\sum_{h=9}^{10}t_{b,h}+t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right)+t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}\right]+\right.$$

$$\left.+\,t_{b,4}[t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}]\right|=\frac{0{,}00018\cdot 10^{35}}{(p_q)^{10}},$$

$$t_{b,2}[t_{b,4}\cdot t_{b,6}\cdot t_{b,8}\cdot t_{b,10}]=\frac{0{,}0000016\cdot 10^{35}}{(p_q)^{10}}.$$

Avînd în vedere valorile calculate mai sus, se obține :

$$D_{q,6}=1-\frac{2{,}0157\cdot 10^{7}}{(p_q)^2}+\frac{1{,}2436\cdot 10^{14}}{(p_q)^4}-\frac{0{,}2347\cdot 10^{21}}{(p_q)^6}+$$

$$+\frac{0{,}0136\cdot 10^{28}}{(p_q)^8}-\frac{0{,}00018\cdot 10^{35}}{(p_q)^{10}}.$$

După transformări elementare se obține, prin anularea determinantului $D_{q,6}$, ecuația pulsațiilor proprii :

$$(p_q)^{10}-2{,}0157\cdot 10^{7}(p_q)^8+1{,}2436\cdot 10^{14}(p_q)^6-0{,}2347\cdot 10^{21}(p_q)^4+$$

$$+0{,}0136\cdot 10^{28}(p_q)^2-0{,}00018\cdot 10^{35}=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii, sînt :

$$p_1^2 = 186774 \text{ rad}^2/\text{s}^2; \qquad p_4^2 = 7848050 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$
$$p_2^2 = 704983 \text{ rad}^2/\text{s}^2; \qquad p_5^2 = 9608927 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$
$$p_3^2 = 1812740 \text{ rad}^2/\text{s}^2;$$

de unde rezultă pulsaţiile proprii :

$$p_1 = 432{,}17 \text{ rad/s}; \qquad p_4 = 2801{,}44 \text{ rad/s},$$
$$p_2 = 839{,}63 \text{ rad/s}; \qquad p_5 = 3099{,}83 \text{ rad/s}.$$
$$p_3 = 1346{,}38 \text{ rad/s};$$

Ecuaţia pulsaţiilor proprii este de tipul :

$$(p_q^2)^5 - \alpha_1 (p_q^2)^4 + \alpha_2 (p_q^2)^3 - \alpha_3 (p_q^2)^2 + \alpha_4 (p_q^2) - \alpha_5 = 0.$$

Aplicînd metoda Gräffe [4] cu limitare la prima iteraţie, valoarea aproximativă a rădăcinii minime a acestei ecuaţii este :

$$p_1^2 \simeq \sqrt{\frac{-\alpha_5^2}{-2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_4^2}}.$$

Valorile ultimilor trei termeni ai determinantului $D_{q,6}$ pot fi calculate separat de valorile celorlalţi termeni prin relaţiile date mai sus, obţinîndu-se evident, în final, aceleaşi valori numerice. Rezultă :

$$\alpha_3 = 0{,}2347 \cdot 10^{21},$$
$$\alpha_4 = 0{,}0136 \cdot 10^{28},$$
$$\alpha_5 = 0{,}00018 \cdot 10^{35},$$

de unde

$$p_1^2 \simeq \sqrt{219{,}28 \cdot 10^8} = 148080 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$
$$p_1 \simeq 384{,}81 \text{ rad/s}.$$

Avantajul metodei este cu atît mai vizibil cu cît numărul de volanţi ai sistemului este mai mare.

5.2. DETERMINAREA VALORII $\delta_{4,4,5,1}$

În figura 7 s-a reprezentat graful oscilaţiilor forţate corespunzător termenilor în cosinus ai armonicii întîia a momentelor perturbatoare.

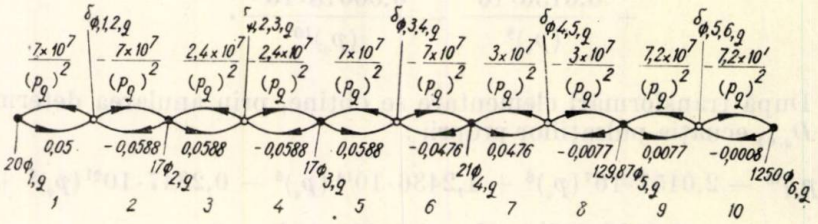


Fig. 7

S-au calculat valorile :

$$t_{b,1} = 2660; \qquad t_{b,6} = 2532{,}32,$$
$$t_{b,2} = 3128{,}16; \qquad t_{b,7} = 1085{,}28,$$
$$t_{b,3} = 1072{,}51; \qquad t_{b,8} = 175{,}56,$$
$$t_{b,4} = 1072{,}51; \qquad t_{b,9} = 421{,}34,$$
$$t_{b,5} = 3128{,}16; \qquad t_{b,10} = 43{,}78.$$

Conform relației (11) se poate scrie :

$$\delta_{A,4,5,1} = \frac{a_{1,1} \cdot t_{1,4,5,1} \cdot D_{1,4,5,1} + a_{2,1} \cdot t_{2,4,5,1} \cdot D_{2,4,5,1} + a_{3,1} \cdot t_{3,4,5,1} \cdot D_{3,4,5,1} +}{D_{6,1}}$$
$$\frac{+ a_{4,1} \cdot t_{4,4,5,1} \cdot D_{4,4,5,1} + a_{5,1} \cdot t_{5,4,5,1} \cdot D_{5,4,5,1} + a_{6,1} \cdot t_{6,4,5,1} \cdot D_{6,4,5,1}}{D_{6,1}}.$$

Transmitanțele diverselor drumuri elementare au valorile :

$$t_{1,4,5,1} = 322{,}84 \cdot 10^3; \qquad t_{4,4,5,1} = -3{,}6176 \cdot 10^{-5},$$
$$t_{2,4,5,1} = -0{,}12137 \cdot 10^3; \qquad t_{5,4,5,1} = 0{,}5852 \cdot 10^{-5},$$
$$t_{3,4,5,1} = 0{,}113164; \qquad t_{6,4,5,1} = -25{,}6177 \cdot 10^{-5}.$$

În continuare se prezintă numai modul de calcul al determinantului $D_{3,4,5,1}$.

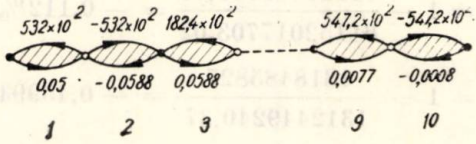


Fig. 8

Subgraful redus corespunzător a fost reprezentat în figura 8. Se constată că pentru acest subgraf redus, $z = 5$, $j = 3$. Aplicînd regula lui Mason, se obține :

$$D_{3,4,5,1} = 1 - [t_{b,1} + t_{b,2} + t_{b,3} + t_{b,9} + t_{b,10}] + [t_{b,1} \cdot t_{b,3} +$$
$$+ t_{b,1} \cdot t_{b,9} + t_{b,1} \cdot t_{b,10} + t_{b,2} \cdot t_{b,9} + t_{b,2} \cdot t_{b,10} + t_{b,3} \cdot t_{b,9} + t_{b,3} \cdot t_{b,10}] -$$
$$- [t_{b,1} \cdot t_{b,3} \cdot t_{b,9} + t_{b,1} \cdot t_{b,3} \cdot t_{b,10}] = 1 - 7325{,}79 + 6043911{,}42 -$$
$$- 1318485827 = -1\,312\,449\,240{,}37.$$

Aplicînd relația (19) se poate calcula cu ușurință numărul de subtermeni ce intră în alcătuirea diverșilor termeni ai determinantului $D_{3,4,5,1}$:

pentru $v = 2$; $N(2, 5, 3) = 5$,
pentru $v = 3$; $N(3, 5, 3) = 7$,
pentru $v = 4$; $N(4, 5, 3) = 2$,
pentru $v = 5$; $N(5, 5, 3) = 0$.

Ultima egalitate arată că determinantul $D_{3.4.5.1}$ nu are decît patru termeni.

Avînd în vedere că $t_b = t_{b.10} = 4378$, relaţia (24) este verificată pentru toate valorile v şi deci se pot face aproximaţiile (25) şi (26). Ţinînd în plus seama că $t_B = t_{b.2} = 3128{,}16$, se calculează :

$$(D_{3.4.5})' = 1 - N(2,5,3)\, t_b + N(3,5,3)\, t_b^2 - N(4,5,3)\, t_b^3 =$$
$$= 1 - 218{,}90 + 13416{,}83 - 167825{,}24 = -154626{,}31,$$

$$(D_{3.4.5})'_{\text{aprox}} = -167825{,}24,$$

$$(D_{3.4.5})'' = 1 - N(2,5,3)\, t_B + N(3,5,3)\, t_B^2 - N(3,5,3)\, t_B^3 =$$
$$= 1 - 15640{,}80 + 68497694{,}86 - 61220449758{,}08 =$$
$$= -61\ 152\ 017\ 703{,}02.$$

$$(D_{3.4.5})''_{\text{aprox}} = -61\ 220\ 449\ 758{,}08.$$

$$(D_{3.4.5})_{\text{aprox}} = -1\ 318\ 485\ 827.$$

Se obţine de asemenea :

$$e' = 1 - \frac{167825{,}24}{154626} = -8{,}536\%,$$

$$e'' = 1 - \frac{61220449758{,}08}{61152017703{,}02} = -0{,}112\%,$$

$$e = 1 - \frac{1318485827}{1312449240{,}37} = -0{,}45994\%.$$

Se constată că $e' < e < e''$.

Procedînd analog, se calculează ceilalţi determinanţi, obţinînd valorile :

$$D_{1.4.5.1} = -464{,}12,$$
$$D_{2.4.5.1} = 1\ 234\ 095{,}08,$$
$$D_{4.4.5.1} = 4\ 127\ 764\ 238\ 227{,}46,$$
$$D_{5.4.5.1} = 1\ 364\ 830\ 750\ 045{,}47,$$
$$D_{6.4.5.1} = -31\ 818\ 289\ 887{,}91,$$
$$(D_{1.4.5.1})_{\text{aprox}} = -465{,}12,$$
$$(D_{2.4.5.1})_{\text{aprox}} = 1\ 237\ 219{,}20,$$
$$(D_{4.4.5.1})_{\text{aprox}} = 4\ 150\ 849\ 234\ 435{,}2,$$
$$(D_{5.4.5.1})_{\text{aprox}} = 1\ 398\ 864\ 255\ 213{,}76,$$
$$(D_{6.4.5.1})_{\text{aprox}} = -31\ 868\ 887\ 655{,}16.$$

Utilizînd valorile exacte și apoi pe cele aproximative, se obține :

$$\delta_{A.4.5.1} = -\ 0{,}00000710028,$$

$$(\delta_{A.4.5.1})_{\text{aprox}} = -\ 0{,}00000694761.$$

Eroarea relativă care se face prin utilizarea valorii aproximative în locul celei exacte, este :

$$\varepsilon = 1 - \frac{(\delta_{A.4.5.1})_{\text{aprox}}}{\delta_{A.4.5.1}} = 2{,}15\%.$$

Primită la redacție la 15 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. J. Abrahams, G. Coverly, *Signal Flow Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
2. L. Hamburger, GH. Buzdugan, *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor*, Edit. tehnică, București, 1958.
3. M. Ifrim, S. Larionescu, *Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsației fundamentale de vibrație a structurilor elastice*, St. cerc. mec. apl. **22**, *4*, 1099–1109 (1966).
4. W. Ker Wilson, *Vibration Engineering*, Charles Griffin & Company, Limited, London.
5. Edm. Nicolau, Al. Popovici, *Introducere în cibernetica sistemelor discrete*, Edit. tehnică, București, 1966.
6. L. P. A. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert, *Graphes de fluence. Application à l'électrotechnique et à l'électronique*, Calculateurs analogiques et digitaux. Eyrolles, Paris, 1961.
7. S. Seshu, N. Balabanian, *Linear Network Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd, London, 1959.

UNELE PROBLEME PRIVIND COMPORTAREA LA OBOSEALĂ A ASAMBLĂRILOR CU ŞURUB

de GEORGE BĂRĂNESCU
membru corespondent al Academiei
Republicii Socialiste România

GHEORGHE ZĂTREANU şi DINU TARAZA
Institutul politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a asamblărilor cu şurub supuse la solicitări axiale variabile, cu luarea în consideraţie a răsucirii produse la montaj şi a variaţiei în exploatare a temperaturii elementelor asamblării. Se demonstrează că există o valoare optimă a coeficientului de siguranţă, care se obţine nu numai pentru o valoare dată a forţei de exploatare dar şi pentru o anumită elasticitate a elementelor asamblării.

0. INTRODUCERE

Calculul îmbinărilor cu şurub supuse la solicitări variabile urmăreşte precizarea condiţiilor ce trebuie îndeplinite pentru ca o îmbinare dată să prezinte o siguranţă cît mai mare în exploatare, sau altfel spus, pentru ca îmbinarea să suporte o supraîncărcare cît mai mare faţă de forţa de exploatare.

În marea majoritate a cazurilor se folosesc îmbinări cu strîngere la montaj. Pentru acest caz se arată că există o forţă optimă de strîngere care permite supraîncărcarea cea mai mare a unei îmbinări solicitate de o forţă axială variabilă [1].

În prezenta lucrare se arată că există nu numai o forţă optimă de strîngere dar şi o elasticitate optimă a pieselor îmbinării, care conduce la valoare maximă a coeficientului de siguranţă.

Se tratează cazul îmbinărilor cu şurub prevăzute cu strîngere iniţială, la care forţa de exploatare, acţionînd după axa şurubului, variază între zero şi o valoare dată; această forţă produce în şurub şi în piesele strînse tensiuni variabile de întindere. Se iau în considerare răsucirea şuru-

bului la montaj şi influenţa creşterii temperaturii în exploatare. Se presupune că toate deformaţiile au loc în domeniul elastic.

Pentru claritatea expunerii sînt menţionate unele probleme din teoria generală a îmbinărilor cu strîngerea.

1. SOLICITĂRILE ŞURUBULUI ÎNTR-O ÎMBINARE CU STRÎNGERE

Fie o îmbinare cu strîngere iniţială solicitată de o forţă de exploatare F, care are direcţia axei şurubului şi provoacă în şurub numai tensiuni de întindere.

Comportarea îmbinării sub acţiunea forţei de exploatare este pusă în evidenţă de diagrama caracteristică a îmbinării (fig. 1 *a*). În această diagramă linia *sab'* reprezintă suma valorillor absolute ale deformaţiilor pieselor din sistemul şurubului (şurubul şi piesele a căror deformaţie creşte prin aplicarea forţei de exploatare) în funcţie de forţele aplicate acestor piese, iar linia *ap* reprezintă deformaţiile pieselor care se descarcă prin acţiunea forţei de exploatare, în funcţie de forţele aplicate acestor piese. Pentru piesele din sistemul şurubului deformaţiile se măsoară

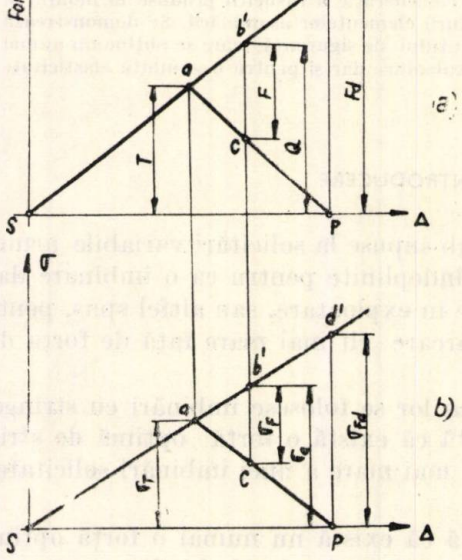


Fig. 1. — Diagrama caracteristica a îmbinarii; *a* — forţe — deformaţii; b — diagrama caracteristica raportată la secţiunea de calcul a şurubului.

faţă de punctul *s*, iar pentru celelalte piese deformaţiile se măsoară faţă de punctul *p*. Întrucît s-a considerat că deformaţiile au loc în domeniul elastic *sab'* şi *ap* sînt drepte.

Cît timp îmbinarea nu este complet descărcată, prin aplicarea forţei de exploatare forţa totală Q care lucrează asupra şurubului este dată de relaţia

$$Q = T + \chi F, \tag{1}$$

unde T este forţa de strîngere a îmbinării iar coeficientul χ, numit coeficientul forţei de exploatare, are expresia

$$\chi = \frac{\sum\limits_{p} y_{p_i}}{\sum\limits_{p} y_{p_i} + \sum\limits_{s} y_{s_i}}, \tag{2}$$

în care $\sum\limits_{p} y_{p_i}$ este elasticitatea totală a pieselor care se descarcă, iar $\sum\limits_{s} y_{s_i}$ este elasticitatea totală a pieselor sistemului şurubului. Din (1) se obţine forţa de exploatare F necesară pentru a produce asupra şurubului o forţă dată Q

$$F = \frac{Q - T}{\chi}. \tag{3}$$

Începînd din momentul descărcării complete a îmbinării forţa care lucrează asupra şurubului este egală cu forţa de exploatare; cea mai mică forţă de exploatare F_d care produce descărcarea completă a îmbinării se obţine din relaţia (1) cu ajutorul condiţiei de descărcare completă $F = Q = F_d$; rezultă astfel

$$F_d = \frac{T}{1 - \chi}. \tag{4}$$

Cînd forţa de exploatare este aplicată după axa şurubului tensiunea produsă de această forţă în secţiunea de calcul a şurubului, de diametrul d_1 este

$$\sigma_F = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4}}, \tag{5}$$

iar tensiunile produse de forţele T, Q şi F_d sînt

$$\sigma_T = \frac{T}{\frac{\pi d_1^2}{4}}; \quad \sigma_Q = \frac{Q}{\frac{\pi d_1^2}{4}}; \quad \sigma_{F_d} = \frac{F_d}{\frac{\pi d_1^2}{4}}.$$

Ţinînd cont de relaţiile (1), (3) şi (4) se obţine

$$\sigma_Q = \sigma_T + \chi \sigma_F, \tag{6}$$

$$\sigma_F = \frac{\sigma_Q - \sigma_T}{\chi}, \tag{7}$$

$$\sigma_{F_d} = \frac{\sigma_T}{1 - \chi}. \tag{8}$$

După descărcarea completă a îmbinării relația (6) devine

$$\sigma_Q = \sigma_F. \tag{9}$$

Pentru calculul la oboseală al îmbinării este avantajos să se folosească în locul diagramei forțe-deformații, o diagramă tensiuni-deformații, care să pună în evidență tensiunile σ_T, σ_Q, σ_F și σ_{Fd}. Aceasta se obține prin împărțirea tuturor ordonatelor diagramei forței-deformații cu mărimea secțiunii de calcul (fig. 1.*b*). În noua diagramă linia *ap* reprezintă — în funcție de deformația pieselor care se descarcă — eforturi unitare fictive, și anume eforturile care ar apare în secțiunea de calcul cînd asupra șurubului ar acționa forțele care în realitate acționează asupra pieselor care se descarcă. Această linie servește la punerea în evidență a eforturilor unitare σ_T și σ_F.

Pe lîngă solicitările variabile considerate mai sus, șurubul poate fi supus și la solicitări constante cauzate de răsucirea șurubului la montaj și de încălzirea pieselor îmbinării.

Momentul de strîngere la montaj are expresia

$$M_r = \delta\, T\, d,$$

unde d este diametrul exterior al filetului și δ un coeficient care depinde de înclinarea spirelor și de coeficientul de frecare între spirele șurubului și ale piuliței. Momentul de răsucire poate fi cel mult egal cu momentul forțelor de frecare între piuliță și suprafața ei de sprijin.

Efortul unitar de răsucire produs de momentul M_r în secțiunea de calcul este

$$\tau = \frac{M_r}{\frac{\pi d_1^3}{16}} = 4\,\delta\,\frac{d}{d_1}\,\sigma_T,$$

cu notația

$$\lambda = 4\,\delta\,\frac{d}{d_1},$$

se obține

$$\tau = \lambda\,\sigma_T. \tag{10}$$

Efortul unitar de răsucire variază deci liniar cu tensiunea de strîngere.

Solicitarea produsă prin încălzirea îmbinării apare cînd piesele îmbinării au temperaturi diferite de funcționare sau cînd coeficienții de dilatare ai materialelor pieselor din îmbinare sînt diferiți. În starea de regim această solicitare se manifestă printr-o forță de întindere a cărei mărime este

$$T_t = \frac{\sum_1^k l_i\,\alpha_i(t_i - t_m) - l_0\,\alpha_0(t_0 - t_m)}{y_o + \sum_1^k y_i}, \tag{11}$$

expresie în care s-a notat :

l_0 — lungimea de calcul al şurubului ;
l_i — lungimea de calcul a unei piese i din îmbinare
α_0 — coeficientul de dilatare liniară a materialului şurubului ;
α_i — coeficientul de dilatare liniară al materialului piesei i ;
t_0 — temperatura de regim a şurubului ;
t_i — temperatura de regim a piesei i ;
t_m — temperatura de montaj ;
k — numărul pieselor strînse din îmbinare ;
y_0 — elasticitatea şurubului ;
y_i — elasticitatea piesei i.

Se poate constata că efectul temperaturii este o modificare a forţei de strîngere a îmbinării. În exploatare îmbinarea se comportă ca şi cum ar fi strînsă cu o forţă

$$T = T_m + T_t, \tag{12}$$

unde T_m este forţa de strîngere la montaj.

Cînd temperatura de lucru este diferită de temperatura de montaj diagrama caracteristică a îmbinării în regiunea de exploatare trebuie reprezentată cu elasticităţile pieselor la temperaturile lor de regim. Modificarea elasticităţii se datoreşte variaţiei modulului de elasticitate cu temperatura.

2. CALCULUL LA OBOSEALĂ AL ŞURUBULUI CU SOLICITĂRI DE ÎNTINDERE ŞI RĂSUCIRE, CARE LUCREAZĂ LA TEMPERATURA DE MONTAJ

Fie o îmbinare cu strîngere în care forţa de exploatare variază între zero şi o valoare maximă F, şurubul fiind solicitat de această forţă la întindere ; solicitarea de răsucire corespunde momentului de răsucire care se produce prin strîngerea îmbinării.

Calculul la oboseală al şurubului constă în determinarea coeficientului de siguranţă şi compararea lui cu valoarea impusă. Coeficientul de siguranţă arată posibilitatea de supraîncărcare a îmbinării faţă de încărcarea produsă de forţa de exploatare F considerată în calcul. O definiţie raţională a coeficientului de siguranţă este deci raportul dintre valoarea cea mai mare F_t a forţei de exploatare care poate fi aplicată îmbinării fără să se producă ruperea prin oboseală a şurubului şi valoarea forţei de exploatare F

$$C = \frac{F_t}{F}. \tag{13}$$

Forţa F_t, solicitînd şurubul la oboseală prin întindere, produce în secţiunea de calcul a şurubului un ciclu de tensiuni situat pe curba limită

de oboseală. Această forță acționînd după axa șurubului determină în secțiunea de calcul efortul unitar

$$\sigma_{F_l} = \frac{F_l}{\frac{\pi d_1^2}{4}}, \tag{14}$$

înlocuind în (13) forțele F și F_l din formulele (5) și (14) rezultă

$$C = \frac{\sigma_{F_l}}{\sigma_F}. \tag{15}$$

Coeficientul de siguranță poate fi deci exprimat și ca raportul eforturilor unitare produse prin întindere în secțiunea de calcul a șurubului de către forțele F și F_l.

Pentru o forță de exploatare dată tensiunea σ_F este o constantă. Ca urmare din formula (15) se deduce că valoarea coeficientului de siguranță depinde numai de valoarea tensiunii σ_{F_l}. Expresia acestei tensiuni se obține din relațiile (6) sau (9) în care se pune condiția $\sigma_Q = \sigma_{\max_l}$. $\sigma_{\max_l}$ reprezintă efortul unitar maxim de întindere ce se poate produce în secțiunea de calcul a șurubului, fără să se producă ruperea acestuia prin oboseală.

Atîta timp cît îmbinarea nu este complet descărcată sub acțiunea forței de exploatare limită F_l, rezultă conform relației (6)

$$\sigma_{Q_l} = \sigma_{\max_l} = \sigma_T + \chi\, \sigma_{F_l}, \tag{16}$$

iar cînd îmbinarea este complet descărcată conform relației (9)

$$\sigma_{Q_l} = \sigma_{\max_l} = \sigma_{F_l}. \tag{17}$$

Formula (16) arată că tensiunea σ_{F_l} și implicit coeficientul de siguranță, depind de tensiunea de strîngere.

În continuare se cercetează această dependență. Deoarece încărcarea minimă a îmbinării este nulă atît în cazul exploatării normale cît și în cazul supraîncărcării, ciclul de lucru și ciclul limită vor avea aceeași tensiune minimă, egală cu tensiunea de strîngere σ_T. Ca urmare în diagrama σ_m, σ_v (fig. 2) ciclul de lucru și ciclul limită se situează pe o dreaptă paralelă la bisectoarea întîia a diagramei.

Pentru forța de strîngere T_1, care produce în șurub tensiunea σ_{T_1}, ciclurile de încărcare se află pe dreapta $a'l$, care reprezintă locul ciclurilor de aceeași tensiune minimă σ_{T_1}; ciclul limită l are tensiunea maximă $(\sigma_{\max_l})_1$. Dacă forța de strîngere se micșorează la valoarea T_2, căreia îi corespunde tensiunea în șurub σ_{T_2}, ciclurile de încărcare se situează pe

dreapta $a''2$; ciclul limită 2 are tensiunea maximă $(\sigma_{max_l})_2$ mai mică decît tensiunea maximă a ciclului 1. Se observă astfel că la mărirea tensiunii de strîngere, tensiunea maximă limită creşte iar diferenţa $(\sigma_{max_l} - \sigma_T)$ se micşorează. Existenţa acestei dependenţe permite următoarele concluzii :

Cît timp îmbinarea nu este complet descărcată prin acţiunea forţei care solicită şurubul la întindere, tensiunea maximă în secţiunea de calcul

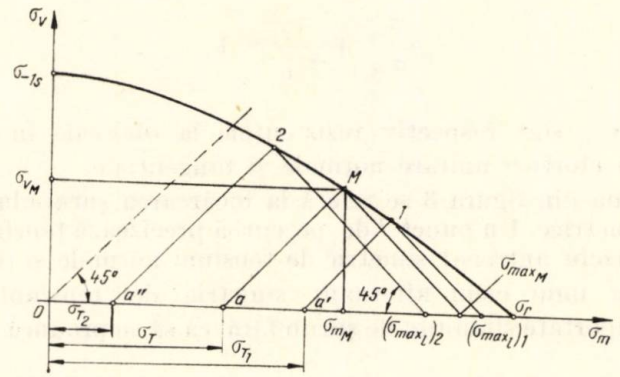


Fig. 2. — Influenţa forţei de strîngere a îmbinării asupra tensiunii maxime a ciclului limită.

a şurubului este dată de relaţia (16) care se poate pune sub forma

$$\sigma_{max_l} - \sigma_T = \chi \, \sigma_{F_l}. \qquad (18)$$

Deoarece diferenţa $(\sigma_{max_l} - \sigma_T)$ creşte cînd tensiunea de strîngere scade, formula (18) arată că atît timp cît îmbinarea nu este complet descărcată, scăderea tensiunii de strîngere antrenează o creştere a posibilităţilor de încărcare a îmbinării.

După descărcarea completă a îmbinării devine valabilă formula (17). Fiindcă scăderea tensiunii de strîngere antrenează scăderea tensiunii maxime limită (fig. 2), această formulă arată că posibilităţile de încărcare a îmbinării se micşorează la scăderea tensiunii de strîngere.

Se constată astfel că cea mai mare valoare a tensiunii maxime limită, deci şi valoarea maximă a coeficientului de siguranţă se realizează pentru tensiunea de strîngere la care în momentul descărcării complete a îmbinării sub acţiunea forţei care solicită şurubul la întindere, tensiunea maximă în secţiunea de calcul a şurubului este egală cu tensiunea maximă a ciclului limită.

Din cauza răsucirii şurubului la montaj se creează în şurub o stare de tensiune compusă care antrenează o micşorare a tensiunii maxime a ciclului limită pentru eforturi unitare normale. Acest ciclu se va situa sub curba limită corespunzătoare situaţiei cînd nu există solicitare de răsucire.

Momentul de răsucire depinde de valoarea forţei de strîngere şi, în consecinţă, prin variaţia acesteia tensiunea maximă a ciclului limită

pentru eforturi unitare normale variază nu numai din motivele arătate în figura 2 ci şi din cauza variaţiei concomitente a tensiunii de răsucire.

Determinarea tensiunii maxime a ciclului limită pentru eforturi normale în funcţie de forţa de strîngere şi de răsucirea produsă la strîngere se face cu ajutorul diagramei de oboseală pentru solicitări compuse (fig. 3).

La astfel de solicitări ciclul limită se situează pe o elipsă de ecuaţie

$$\frac{\sigma_{V_L}}{\sigma_{-1_s}} + \frac{\tau_{V_L}}{\tau_{-1_s}} = 1, \tag{19}$$

unde σ_{-1_s} şi τ_{-1_s} sînt respectiv rezistenţele la oboseală în secţiunea de calcul pentru eforturi unitare normale şi tangenţiale.

Diagrama din figura 3 se referă la încărcarea şurubului prin cicluri alternante simetrice. Un punct *1* de pe curbă precizează tensiunea maximă $(\sigma_{V_L})_1$ a unui ciclu antrenat simetric de tensiuni normale şi tensiunea maximă $(\tau_{V_L})_1$ a unui ciclu alternant simetric de tensiuni tangenţiale care pot fi suportate simultan de şurub fără ca să se producă ruperea prin oboseală.

Ciclurile limită pentru tensiuni normale aferente diferitelor tensiuni de strîngere nu sînt alternant-simetrice. De asemenea nici ciclul produs de solicitarea de răsucire nu e alternant simetric. Pentru a putea folosi formula (19) se apelează la noţiunea de ciclu echivalent.

Se consideră drept cicluri echivalente, ciclurile care au aceeaşi coeficient de siguranţă la oboseală, determinat după un criteriu ales convenţional, de pildă pe baza egalităţii coeficientului de asimetrie. Conform acestei

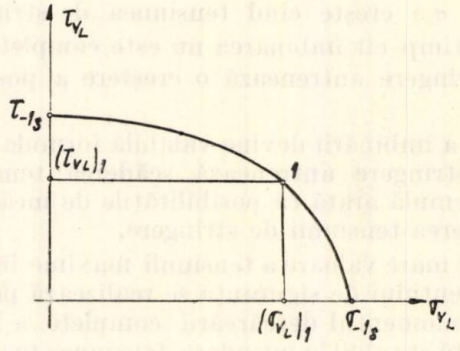


Fig. 3. — Curba tensiunilor limită pentru solicitări variabile compuse.

condiţii ciclurile echivalente vor fi situate în diagrama σ_m, σ_v pe o curbă care trece prin punctul corespunzător ciclului de încărcare şi este paralelă la curba limită de oboseală.

În general curba limită la oboseală nu este cunoscută ; pentru acest motiv determinarea ciclurilor echivalente se face cu ajutorul diagramelor schematizate.

Ciclul de răsucire este o tensiune constantă pozitivă a cărei mărime este dată de relaţia (10). El va fi reprezentat în diagrama τ_m, τ_v printr-un

punct R situat pe axa absciselor (fig. 4) şi ca urmare oricare ar fi schematizarea folosită se poate scrie

$$\frac{\tau_{V_L}}{\tau_{-1_s}} + \frac{\lambda\,\sigma_T}{\tau_r},$$

de unde se deduce

$$\tau_{V_L} = \frac{\tau_{-1_s}}{\tau_r}\,\lambda\,\sigma_T. \tag{20}$$

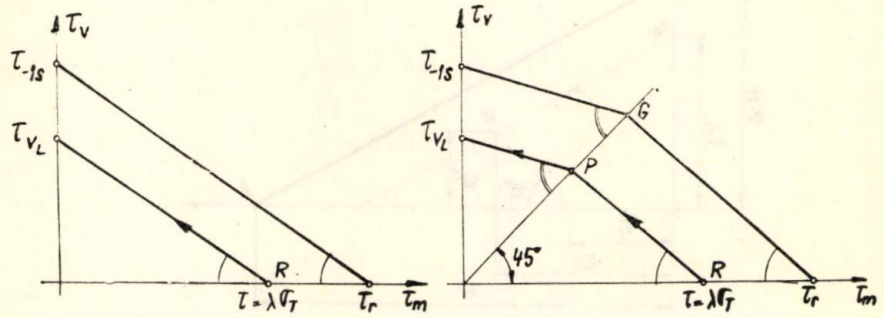


Fig. 4. — Reducerea solicitării de răsucire la un ciclu alternant simetric echivalent.

Prin înlocuirea acestei expresii în relaţia (19) se obţine tensiunea variabilă a ciclului limită alternant simetric pentru eforturi unitare normale.

$$\sigma_{V_L} = \sigma_{-1_s}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\,\sigma_T}{\tau_r}\right)^2}. \tag{21}$$

Trecînd la determinarea tensiunii maxime limită pentru eforturi normale distingem două situaţii :

a) În cazul schematizării diagramei printr-o linie dreaptă (fig. 5) se poate scrie

$$\sigma_{V_L} = \sigma_{v_l} + \sigma_{m_l}\frac{\sigma_{-1_s}}{\sigma_r}.$$

Avînd în vedere formulele

$$\sigma_{m_l} = \frac{\sigma_{\max_l} + \sigma_T}{2}, \tag{22}$$

$$\sigma_{v_l} = \frac{\sigma_{\max_l} - \sigma_T}{2}, \tag{23}$$

şi folosind notaţia

$$\zeta = \frac{\sigma_{-1_s}}{\sigma_r},$$

se deduce

$$\sigma_{\max_l} = \frac{2\,\sigma_{v_L} + (1-\zeta)\,\sigma_T}{1+\zeta}.$$

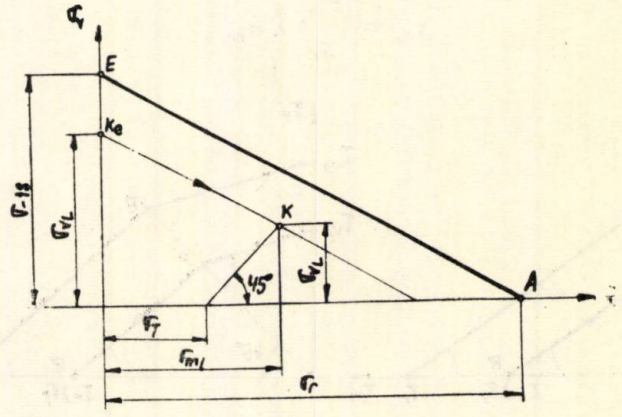


Fig. 5. — Determinarea ciclului limită pentru eforturi unitare normale în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă.

Prin înlocuirea tensiunii σ_{v_L} din (21) rezultă următoarea expresie a tensiunii maxime a ciclului limită pentru eforturi unitare normale :

$$\sigma_{\max_l} = \frac{2\,\sigma_{-1_s}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda\,\sigma_T}{\tau_r}\right)^2} + (1-\zeta)\,\sigma_T}{1+\zeta}. \tag{24}$$

b) În cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă (fig. 6) se poate scrie

$$\sigma_{m_{G_1}} = \sigma_{v_{G_1}} = \frac{\sigma_{v_L}\,\sigma_{0_s}}{2\,\sigma_{-1_s}}$$

şi

$$\sigma_{v_{G_1}} = \sigma_{v_l} + \xi(\sigma_{m_l} - \sigma_{m_{G_1}}),$$

unde s-a notat

$$\xi = \frac{\sigma_{0_s}}{2\,\sigma_r - \sigma_{0_s}},$$

σ_{0_s} fiind rezistenţa la oboseală pentru ciclul pulsator în secţiunea de calcul a şurubului.

Din aceste ecuaţii se obţine

$$\xi \frac{\sigma_r}{\sigma_{-1_s}} \sigma_{v_L} = \sigma_{v_l} + \xi \sigma_{m_l}.$$

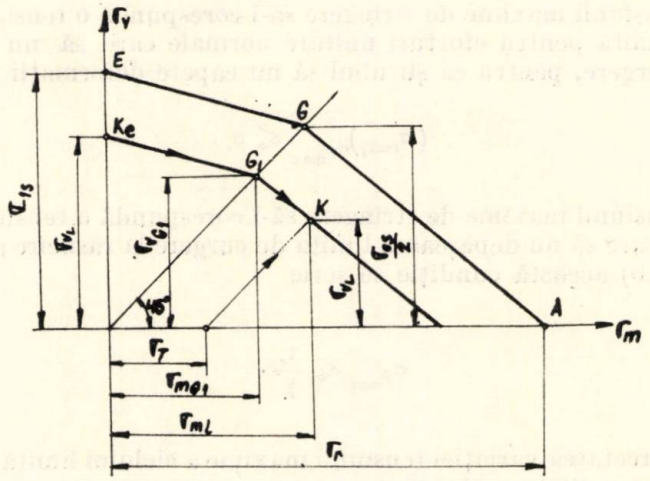


Fig. 6. — Determinarea ciclului limită pentru eforturi unitare normale în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă.

Folosind relaţiile (22) şi (23) şi înlocuind tensiunea σ_{v_L} din (21) rezultă

$$\sigma_{\max_l} = \frac{2\xi \sigma_r \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \sigma_T}{\tau_r}\right)^2} + (1 - \xi) \sigma_T}{1 + \xi}. \tag{25}$$

Ecuaţiile (24) şi (25) dau tensiunea maximă a ciclului limită pentru eforturi unitare normale în funcţie de tensiunea de strîngere cu considerarea efectului răsucirii şurubului. Tensiunea de strîngere poate lua valori între zero şi o valoare maximă, care, abstracţie făcînd de încărcarea îmbinării, trebuie să satisfacă simultan următoarele condiţii :

1. Tensiunea maximă de strîngere trebuie să fie cel mult egală cu tensiunea maximă a ciclului limită pentru eforturi unitare normale

$$\sigma_{T_{\max}} \leqslant (\sigma_{\max_l})_{\sigma_{T_{\max}}}. \tag{26}$$

Prin înlocuirea acestei condiţii în (24) sau (25) se obţine

$$\sigma_{T_{\max}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_r^2} + \frac{\lambda^2}{\tau_r^2}}}. \tag{27}$$

Dacă nu ar exista răsucirea ($\lambda = 0$) expresia (27) se reduce la condiţia evidentă

$$\sigma_{T_{max}} \leqslant \sigma_r .$$

2. Tensiunii maxime de strîngere să-i corespundă o tensiune maximă a ciclului limită pentru eforturi unitare normale care să nu depăşească limita de curgere, pentru ca şurubul să nu capete deformaţii permanente

$$(\sigma_{max_l})_{\sigma_{T_{max}}} \leqslant \sigma_c . \tag{28}$$

3. Tensiunii maxime de strîngere să-i corespundă o tensiune maximă de răsucire care să nu depăşească limita de curgere la răsucire ; ţinînd cont de relaţia (10) această condiţie se scrie

$$\sigma_{T_{max}} \leqslant \frac{\tau_c}{\lambda} . \tag{29}$$

Din cercetarea variaţiei tensiunii maxime a ciclului limită dată de formulele (24) sau (25) se observă :

— în domeniul de variaţie a tensiunii de strîngere, tensiunea maximă a ciclului limită pentru eforturi unitare normale creşte o dată cu tensiunea de strîngere ;

— diferenţa $(\sigma_{max_l} - \sigma_T)$ variază în sens invers cu tensiunea de strîngere σ_T.

Această situaţie iese şi mai sugestiv în evidenţă dacă se reprezintă o diagramă a tensiunii maxime a ciclului limită pentru eforturi unitare normale în funcţie de tensiunea de strîngere, folosind formula (24) sau (25). Diagrama trebuie să îndeplinească condiţiile (27), (28) şi (29) ; în raport cu caracteristicile mecanice ale materialului şurubului se pot prezenta cazurile arătate în figura 7.

În rezolvarea problemei puse se deosebesc două alternative după cum la descărcarea completă a îmbinării tensiunea σ_{Q_d} este mai mică sau egală cu limita de curgere σ_c ; alternativa $\sigma_{Q_d} < \sigma_c$ se poate întîlni în toate cele patru cazuri din figura 7, iar alternativa $\sigma_{Q_d} = \sigma_c$ numai în cazurile din figurile 7 c şi 7 d.

Se cercetează determinarea forţei optime de strîngere în prima alternativă.

În această alternativă tensiunea optimă de strîngere se determină cu ajutorul formulei (8) scriind că în momentul descărcării complete a îmbinării tensiunea σ_{F_l} este egală cu tensiunea maximă limită

$$\sigma_{F_d} = (\sigma_{F_l})_{opt} = (\sigma_{max_l})_{opt} = \frac{\sigma_{T_{opt}}}{1 - \chi} . \tag{30}$$

Folosind expresiile tensiunii maxime limită din (24) şi (25) în care pentru $(\sigma_{max_l})_{opt}$, $\sigma_T \to \sigma_{T_{opt}}$, rezultă :

— pentru schematizarea diagramei de oboseală după o linie dreaptă

$$\sigma_{T_{opt}} = \frac{2\sigma_{-1_s}(1-\chi)}{\sqrt{[2\zeta+\chi(1-\zeta)]^2+4\lambda^2\left(\frac{\sigma_{-1_s}}{\tau_r}\right)^2(1-\chi)^2}}; \qquad (31)$$

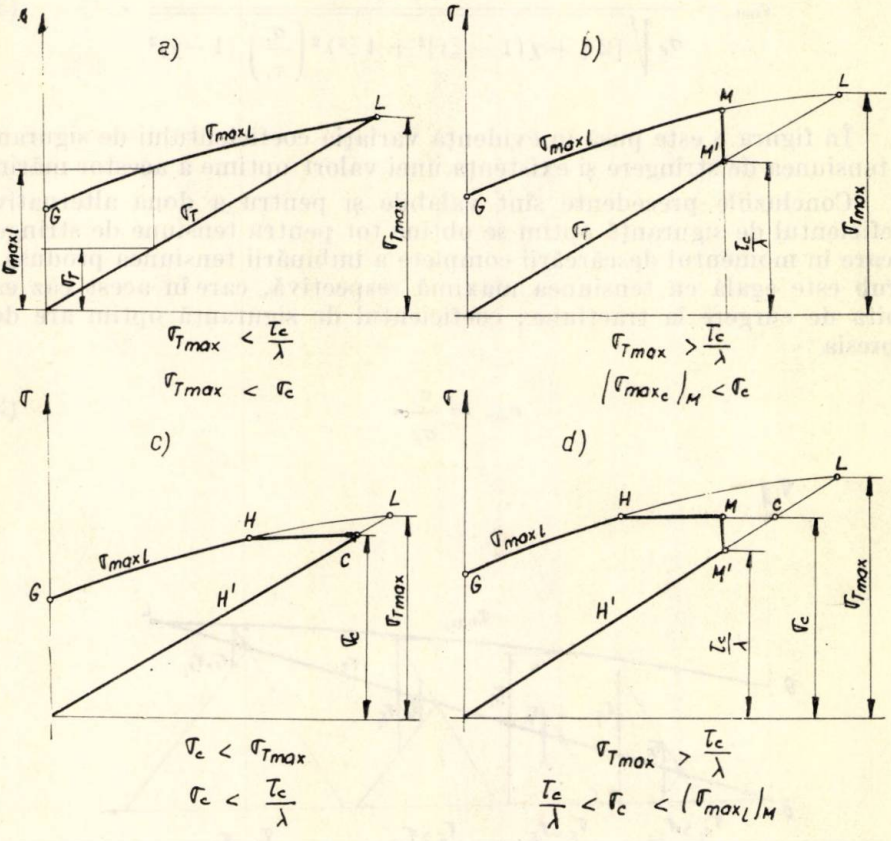


Fig. 7. — Variantele posibile ale diagramei tensiunii maxime a ciclului limită pentru eforturi unitare normale în funcţie de tensiunea de strângere.

— pentru schematizarea diagramei de oboseală după o linie frîntă

$$\sigma_{T_{opt}} = \frac{2\xi\,\sigma_r(1-\chi)}{\sqrt{[2\xi+\chi(1-\xi)]^2+4\xi^2\lambda^2\left(\frac{\sigma_r}{\tau_r}\right)^2(1-\chi)^2}}. \qquad (32)$$

Cu aceste expresii se calculează din (30) tensiunea $(\sigma_{F_l})_{opt}$ și prin introducerea ei în relația (15) se obțin expresiile coeficientului de siguranță optim pentru cele două schematizări ale diagramei de oboseală

$$C_{opt} = \frac{2\sigma_{-1_s}}{\sigma_F \sqrt{[2\zeta + \chi(1-\zeta)]^2 + 4\lambda^2 \left(\frac{\sigma_{-1_s}}{\tau_r}\right)^2 (1-\chi)^2}}, \tag{33}$$

$$c_{opt} = \frac{2\xi\,\sigma_r}{\sigma_F \sqrt{[2\xi + \chi(1-\xi)]^2 + 4\xi^2\lambda^2 \left(\frac{\sigma_r}{\tau_r}\right)^2 (1-\chi)^2}}. \tag{34}$$

În figura 8 este pusă în evidență variația coeficientului de siguranță cu tensiunea de strîngere și existența unei valori optime a acestor mărimi.

Concluziile precedente sînt valabile și pentru a doua alternativă. Coeficientul de siguranță optim se obține tot pentru tensiune de strîngere la care în momentul descărcării complete a îmbinării tensiunea produsă în șurub este egală cu tensiunea maximă respectivă, care în acest caz este limita de curgere la tracțiune; coeficientul de siguranță optim are deci expresia

$$c_{opt} = \frac{\sigma_c}{\sigma_F}. \tag{35}$$

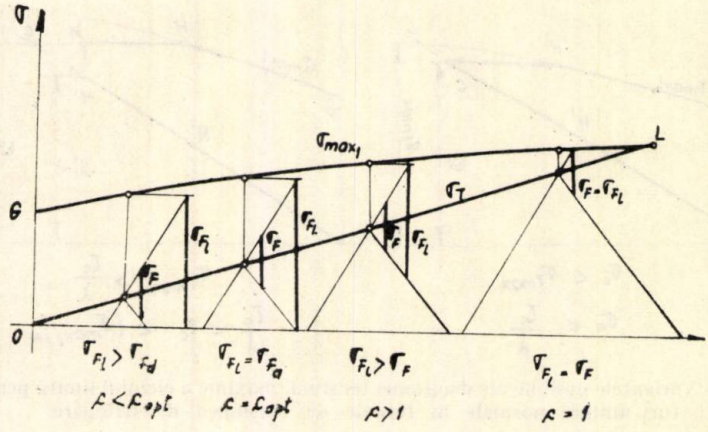


Fig. 8. — Variația tensiunii σ_{F_l} în alternativa $\sigma_{Qd} < \sigma_c$.

Tensiunea de strîngere optimă se obține din relația (30) în care se pune condiția $(\sigma_{max_l})_{opt} = \sigma_c$

$$\sigma_{T_{opt}} = \sigma_c (1 - \chi). \tag{36}$$

Prin micșorarea tensiunii de strîngere sub această valoare îmbinarea rămîne complet descărcată, însă cît timp ciclul limită se situează pe orizontala CH (fig. 7 *c* și 7 *d*) coeficientul de siguranță este constant și egal cu valoarea lui optimă. În figura 9 este pusă în evidență această dependență.

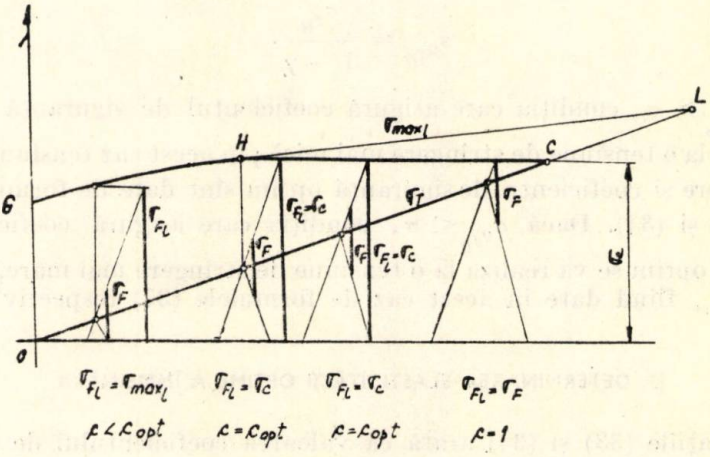


Fig. 9. — Variația tensiunii σ_{F_l} în alternativa $\sigma_{Qd}=\sigma_c$.

Astfel, în a doua alternativă, coeficientul de siguranță optim se obține pentru o tensiune de strîngere cuprinsă între limitele

$$\sigma_{T_H} \leqslant \sigma_{T_{opt}} \leqslant \sigma_c(1-\varkappa). \tag{37}$$

Tensiunea minimă de strîngere corespunzătoare punctului H (fig. 7) se calculează din ecuațiile (24) sau (25), în care se pune condiția punctului H

$$(\sigma_{max_l})_H = \sigma_c;$$

rezultă astfel

— pentru schematizarea diagramei de oboseală după o linie dreaptă

$$\sigma_{T_H} = \frac{\sigma_c(1-\zeta^2) - 2\sigma_{-1_s}\sqrt{(1-\zeta)^2 - \frac{\lambda^2}{\tau_r^2}[(1+\zeta)^2\sigma_c^2 - 4\sigma_{-1_s}^2]}}{(1-\zeta) + 4\lambda^2\frac{\sigma_{-1_s}^2}{\tau_r^2}}; \tag{38}$$

— pentru schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie frîntă

$$\sigma_{T_H} = \frac{\sigma_c(1-\xi^2) - 2\xi\sigma_r\sqrt{(1-\xi)^2 - \frac{\lambda^2}{\tau_r^2}[(1+\xi)^2\sigma_c^2 - 4\xi^2\sigma_r^2]}}{(1-\xi)^2 + 4\xi^2\lambda^2\frac{\sigma_r^2}{\tau_r^2}}. \tag{39}$$

În vederea stabilirii alternativei în care se produce descărcarea completă a îmbinării se presupune că tensiunea de strîngere corespunde

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

punctului H şi se calculează din relaţia (8) tensiunea $\sigma_{Q_{d_H}}$ corespunzătoare tensiunii de strîngere σ_{T_H} determinată cu relaţiile (38) sau (39)

$$\sigma_{Q_{d_H}} = \frac{\sigma_{T_H}}{1 - \chi}.$$

Dacă $\sigma_{Q_{d_H}} > \sigma_c$, condiţia care asigură coeficientul de siguranţă optim se va realiza la o tensiune de strîngere mai mică ; în acest caz tensiunea optimă de strîngere şi coeficientul de siguranţă optim sînt date de formulele (31), (32), (33) şi (34). Dacă $\sigma_{Q_{d_H}} < \sigma_c$, condiţia care asigură coeficientul de siguranţă optim se va realiza la o tensiune de strîngere mai mare, mărimile T_{opt} şi c_{opt} fiind date în acest caz de formulele (37) respectiv (35).

3. DETERMINAREA ELASTICITĂŢII OPTIME A ÎMMBINĂRII

Ecuaţiile (33) şi (34) arată că valoarea coeficientului de siguranţă optim depinde de coeficientul forţei de exploatare χ, adică de elasticitatea îmbinării. Se pune deci problema găsirii elasticităţii optime a îmbinării, adică a elasticităţii care conduce la valoarea cea mai mare a coeficientului de siguranţă.

Pentru o îmbinare dată, coeficientul de siguranţă optim se obţine în momentul descărcării complete a îmbinării de către forţa de exploatare limită, cînd tensiunea σ_{F_l} este egală cu tensiunea maximă limită respectivă. Coeficientul de siguranţă optim va avea deci valoarea cea mai mare dacă descărcarea completă a îmbinării se produce la cea mai mare tensiune maximă limită.

La acelaşi rezultat se ajunge folosind relaţia (30) care dă tensiunea optimă de strîngere. Această relaţie pusă sub forma

$$\chi = 1 - \frac{\sigma_{T_{\text{opt}}}}{(\sigma_{\max_l})_{\text{opt}}}, \tag{40}$$

arată că factorul χ va avea o valoare cu atît mai mică, cu cît tensiunea maximă limită este mai mare , deoarece creşterea tensiunii de strîngere antrenează o creştere mai mică a tensiunii maxime limită (fig. 2).

Valoarea optimă a coeficientului forţei de exploatare χ depinde de cazurile arătate în figura 7.

Pentru cazul 7 *a* cea mai mare valoare a tensiunii maxime limită se obţine în punctul L, unde tensiunea maximă limită este egală cu tensiunea de strîngere ; din (40) se deduce deci pentru acest punct

$$\chi = 0,$$

ceea ce este lipsit de sens.

Întrucît valoarea $\chi = 0$ nu se poate realiza, sînt de dorit valori cît mai mici ale coeficientului forţei de exploatare χ, care se obţin pentru o

elasticitate cît mai mare a pieselor din sistemul şurubului şi o elasticitate cît mai mică a pieselor care se descarcă la aplicarea forţei de exploatare.

Pentru cazul 7 *b* valoarea optimă a lui χ este

$$\chi_{opt} = 1 - \frac{(\sigma_T)_M}{(\sigma_{max_I})_M}.$$

Calculînd din ecuaţiile (24) şi (25) tensiunea maximă limită a punctului M, a cărui tensiune minimă este $(\sigma_T)_M = \frac{\tau_c}{\lambda}$, se obţine :

— pentru schematizarea diagramei de oboseală după o linie dreaptă

$$\chi_{opt} = \frac{2\lambda\sigma_{-1_s}\sqrt{1-\left(\frac{\tau_c}{\tau_r}\right)^2} - 2\zeta\tau_c}{\lambda\left[2\sigma_{-1_s}\sqrt{1-\left(\frac{\tau_c}{\tau_r}\right)^2} + (1-\zeta)\frac{\tau_c}{\lambda}\right]}; \tag{41}$$

— pentru schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie frîntă

$$\chi_{opt} = \frac{2\chi\xi\,\sigma_r\sqrt{1-\left(\frac{\tau_c}{\tau_r}\right)^2} - 2\xi\tau_c}{\lambda\left[2\xi\sigma_r\sqrt{1-\left(\frac{\tau_c}{\tau_r}\right)^2} + 1(-\xi)\frac{\tau_c}{\lambda}\right]}. \tag{42}$$

Pentru cazurile 7 *c* şi 7 *d* tensiunea maximă limită este egală cu limita de curgere la tracţiune σ_c, situaţie care se realizează o dată cu atingerea punctului H ; valoarea optimă a coeficientului forţei de exploatare va fi

$$\chi_{opt} = 1 - \frac{\sigma_{T_H}}{\sigma_c},$$

şi folosind expresiile (38) şi (39) rezultă pentru cele două schematizări ale diagramei de oboseală

$$\chi_{opt} = \frac{2\sigma_c\left[2\lambda^2\frac{\sigma_{-1_s}^2}{\tau_r^2} - \zeta(1-\zeta)\right] + 2\sigma_{-1_s}\sqrt{(1-\zeta)^2 - \frac{\lambda^2}{\tau_c^2}\left[\sigma_c^2(1+\zeta)^2 - 4\sigma_{-1_s}^2\right]}}{\left[(1-\zeta)^2 + 4\lambda^2\frac{\sigma_{-1_s}^2}{\tau_r^2}\right]\sigma_c}, \tag{43}$$

$$\chi_{opt} = \frac{2\sigma_c\left[2\xi^2\lambda^2\frac{\sigma_r^2}{\tau_r^2} - \xi(1-\xi)\right] + 2\xi\sigma_r(1-\xi)^2 - \frac{\lambda^2}{\tau_r^2}\left[\sigma_c^2(1+\xi)^2 - 4\xi^2\sigma_r^2\right]}{\left[(1-\xi)^2 + 4\xi^2\lambda^2\frac{\sigma_r^2}{\tau_r^2}\right]\sigma_c}. \tag{44}$$

Prin micşorarea lui χ sub valorile de mai sus nu se obţine nici un avantaj; descărcarea completă a îmbinării se va produce la o tensiune de strîngere corespunzătoare unui punct situat pe dreapta HC (fig. 7*c*) sau pe dreapta HM (fig. 7*d*) însă tensiunea maximă limită rămîne constantă.

★

Dacă nu se produce răsucirea şurubului la montaj se realizează întotdeauna cazul 7*c* şi deci valoarea optimă a coeficientului forţei de exploatare se calculează din ecuaţiile (43) sau (44), în care se face $\lambda = 0$.

4. INFLUENŢA ÎNCĂLZIRII ÎMBINĂRII

Cînd temperaturile de regim ale pieselor din îmbinare sînt diferite de temperatura de montaj, calculele se conduc după metoda arătată înainte, cu următoarele modificări:

a) elasticitatea îmbinării trebuie calculată pentru temperaturile de regim ale pieselor din îmbinare;

b) rezistenţele materialului şurubului cu valorile corespunzătoare temperaturii de regim a şurubului;

c) forţa de strîngere la montaj se calculează din relaţia (12) în care T_t este forţa de strîngere produsă prin încălzirea pieselor şi are valoarea dată de ecuaţia (11), iar T este forţa optimă de strîngere calculată după metoda prezentată.

5. CONCLUZII

Metoda de calcul expusă permite stabilirea forţei de strîngere care asigură cel mai mare coeficient de siguranţă a unei îmbinări în care şurubul este solicitat la întindere şi răsucire.

Dacă elasticitatea îmbinării poate fi variată, este avantajos din punctul de vedere al coeficientului de siguranţă ca piesele din sistemul şurubului să aibe o elasticitate cît mai mare, iar piesele care se descarcă să aibe o elasticitate cît mai mică. În această privinţă există o limită (cu excepţia cazului din fig. 7 *a*) de la care modificarea elasticităţii celor două grupe de piese în sensul de mai sus, nu mai are nici un efect asupra valorii coeficientului de siguranţă.

Primită la redacţie la 11 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. N. D. Chimelman, *Calculul organelor de maşini supuse la solicitări variabile* (traducere din limba rusă) Bucureşti, Edit. tehnică 1951.

2. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistenţă la solicitări variabile*, ediţia a 2-a, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.

SINTEZA NUMERICĂ ŞI STRUCTURALĂ A MECANISMELOR SPAŢIALE DE DIVERSE FAMILII

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea face un paralelism între sinteza structurală a mecanismelor rezolvată pe baza numerelor de elemente şi cuple şi aceeaşi problemă rezolvată pe baza numerelor de contururi şi cuple. Cele două metode, a *elementelor sau barelor* şi a *conturilor deformabile independente*, sînt analizate şi în legătură cu *metoda conexiunilor*. Tabelele cuprind lanţurile cinematice cu 5—12 elemente şi 2—4 contururi. Alcătuirea schemelor structurale este independentă de gradul de mobilitate sau libertate al lanţurilor respective. Valoarea lor depinde de familia în care se încadrează lanţurile cinematice. Schemele structurale sînt alcătuite pe baza numerelor de elemente şi cuple interioare conturului exterior care au avantajul că variază în limite restrînse.

Analiza şi sinteza structurală a mecanismelor plane şi spaţiale a constituit una din problemele importante ale lanţurilor cinematice. Ea a apărut chiar la primele publicaţii despre mecanisme şi a cîştigat progresiv în importanţă.

În ultimii ani, lucrarea lui F. R. E. Crossley [1] în care în principal se deduc lanţurile cinematice plane cu două grade de mobilitate, a dat un nou impuls cercetărilor în acest domeniu.

Profesorul N. I. Manolescu [2], [3] atrage atenţia asupra problemelor care apar în lanţurile cinematice supraconstrînse sau cu mobilităţi superioare, cu constrîngeri parţiale sau totale, cu părţi de diferite familii, referindu-se la lucrările lui F. R. E. Crossley [4], K. H. Hunt [5], K. Waldron [6], F. Freundenstein [7], L. Harrisberger şi A. Soni [8], H. Boden [9] etc. şi face clasificări şi sinteze de scheme cinematice avînd la bază grupa assurică.

În lucrarea sa „The structure and synthesis of plan kinematic chains" R. de Jonge [10] face un istoric amănunţit al desfăşurării acestei probleme enumerînd lucrările lui Franz Releaux [11], P. L. Chebyshev [12], M. Grübler [13], F. Grashof [14], L. P. Assur [15], F. Wittenbauer [16], K. Kutzbach [17], I. I. Artobolevski [18, 19], R. Franke

[20], O. Bottema [21], R. S. Macmillan [22], K. Hain [23], R. Kraus [24], W. Rössner [25], B. Paul [26], J. Denavit și R. Hartenberg [27] și alții. În aceeași lucrare R. de Jonge deduce lanțurile cinematice pe baza rezolvărilor numerice ale barelor sau cuplelor dar ține seama de posibilitățile de existență ale contururilor independente.

Prezenta lucrare are drept scop să facă un paralelism între sinteza structurală a mecanismelor rezolvată pe baza numerelor de elemente și cuple, așa cum este redată de F. R. E. Crossley [1] și R. de Jonge [10] și aceeași problemă rezolvată pe baza numerelor de contururi independente și cuple așa cum este expusă de Chr. Pelecudi [28], [29]. Totodată se va face legătura cu determinarea schemelor cinematice pe baza asamblării grupelor assurice așa cum este utilizată de N. I. Manolescu [2], [3]. Sinteza structurală este extinsă, de asemenea, la lanțurile cinematice spațiale de diferite familii.

Importanța contururilor deformabile pentru sinteza și analiza structurală a lanțurilor cinematice este subliniată și întrebuințată de Chr. Pelecudi [28], [29], N. I. Manolescu [2], [3], R. de Jonge [10]. Ea este de asemenea bine cunoscută în analiza și sinteza cinematică a deplasărilor vitezelor sau a acceleraţiilor [30], [31].

Cele două metode, denumite în prezenta lucrare *metoda elementelor* (metoda barelor) și *metoda contururilor* (independente), împreună cu procedeele de creerea noilor tipuri de lanțuri prin adăugarea succesivă a barelor sau a grupelor de bare la lanțuri prestabilite pentru a forma lanțuri cinematice mai complexe, întrebuințate de L. P. Assur [15], K. Hain [23], N. I. Manolescu [2], [3] și alții, se completează și se controlează reciproc în problema determinării tuturor tipurilor de lanțuri cinematice. Se pare însă că metoda contururilor, atît în sinteza structurală cît și în analiza cinematică a deplasărilor, a vitezelor și a acceleraţiilor, utilizează mai puține necunoscute.

Ultimele procedee de creerea lanțurilor cinematice pot fi cuprinse sub numele comun de *metoda conexiunilor* (legării). Ele se bazează pe faptul că gradul de mobilitate este o funcție liniară de mărimile caracteristice componente ale lanțurilor cinematice. Astfel ansamblul X al lanțurilor cinematice de diferite grade de mobilitate M este infinit. Se poate considera o poziție a acestui ansamblu prin subansamblele distincte A_0, $A_1 \ldots A_M \subset X$ (semn de cuprindere), caracterizate în parte printr-un anumit grad de mobilitate

$$A_M \neq \Phi \qquad \Phi \text{ (ansamblul vid)}, \; M = 0, 1, 2, \tag{1}$$

$$A_{M_i} \cap A_{M_j} = \Phi \qquad \cap \text{ (semn de intersecție)}, \; M_i \neq M_j, \tag{2}$$

$$\bigcup_M A_M = X \qquad \cup \text{ (semn de reuniune)}. \tag{3}$$

Două lanțuri cinematice $\bar{c}_M$ și $\bar{\bar{c}}_M$ din același subansamblu A_M sînt echivalente în baza faptului că au același grad de mobilitate. Ansamblul A_M formează o clasă de echivalență în raport cu lanțul

$$A_M = \{c/c \in X, \; c \equiv c_M\}, \tag{4}$$

cuprinzînd toate lanțurile c ale ansamblului X care are același grad de mobilitate cu lanțul c_M.

Prin această partiție în subansambluri distincte, gradul de mobilitate este o funcție aditivă a ansamblului X. Reuniunea a două lanțuri din subansambluri distincte c_{M_i} și c_{M_j} cu alte cuvinte cu elemente și cuple distincte, conduce la suma gradelor de mobilitate

$$c_{M_i} \cup c_{M_j} = c_{M_r},\ M_i + M_j = M_r. \tag{5}$$

Mai mult, aceleași operații se pot extinde și în interiorul aceluiași subansamblu A_M, dacă se leagă între ele lanțuri cinematice care au cuple și elemente distincte.

În scopul ca la o astfel de transformare a lanțurilor cinematice (reuniune) gradul de mobilitate să rămînă invariant este necesar ca $M_j = 0$, adică lanțul adăugat să fie din subansamblul A_0 (grupe assurice).

Lanțurile cinematice ale acestui subansamblu au gradul de mobilitate nul astfel că dacă li se fixează un element se transformă în *construcții rigide*, cu unul, două sau trei contururi și așa mai departe (fig. 1).

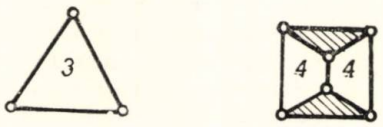


Fig. 1

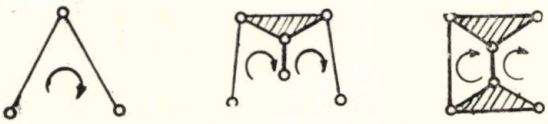


Fig. 2

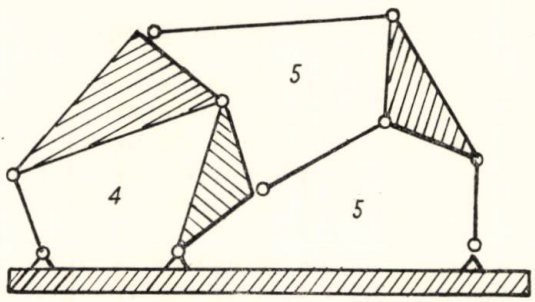


Fig. 3

Din acestea se deduc *grupele assurice* (structurale, cinematice), ca de pildă diada, triada, tetrada etc. (fig. 2) prin eliminarea elementului considerat ca fix, adică se obțin lanțuri cinematice deschise ce pot fi legate la alte mecanisme fără a modifica gradul de mobilitate, dar creindu-se în acest fel mecanisme mai complicate (fig. 3) (L. P. Assur).

Dacă însă ansamblul X nu se împarte în subansambluri distincte, intersecţia a două astfel de subansambluri conduce la un alt subansamblu, adică nu este vidă

$$A_{M_i} \cap A_{M_j} = A_{M_k}. \tag{6}$$

De aici urmează că reuniunea a două lanţuri din astfel de subansambluri, cu alte cuvinte care au *unele elemente şi cuple comune*, conduce la gradul de mobilitate:

$$\left.\begin{aligned} c_{M_i} \cup c_{M_j} &= c_{M_r}, \\ c_{M_i} \cap c_{M_j} &= c_{M_k}, \end{aligned}\right\} \quad M_i + M_j - M_k = M_r, \tag{7}$$

care reprezintă însumarea gradelor de mobilitate a lanţurilor reunite şi scăderea gradului de mobilitate al lanţului comun de legătură. Unele mecanisme au fost astfel calculate de N. Manafu [32] şi alţii.

Subansamblurile distincte A_M pot fi de asemenea prelungite pentru gradele de staticitate ($M < 0$) şi pot fi încadrate în diferite familii de constrîngere φ spaţiale A^{φ}_{M}. Structura lanţurilor cinematice poate include părţi supraconstrînse compensate prin părţi de mobilitate superioară sau grupe de diferite familii care modifică gradul total de mobilitate. De aceeaşi natură sînt şi grupele de lanţuri cu grad „parţial" sau „total" de mobilitate sau cu constrîngeri pasive sau libertăţi inutile. Aceste caracteristici apar în special la mecanisme (lanţuri cinematice cu element fix) şi la motomecanisme (mecanisme cu element conducător) N. I. Manolescu.

Întabelarea schemelor grafice ale diferitelor lanţuri cinematice este importantă atît pentru indicarea posibilităţii construcţiilor structurale cît şi pentru evidenţierea directă a diferitelor grupe din ansamblul lanţurilor cinematice. Se poate considera deocamdată suficientă întabelarea schemelor de la gradul de staticitate -2 la gradul de mobilitate $+2$ ca şi indicarea mobilităţilor respective în raport cu familiile de constrîngere 0—4.

Metodele elementelor şi contururilor vor fi extinse de asemenea în prezenta lucrare la lanţurile spaţiale de diferite familii, urmărindu-se determinarea numerică şi structurală a lanţurilor din subansamblele A^{φ}_{M}. În fiecare subansamblu lanţurile cinematice pot fi divizate în corespondenţă cu numărul elementelor, cu numărul contururilor şi cu numărul cuplelor.

Sinteza lanţurilor cinematice începe de la legarea elementelor rigide între ele cu păstrarea unor mişcări relative permise de cuplele de legătură. Astfel există [10], [29] „dubleta", două elemente legate între ele printr-o cuplă, „tripleta", adică trei elemente legate între ele prin două cuple, „cvadrupleta", respectiv patru elemente legate prin trei cuple ş.a.m.d. Corpurile cuprinse într-o astfel de ramură n-pleta, pot fi binare, ternare, cvatrenare etc. sau cu alte cuvinte de clasa a II, a III, a IV etc., după cum au două, trei sau patru legături simple cu alte corpuri. În cazul elementelor de clase superioare, n-pleta se ramifică şi poate forma contururi, circuite închise sau deschise, care şi ele pot

fi ternare, cvatrenare etc., adică de clasele a III, a IV sau mai mari. În felul acesta se formează lanțurile cinematice complexe și totodată sînt conduse și calculele de analiză cinematică sau dinamică pentru acele lanțuri care au mișcări definite (motomecanisme).

În determinarea caracteristicilor structurale ale lanțurilor cinematice se întrebuințează relații relative la numărul și felul cuplelor, a elementelor și a contururilor. Vom nota:

n_i — numărul elementelor de clasa i,
$n = m + 1$ — numărul total al elementelor,
$m = n - 1$ — numărul total al elementelor mobile, adică mai puțin elementul considerat fix,
N_i — numărul contururilor de clasa i,
N — numărul total al contururilor independente (considerate interioare),
$N + 1$ — numărul total al contururilor, inclusiv conturul exterior, considerat neindependent deoarece cuprinde contururi interioare independente,
c — numărul total al cuplelor,
c_k — numărul cuplelor de ordinul k respectiv care impun k legături,
Σf — suma libertăților tuturor cuplelor, astfel încît pentru o cuplă avem $f + k = 6$.

Dacă se exprimă formulele pe baza *criteriului legăturilor* (literatura rusă, română etc.) mai avem:

L_φ — gradul de libertate al lanțului cinematic de familia φ, care are deja φ legături inițiale comune, generale,
M_φ — gradul de mobilitate al mecanismului de familia φ adică a lanțului cinematic în care unul din elemente este fix,

$$L_\varphi = (6 - \varphi)n - (5 - \varphi)c_5 - (4 - \varphi)c_4 - \dots \tag{8}$$

$$M_\varphi = (6 - \varphi)m - (5 - \varphi)c_5 - (4 - \varphi)c_4 - \dots \tag{9}$$

$$\varphi + L_\varphi = 6 + M_\varphi. \tag{10}$$

Dar [28], [29] se cunoaște

$$N = c - n + 1 = c - m \tag{11}$$

și deci

$$L_\varphi = L_0 + \varphi(N - 1), \tag{12}$$

$$M_\varphi = M_0 + \varphi N. \tag{13}$$

Se poate remarca faptul că pentru schemele cinematice cu un singur contur independent, ca de exemplu mecanismul patrulater, gradul de libertate este același pentru orice familie, dar gradul de mobilitate diferă de ordinul familiei, adică la $N = 1$ avem $L_\varphi = L_0$ dar $M_\varphi = M_0 + \varphi$. Diferențele sînt mai evidente pentru lanțurile cinematice cu mai multe contururi.

Dacă se exprimă formulele pe baza *criteriului mobilităţilor* (literatura germană şi americană), avem :

L_b — gradul de libertate al lanţului cinematic de familia b, care are b mobilităţi independente iniţiale (generale-comune),

M_b — gradul de mobilitate al mecanismului de familia b.

Se obţine [28], [29] :

$$\Sigma f = L_b + b(N - 1), \tag{14}$$

$$\Sigma f = M_b + bN, \tag{15}$$

$$L_b = M_b + b, \tag{16}$$

iar între mobilitatea b şi constrîngerea φ a aceleiaşi familii există relaţia $b + \varphi = 6$.

În prezenta lucrare nu se cuprind lanţurile cu cuple multiple, deoarece se obţin simplu din acelea care au numai legături simple. O cuplă multiplă de ordinul p reprezintă legăturile suprapuse în acelaşi punct geometric între $(1+p)$ elemente, ceea ce o face echivalentă cu p cuple simple confundate. Ea se obţine în cazul cînd distanţele între cuplele simple ale unui multielement devin zero.

Pe de altă parte această sinteză se referă numai la *lanţurile fundamentale*, care au cuple numai de clasa a cincea, elicoidale, prismatice sau de revoluţie. *Lanţurile generale* care au cuple de diverse clase, se pot obţine sau se pot transforma în lanţuri fundamentale din aceeaşi familie. Pentru aceasta trebuie determinat lanţul de m elemente şi c cuple elicoidale [29] echivalent din punct de vedere al mobilităţii cu o cuplă de clasa k din lanţul de familie φ. Păstrarea mobilităţii conduce la

$$M_\varphi = -(k - \varphi) = (6 - \varphi)\, m - (5 - \varphi)\, c \tag{17}$$

sau

$$m = (5 - \varphi)\, N - (k - \varphi) = 5N - k - \varphi\,(N-1), \tag{18}$$

$$c = (6-\varphi)\, N - (k - \varphi) = 6N - k - \varphi\,(N-1). \tag{19}$$

Soluţia cea mai simplă se obţine dacă lanţul care înlocuieşte cupla de clasa k este simplu deschis ($N = 1$). Această soluţie $c = m+1$ este importantă şi prin faptul că înlocuirea nu depinde de familia φ, adică $m = 5-k$ şi $c = 6-k$ [29]. Invers, într-un mecanism spaţial prin înlocuirea a c cuple elicoidale succesive cu o cuplă de clasa $k = 6-c$ se elimină $c-1 = m$ elemente, iar gradul de mobilitate se păstrează (Grübler, Harrisberger).

De asemenea lucrarea nu se referă la lanţurile cu elemente încrucişate ci numai la lanţurile cu *scheme planare*. F. Wittenbauer [16] şi de R. de Jonge [10] au obţinut astfel de lanţuri cinematice prin modificarea celor planare.

În considerentele expuse mai sus relaţiile de calcul sînt :

$$m + N = c, \tag{20}$$

$$M_\varphi = (6 - \varphi)\, m - (5 - \varphi)\, c = M_0 + \varphi N \tag{21}$$

sau

$$m = M_\varphi + (5 - \varphi)\, N = M_0 + 5N, \tag{22}$$

$$c = M_\varphi + (6 - \varphi)\, N = M_0 + 6N. \tag{23}$$

Fiind date două dintre mărimile m, c, N cea de a treia este bine determinată (tabela 4), dar lanțurile cinematice construite cu aceste valori au gradele de mobilitate diferite în raport cu familia din care fac parte (tabele 5, 6, 7).

Tabela 4

Cuple c

n \ N	2	3	4
5	6	7	8
6	7	8	9
7	8	9	10
8	9	10	11
9	10	11	12
10	11	12	13
11	12	13	14
12	13	14	15

Tabela 5

$N = 2$

$n(m)$	x	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	min, max, k
5	6	−6	−4	−2	0	2	4−4
6	7	−5	−3	−1	1	3	5−6
7	6	−4	−2	0	2	4	6−7
8	9	−3	−1	1	3	5	6−8
9	10	−2	0	2	4	6	7−9
10	11	−1	1	3	5	7	8−10
11	12	0	2	4	6	8	8−11
12	13	1	3	5	7	9	9−12

Tabela 6

$N = 3$

$n(m)$	c	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	min, max, k
5	7	−11	−8	−5	−2	1	—
6	8	−10	−7	−4	−1	2	4— 4
7	9	− 9	−6	−3	0	3	5— 6
8	10	− 8	−5	−2	1	4	5— 8
9	11	− 7	−4	−1	2	5	6— 9
10	12	− 6	−3	−0	3	6	6—10
11	13	− 5	−2	1	4	7	7—11
12	14	− 4	−1	2	5	8	7—12

Tabela 7

$N = 4$

$n(m)$	c	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	min, max, k
5	8	−16	−12	−8	−4	0	—
6	9	−15	−11	−7	−3	1	—
7	10	−14	−10	−6	−2	2	4—4
8	11	−13	− 9	−5	−1	3	5—6
9	12	−12	− 8	−4	0	4	5—8
10	13	−11	− 7	−3	1	5	6—10
11	14	−10	− 6	−2	2	6	6—11
12	15	− 9	− 5	−1	3	7	7—12

În *metoda elementelor* (barelor) se utilizează următoarele relații:

$$m + 1 = n_2 + n_3 + \ldots + n_i, \tag{24}$$

$$2c = 2n_2 + 3n_3 + \ldots + in_i, \tag{25}$$

$$2(N-1) = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (i-2)\ n_i. \tag{26}$$

În *metoda contururilor* (independente) relațiile sînt absolut la fel:

$$N + 1 = N_2 + N_3 + \ldots + N_j, \tag{27}$$

$$2c = 2N_2 + 3N_3 + \ldots + jN_j, \tag{28}$$

$$2(m-1) = N_3 + 2N_4 + \ldots + (j-2)\,N_j. \tag{29}$$

Pentru ambele metode soluțiile ecuațiilor sînt asemănătoare, structura lor fiind independentă de familia φ a lanțului spațial. Soluțiile lor se obțin pe baza proprietăților enumerate de F. R. E. Crossley [1] sau R. de Jonge [10] și extinse pentru ambele metode [28], [29].

Desigur sînt însă și unele particularități impuse în special de posibilitățile de construcție a lanțurilor cinematice. De pildă în tabelele 5, 6 și 7 au fost reținute în general lanțurile cinematice și construcțiile rigide de diverse familii cu gradele de mobilitate sau de staticitate cuprinse între $+2$ și -2. Tabelele de structură numerică 8, 9*a*, *b*, *c*, sînt redate în funcție de numărul de elemente n și de numărul de contururi N, ale căror valori uzuale și interesante sînt $n = 5-12$ și $N = 2-4$.

În aceste ipoteze se remarcă faptul că nu există lanțuri cinematice fără elemente binare, numărul lor fiind limitat inferior. Numai construcțiile rigide de familia a patra, scheme plane cu cuple de translație și gradul de mobilitate negativ, pot să nu cuprindă elemente binare. În schimb, în orice lanț cinematic, din motive constructive, nu pot exista contururi de clasa a doua. De asemenea contururile de clasa a treia reprezintă în general construcții rigide și sînt eliminate din tabelele lanțurilor cinematice. Ele pot aparține schemelor de familia a patra, redate de Chr. Pelecudi [28], [29], dar acestea nu au o utilizare largă. Deci soluțiile din metoda contururilor vor diferi de cele din metoda elementelor prin faptul că vom considera $N_2 = N_3 = 0$, pe cînd n_2 și n_3 pot diferi de zero.

Soluțiile în *metoda elementelor* [1], [10], [28], [29] se obțin după regulile:

— numărul total al elementelor de clase impare trebuie să fie par,

— numărul total al contururilor nu este influențat de numărul elementelor binare,

— pentru aceleași $n(m)$ și N, adică același c și M_φ soluțiile se obțin unele din altele prin aplicarea repetată a operatorilor numerici $\pm(1, -2, 1)$ sau $\pm(1, -1, -1, 1)$,

— pentru același $N' = N$ dar $n' = n+1$ deci $c' = c+1$ și $M'_\varphi = M_\varphi + 1$ se adaugă un singur element binar $n'_2 = n_2 + 1$ păstrînd aceleași soluții pentru $n_3, n_4, \ldots, n_i$,

— pentru același $n' = n$ dar $N' = N + 1$ deci $c' = c + 1$ și $M'_\varphi = M_\varphi + (\varphi - 5)$ se aplică operatorii $(-2, 2)$ sau $(-1, 0, 1)$ o singură dată,

— pentru $n' = n + 1$ și $N' = N - 1$, deci $c' = c$ și $M'_\varphi = M_\varphi + (6 - \varphi)$, se adaugă un element binar și se aplică operatorul (1, 0, −1) o singură dată.

Tabela 8 cuprinde soluțiile numerice pentru metoda elementelor.

Tabela 8

n \ N	2	3			4						
5	3	1	2	3	—	0	1	1	2	2	3
6	4	2	3	4	0	1	2	2	3	3	4
7	5	3	4	5	1	2	3	3	4	4	5
8	6	4	5	6	2	3	4	4	5	5	6
9	7	5	6	7	3	4	5	5	6	6	7
10	8	6	7	8	4	5	6	6	7	7	8
11	9	7	8	9	5	6	7	7	8	8	9
12	10	8	9	10	6	7	8	8	9	9	10
n_3	2	4	2	0	6	4	2	3	0	1	0
n_4	—	0	1	2	0	1	2	0	3	1	0
n_5	—	—	—	—	0	0	0	1	0	1	2

Soluțiile pentru *metoda contururilor* [28], [29] pot fi obținute astfel:

— numărul total al contururilor de clase impare trebuie să fie par,

— pentru același n (m) și N adică același c și M_φ soluțiile se obțin unele din altele prin aplicarea repetată a operatorilor numerici $\pm$ (1, −2, 1) și $\pm$ (1, −1, −1, 1),

— pentru același $N' = N$ dar $n' = n+1$ deci $c' = c+1$ și $M'_\varphi = M_\varphi + 1$ se pot aplica o singură dată unul din operatorii (−2, 2) sau (−1, 0, 1) ceea ce corespunde în a transforma două contururi în alte două contururi, dar de o clasă mai mare cu o unitate sau în transformarea unui contur în alt contur cu două clase mai mare,

— pentru același $n' = n$, dar $N' = N + 1$, deci $c' = c+1$ și $M'_\varphi = M_\varphi - 5 + \varphi$, se adaugă un contur cvaternar și se aplică o singură dată operatorul (2, −2) sau operatorul (1, 0, −1). Deci se pot adăuga trei contururi cvaternare și se scad două contururi de clasa a cincea, sau se adaugă două contururi cvaternare și se scade un contur de clasa a șasea,

— pentru $n' = n - 1$ și $N' = N + 1$, adică același $c' = c$, dar $M'_\varphi = M_\varphi - 6 + \varphi$, se adaugă un contur cvaternar și se aplică o singură dată operatorul (2, 0, −2).

Tabelele 9 *a*, *b*, *c*, cuprind soluțiile numerice prin metoda conturilor.

Tabela 9a

$N = 2$

N \ n	5	6	7	8	9	10	11	12
N_4	3	12	011	00101	000101	00001001	0000001001	000000010001
N_5		20	201	01020	001010	00010100	0000010010	000000100010
N_6		1	120	31001	120010	10100020	0011000100	010001000100
N_7			1	1200	201001	02100100	0100200100	000110002000
N_8				11	11200	21010001	3101000010	102010000100
N_9					11	112000	120010001	200101000010
N_{10}						111	1112000	21100100001
N_{11}							111	11120000
N_{12}								1111

Tabela 9b

$N = 3$

N \ n	6	7	8	9	10	11	12
N_4	4	23	01223	01012122	0001011201212	0000011001120112012	000010000110001112001112
N_5		20	42010	20310201	0120201031020	0101200120102010310	000100112000120100210100
N_6		1	1200	23010010	4201120001001	2031010201001200010	021002010103101000021010
N_7			10	112000	122001000100	2301002011000010001	402101200010100020101010
N_8			1	110	111200000	11221000100001000	212300100100110000001000
N_9				1	11100	111120000000	111221000010000000100
N_{10}					11	1111000	111111200000000
N_{11}						111	11111100
N_{12}							1

Tabela 9c

$N = 4$

N \ n	7	8	9	10	11	12
N_4	5	34	12334	0121232334	01011201223123233	000110011122011223012231232 3
N_5		20	42010	4203102010	20312042010310201	012012310200321010420103102 0
N_6		1	1200	1230100100	34120101200010010	531202013001102100012000100 1
N_7			10	1120000	112200010001000	122301100200101000001000100
N_8			1	1100	11112000000	111121200010000001000 00
N_9				10	111000	11111200000000000
N_{10}				1	110	10111000000
N_{11}					1	111000
N_{12}						11

Limitarea soluţiilor. Numărul soluţiilor ecuaţiilor (24)—(26) şi (27)—(29) pentru necunoscutele $n_2, n_3, \ldots$ sau $N_4, N_5, \ldots$ este infinit, dar el se restrînge căpătînd un caracter finit deoarece soluţiile trebuie să fie întregi şi pozitive, iar numerele elementelor şi contururilor pentru lanţurile uzuale pot fi limitate la $n = 10-12$ şi $N=2-4$.

Numărul minim al elementelor binare se găseşte scăzînd ecuaţiile din (24)—(26) şi considerînd $n_4=n_5 = \ldots = 0$ adică

$$\min n_2 \geqslant n-2\ (N-1) = c - 3\ (N-1) = L_\varphi + (3-\varphi)\,(N-1). \quad (30)$$

Numărul maxim al elementelor ternare se găseşte din (26) presupunînd că lanţul are numai elemente de aceeaşi clasă :

$$\max n_3 \leqslant 2\ (N-1). \quad (31)$$

În acelaşi fel numărul maxim al elementelor de o anumită clasă se obţine din ecuaţiile :

$$\max n_i < \min\left[\frac{2(N-1)}{i-2};\ \frac{2c}{i}\right]. \quad (32)$$

Clasa maximă a elementelor conţinute într-un lanţ cinematic se poate găsi din condiţia ca $\max n_{i\max} = 1$, adică $2(N-1)/i_{\max} - 2 = 2$ sau

$$i_{\max} = 1 + N. \quad (33)$$

Aceeași valoare se obține prin considerația că eliminînd din lanțul închis elementul de clasă maximă, rămîne mai departe un lanț deschis care are :

$$\begin{aligned} &- \text{numărul de elemente } n' = n-1, \\ &- \text{numărul de cuple } c' = c - i_{max}, \\ &- \text{numărul de conture } N' = c' - n' + 1 = N - i_{max} + 1 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Deci $i_{max} \leqslant 1 + N$.

Dacă lanțul este decomposabil (grad de libertate fracționat) clasa maximă a elementelor depășește această valoare. La acestea, prin eliminarea elementului considerat de clasa maximă se obțin P lanțuri [28], [29] separate deschise astfel că se găsește

$$i_{max} \leqslant P + N. \tag{35}$$

În exemplul din figura (10) avem $P = 2$, $N = 4$ și de aceea $i_{max} = 5 < 6$.

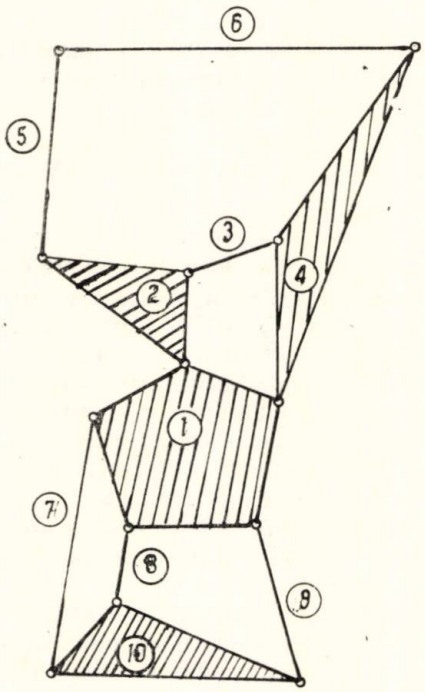


Fig. 10

Conturul exterior poate fi considerat totdeauna de clasa cea mai mare așa cum observă R. de Jonge [10] sau cum este utilizat de Chr. Pelecudi [28], [29]. Considerînd clasa conturului exterior k, valoarea sa minimă se obține luînd

$$k_{min} \geqslant j_{max}, \qquad N_{j\,max} \leqslant N, \tag{36}$$

adică se presupune lanțul cinematic format numai cu contururi de clasa maximă egală cu clasa minimă a conturului exterior. Din ecuațiile (28) sau (29) avem

$$2c = j_{max} N_{max} + k_{min} \tag{37}$$

și deci

$$k_{min} \geqslant \frac{2c}{1+N}. \tag{38}$$

Valoarea maximă a clasei conturului exterior se obține luînd în aceleași ecuații $N_4 = N$, ceea ce revine a considera toate contururile independente interioare ale lanțului de clasa minimă admisă IV, astfel că

$$2c = 4N + k_{max}, \tag{39}$$

obținîndu-se

$$k_{max} \leqslant 2c - 4N. \tag{40}$$

Pe de altă parte, valoarea maximă a clasei conturului exterior mai este limitată de numărul elementelor. În acest caz toate elementele sînt situate pe conturul exterior. Deci

$$k_{max} \leqslant \min\,[n,\ 2c - 4N]. \tag{41}$$

În concordanță cu această formulă valorile minime și maxime ale clasei contururilor exterioare sînt date în tabelele 5, 6 și 7.

Schemele structurale. Urmărind aceleași reguli de la rezolvarea numerică a ecuațiilor (24)—(26) sau (27)—(29) se pot determina toate schemele structurale. Tabelele cu schemele structurale 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22 sînt în concordanță cu soluțiile numerice cuprinse în tabelele 8 și 9. Se respectă numărul și felul elementelor, contururilor sau cuplelor care totodată sînt aranjate în schemele structurale în toate modurile posibile independente. Se pare totuși că cel mai eficace mod de creierea schemelor structurale este acela prin care se introduce cîte un element (și o cuplă) binar de la schemele cu n elemente pentru a se obține schemele cu $(n+1)$ elemente. Introducerea barei se poate face în interiorul schemei sau la periferia schemei pe conturul exterior.

O sistematizare simplă se face după numărul de elemente și cuple interioare $(n-k)$ și $(c-k)$ deoarece acestea pot varia în limite mai strînse. Astfel în tabelele 11 *a*, *b*, cele 47 scheme structurale cu două contururi și 5 pînă la 12 elemente, se pot deduce numai din patru forme de lanțuri interioare cuprinse în tabela 12. Aceste lanțuri interioare care despart cele două contururi deformabile, diferă unul față de celălalt printr-o bară și o cuplă. Deoarece în acest tabel contururile exterior k și interioare x și y sînt nedefinite, clasa lor este trecută sub formă numerică în funcție de numărul de elemente sau cuple. Mai restrîns, în tabela 13 se dă suma $\Sigma_2 = x + y$ claselor celor două conture interioare, astfel că în conformitate cu (28) avem $\Sigma + k = 2c$.

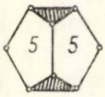
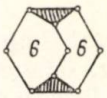
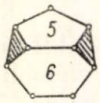
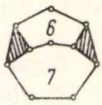
Pentru schemele cu trei contururi, tabela 14 este construită în același fel $\Sigma_3 = x + y + z$. Diferitele soluții ale claselor contururilor sînt redate în tabela 15. Pe liniile sumei Σ_2 sînt date combinațiile soluțiilor pentru două contururi x și z, iar corespunzător coloanei Σ_3 se găsesc soluțiile celui de al treilea contur y. Tabelele 16 *a* și *b* cuprind lanțurile interioare pentru schemele structurale cu trei contururi. Alături de figură sînt indicate valorile minime posibile ale claselor interioare și exterioare, valoarea maximă a contururilor interioare fiind limitată de valoarea conturului exterior, la rîndul său indicat în tabela 14. Schemele structurale ale lanțurilor cu trei contururi construite în concordanță cu tabelele 14, 15, 16 sînt trecute în tabela 17, *a*, *b*, *c*, — seria 40, tabela 18 *a*, *b*, — seria 21, tabela 19 *a* — seria 02. Numerele seriilor corespund numerelor elementelor ternare și cvaternare (tabela 8).

Pentru schemele structurale cu patru conture se redă, în tabela 20, clasa conturului exterior k și suma claselor contururilor interioare Σ_4 în funcție de numărul elementelor (sau cuplelor) și de numărul elementelor interioare (sau cuple interioare). Apoi în tabela 21 în funcție de Σ_3 care are soluțiile date în tabela 15, și de Σ_4, cu valorile din tabela 20, se dau soluțiile celei de-al patrulea contur interior u. Schemele structurale reduse, referitoare numai la lanțurile interioare despățitoare ale celor patru contururi sînt trecute în tabela 22, *a*, *b* ... seria 600, tabela 23 *a*, *b* ... seria 410, tabela 24 *a*, *b* — seria 220, tabela 25 ... seria 301, tabela 26 ... seria 030, tabela 27 ... seria 111, tabela 28 ... seria 002. În aceste tabele numerele seriilor corespund numerelor elementelor de clasa a III, a IV și a V, conform tabelei 8.

În raport cu unele condiții de compatibilitate care impun anumite poziții ale axelor cuplelor și ale lungimilor elementelor, schemele structurale pentru lanțurile cu $N = 2, 3, 4$ contururi pot fi incluse în orice familie φ a lanțurilor spațiale. În funcție de familia φ și de numărul de elemente (sau cuple) se dau în tabelele 5, 6 și 7 gradele de mobilitate respective. Invers, pentru un grad de mobilitate dat, de exemplu $M_2 = +1$, mecanismele din familia a doua trebuie să aibă opt elemente dacă $N = 2$ (tabela 5), 11 elemente dacă $N = 3$ (tabela 6) și peste 12 elemente dacă $N = 4$ (tabela 7). Apoi din tabelele 11, 12 se găsesc toate schemele structurale cu două contururi, iar din tabelele 16, 17, 18 și 19 se obțin toate schemele structurale cu trei contururi.

Metoda conexiunilor (2, 3) este echivalentă metodelor arătate mai sus și desigur livrează aceleași soluții sau verifică soluțiile obținute. De fapt în locul determinării schemelor structurale din subansamblul A_1 trebuie determinate schemele structurale din subansamblul A_0, din care apoi se obțin grupele assurice (fig. 1, 2). În plan ($\varphi = 3$) trecerea de la un lanț al subansamblului A_0 la un lanț al subansamblului A_1 se face, așa cum s-a mai arătat, prin introducerea unei bare în toate modurile posibile cu eliminarea soluțiilor neindependente. În unele lucrări însă nu se determină schemele subansamblului A_0 ci prin diferite mijloace se dezvoltă direct grupele assurice, care apoi sînt asamblate conform principiului de formare al mecanismelor (fig. 3).

Primită la redacție la 4 martie 1969

n/n_2	N = 2 (Grupa 2)				Tabela 11 a
5.3	4				
6.4	5	6			
7.5	6	6 	7		
8.6	6 	7 	7	8	8
9.7	7 	9	9		
	8	8	8		

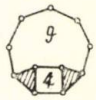
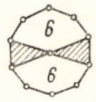
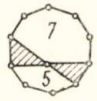
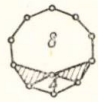
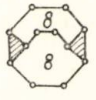
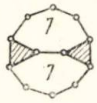
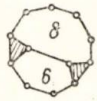
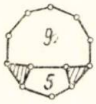
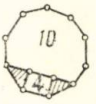
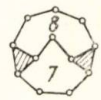
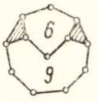
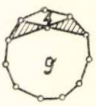
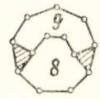
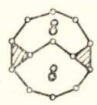
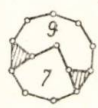
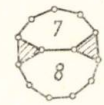
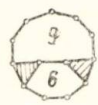
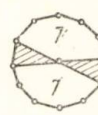
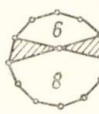
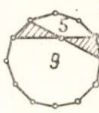
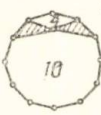
n/n_2	$N=2$ (Grupa 2)				Tabela 11b
10.8					
					
11.9					
					
12.10					
					
					

Tabela 12

$N = 2$

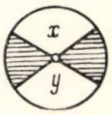
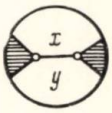
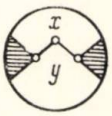
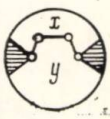
$n-k$		n	5	6	7	8	9	10	11	12
$c-k$		c	6	7	6	9	10	11	12	13
0/1		k		6	7	8	9	10	11	12
		x		4	4	4 5	4 5	4 5 6	4 5 6	4 5 6 7
		y		4	5	6 5	7 6	8 7 6	9 8 7	10 9 8 7
1/2		k	4	5	6	7	8	9	10	11
		x	4	4	4 5	4 5	4 5 6	4 5 6	4 5 6 7	4 5 6 7
		y	4	5	6 5	7 6	8 7 6	9 8 7	10 9 8 7	11 10 9 8
2/3		k				6	7	8	9	11
		x				6	6	6 7	6 7	6 7 8
		y				6	7	8 7	9 8	10 9 8
3/4		k							8	9
		x							8	9
		y							8	9

Tabela 13

$N = 2$

$n-k$ / $c-k$	n / c	5 / 6	6 / 7	7 / 8	8 / 9	9 / 10	10 / 11	11 / 12	12 / 13
0 / 1	k		6	7	8	9	10	11	12
	Σ		8	9	10	11	12	13	14
1 / 2	k	4	5	6	7	8	9	10	11
	Σ	8	9	10	11	12	13	14	15
2 / 3	k				6	7	8	9	10
	Σ				12	13	14	15	16
3 / 4	k							8	9
	Σ							16	17

Tabela 14

$N = 3$

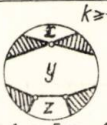
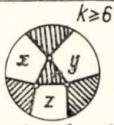
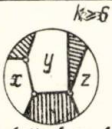
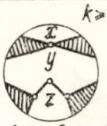
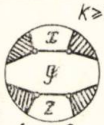
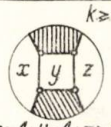
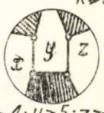
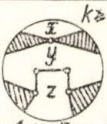
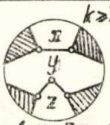
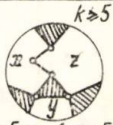
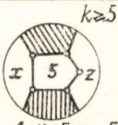
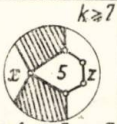
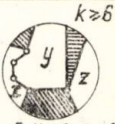
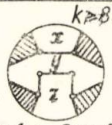
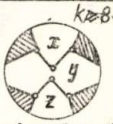
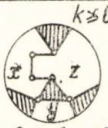
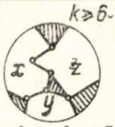
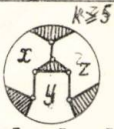
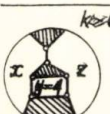
$n-k$ / $c-k$	n / c	6 / 8	7 / 9	8 / 10	9 / 11	10 / 12	11 / 13	12 / 14
0 / 2	k			8	9	10	11	12
	Σ			12	13	14	15	16
1 / 3	k		6	7	8	9	10	11
	Σ		12	13	14	15	16	17
2 / 4	k	4	5	6	7	8	9	10
	Σ	12	13	14	15	16	17	18
3 / 5	k			5	6	7	8	9
	Σ			15	16	17	18	19
4 / 6	k					6	7	8
	Σ					18	19	20
5 / 7	k							7
	Σ							21

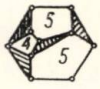
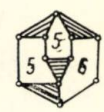
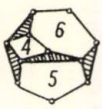
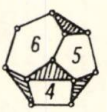
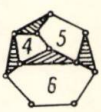
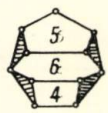
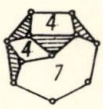
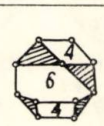
Tabela 15

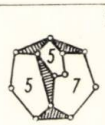
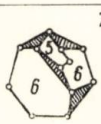
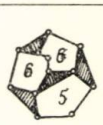
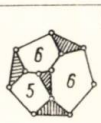
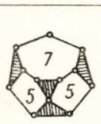
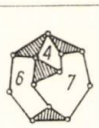
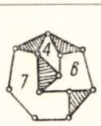
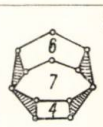
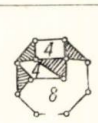
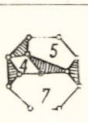
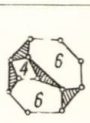
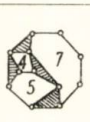
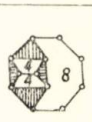
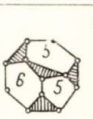
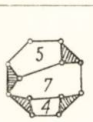
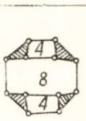
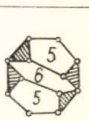
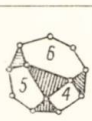
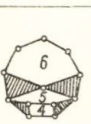
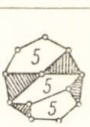
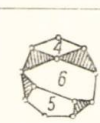
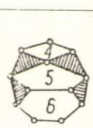
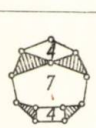
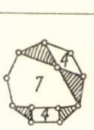
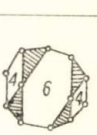
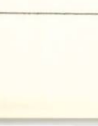
$N = 3$

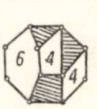
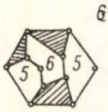
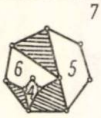
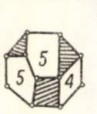
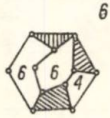
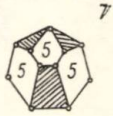
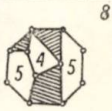
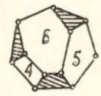
y

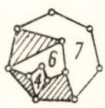
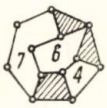
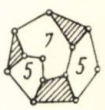
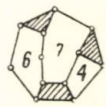
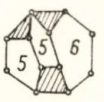
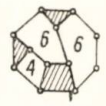
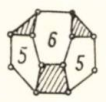
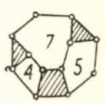
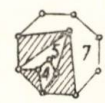
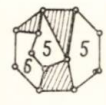
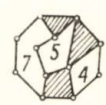
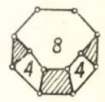
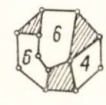
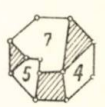
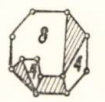
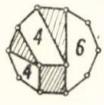
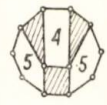
12	4									
13	5	4								
14	6	5	4							
15	7	6	5	4						
16	8	7	6	5	4					
17	9	8	7	6	5	4				
18	10	9	8	7	6	5	4			
19	11	10	9	8	7	6	5	4		
20	12	11	10	9	8	7	6	5	4	
Σ_3	4	45	456	4567	45678	456789	45678910	4567891011	456789101112	x
Σ_2	4	54	654	7654	87654	987654	10987654	1110987654	121110987654	z

n-k/c-k	N = 3				Tabela 16
$\frac{0}{2}$	$k\geq 8$ $x\geq 4; y\geq 4; z\geq 4$		$k\geq 8$ $x\geq 4; y\geq 4; z\geq 4$		
$\frac{1}{3}$	$k\geq 7$  $x\geq 4; y\geq 5; z\geq 4$	$k\geq 6$  $x\geq 4; y\geq 4; z\geq 4$		$k\geq 6$  $x\geq 4; y\geq 4; z\geq 4$	
$\frac{2}{4}$	$k\geq 6$  $x\geq 4; y\geq 6; z\geq 4$	$k\geq 6$  $x\geq 4; y\geq 6; z\geq 4$	$k\geq 4$ $x\geq 4; y\geq 4; z\geq 4$		
	$k\geq 4$  $x\geq 4; y=4; z\geq 4$	$k\geq 6$ $x\geq 4; y=4; z\geq 6$		$k\geq 5$ $x\geq 4; y\geq 5; z\geq 4$	$k\geq 5$  $x\geq 4; y\geq 5; z\geq 4$
$\frac{3}{5}$	$k\geq 7$  $x\geq 4; y\geq 7; z\geq 5$	$k\geq 7$  $x\geq 4; y\geq 7; z\geq 4$	$k\geq 5$  $x\geq 5; y\geq 4; z\geq 5$	$k\geq 5$ $x\geq 4; y\geq 5; z\geq 4$	
	$k\geq 5$  $x\geq 4; y=5; z\geq 5$	$k\geq 7$  $x\geq 4; y=5; z\geq 7$	$k\geq 6$  $x\geq 5; y\geq 6; z\geq 4$	$k\geq 6$ $x\geq 4; y\geq 6; z\geq 4$	$k\geq 5$ $x\geq 4; y=4; z\geq 5$
$\frac{4}{6}$	$k\geq 8$ $x\geq 4; y\geq 8; z\geq 6$	$k\geq 8$  $x\geq 4; y\geq 8; z\geq 5$	$k\geq 8$  $x\geq 4; y\geq 8; z\geq 4$		
	$k\geq 6$  $x\geq 6; y\geq 4; z\geq 6$	$k\geq 6$  $x\geq 6; y\geq 4; z\geq 5$	$k\geq 5$  $x\geq 5; y\geq 5; z\geq 5$		
	$k\geq 6$ $x\geq 4; y=6; z\geq 6$	$k\leq 6$ $x\geq 4; y=6; z\geq 4$	$k\geq 8$ $x\geq 4; y=6; z\geq 8$		
	$k\geq 7$ $x\geq 6; y\geq 7; z\geq 4$	$k\geq 7$ $x\geq 5; y\geq 7; z\geq 4$	$k\geq 7$ $x\geq 4; y\geq 7; z\geq 4$	$k\geq 6$  $x\geq 5; y=4; z\geq 6$	$k\geq 5$ $x\geq 5; y=5; z\geq 4$

n/n_2	N = 3 (Grupa 40)				Tabela 17a
6.2					
7.3					
8.4					
					
9.5					
					
					
					

n/n_2	N = 3 (Grupa 40)				Tabela 17b
10.6					
					
					
					
					
					
					
					
					
					
					

n/n_2	N = 3 (Grupa 21)				Tabela 18a
6 3					
7 4					
8 5					
9 6		  		 	

n/n_2	N = 3 (Grupa 21)				Tabela 18b
10 7					
					
					
					
					
					
					

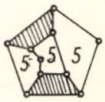
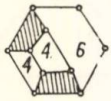
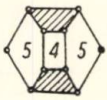
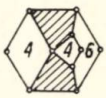
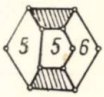
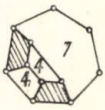
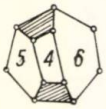
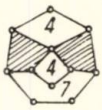
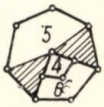
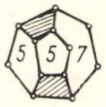
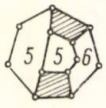
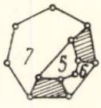
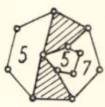
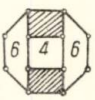
n/n_2	N=3 (Grupa 02)				Tabela 19
6.4					
7 5					
8.6					
9.7					
					
10.8					
					

Tabela 20

$N = 4$

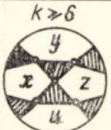
$n-k$ / $c-k$	n / c	7 / 10	8 / 11	9 / 12	10 / 13	11 / 14	12 / 15
0 / 3	k				10	11	12
	Σ				16	17	18
1 / 4	k			8	9	10	11
	Σ			16	17	18	19
2 / 5	k		6	7	8	9	10
	Σ		16	17	18	19	20
3 / 6	k	4	5	6	7	8	9
	Σ	18	17	18	19	20	21
4 / 7	k			5	6	7	8
	Σ			19	20	21	22
5 / 8	k					6	7
	Σ					22	23

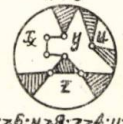
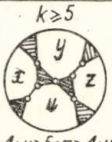
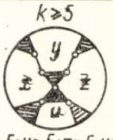
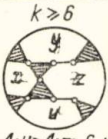
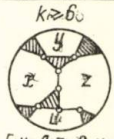
Tabela 21

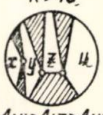
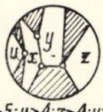
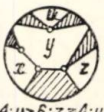
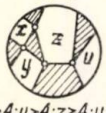
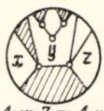
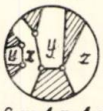
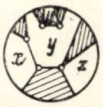
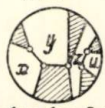
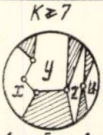
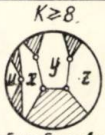
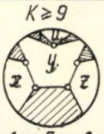
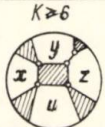
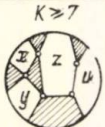
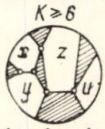
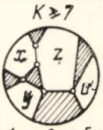
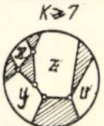
$N = 4$

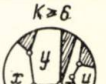
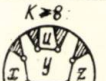
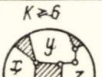
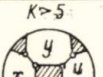
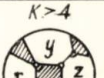
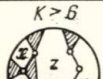
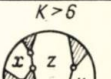
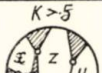
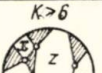
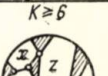
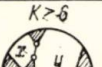
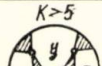
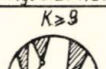
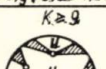
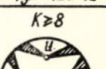
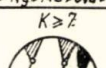
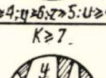
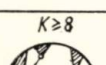
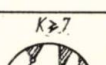
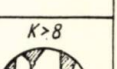
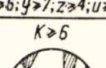
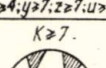
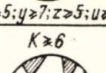
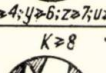
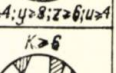
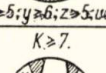
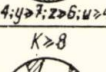
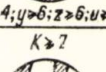
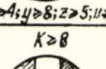
u

Σ_4 / Σ_3							
16	4						
17	5	4					
18	6	5	4				
19	7	6	5	4			
20	8	7	6	5	4		
21	9	8	7	6	5	4	
22	10	9	8	7	6	5	4
	12	13	14	15	16	17	18

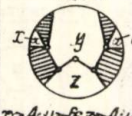
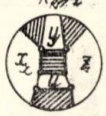
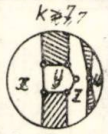
	N = 4	Grupa 600			Tabela 22 a
$\frac{0}{3}$	$k \geq 10$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$				
$\frac{1}{4}$	$k \geq 9$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 10$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 9$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$		
$\frac{2}{5}$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 10$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 6; u \geq 4$	$k > 0$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	
	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	
$\frac{3}{6}$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 9; u \geq 5$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 9$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 6; u \geq 4$
	$k \geq 7$ $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 5; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 7; u \geq 4$
	$k \geq 5$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 5$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 7; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	

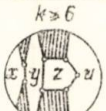
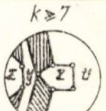
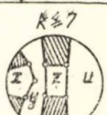
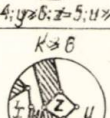
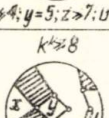
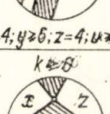
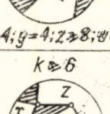
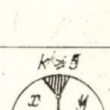
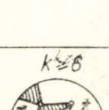
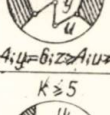
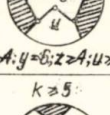
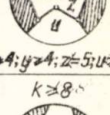
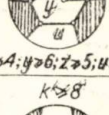
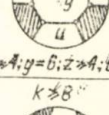
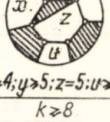
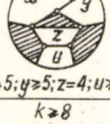
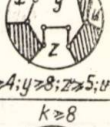
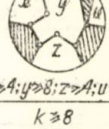
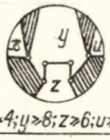
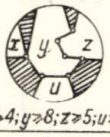
N = 4	Grupa 600	Tabela 22b			
	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 8; u \geq 6$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 8; u \geq 5$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 5$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 8; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 6; u \geq 4$
	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 6; y \geq 6; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 6; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 8; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$
	$k \geq 7$ $x \geq 6; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 6; y \geq 5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 5; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$
$\frac{4}{7}$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 8; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 8; u \geq 4$
	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 5$  $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 5$	$k \geq 5$  $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 5; y \geq 4; z \geq 6; u \geq 4$
	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 4; u \geq 6$				
$\frac{5}{8}$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 6; y \geq 6; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 6; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 5; u \geq 5$	$k \geq 7$ $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 7; u \geq 4$

N = 4	Grupa 410				Tabela 23a
0/3	$K \geq 10$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 14$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$			
1/4	$K \geq 9$  $x \geq 5; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 10$  $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 10$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 9$ $x \geq 5; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$
	$K \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$			
2/5	$K \geq 9$  $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 8$ $x \geq 6; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 8$  $x \geq 6; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 9$  $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$
	$K \geq 9$ $x \geq 6; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 9$ $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 8$  $x \geq 5; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 9$  $x \geq 4; y \geq 7; z \geq 4; u \geq 4$
	$K \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$	$K \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$K \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$	$K \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$

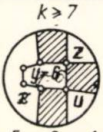
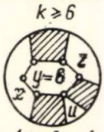
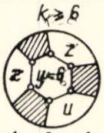
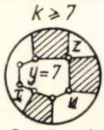
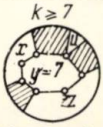
N = 4	Grupa 410				Tabela 23 b
3/6	K≥9 x≥4; y≥8; z≥4; u≥5	K≥8 x≥7; y≥4; z≥4; u≥5	K≥7 x≥7; y≥4; z≥4; u≥4	K≥8 x≥4; y≥8; z≥4; u≥4	K≥6  x≥4; y≥4; z≥6; u≥4
	K≥8 x≥7; y≥5; z≥4; u≥4	K≥8 x≥4; y≥8; z≥4; u≥4	K≥6 x≥4; y≥5; z≥5; u≥4	K≥7 x≥6; y≥5; z≥4; u≥4	K≥8  x≥4; y≥8; z≥4; u≥4
	K≥6  x≥4; y≥5; z≥5; u≥4	K>5  x≥4; y≥5; z≥4; u≥4	K>4  x≥4; y≥4; z≥4; u≥4	K>6  x≥4; y≥4; z≥6; u≥4	K>6  x≥4; y≥4; z≥6; u≥4
	K>5  x≥4; y≥4; z≥5; u≥4	K>6  x≥4; y≥4; z≥6; u≥4	K>6 x≥5; y≥4; z≥5; u≥4	K≥6 x≥6; y≥5; z≥4; u≥4	K≥6  x≥4; y≥5; z≥5; u≥4
	K>7 x≥5; y≥6; z≥4; u≥4	K>6  x≥4; y≥6; z≥4; u≥4	K>7 x≥4; y≥6; z≥5; u≥4	K>5  x≥4; y≥5; z≥4; u=4	K≥4 x≥4; y≥4; z≥4; u=4
	K≥9  x≥4; y≥7; z≥6; u≥4	K≥9  x≥5; y≥8; z≥4; u≥4	K≥7 x≥5; y≥6; z≥4; u≥4	K≥8 x≥4; y≥8; z≥6; u≥4	K≥8  x≥4; y≥8; z≥4; u≥4
	K≥7  x≥4; y≥6; z≥5; u≥4				
4/7	K≥7  x≥6; y≥7; z≥4; u≥4	K≥8  x≥4; y≥7; z≥7; u≥4	K≥7  x≥5; y≥7; z≥5; u≥4	K≥7 x≥4; y≥6; z≥7; u≥4	K>8  x≥4; y≥8; z≥6; u≥4
	K≥6  x≥5; y≥6; z≥5; u≥4	K≥7  x≥4; y≥7; z≥6; u≥4	K≥6  x≥4; y≥6; z≥6; u≥4	K≥8  x≥4; y≥8; z≥5; u≥4	K≥6  x≥4; y≥5; z≥6; u≥4
	K≥7  x≥4; y≥7; z≥6; u≥4	K≥8  x≥5; y≥8; z≥4; u≥4	K≥7  x≥4; y≥4; z≥7; u≥5	K≥8  x≥8; y≥8; z≥4; u≥4	

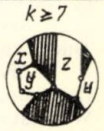
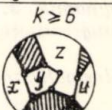
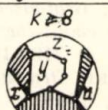
N=4 Grupa 220 Tabela 24a

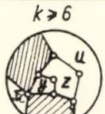
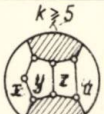
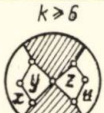
0/3	k≥10 x≥1; y≥1; z≥4; u≥4.				
1/4	k≥9 x≥1; y≥5; z≥1; u≥9.	k≥9 x≥1; y≥5; z≥4; u≥4.			
2/5	k≥7 x≥4; y≥5; z≥1; u≥9	k≥8 x≥4; y≥1; z≥1; u≥6	k≥8 x≥1; y≥4; z≥6; u≥1		
	k≥6 x≥4; y≥4; z≥1; u≥4	k≥8  x≥1; y≥6; z≥1; u≥4	k≥8 x≥1; y≥6; z≥1; u≥4	k≥8 x≥4; y≥6; z≥1; u≥4	
3/6	k≥5 x≥4; y≥1; z≥5; u≥1	k≥5 x≥1; y≥4; z≥5; u≥1	k≥4 x≥1; y≥6; z≥6; u≥4	k≥7 x≥4; y≥7; z≥1; u≥1	k≥8 x≥1; y≥7; z≥1; u≥5
	k≥7 x≥4; y≥7; z≥1; u≥4	k≥7 x≥1; y≥7; z≥4; u≥1	k≥7 x≥1; y≥7; z≥4; u≥4	k≥4  x≥4; y≥4; z≥4; u≥4	
	k≥7 x≥4; y≥5; z=5; u≥5	k≥7  x≥4; y=5; z≥8; u≥1	k≥8 x≥1; y=5; z≥7; u≥4	k≥8 x≥1; y≥1; z=5; u≥7	k≥6 x≥1; y≥6; z=1; u≥1
	k≥7 x≥1; y≥5; z=4; u≥6	k≥7 x≥4; y=4; z≥7; u≥1			

N = 4	Grupa 220				Tabela 24b.
4/7	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \neq 6; u \geq 8$	$k \geq 9$ $x \geq 4; y = 6; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 6; z = 6; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z = 6; u \geq 8$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y = 6; z \geq 8; u \geq 4$
	$k \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 6; z = 5; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y = 5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 5; z = 5; u \geq 7$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y = 5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 7$  $x \geq 4; y \geq 7; z = 4; u \geq 4$
	$k \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 6; z = 4; u \geq 6$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y = 4; z \geq 8; u \geq 4$			
	$k \geq 8$  $x \geq 4; y = 6; z \geq 4; u \geq 5$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y = 6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 5$  $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 5; y \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y = 6; z \geq 4; y \geq 4$
	$k \geq 5$  $x \geq 4; y \geq 5; z = 5; u \geq 4$	$k \geq 5$  $x \geq 5; y \geq 5; z = 4; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; y \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$
	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 5; u \geq 4$
	$k \geq 5$  $x \geq 4; y \geq 4; z = 4; u \geq 5$	$k \geq 5$  $x \geq 5; y \geq 4; z = 5; u \geq 4$			

N = 4	Grupa 301				Tabela 25
$\frac{0}{3}$	$k \geq 10$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$				
$\frac{1}{4}$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$			
$\frac{2}{5}$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 4; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	
$\frac{3}{6}$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 5$ $x \geq 4; y \geq 5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y \geq 8; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y \geq 6; z \geq 6; u \geq 4$
	$k \geq 7$ $x \geq 5; y \geq 6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 5$ $x \geq 4; y \geq 4; z = 4; u \geq 5$	$k \geq 5$ $x \geq 4; y \geq 5; z = 4; u \geq 4$		

N = 4	Grupa 030				Tabela 26
$\frac{1}{4}$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y = 4; z \geq 4; u \geq 4$				
$\frac{2}{5}$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y = 5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y = 5; z \geq 4; u \geq 4$			
$\frac{3}{6}$	$k \geq 7$  $x \geq 5; y = 6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y = 6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y = 6; z \geq 4; u \geq 4$		
$\frac{4}{7}$	$k \geq 7$ $x \geq 6; y = 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$  $x \geq 5; y = 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y = 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$  $x \geq 4; y = 7; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y = 7; z \geq 4; u \geq 4$

Nr = 4	Grupa 111				Tabela 27
2/5	$k \geq 8$ $x \geq 6; y=4; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=4; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y=4; z \geq 5; u \geq 4$		
3/6	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=4; z=4; u \geq 6$	$k \geq 6$ $x \geq 5; y=5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 7; y=5; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 6; y=4; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=5; z \geq 5; u \geq 4$
	$k \geq 5$ $x \geq 4; y=4; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 4; y=5; z \geq 7; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=4; z \geq 6; u \geq 4$		
4/7	$k \geq 6$ $x \geq 6; y=6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=6; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 5$ $x \geq 5; y=5; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 8$ $x \geq 8; y=6; z \geq 4; u \geq 4$	$k \geq 7$  $x \geq 7; y=5; z \geq 4; u \geq 4$
	$k \geq 6$ $x \geq 6; y=4; z \geq 5; u \geq 4$	$k \geq 6$ $x \geq 4; y=6; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 4; y=5; z \geq 6; u \geq 4$	$k \geq 8$  $x \geq 4; y=6; z \geq 8; u \geq 4$	$k \geq 7$ $x \geq 4; y=5; z \geq 7; u \geq 4$
	$k \geq 7$ $x \geq 4; y=4; z \geq 7; u \geq 4$				

N = 4	Grupa 002				Tabela 28
3/6	$k \geq 4$ $x \geq 4; y=4; z=4; u \geq 4$				
4/7	$k \geq 6$  $x \geq 4; y=4; z=6; u \geq 6$	$k \geq 5$  $x \geq 4; y=5; z=4; u \geq 4$	$k \geq 5$ $x \geq 4; y=5; z=5; u \geq 4$	$k \geq 6$  $x \geq 6; y=4; z=4; u \geq 6$	

BIBLIOGRAFIE

1. F. R. E. Crossley, *A contribution to Grübler's Theory in the number synthesis of plane mechanisms*, ASME Trans. J. Eng. Ind. *1*, 1964.
2. N. I. Manolescu, V. Manafu, *Sur la détermination du degré de mobilité de méchanismes*, Bull. Polytech. Inst. Bucharest, *25*, 45, 1963.
3. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *The formation of the characteristic plane linkages mechanisms, with 10 links*, Bull. Polyt. Inst., *18*, 63, 1966.
4. F. R. E. Crossley, *The permutation of kinematic pairs of eight members of less from the graph-theorie view point*, Developments in theoretical and applied mechanics. 1965. Pergamon Press. Oxford, *2*, 1967.
5. K. H. Hunt, *Prismatic pairs in spatial linkages*, J. Mechanisms, *2*, 213, 1967.
6. K. J. Waldron, *A family of overconstrained linkages*, J. Mechanisms, *2*, 201, 1967.
7. F. Freudenstein, *The basic concepts of Polya's Theorem of enumeration with examples from the structural classification of mechanisms*, J. Mechanisms, *2*, 275, 1967.
8. L. Harisberger, A. Soni, *A survey of threedimensional mechanisms with one general constraint*, ASME Paper No. 66, 9th Conf. Mechanisms 1966.
9. H. Boden, *Zur Zwanglauf gemischt räumlich ebener Getriebe*, Maschinenbautechnik. Getriebetechnik, *11*, 612, 1962.
10. A. E. R. Jonge de, *The structure and synthesis of plane kinematic chains*, Ann. N. Y. Acad. Sci. *136*, p. 575, 1967.
11. F. Reuleaux, *Kinematics of Machinery*, Macmilan. London, 1876.
12. P. L. Chebyshev, *Über Parallelogramme*, Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen, *49*, 174, 1870.
13. M. Grübler, *Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten*, Der Civilingenieur, *29*, 167, 1883.
14. F. Grashof, *Theoretische Maschinenlehre*, Leopold Voss Verlag. Hamburg, 1883.
15. L. W. Assur, *Investigation of plane link mechanisms with lower pairs with a view to their structure and classification*, Commun. St. Petersburg, Poly. Instit. *27*, 113, 1918.
16. F. Wittenbauer, *Graphische Dynamik*, J. Springer. Berlin, 1923.
17. K. Kutzbach, *Mechanische Leitungsverzweigung*, Ihre Gesetze und Anwendungen. Maschinenbau, *8*, 710, 1929.
18. I. I. Artobolevski, *Structure, kinematics and kinetostatics of Multilink plane mechanisms*, Moscow, 1939.
19. — *Basis for a uniform classification of mechanisms*, Tech. Sci. Acad-Sci. URSS, *10*, 1939.
20. R. Franke, *Vom Aufbau der Getriebe*, V.D.I. Verlag. Berlin, 1943.
21. O. Bottema, *On Grübler's formulae for mechanisms*, App. Sci. Res. A *2*, 162, 1950.
22. R. S. Macmillan, *The freedom of linkages*, Math. Gazette, *34*, 26, 1950.
23. K. Hain, *Angewandte Getriebelehre*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1961.
24. R. Kraus, *Grundlagen des systematischen Getriebeaufbaus*, Technik Verlag. Berlin, 1952.
25. W. Rössner, *Zur strukturellen Ordnung der Getriebe*, Wissensch. Ztsch. Techn. Univ. Dresden, *10*, 1101, 1961.
26. B. Paul, *A unifield criterion for the degree of constraint of plane kinematic chains*, ASME. J. Appl. Mech. March., 136, 1960.
27. J. Denavit, R. S. Hartenberg, *Systematic mechanism*, Mach. Des. *26*, 167, 1954.
28. CHR. Pelecudi, *The method of contours in numerical and structural synthesis of kinematic chains*, Rev. Appl. Mech. *25*, 173, 1967.
29. — *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
30. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate*, St. Cerc. mec. apl. **XIV**, *1* (1963).
31. — *Metode noi în teoria mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1964.
32. N. Manafu, *Structura și cinematica mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1959.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR PLANE

de A. RAICU
Institutul de petrol, gaze si geologie, București

În lucrare se introduce noțiunea de *variantă structurală de bază* pentru clasa mecanismelor plane caracterizate prin n elemente, C_i cuple inferioare și C_s cuple superioare, fără a ține seama de dispunerea relativă a acestora în lanțul cinematic. În scopul evitării reprezentării grafice, pentru fiecare clasă se adoptă un *simbol numeric* de tipul nC_iC_s. Pe baza acestui simbol, în lucrare este întocmită o tabelă cu variantele de bază pentru n crescător. De asemenea, sînt scoase în evidență și alte clase, ca de exemplu clasa mecanismelor la care $C_i + C_s =$ minim cu importanță practică deosebită.

1. INTRODUCERE

Este știut faptul că din n elemente pot fi formate mai multe mecanisme cu un grad de mobilitate dat, aceasta depinzînd de clasa și numărul cuplelor folosite precum și de modul de dispunere al elementelor și cuplelor în lanțul cinematic. Dacă nu se ține seama de ultima din aceste cerințe adică de modul de dispunere al elementelor și cuplelor în lanțul cinematic și se consideră numai clasa și numărul cuplelor folosite în caracterizarea mecanismelor atunci se obține de fapt o clasă de variante structurale denumite *variante structurale de bază* [5]. Astfel, în cazul mecanismelor plane, variantele structurale de bază se obțin prin schimbarea raportului dat de numărul cuplelor inferioare C_i și numărul cuplelor superioare C_s care intră în structura mecanismelor.

2. SIMBOLUL NUMERIC AL VARIANTELOR STRUCTURALE DE BAZĂ

În această lucrare se face o analiză a variantelor de bază pentru mecanismele plane cu n elemente, C_i cuple inferioare și C_s cuple superioare folosind pentru reprezentarea clasei mecanismelor un *simbol numeric.*

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 28, NR. 6, P. 1457–1465, 1969

Aceasta simplifică şi evită reprezentarea grafică a mecanismelor prin schema structurală sau schema cinematică. Astfel, clasa mecanismelor plane cu n elemente, C_i cuple inferioare şi C_s cuple superioare se reprezintă prin simbolul

$$nC_i\,C_s.$$

Din punct de vedere practic n, C_i şi C_s pot fi cel mult de ordinul zecilor de unităţi. De exemplu, numărul 12.10.03 reprezintă simbolul numeric al clasei mecanismelor (varianta structurală de bază) caracterizată prin aceea că în structura mecanismelor intră 12 elemente, 10 cuple inferioare şi 3 cuple superioare.

3. TABELA VARIANTELOR STRUCTURALE DE BAZĂ

Reprezentarea variantelor structurale de bază prin simboluri numerice permite întocmirea unei tabele sinoptice ale tuturor variantelor de bază pentru mecanisme plane cu orice număr n de elemente.

În tabela 1 este dat începutul unei asemenea tabele care poate fi dezvoltat pentru orice n. Această tabelă se obţine din soluţiile (numere întregi) ecuaţiei cu care se calculează gradul de mobilitate, cunoscută în literatură

$$M = 3\,(n-1) - 2C_i - C_s.$$

Pentru $M = 1$ şi $n = 6$ se obţin soluţiile

C_i	0	1	2	3	4	5	6	7
C_s	14	12	10	8	6	4	2	0

Rezultatele obţinute pentru diverse valori ale lui n sînt trecute concentrat în tabela 1. Pe abscisă se găseşte numărul de elemente n, pe ordonată este numărul de cuple superioare C_s iar în plan, numărul de cuple inferioare C_i. Variantele $nC_i\,C_s$ sînt determinate de numerele abscisă — cîmp — ordonată. Astfel, variantele structurale de bază cu $n = 8$ elemente şi cu gradul de mobilitate $M = 1$ sînt :

08.10.00	08.06.08	08.02.16
08.09.02	08.05.10	08.01.18
08.08.04	08.04.12	08.00.20
08.07.06	08.03.14	

Tabele similare se pot întocmi şi pentru alte valori ale gradului de mobilitate. De exemplu, pentru gradul de mobilitate $M = 2$ corespunde tabela 2.

Tabela 1

C_s	Pentru gradul de mobilitate $M = 1$														
	Numărul de elemente n														
	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
00	01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—	19	—	22
01	—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17	—	20	—
02	00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18	—	21
03	—	01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—	19	—
04		—	02	—	05	—	08 ↓	—	11	—	14	—	17	—	20
05		00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18	—
06			01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—	19
				←											
07			—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17	—
08			00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18
09				01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—
10				—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17
11				00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—
12					01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16
13					—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—
14					00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15
15						01	—	04	—	07	—	10	—	13	—
16						—	02	—	05	—	08	—	11	—	14
17						00	—	03	—	06	—	09	—	12	—
18							01	—	04	—	07	—	10	—	13
19							—	02	—	05	—	08	—	11	—
20							00	—	03	—	06	—	09	—	12
21								01	—	04	—	07	—	10	—
22								—	02	—	05	—	08	—	11
23								00	—	03	—	06	—	09	—
24									01	—	04	—	07	—	10
25									—	02	—	05	—	08	—
26									00	—	03	—	06	—	09
27										01	—	04	—	07	—
28										—	02	—	05	—	08
29										00	—	03	—	06	—
30											01	—	04	—	07
31											—	02	—	05	—
32											00	—	03	—	06
33												01	—	04	—
34												—	02	—	05

Tabela 2

C_s	Pentru gradul de mobilitate $M = 2$														
	Numărul de elemente n														
	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
00	—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17	—	20	—
01	00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18	—	21
02	—	01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—	19	—
03		—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17	—	20
04		00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18	—
05			01	—	04	—	07	—	10	↓ —	13	—	16	—	19
06			—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17	—
					←										
07			00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—	18
08				01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16	—
09				—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—	17
10				00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15	—
11					01	—	04	—	07	—	10	—	13	—	16
12					—	02	—	05	—	08	—	11	—	14	—
13					00	—	03	—	06	—	09	—	12	—	15
14						01	—	04	—	07	—	10	—	13	—
15						—	02	—	05	—	08	—	11	—	14
16						00	—	03	—	06	—	09	—	12	—
17							01	—	04	—	07	—	10	—	13
18							—	02	—	05	—	08	—	11	—
19							00	—	03	—	06	—	09	—	12
20								01	—	04	—	07	—	10	—
21								—	02	—	05	—	08	—	11
22								00	—	03	—	06	—	09	—
23									01	—	04	—	07	—	10
24									—	02	—	05	—	08	—
25									00	—	03	—	06	—	09
26										01	—	04	—	07	—
27										—	02	—	05	—	08
28										00	—	03	—	06	—
29											01	—	04	—	07
30											—	02	—	05	—
31											00	—	03	—	06
32												01	—	04	—
33												—	02	—	05
34												00	—	03	—

4. CLASA MECANISMELOR CU $C_i + C_s = \text{CONST}$

În sinteza structurală a mecanismelor plane s-ar putea pune problema determinării tuturor mecanismelor caracterizate prin aceea că suma cuplelor inferioare și superioare ($C_i + C_s$) este o valoare constantă. Dacă se pleacă de la această condiție atunci se obține clasa mecanismelor cu $C_i + C_s = \text{const}$.

Fără a influența asupra generalității problemei tratate, fie cazul particular $c = C_i + C_s = 9$. În acest caz se obține cu ușurință tabela 3 întocmită astfel ca să fie valabilă pentru mecanisme cu $n = 3 \div 10$ elemente.

Tabela 3

Nr.	Nr. cuplelor		Gradul de mobilitate pentru n elemente							
	C_i	C_s	$n=3$	4	5	6	7	8	9	10
1	9	0	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9
2	8	1	−11	−8	−5	−2	1	4	7	10
3	7	2	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11
4	6	3	− 9	−6	−3	0	3	6	9	12
5	5	4	− 8	−5	−2	1	4	7	10	13
6	4	5	− 7	−4	−1	2	5	8	11	14
7	3	6	− 6	−3	0	3	6	9	12	15
8	2	7	− 5	−2	1	4	7	10	13	16
9	1	8	− 4	−1	2	5	8	11	14	17
10	0	9	− 3	0	3	6	9	12	15	18

Dacă se utilizează același simbol numeric nC_iC_s din această tabelă rezultă mecanismele care au gradul de mobilitate $M = 1$ și anume :

07.08.01 ; 06.05.04 ; 05.02.07.

Se observă de aici că ultimele două variante se pot obține din prima în felul următor :

a) se micșorează numărul elementelor cu 1 ;
b) se micșorează numărul cuplelor inferioare cu 3 ;
c) se mărește numărul cuplelor superioare cu 3.

Observația aceasta poate fi și demonstrată.

Sistemul

$$C_i + C_s = k,$$
$$M = 1 = 3(n-1) - 2C_i - C_s,$$

admite soluțiile

$$C_i = 3n - 4 - k,$$
$$C_s = 2k + 4 - 3n.$$

Pentru mecanismele cu $(n-1)$ elemente adică numărul de elemente este micşorat cu 1 se obţine sistemul

$$C_i + C_s = k,$$

$$M = 1 = 3(n-2) - 2C_i - C_s.$$

Soluţiile acestuia sînt

$$C_i^* = 3n - 7 - k,$$

$$C_s^* = 2k + 7 - 3n.$$

Se observă uşor că

$$C_i = C_i^* + 3,$$

$$C_s = C_s^* - 3.$$

Legea demonstrată este foarte importantă deoarece dacă se dă un mecanism cu un anumit grad de mobilitate se pot obţine toate celelalte variante structurale de bază, cu acelaşi grad de mobilitate şi care diferă între ele numai prin numărul elementelor şi prin raportul $N = C_i/C_s$ menţinîndu-se doar condiţia $C_i + C_s = c = \text{const}$. Astfel, dacă se dă mecanismul 09.05.13 celelalte variante posibile teoretic sînt:

13.17.01; 12.14.04; 11.11.07; 10.08.10; *09.05.13*; 08.02.16.

Mulţimea variantelor structurale de bază cu gradul de mobilitate $M = 1$ pentru valori crescătoare ale numărului de cuple $(c = C_i + C_s)$ şi pentru numărul de elemente n crescător poate fi scrisă sub formă de tabelă (tabela 4). Aceste variante se regăsesc în tabela 1.

Fiecare linie din tabela 4 redă variantele structurale de bază cu un anumit $c = C_i + C_s$.

5. CLASA MECANISMELOR CU $c = C_i + C_s = \text{MINIM}$

Din tabela 4 se deduce uşor o clasă de mecanisme caracterizată prin aceea că numărul cuplelor care intră în compunerea unui mecanism plan cu n elemente este minim. Cu alte cuvinte, aceste variante sînt variante de tip $nc_{\min}$ adică variante la care C_i este maxim. Această clasă de mecanisme este răspunsul la problema: dîndu-se n elemente să se formeze un mecanism astfel ca numărul cuplelor să fie minim.

Importanţa practică a cunoaşterii acestei clase este mare deoarece, aşa cum se ştie, randamentul mecanismelor scade pe măsură ce numărul cuplelor creşte.

Tabela 4

c	Variantele de bază ale mecanismelor
1	02.01.00
2	02.00.02
3	03.02.01
4	03.01.03 ; 04.04.00
5	03.00.05 ; 04.03.02
6	04.02.04 ; 05.05.01
7	04.01.06 ; 05.04.03 ; 06.07.00
8	04.00.08 ; 05.03.05 ; 06.06.02
9	05.02.07 ; 06.05.04 ; 07.08.01
10	05.01.09 ; 06.04.06 ; 07.07.03 ; 08.10.00
11	05.00.11 ; 06.03.08 ; 07.06.05 ; 08.09.02
12	06.02.10 ; 07.05.07 ; 08.08.04 ; 09.11.01
13	06.01.12 ; 07.04.09 ; 08.07.06 ; 09.10.03 ; 10.13.00
14	06.00.14 ; 07.03.11 ; 08.06.08 ; 09.09.05 ; 10.12.02
15	07.02.13 ; 08.05.10 ; 09.08.07 ; 10.11.04 ; 11.14.01
16	07.01.15 ; 08.04.12 ; 09.07.09 ; 10.10.06 ; 11.13.03 ; ...
17	07.00.17 ; 08.03.14 ; 09.06.11 ; 10.09.08 ; 11.12.05 ; ...
18	08.02.16 ; 09.05.13 ; 10.08.10 ; 11.11.07 ; 12.14.04 ; ...
19	08.01.18 ; 09.04.15 ; 10.07.12 ; 11.10.09 ; 12.13.06 ; ...
20	08.00.20 ; 09.03.17 ; 10.06.14 ; 11.09.11 ; 112.12.08 ; ...
21	09.02.19 ; 10.05.16 ; 11.08.13 ; 12.11.10 ; 13.14.07 ; ...
22	09.01.21 ; 10.04.18 ; 11.07.15 ; 12.10.12 ; 13.13.09 ; ...
23	09.00.23 ; 10.03.20 ; 11.06.17 ; 12.09.14 ; 13.12.11 ; ...
24	10.02.22 ; 11.05.19 ; 12.08.16 ; 13.11.13 ; 14.14.10 ; ...
25	10.01.24 ; 11.04.21 ; 12.07.18 ; 13.10.15 ; 14.13.12 ; ...
26	10.00.26 ; 11.03.23 ; 12.06.20 ; 13.09.17 ; 14.12.14 ; ...
27	11.02.25 ; 12.05.22 ; 13.08.19 ; 14.11.16 ; 15.14.13 ; ...
28	11.01.27 ; 12.04.24 ; 13.07.21 ; 14.10.18 ; 15.13.15 ; ...
29	11.00.29 ; 12.03.26 ; 13.06.23 ; 14.09.22 ; 15.12.17 ; ...
30	.....
31	.....

Mulțimea variantelor de tip $nc_{\min}$ pentru gradul de mobilitate $M = 1$ este cuprinsă în tabela 4 și separat în tabela 5 :

Tabela 5

Nr. elementelor	Varianta	Nr. elementelor	Varianta	Nr. elementelor	Varianta
$n = 2$	02.01.00	$n = 6$	06.07.00	$n = 10$	10.13.00
3	03.02.01	7	07.08.01	11	11.14.01
4	04.04.00	8	08.10.00	12	12.16.00
5	05.05.01	9	09.11.01	..	.....

Variantele structurale cuprinse în tabela 5 se regăsesc și în tabela 1 pe linia 2 și pe linia 3.

6. CLASA MECANISMELOR CU $c = C_i$ = MINIM ŞI $C_s = 0$

Dacă se urmăreşte evitarea utilizării cuplelor superioare în construcţia mecanismelor atunci clasa mecanismelor în structura cărora intră numai cuple inferioare în număr minim este dată de linia a 2-a din tabela 1. Sub formă restrînsă această clasă este dată în tabela 6.

Tabela 6

Nr. elementelor	Varianta	Nr. elementelor	Varianta	Nr. elementelor	Varianta
$n = 2$	02.01.00	$n = 6$	06.07.00	$n = 10$	10.13.00
3	—	7	—	11	—
4	04.04.00	8	08.10.00	12	12.16.00
5	—	9	—	...	.....

Se observă uşor din analiza acestei tabele că pentru a forma mecanisme în structura cărora să intre numai cuple inferioare, numărul elementelor trebuie să fie un număr par. Această concluzie este de altfel cunoscută în literatură şi studiul din această lucrare vine să o confirme.

7. CONCLUZII

Utilizarea simbolurilor numerice în reprezentarea variantelor structurale de bază ale mecanismelor simplifică studiul structural şi evită reprezentarea grafică. Se creează astfel unele premise pentru folosirea maşinilor de calcul în sinteza structurală a mecanismelor. Conţinutul acestei lucrări demonstrează avantajul simbolurilor numerice în depistarea unor clase de mecanisme (variante structurale de bază) cu anumite proprietăţi structurale.

De la variantele structurale de bază stabilite se trece apoi la variantele structurale concrete adică la variantele în care se ţine seama şi de dispunerea relativă a cuplelor în lanţul cinematic. Această problemă este tratată în literatura tehnică în mai multe lucrări.

Ideile expuse în această lucrare pot fi extinse şi la mecanismele spaţiale.

Primită la redacţie la 23 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Manolescu, *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice și a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. cerc. mec. apl., **17**, *6* (1964).
2. K. Hain, *Die Analise und Synthese der achtgliedriegen Getriebe*, VDI, Berichte *5* (1955).
3. F. R. E. Crossley, *A Contribution to Grubler's Theory in the Number Sinthesis of Plane Mechanisms*, Journal of Engineering for Industry, Febr. 1964. Trans. of the ASME, series B.
4. W. Lichtenheldt, *Konstruktionlehre der Getriebe*, Akademie Verlag, Berlin, 1961.
5. A. Raicu, *Contribuții la sinteza structurală a mecanismelor spațiale*, St. cerc. mec. apl., **27**, 3 (1968).
6. — *Analiza structurală a mecanismului patrulater spațial*, Comunicare la Ses. șt. IPGG, mai, 1967. Sub tipar la Bul. IPGG.

MECANISME SPAȚIALE TRIPODE

de FL. DUDIȚĂ

Institutul Politehnic, Brașov

În lucrare sînt propuse cîteva mecanisme spațiale tripode noi care împreună cu cele deja existente sînt sistematizate și analizate structural și cinematic. Legea de transmitere a rotației este stabilită, pe mecanisme derivate, pentru trei tipuri de cuplaje tripode.

1. INTRODUCERE

Mecanismele spațiale tripode se utilizează pentru transmiterea mișcării de rotație între arbori necoliniari, deci fac parte din categoria cuplajelor universale. Denumirea de „tripod" subliniază forma geometrică specială a elementelor componente [3], [5]—[7].

În lucrare, pe lîngă analiza și sistematizarea structurală, se stabilesc legile de transmitere pentru trei tipuri fundamentale de mecanisme tripode simple derivate și se evidențiază unele particularități cinematice și dinamice ale mișcării elementului condus la cuplajele tripode simple și ale mișcării elementului intermediar la cuplajele tripode duble.

2. SISTEMATIZARE ȘI ANALIZĂ STRUCTURALĂ

În mulțimea mecanismelor tripode se pot distinge, în funcție de complexitate, mecanisme tripode simple (fig. 1) și mecanisme tripode duble (fig.7). Condiția geometrică realizată în cuplele cinematice ale elementelor tripode poate fi intersecția a două curbe sau drepte (fig. 1*a*), apartenența unui punct la un plan (fig. 1*b*), distanța constantă între două puncte (fig. 1*c*) etc.

Se știe că formula generală a determinării mobilității mecanismelor spațiale este

$$M = 6n - 5c_5 - 4c_4 - 3c_3 - 2c_2 - c_1, \qquad (1)$$

în care s-a notat : M — mobilitatea mecanismului ; c_i — cupla cinematică de clasa i caracterizată prin i legături impuse sau prin $6-i$ mobilități relative ; n — numărul elementelor mobile.

2.1. MECANISME TRIPODE SIMPLE

Caracteristica mecanismelor tripode simple (fig. 1) este prezența în structura lor a două elemente tripode.

Conform formulei (1), observînd că cuplele realizate de elementele tripode sînt pentamobile, rezultă că mecanismele tripode simple din figura 1 *a*, *b* sînt desmodrome ($M = 1$).

Dacă se ține seama de mobilitățile pasive (rotațiile în jurul axelor geometrice proprii) ale elementelor intermediare, rezultă că mecanismul tripod cu bare articulate sferic este de asemenea desmodrom (fig. 1*c*).

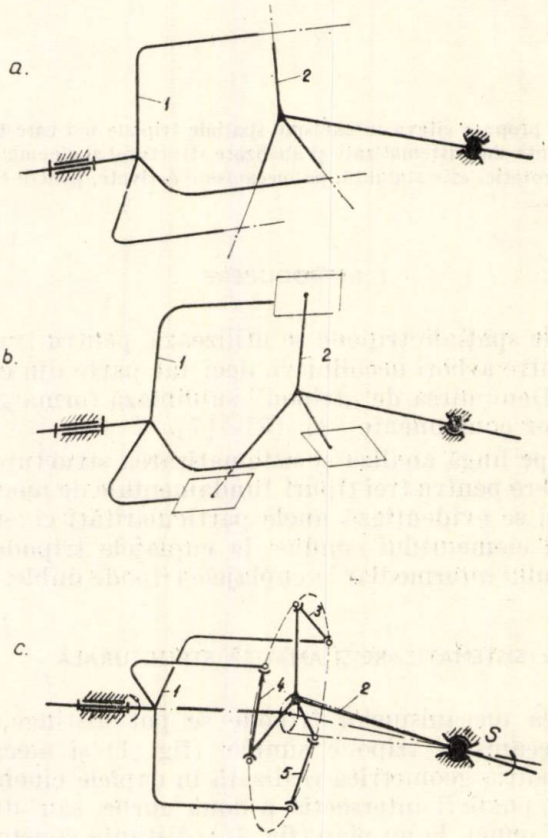


Fig. 1

Mecanismele din figura 1*a*, *b*, prezintă doar importanță teoretică deoarece stau la baza realizării unor variante constructive care se vor analiza în continuare.

În mecanismul tripod din figura 1*a*, legătura geometrică generală realizată este ca două curbe (în particular drepte) să aibă un punct comun.

Pornind de la mecanismul din figura 1*a* se poate concepe mecanismul tripod simplu din figura 2 prin introducerea de perechi de elemente care formează între ele cuple plane, iar cu elementul conducător și condus cuple de rotație. Legătura geometrică realizată în acest fel rămîne neschimbată : intersecția permanentă a două drepte (caz particular fig. 2*a*, caz general fig. 2*b*).

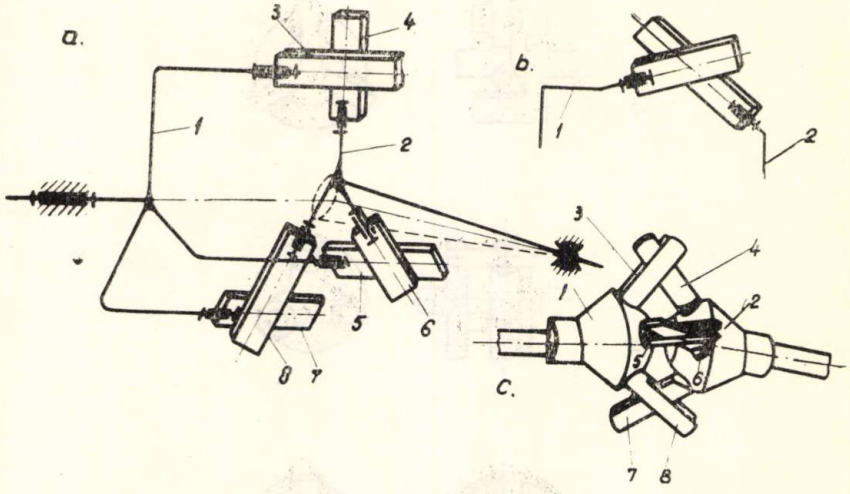


Fig. 2

În figura 2*c* este arătată o posibilitate a realizării constructive a variantei teoretice din figura 2*b*. Lanțurile cinematice 1—3—4—2, 1—5—6—2 și 1—7—8—2 sînt legături cinematice care înlocuiesc cuplele pentamobile. Conform formulei generale (1), mecanismul este desmodrom.

Pornind de la aceeași schemă din figura 1*a*, se poate concepe mecanismul tripod cu galeți sferici a cărui realizare constructivă reiese clar din figura 3. Lanțurile cinematice 1—3—2, 1—4—2 și 1—5—2 sînt legături cinematice care d.p.d.v. structural pot fi considerate cuple cinematice pentamobile, deci noul mecanism este desmodrom (fig. 3).

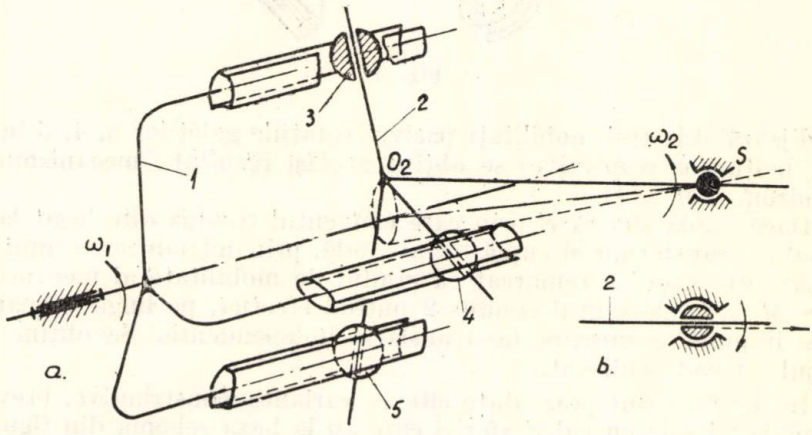


Fig. 3

În ipoteza că galeții 3, 4, 5 (fig. 3) se consideră elemente cinematice ale mecanismului, ținînd seama că elementul 1 formează cu galeții cuple tetramobile (sferă în cilindru), iar galeții cu elementul 2 formează cuple bimobile (cilindrice), dacă se aplică formula generală a mobilității (1) și

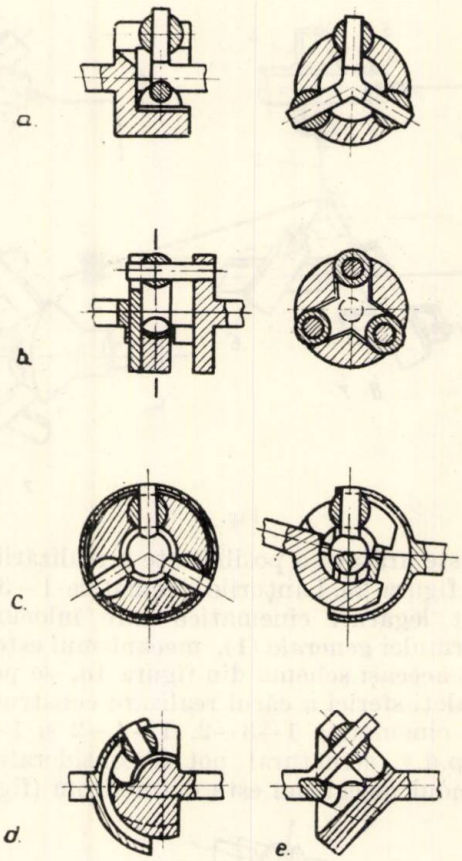


Fig. 4

se neglijează cele trei mobilități pasive (rotațiile galeților 3, 4, 5 în jurul axelor bolțurilor respective) se obține același rezultat : mecanismul este desmodrom ($M = 1$).

Dacă cupla sferică S prin care elementul condus este legat la bază (fig. 3*a*) se transformă în cuplă tetramobilă, prin introducerea unui galet (fig. 3*b*), este ușor de remarcat că gradul de mobilitate al mecanismului devine $M = 2$, elementul condus 2 putînd efectua, pe lîngă mișcarea de rotație impusă, o mișcare de translație independentă. Se obține astfel cuplajul tripod culisant.

În figura 4 sînt prezentate cîteva variante constructive, brevetate, de cuplaje tripode cu galeți sferici care au la baza schema din figura 1 *a* [5], [6].

Pornind de la schema din figura 1*b* , se poate concepe mecanismul tripod din figura 5*a* în care cuplele pentamobile sînt de tipul sferă-plan.

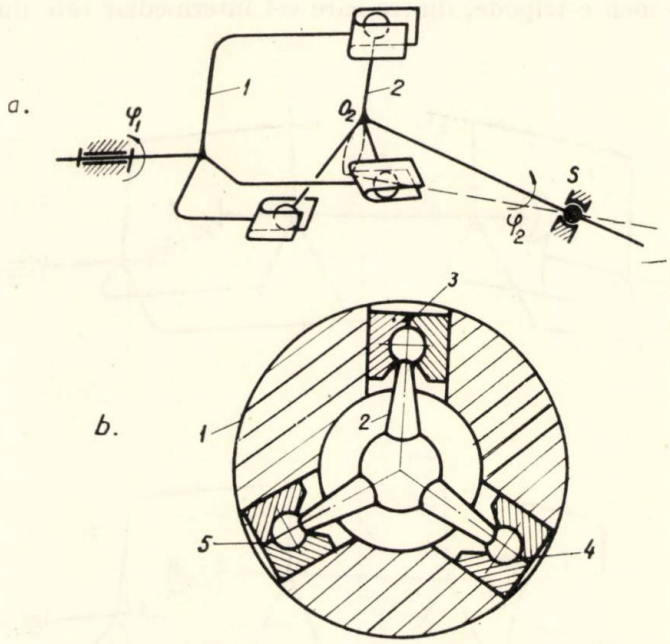


Fig. 5

Un dezavantaj constructiv al mecanismului tripod din fig. 5*a* este existența cuplelor superioare cu contact punctiform. Cuplele inferioare sînt de preferat în mecanismele care transmit forțe deoarece asigură o rezistență comparativ mai mare la presiunea de contact și la uzură. Acest deziderat se poate realiza dacă, fără a schimba mobilitatea relativă și condițiile geometrice de legătură, se înlocuiesc cuplele superioare prin lanțuri cinematice cu cuple inferioare. Astfel, se poate concepe varianta tehnică a mecanismului din figura 5*a* a cărei realizare constructivă reiese clar din figura 5*b*. Legăturile cinematice 1—3—2, 1—4—2 și 1—5—2 realizează aceleași legături geometrice și aceeași mobilitate relativă între elementele 1 și 2 ca și cuplele superioare sferă-plan din figura 5*a* deci noul mecanism este desmodrom. Legăturile cinematice pentamobile din figura 5*b* pot avea rezolvări constructive diferite, ca cele din figura 6*a*, *b* [7].

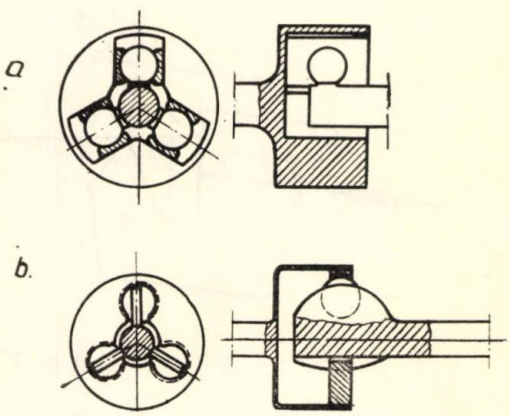


Fig. 6

2.2. MECANISME TRIPODE DUBLE

Caracteristica mecanismelor tripode duble este prezența în structura lor a trei elemente tripode, dintre care cel intermediar este dublu tripod (fig. 7).

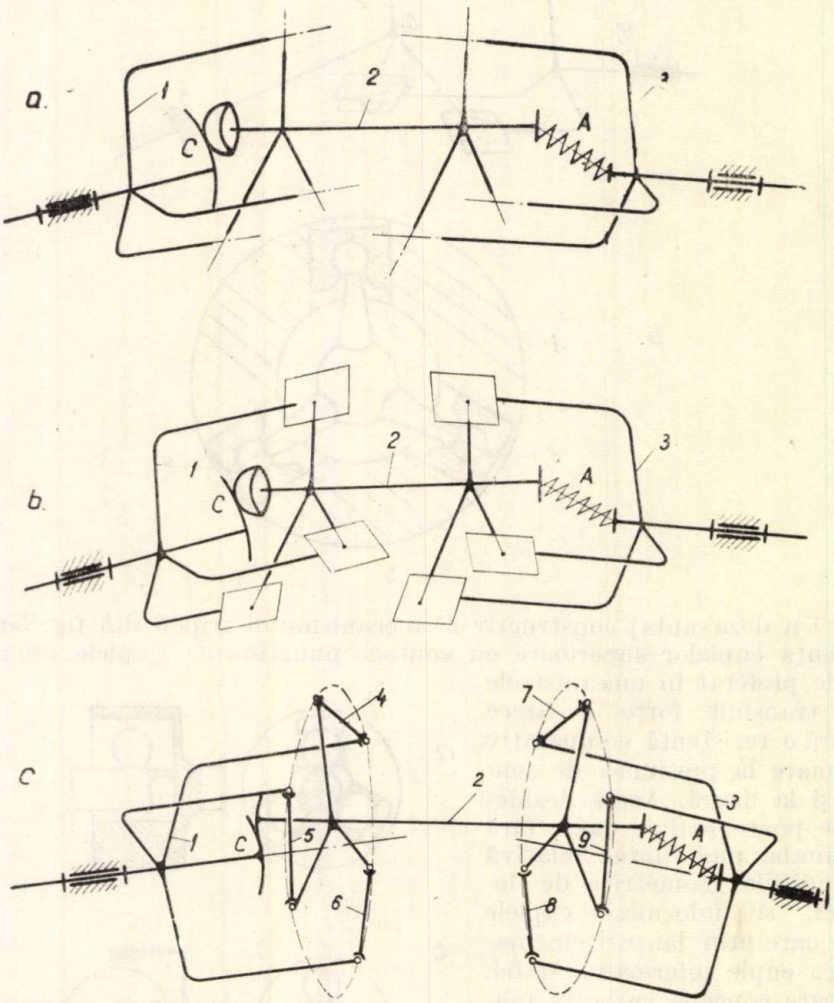


Fig. 7

Mecanismele tripode duble din figura 7 *a*, *b*, *c* au la bază mecanismele tripode simple din figura 1 *a*, *b*, *c*, respectiv. Arcul *A* asigură închiderea cuplei *C* care elimină deplasarea axială a elementului intermediar 2 (fig. 7). Pornind de la mecanismul tripod simplu din figura 3, pe baza schemei mecanismului tripod dublu din figura 7 *a*, se poate concepe mecanismul din figura 8*a* a cărei variantă tehnică, utilizată în transmisia la-

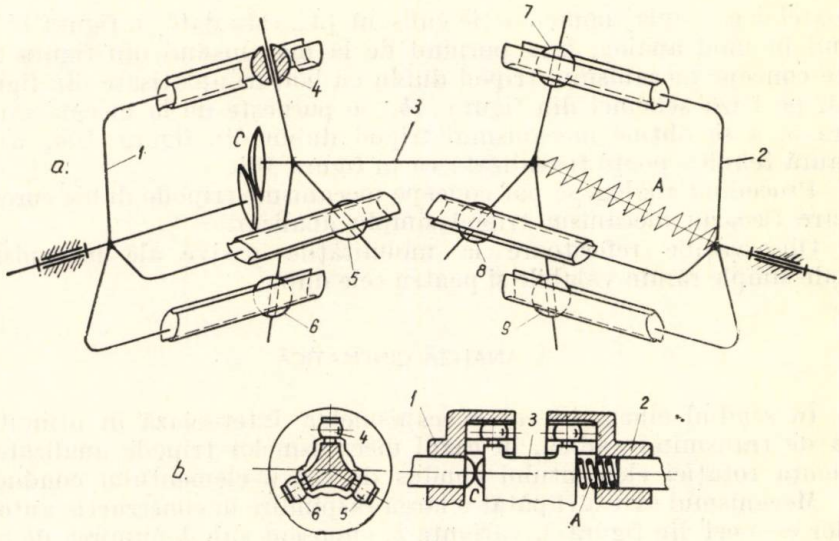


Fig. 8

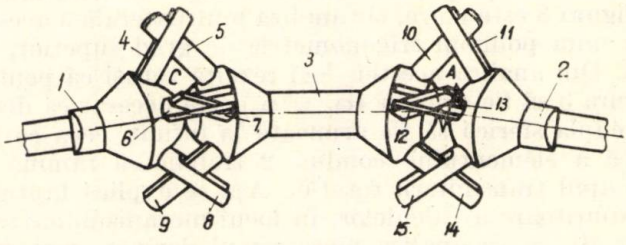


Fig. 9

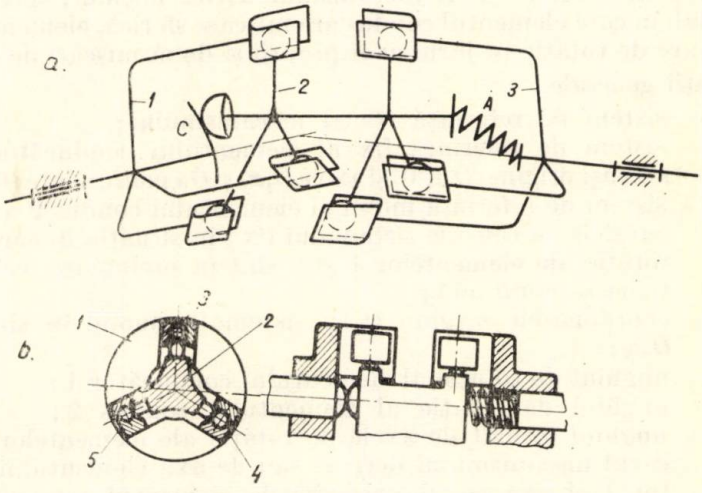


Fig. 10

minoarelor ca cuplaj homocinetic culisant [4], este dată în figura 8*b*. Procedînd în mod analog, însă pornind de la mecanismul din figura 2*c*, se poate concepe mecanismul tripod dublu cu bolțuri aplatisate din figura 9. Dacă, pe baza schemei din figura 7*b*, se pornește de la mecanismul din figura 5, a se obține mecanismul tripod dublu din figura 10*a*, a cărei variantă tehnică poate fi realizată ca în figura 10*b*.

Procedînd analog, se pot concepe mecanisme tripode duble corespunzătoare fiecărui mecanism tripod simplu analizat.

Observațiile referitoare la mobilitățile pasive ale mecanismelor tripode simple rămîn valabile și pentru cele duble.

3. ANALIZĂ CINEMATICĂ

În studiul cinematic al mecanismelor interesează în primul rînd legea de transmitere adică, în cazul mecanismelor tripode analizate, dependența rotației elementului condus de cea a elementului conducător.

Mecanismul care a căpătat o largă răspîndire în construcția autovehiculelor este cel din figura 3, varianta *b*, cunoscut sub denumirea de cuplaj tripod culisant [1], [3].

Volumul de calcule pentru stabilirea legii de transmitere a mecanismului din figura 3 este mare, iar analiza multilaterală a acestei legi, care este de forma unui polinom trigonometric de grad superior, este extrem de anevoioasă. Din analiza acestei legi rezultă totuși că pentru ca mecanismul din figura 3 să fie sincron ($\omega_1 = \omega_2$) este necesar ca distanța $O_2S \to \infty$, deci ca cupla sferică să fie aruncată la infinit, ceea ce înseamnă că axa geometrică a elementului condus 2 trebuie să rămînă paralelă cu ea însăși în timpul transmiterii rotației. Așa se explică faptul că, pentru simplificarea simțitoare a calculelor, în locul mecanismului tripod simplu considerat (fig. 3), se va analiza mecanismul derivat, care se obține din cel dat prin înlăturarea cuplei sferice a elementului condus și introducerea unei diade plane (fig. 11*b*). În mecanismul astfel obținut, spre deosebire de cel inițial, în care elementul condus are mișcare sferică, elementul condus are o mișcare de rotație în jurul axei proprii și două mișcări de translație.

Notații generale

$O\,x\,y\,z$ — sistem de referință fix al mecanismului;

$O_1x_1y_1z_1$ — sistem de referință fix al elementului conducător 1 avînd aceeași origine ($O_1 \equiv 0$) și axele O_1x_1 și Ox confundate ($O_1x_1 \equiv Ox$);

$O_2x_2y_2z_2$ — sistem de referință mobil al elementului condus 2 avînd axele paralele cu cele ale sistemului fix; în situația în care axele de rotație ale elementelor 1 și 2 sînt în prelungire, cele trei sisteme se confundă;

$u,\ v$ — coordonatele originii O_2 a sistemului mobil în sistemul fix $Oxyz$;

φ_1 — unghiul de rotație al elementului conducător 1;

φ_2 — unghiul de rotație al elementului condus 2;

α — unghiul format de axele de rotație ale elementelor 1 și 2 în cazul mecanismului derivat sau de axa elementului conducător 1 și axa conului descris de elementul condus, în cazul mecanismului real.

Relațiile de transformare a coordonatelor pentru sistemele $Oxyz$ și $O_1x_1y_1z_1$ se pot scrie sub una din formele :

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ z_1 &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

sau

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= y_1 \cos \alpha - z_1 \sin \alpha, \\ z &= y_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

iar pentru sistemele $Oxyz$ și $O_2x_2y_2z_2$ aceste relații sînt (fig. 11)

$$\begin{aligned} x &= x_2 + u, \\ y &= y_2, \\ z &= z_2 + v. \end{aligned} \tag{4}$$

3.1. MECANISME TRIPODE CARE AU LA BAZĂ SCHEMA DIN FIGURA 1*a*

Analizînd figura 2 *a* și 3 se deduce că este vorba de aceleași condiții geometrice realizate (fig. 1 *a*) deci aceste mecanisme au aceeași lege de transmitere.

Din diversele variante propuse de mecanisme tripode cu galeți sferici (fig. 4), cele din figura 4 *a*, *b* au utilizare largă în construcția de autovehicule ca cuplaje culisante [3]. Particularitățile constructive și geometrice ale acestui mecanism se desprind din figura 11*a* : axele canelurilor cilindrice ale elementului 1 sînt paralele cu axa sa de rotație, iar axele bolțurilor elementului 2 sînt perpendiculare pe axa sa de rotație. În cazul dat mecanismul derivat este cel reprezentat în figura 11*b*.

Pe lîngă notațiile introduse, în conformitate cu figurile 11, 12 și 13 se va nota cu :

$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ — axele canelurilor cilindrice ale elementului 1 (fig. 11);
r — raza cilindrului ale cărui generatoare sînt axele Δ_{1i} (fig. 12);
$\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$ — axele brațelor elementului condus 2 care se găsesc în planul $x_2O_2z_2$ (fig. 11, 12);
B_1, B_2, B_3 — punctele de intersecție ale dreptelor $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ cu planul xOz, respectiv (fig. 11);
C_1, C_2, C_3 — punctele de intersecție ale dreptelor cu planul $x_1O_1y_1$ respectiv (fig. 12);

Ecuațiile de legătură, în sistemul fix $Oxyz$ se scriu impunînd condiția ca, în timpul mișcării, axele Δ_{11} și Δ_{21}, Δ_{12} și Δ_{22}, Δ_{13} și Δ_{23} să fie permanent intersectate sau, ceea ce este același lucru, impunînd condiția ca punctele B_1, B_2, B_3 să se găsească pe dreptele Δ_{21}, Δ_{22}, Δ_{23}, respectiv.

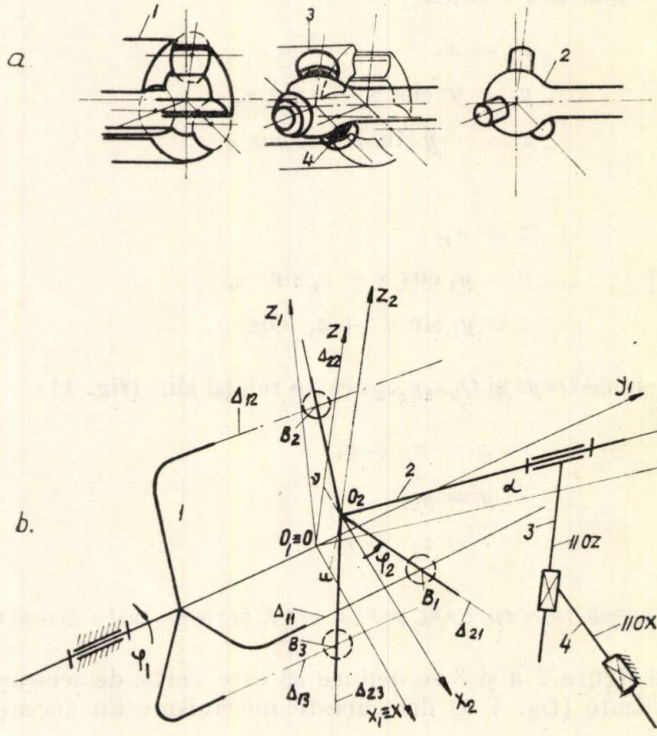

a
1
3
2
4
b.
Z_1
Z_2
Δ_{22}
Δ_{12}
B_2
y_1
$y_2 \parallel y$
2
O_2
α
1
$O_1 \equiv O$
3
$\parallel OZ$
φ_2
B_1
Δ_{11}
Δ_{21}
$\parallel OX$
4
B_3
φ_1
Δ_{13}
Δ_{23}
$x_1 \equiv x$
x_2

Fig. 11

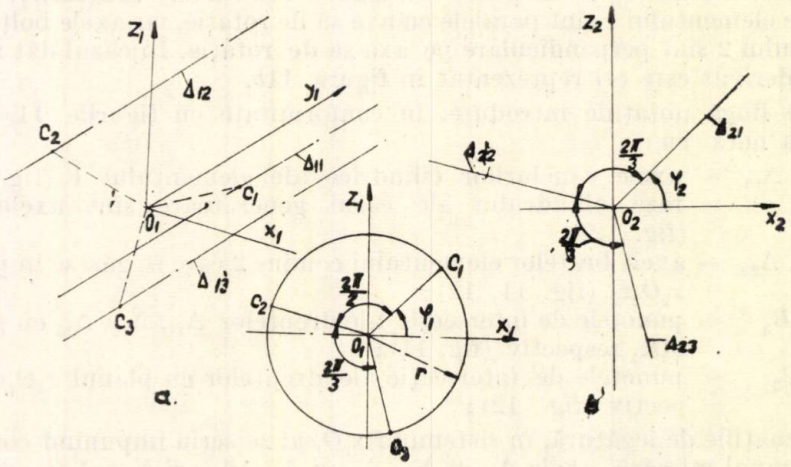

Z_1
Δ_{12}
y_1
C_2
Δ_{11}
C_1
O_1
x_1
Δ_{13}
C_3
Z_1
C_1
C_2
$\frac{2\pi}{2}$
φ_1
x_1
O_1
$\frac{2\pi}{3}$
r
O_3
a.
Z_2
Δ_{21}
$\frac{2\pi}{3}$
φ_2
O_2
x_2
Δ_{23}
b

Fig. 12

Ecuațiile dreptelor $\Delta_1 i$ în sistemul $Ox_1y_1z_1$ sînt (fig. 12 *a*) :

$$\Delta_{11} \equiv \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1, \\ z_1 = r \sin \varphi_1, \end{cases}$$

$$\Delta_{12} \equiv \begin{cases} x_1 = r \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ z_1 = r \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta_{13} \equiv \begin{cases} x_1 = r \cos\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \\ z_1 = r \sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

Ținînd seama de relațiile de transformare (2), ecuațiile dreptelor (5), în sistemul $Oxyz$, devin

$$\Delta_{11} \equiv \begin{cases} x = r \cos \varphi_1, \\ -y \sin \alpha + z \cos \alpha = r \sin \varphi_1, \end{cases}$$

$$\Delta_{12} \equiv \begin{cases} x = r \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ -y \sin \alpha + z \cos \alpha = r \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \end{cases} \tag{6}$$

$$\Delta_{13} \equiv \begin{cases} x = r \cos\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \\ -y \sin \alpha + z \cos \alpha = r \sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

de unde rezultă că intersecțiile dreptelor $\Delta_{1i}(6)$ cu planul xOz (punctele Bi) au coordonatele

$$B_1\left[r \cos \varphi_1 \quad 0, \quad \frac{r}{\sin \alpha} \sin \varphi_1\right],$$

$$B_2\left[r \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \ 0, \ \frac{r}{\cos \alpha} \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right)\right], \tag{7}$$

$$B_3\left[r \sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right), \ 0, \ \frac{r}{\cos \alpha} \sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right)\right],$$

Scriind ecuațiile dreptelor Δ_{2i} în sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ (fig. 12 *b*) și ținînd seama de relațiile de transformare (4), se obțin ecuațiile acestor drepte în sistemul fix $Oxyz$ (fig. 11)

$$\Delta_{21}\equiv\begin{cases}(x-u)\operatorname{tg}\varphi_2 - z + v = 0,\\ y = 0,\end{cases}$$

$$\Delta_{22}\equiv\begin{cases}(x-u)\operatorname{tg}\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right) - z + v = 0,\\ y = 0,\end{cases} \tag{8}$$

$$\Delta_{23}\equiv\begin{cases}(x-u)\operatorname{tg}\left(\varphi_2+\frac{4\pi}{3}\right) - z + v = 0,\\ y = 0.\end{cases}$$

Ecuațiile legăturilor geometrice $B_1 \in \Delta_{21}$, $B_2 \in \Delta_{22}$, $B_3 \in \Delta_{23}$ se găsesc înlocuind coordonatele (7) în ecuațiile (8), respectiv. Efectuînd aceste înlocuiri se obține

$$r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \frac{r}{\cos\alpha}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - u\sin\varphi_2 + v\cos\varphi_2 = 0,$$

$$r\cos\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{r}{\cos\alpha}\sin\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right) -$$

$$- u\sin\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right) + v\cos\left(\varphi_2+\frac{2\pi}{3}\right) = 0, \tag{9}$$

$$r\cos\left(\varphi_1+\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\varphi_2+\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{r}{\cos\alpha}\sin\left(\varphi_1+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi_2+\frac{4\pi}{3}\right) -$$

$$- u\sin\left(\varphi_2+\frac{4\pi}{3}\right) + v\cos\left(\varphi_2+\frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

După unele transformări liniare (prima ecuație rămîne neschimbată, a doua se obține scăzînd ultimele două din prima amplificată cu 2, iar a treia se obține scăzînd ultima din a doua) și efectuarea calculelor se obține sistemul

$$\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \frac{1}{\cos\alpha}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{u}{r}\sin\varphi_2 + \frac{v}{r}\cos\varphi_2 = 0,$$

$$\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\sin(\varphi_1+\varphi_2) - 2\frac{u}{r}\sin\varphi_2 + 2\frac{v}{r}\cos\varphi_2 = 0, \tag{10}$$

$$\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\cos(\varphi_1+\varphi_2) - 2\frac{u}{r}\cos\varphi_2 + 2\frac{v}{r}\sin\varphi_2 = 0.$$

Din ultimele două ecuații ale sistemului (10) rezultă expresiile coordonatelor punctului O_2 în sistemul $Oxyz$

$$u = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$
$$v = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2). \tag{11}$$

Înlocuind aceste expresii în prima ecuație a sistemului (10) se obține $\varphi_1 = -\varphi_2$ ceea ce demonstrează că mecanismul derivat tripod cu galeți din figura 11 *b* este homocinetic.

Din relațiile (11) reiese că locul geometric descris de punctul O_2 în planul xoz este un cerc de ecuație (fig. 13 *b*)

$$x^2 + z^2 = \frac{r^2}{4}\left(\frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2. \tag{12}$$

Rezultă deci că axa elementului 2 al mecanismului derivat din figura 11 *b* descrie în sistemul $Oxyz$ un cilindru circular drept de ecuație (12).

Din analiza expresiilor coordonatelor punctului O_2 (11), reiese că în timp ce elementul conducător efectuează o rotație completă, punctul O_2 (deci și axa O_2y_2, care are mișcare de translație) descrie de trei ori cercul (12).

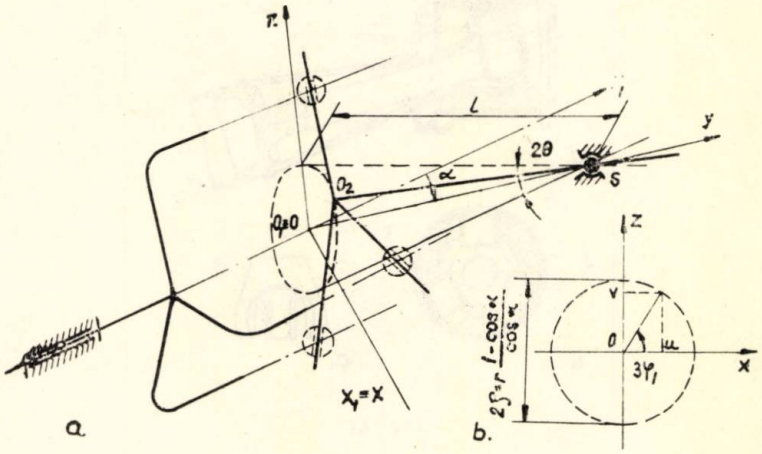


Fig. 13

Revenind la mecanismul inițial (fig. 13), al cărui mecanism derivat (fig. 11) a fost analizat, se desprind următoarele caracteristici importante ale mecanismului (cuplajului) tripod analizat (fig. 2, 3, 11 *a*, 13):

a). Mecanismul tripod real este asincron. Cînd distanța $O_2S \to \infty$, mecanismul devine sincron, deci pentru reducerea gradului de neunifor-

mitate a mișcării, în cazul unui unghi α dat, distanța O_2S va trebui aleasă cît mai mare (fig. 15).

b). Elementul condus 2 are mișcare sferică. Axa elementului condus, în timpul unei rotații a elementului conducător, descrie de trei ori conul circular drept cu vîrful S, care are raza cercului de bază

$$\rho = \frac{r}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \approx \frac{r \alpha^2}{4} \tag{13}$$

și semiunghiul la vîrf (fig. 13)

$$\theta = \text{arc sin} \frac{r}{2l} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \approx \frac{r\alpha^2}{4l}. \tag{14}$$

c). Mișcarea sferică a elementului condus, constituie uneori un dezavantaj al cuplajului tripod analizat. Urmările directe ale acestei mișcări sînt forțele centrifuge care, păstrînd invariabili ceilalți parametri de care depind și făcînd abstracție de un factor constant, sînt direct proporționale cu raza cercului de bază al conului (13). Este deci foarte important ca în acest cuplaj, cînd viteza de rotație este mare, unghiul α să fie mic.

Pentru a putea utiliza acest cuplaj la viteze mari de rotație și unghiuri α relativ mari, s-a propus sudarea unei carcase biconice pe elementul

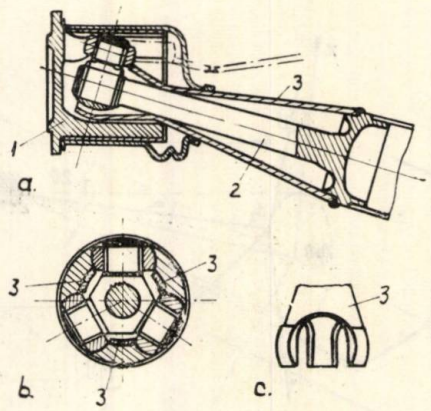


Fig. 14

condus ca în (fig. 14 *a*) [6]. Această carcasă, datorită formei speciale a părții conice finale (fig. 14 *b*, *c*), are rolul de centrare a elementului cu mișcare sferică 2 în cel cu mișcare de rotație 1 (vezi și fig. 13) fiind în același timp element elastic interpus între cele două elemente tripode ale cuplajului. Deoarece mișcarea sferică a elementului condus este intrinsecă mecanismului (fig. 13), introducerea unui element elastic care să se opună acestei mișcări pare nerațională.

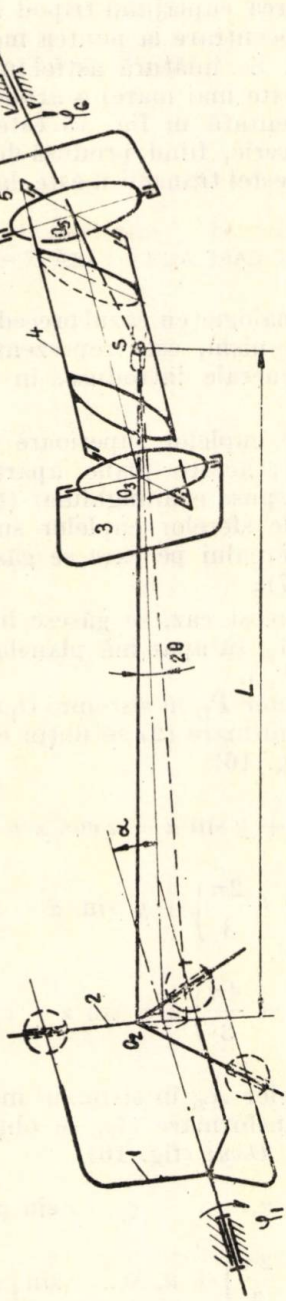


Fig. 15

În figura 15, în conformitate cu cerințele rezultate din analiza anterioară, este arătată utilizarea cuplajului tripod alături de cuplajul bicardanic cu dispozitiv de autocentrare la puntea motoare cu suspensie independentă a automobilului. Se înlătură astfel îmbinarea telescopică prin caneluri (în care frecarea este mai mare) a arborelui cardanic din soluția clasică. Transmisia reprezentată în fig. 15 este brevetată în Franța și utilizată în producția de serie, fiind produsă de firma Glaenzer-Spicer. Varianta constructivă a acestei transmisii este dată în [1], p. 121.

3.2. MECANISME TRIPODE CARE AU LA BAZĂ SCHEMA DIN FIGURA 1*b*

Se procedează prin analogie cu cazul precedent. Mecanismul derivat, corespunzător acestui mecanism, este reprezentat în fig. 16.

Pe lîngă notațiile generale introduse, în conformitate cu figurile 16—18, se va nota cu :

P_{11}, P_{12}, P_{13} — planele cuplelor superioare pentamobile ale elementului 1; aceste plane aparțin aceluiași fascicul și sînt dispuse echiunghiular (fig. 16, 17);

A_{21}, A_{22}, A_{23} — centrele sferelor cuplelor superioare sferă-plan;

r — raza cercului pe care se găsesc centrele sferelor A_{2i} (fig. 17);

Ecuațiile de legătură, în acest caz, se găsesc impunînd condițiile ca, în timpul mișcării, punctele A_{2i} să aparțină planelor P_{1i}, respectiv ($A_{21} \in P_{11}$, $A_{22} \in P_{12}$, $A_{23} \in P_{13}$).

Scriind ecuațiile planelor P_{1i} în sistemul $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 17 *a*) și ținînd seama de relațiile de transformare (2) se obțin ecuațiile acestor plane în sistemul de bază $Oxyz$ (fig. 16).

$$\begin{aligned} P_{11} &\equiv x \operatorname{tg} \varphi_1 + y \sin \alpha - z \cos \alpha = 0, \\ P_{12} &\equiv x \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + y \sin \alpha - z \cos \alpha = 0, \\ P_{13} &\equiv x \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right) + y \sin \alpha - z \cos \alpha = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Scriind coordonatele punctelor A_{2i} în sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ (fig. 17 *b*) și utilizînd relațiile de transformare (4), se obțin coordonatele acestor puncte în sistemul de bază $Oxyz$ (fig. 16)

$$\begin{aligned} A_{21} &[r \cos \varphi_2 + u, \quad 0, \quad r \sin \varphi_2], \\ A_{22} &\left[r \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) + u, \ 0, \ r \sin\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right)\right], \\ A_{23} &\left[r \cos\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right) + u, \ 0, \ r \sin\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

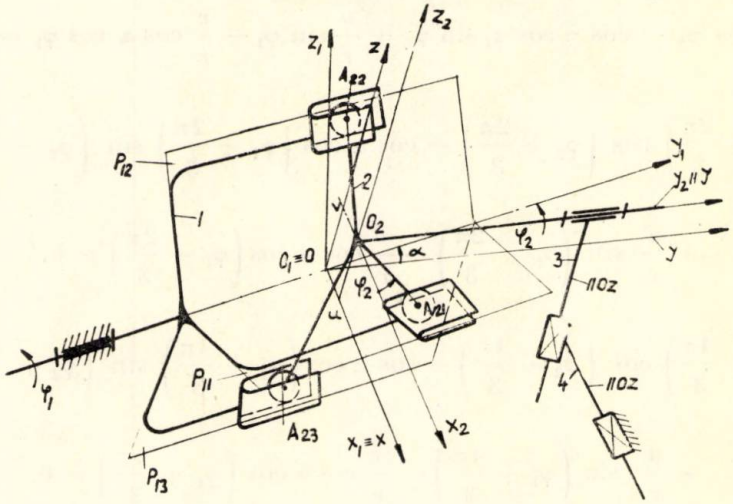

Z1
Z
Z2
A22
P12
1
2
O2
C1=0
α
φ2
A21
P11
A23
X1≡X
X2
P13
φ1
Y1
Y2 II Y
Y
3
110z
4
110z

Fig. 16

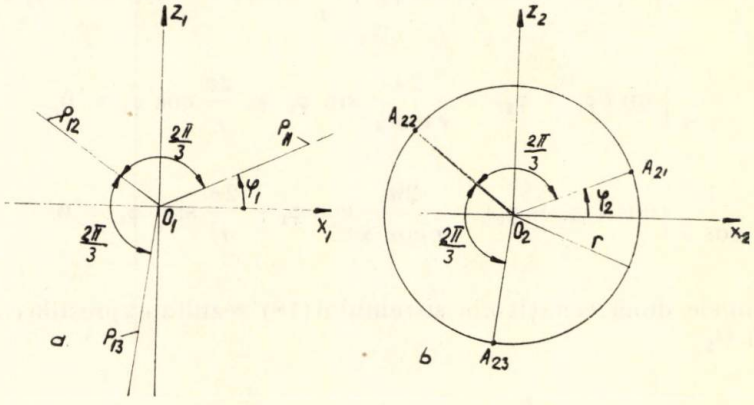

Z1
P12
2π/3
P11
φ1
O1
X1
2π/3
a
P13
Z2
A22
2π/3
A21
φ2
2π/3
O2
X2
r
b
A23

Fig. 17

Ecuațiile legăturilor geometrice $A_{21} \in P_{11}$, $A_{22} \in P_{12}$, $A_{23} \in P_{13}$, se găsesc înlocuind coordonatele acestor puncte (16) în ecuațiile planelor P_{1i} (15). După efectuarea calculelor se obține

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \alpha \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{u}{r} \sin \varphi_1 - \frac{v}{r} \cos \alpha \cos \varphi_1 = 0,$$

$$\sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos \alpha \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\varphi_2 + \frac{2\pi}{3}\right) +$$

$$+ \frac{u}{r} \sin\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{v}{r} \cos \alpha \cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right) - \cos \alpha \cos\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\varphi_2 + \frac{4\pi}{3}\right) +$$

$$+ \frac{u}{r} \sin\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{v}{r} \cos \alpha \cos\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

După unele transformări liniare (prima ecuație rămîne neschimbată, a doua se obține scăzînd ultimele două din prima amplificată cu 2, iar a treia se obține scăzînd ultima din a doua) și efectuarea calculelor se obține sistemul (18) echivalent cu (17)

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \alpha \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{u}{r} \sin \varphi_1 - \frac{v}{r} \cos \alpha \cos \varphi_1 = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{2u}{r \cos \alpha} \sin \varphi_1 + \frac{2v}{r} \cos \varphi_1 = 0, \tag{18}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{2u}{r \cos \alpha} \cos \varphi_1 + \frac{2v}{r} \sin \varphi_1 = 0.$$

Din ultimele două ecuații ale sistemului (18) rezultă expresiile coordonatelor lui O_2

$$u = \frac{r}{2}(1 - \cos \alpha) \cdot \cos(2\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$v = \frac{r}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin(2\varphi_1 + \varphi_2). \tag{19}$$

Înlocuind aceste valori în prima ecuație a sistemului (18), se obține legea de transmitere $\varphi_2 = \varphi(\varphi_1)$ a mecanismului derivat (fig. 16).

$$\varphi_2 = \varphi_1, \tag{20}$$

care demonstrează că mecanismul derivat (fig. 16) este homocinetic.

Prin eliminarea parametrilor cos $(2\varphi_1 + \varphi_2)$ și sin $(2\varphi_1 + \varphi_2)$ din relațiile (19) se obține locul geometric al punctului O_2 în planul *xoz* care este o elipsă (fig. 18 *b*), avînd ecuația

$$\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}(1-\cos\alpha)^2} + \frac{z^2}{\frac{r^2}{4}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = 1. \tag{21}$$

Rezultă că axa $O_2 y_2$ a mecanismului derivat (fig. 16), care are o mișcare de translație, descrie în sistemul fix *Oxyz* un cilindru eliptic.

Din analiza expresiilor coordonatelor centrului O_2 (19) și a legii de transmitere (20), rezultă că în timp ce elementul conducător 1 efectuează o rotație completă, punctul O_2 (deci și axa $O_2 y_2$, fig. 16) descrie de trei ori elipsa (21) reprezentată în fig. 18 *b*.

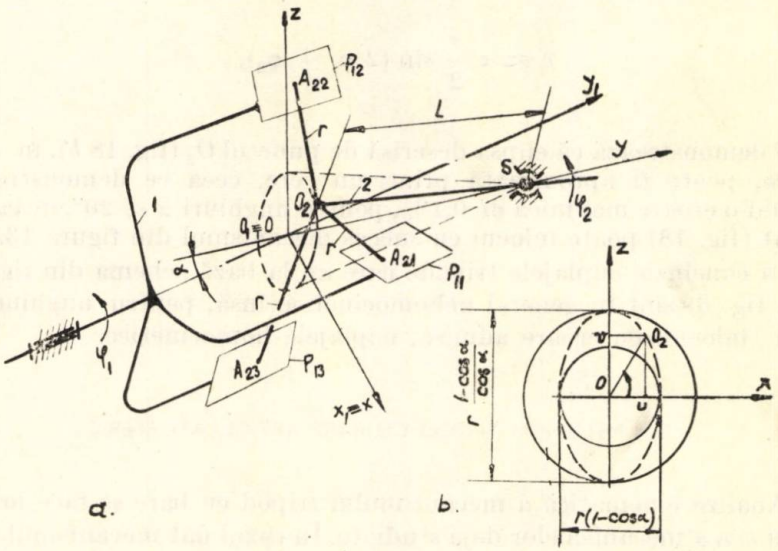


Fig. 18

Revenind la mecanismul inițial (fig. 18) al cărui mecanism derivat (fig. 16) a fost analizat, se desprind următoarele două caracteristici:

a). Mecanismul tripod real analizat este nehomocinetic. Cînd distanța $O_2S \to \infty$ mecanismul devine sincron, deci pentru reducerea gradului de neuniformitate a mișcării, în cazul unui unghi dat, distanța O_2S va trebui aleasă cît mai mare (fig. 15).

b). Elementul condus 2 (fig. 18) are mișcare sferică, axa sa descriind de trei ori un con eliptic, avînd vîrful în cupla sferică S, în timpul unei rotații complete a elementului conducător 1 (19).

În continuare se va demonstra că pentru unghiuri α nu prea mari, cu eroare admisă de practica inginerească, cuplajul tripod simplu analizat (deci și variantele sale constructive) poate înlocui cuplajul homocinetic. Astfel dacă, în timpul funcționării, unghiul $\alpha \leqslant 20°$, cu o eroare ce nu depășește 0,1 %, se poate admite formula aproximativă (α în radiani).

$$\text{Cos } \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \varepsilon, \tag{22}$$

unde ε este un parametru mic.

Admițînd această ipoteză și neglijînd factorii care conțin pe ε^2, expresiile parametrilor punctului O_2 (19) devin

$$u \approx \varepsilon \frac{r}{2} \cos (2\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$v \approx \varepsilon \frac{r}{2} \sin (2\varphi_1 + \varphi_2), \tag{23}$$

ceea ce demonstrează că elipsa descrisă de punctul O_2 (fig. 18 *b*), în scopuri practice, poate fi aproximată printr-un cerc, ceea ce demonstrează că admițînd o eroare mai mică de 0,1%, pentru unghiuri $\alpha \leqslant 20°$, mecanismul analizat (fig. 18) poate înlocui cu succes mecanismul din figura 13.

În concluzie cuplajele tripode care au la bază schema din figura 1 *b* (fig. 5, fig. 6) sînt în general nehomocinetice însă, pentru unghiuri mici, ele pot înlocui, cu eroare admisă, cuplajele homocinetice.

3.3. MECANISM TRIPOD CU BARE ARTICULATE SFERIC

Analiza cinematică a mecanismului tripod cu bare se face prin analogie cu cea a mecanismelor deja studiate. În cazul dat mecanismul derivat corespunzător este cel reprezentat în figura 19.

Păstrînd notațiile introduse, în conformitate cu figurile 19—21, se va nota cu :

D_i, E_i — cuplele sferice ale elementelor tripode ($i = 1,2,3$);
r — raza cercului pe care sînt dispuse cuplele D_i și E_i (fig. 20);
l — lungimea barelor de legătură Y;
β — defazarea inițială a elementului condus (unghiul format din brațul O_2E_1 cu axa O_2X_2 atunci cînd brațul O_1D_1 se confundă cu axa O_1X_1, fig. 19,20); este mărime constantă.

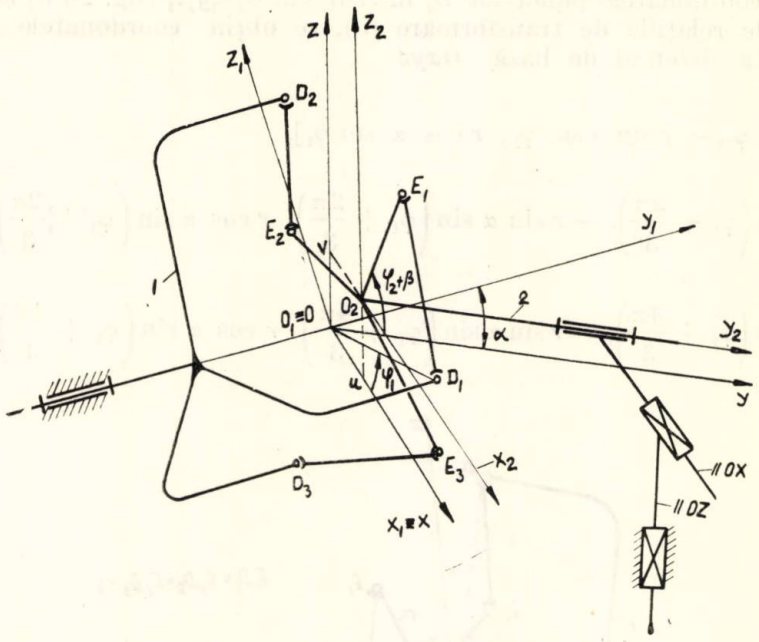


Fig. 19

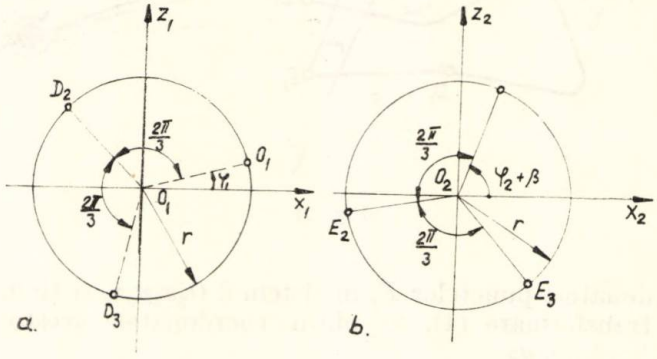


Fig. 20

În acest caz, ecuațiile de legătură în sistemul fix *Oxyz* se scriu impunînd condițiile ca în timpul mișcării distanțele între cuplele sferice să fie aceleași (fig. 21)

$$D_1E_1 = D_2E_2 = D_3E_3 = l.$$

Scriind coordonatele punctelor D_i în sistemul $O_1x_1y_1z_1$ (fig. 20 *a*) și ținînd seama de relațiile de transformare (3), se obțin coordonatele acestor puncte în sistemul de bază $Oxyz$

$$D_1\,[r\cos\varphi_1,\ -r\sin\alpha\sin\varphi_1,\ r\cos\alpha\sin\varphi_1],$$

$$D_2\left[r\cos\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{3}\right),\ -r\sin\alpha\sin\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{3}\right),\ r\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\frac{2\pi}{3}\right)\right], \quad (24)$$

$$D_3\left[r\cos\left(\varphi_1+\frac{4\pi}{3}\right),\ -r\sin\alpha\sin\left(\varphi_1+\frac{4\pi}{3}\right),\ r\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

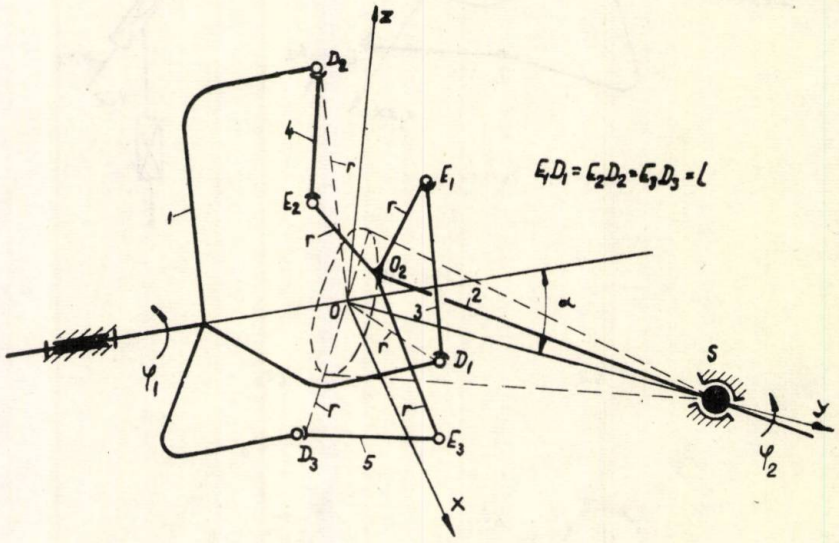


Fig. 21

Scriind coordonatele punctelor E_i în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ și ținînd seama de relațiile de transformare (4), se obțin coordonatele acestor puncte în sistemul de bază $Oxyz$

$$E_1[r\cos(\varphi_2+\beta)+u,\quad 0,\quad r\sin(\varphi_2+\beta)+v],$$

$$E_2\left[r\cos\left(\varphi_2+\beta+\frac{2\pi}{3}\right)+u,\ 0,\ r\sin\left(\varphi_2+\beta+\frac{2\pi}{3}\right)+v\right], \quad (25)$$

$$E_3\left[r\cos\left(\varphi_2+\beta+\frac{4\pi}{3}\right)+u,\ 0,\ r\sin\left(\varphi_2+\beta+\frac{4\pi}{3}\right)+v\right].$$

Ținînd seama de expresiile coordonatelor punctelor D_i (24) și E_i (25), conform condițiilor geometrice de legătură $D_iE_i = l$, $i = 1,2,3$, se obține sistemul de ecuații de legătură

$$\begin{cases} \cos\varphi_1\cos(\varphi_2+\beta)+\cos\alpha\sin\varphi_1\sin(\varphi_2+\beta)+\dfrac{u}{r}[\cos\varphi_1- \\ \quad -\cos(\varphi_2+\beta)]+\dfrac{v}{r}[\cos\alpha\sin\varphi_1-\sin(\varphi_2+\beta)]=k, \\ \cos\left(\varphi_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)\times \\ \quad \times\sin\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{u}{r}\left[\cos\left(\varphi_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\right. \\ \quad \left.-\cos\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]+\dfrac{v}{r}\left[\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\right. \\ \quad \left.-\sin\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]=k, \\ \cos\left(\varphi_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{4\pi}{3}\right)+\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)\times \\ \quad \times\sin\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{4\pi}{3}\right)+\dfrac{u}{r}\left[\cos\left(\varphi_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)-\right. \\ \quad \left.-\cos\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]+\dfrac{v}{r}\left[\cos\alpha\sin\left(\varphi_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)-\right. \\ \quad \left.-\sin\left(\varphi_2+\beta+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]=k, \end{cases} \tag{26}$$

unde

$$k=\frac{1}{2r^2}(u^2+v^2+2r^2-l^2). \tag{27}$$

După unele transformări liniare ale acestui sistem (26) (prima ecuație rămîne neschimbată, a doua se obține scăzînd ultimele două din prima amplificată cu 2, iar a treia se obține scăzînd ultimele două) și efectuarea

calculelor, se obține sistemul

$$\cos\varphi_1\cos(\varphi_2+\beta)+\cos\alpha\sin\varphi_1\sin(\varphi_2+\beta)+\frac{u}{r}[\cos\varphi_1-\cos(\varphi_2+\beta)]+$$

$$+\frac{v}{r}[\cos\alpha\sin\varphi_1-\sin(\varphi_2+\beta)]=k,$$

$$(1-\cos\alpha)\cos(\varphi_1+\varphi_2+\beta)+2\frac{u}{r}[\cos\varphi_1-\cos(\varphi_2+\beta)]+$$

$$+\frac{2v}{r}[\cos\alpha\sin\varphi_1-\sin(\varphi_2+\beta)]=0, \tag{28}$$

$$(1-\cos\alpha)\sin(\varphi_1+\varphi_2+\beta)-2\frac{u}{r}[\sin\varphi_1-\sin(\varphi_2+\beta)]+$$

$$+2\frac{v}{r}[\cos\alpha\cos\varphi_1-\cos(\varphi_2+\beta)]=0.$$

Din ultimele două ecuații ale acestui sistem (28), se obțin expresiile parametrilor u și v

$$\frac{2u}{r}=-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha\cos(2\varphi_1+\varphi_2+\beta)-\cos(\varphi_1+2\varphi_2+2\beta)}{1-\cos(\varphi_1-\varphi_2-\beta)},$$

$$\frac{2v}{r}=-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\sin(2\varphi_1+\varphi_2+\beta)-\sin(\varphi_1+2\varphi_2+2\beta)}{1-\cos(\varphi_1-\varphi_2-\beta)}. \tag{29}$$

Înlocuind valorile parametrilor u și v (29) în prima ecuație a sistemului (28) se obține legea de transmitere (de formă destul de complicată)

$$\varphi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \alpha,\ k)=0. \tag{30}$$

Din analiza acestei legi se deduce că mecanismul tripod derivat cu bare articulate sferic este nehomocinetic (asincron). Evident factorul de nehomocinetism (asincronism) crește cu creșterea unghiului.

Din analiza expresiilor coordonatelor punctului O_2 (29), figurile 19 și 21, se deduce că în timpul unei rotații complete a elementului conducător 1, punctul O_2 descrie de trei ori o curbă închisă.

Revenind la mecanismul inițial (fig. 21), al cărui mecanism derivat a fost analizat (fig. 19), se deduce că cuplajul tripod cu bare articulate sferic este nehomocinetic; elementul său condus are o mișcare sferică descriind de trei ori o suprafață conică în timpul unei rotații a elementului conducător.

În continuare se va demonstra că pentru unghiuri mici, cu o eroare admisă de practica inginerească, acest cuplaj poate înlocui cu succes un cuplaj homocinetic. Astfel dacă, în timpul funcționării, unghiul $\alpha \leqslant 10°$, cu o eroare ce nu depășește 1%, se pot face înlocuirile (α în radiani);

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4} = \varepsilon\,;\ \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - 2\varepsilon, \tag{31}$$

unde ε este un parametru mic.

Admițînd această ipoteză și neglijînd factorii care conțin pe ε^2, expresiile parametrilor u și v (29) devin

$$\frac{u}{r} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\sin\frac{3}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2-\beta)},$$

$$\frac{v}{r} = -\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\cos\frac{3}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2-\beta)}. \tag{32}$$

Înlocuind expresiile aproximative (32) în prima ecuație a sistemului (28) și ținînd seama de formulele aproximative și de semnificația defazării β (β = const), se obține $\varphi_1 = \varphi_2$, ceea ce demonstrează că, în ipoteza admisă, mecanismul tripod derivat cu bare articulate sferic este homocinetic.

În lucrarea [2] s-a demonstrat pe o cale grafică-analitică aproximativă că acest cuplaj (denumit acolo incorect cuplaj cardanic) se poate considera homocinetic pentru unghiuri mici între arbori, fără a preciza însă eroarea admisă într-un astfel de caz.

Din analiza expresiilor aproximative (32) se deduce că locul geometric al punctului O_2 este aproximat suficient de bine printr-un cerc. Elementul condus al cuplajului analizat descrie deci o suprafață conică, ce se apropie mult de un con circular drept.

3.4. MECANISME TRIPODE DUBLE

Observînd că mecanismele tripode duble (fig. 7) se pot obține prin legarea simetrică a două mecanisme tripode derivate din care s-a eliminat diada atașată 3,4 (fig. 11*a*, 16, 19), rezultă că dacă se asigură condițiile de simetrie (dacă se asigură deci un plan de simetrie) toate mecanismele tripode duble care au la bază schemele din fig. 7 sînt homocinetice.

4. CONCLUZII

1. În mulțimea mecanismelor tripode analizate se disting mecanismele tripode simple și duble. În submulțimea mecanismelor tripode simple se deosebesc trei clase de mecanisme și anume cele care au la bază schemele din figura 1. Corespunzător, în submulțimea mecanismelor tripode duble se deosebesc, de asemenea, trei clase de mecanisme și anume cele care au la bază schemele din figura 7.

2. Toate mecanismele tripode simple analizate sînt asincrone (nehomocinetice). Toate mecanismele tripode simple (cele care au la bază schema din fig. 1 *a* în primul rînd), pentru unghiuri nu prea mari între arbori, cu erori admisibile, pot înlocui cuplajele universale homocinetice.

3. Elementul condus, la toate mecanismele tripode simple, are mișcare sferică descriind de trei ori, în timpul unei rotații a elementului conducător, un con, fie circular drept (fig. 13), fie eliptic (fig. 18), fie oarecare (fig. 21).

4. Toate mecanismele tripode duble, în ipoteza asigurării unui plan de simetrie, sînt homocinetice.

5. Din analiza cinematică a mecanismelor derivate, din care prin legare simetrică se obține cuplajul tripod dublu, rezultă că elementul intermediar al acestor mecanisme descrie de trei ori, în timpul unei rotații a elementului conducător, un cilindru drept (fig. 7 *a*), eliptic (fig. 7 *b*) sau oarecare (fig. 7 *c*).

6. În final rezultă că analiza cinematică a mecanismului tripod derivat, în locul celui real, permite, pe lîngă o apreciabilă simplificare a calculelor, evidențierea parametrilor cinematici de bază atît pentru mecanismele tripode simple cît și pentru cele duble.

Primită la redacție la 27 septembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. FL. DUDIȚĂ, *Transmisii cardanice*, Edit. tehnică, București, 300 p. 1966.
2. M. A. FAHIRIEV, *Kinematika universalnogo kardana so sfericeskimi parami*, În: Izv. vissih. ucebn. zav., Maşinostroenie, *1*, 16—21 (1966).
3. P. GUIMBRETIÈRE, *Joints mécaniques de transmission. Un cas: la traction avant*, In: Ingenieurs de l'automobile, *4*, 1—11 (1964).
4. W. LICHTENHELDT, *Zur Systematik der Raumgetriebe*, In: Wiss. Z. der Techn. Univ. Dresden 12, *1*, 157—163 (1963).
5. Brevet Nr. 1.268.690, cl F 06 d, Franța.
6. Brevet Nr. 1.272.530, cl F 06 d, Franța.
7. Brevet Nr. 1.341.628, cl. F 06 d, Franța.
8. Brevet Nr. 1.440.784, cl F 16 d, Franța.

CONSIDERAȚII CANTITATIVE ASUPRA MICROGEOMETRIEI UNOR SUPRAFEȚE DE FRECARE CU COMPUȘI DEFINIȚI ÎN STRUCTURA MATERIALULUI

de GH. VASILCA și VETURIA RASZILLIER
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Portanța Abbott, distribuția numărului de contacte, abaterea medie pătratică, poziția liniei medii a profilului și volumul golurilor dintre asperități sînt unii dintre parametrii cantitativi ai unei microgeometrii, care pot fi analizați statistic și reda specificul unei rugozități. Se deduc și se analizează acești parametri pentru microgeometriile specifice ale suprafețelor de alunecare în cazul unor materiale antifricțiune cu compuși definiți în structură (Y-Sn83, Y-PbSn 10, BzPb 20 Sn 3).

1. INTRODUCERE

Numeroase lucrări din domeniul tribologiei iau în considerare în ultimul timp microgeometria suprafețelor de frecare pentru analizarea calitativă și cantitativă a fenomenelor de lubrificație. Astfel în teoria hidrodinamică a lubrificației se fac aprofundări [1], [2] prin admiterea și a ipotezei suprafețelor reale cu ondulații și asperități, în locul suprafețelor ideal netede. Cu ajutorul microgeometriei suprafețelor se poate apoi determina aria reală de contact sub sarcină a acestora, ultimele lucrări [3] arătînd că aceasta nu depinde de faptul dacă deformarea este de natură plastică sau elastică. Aria reală de contact este un parametru important în regimurile semifluide de lubrifiere (pornirea-oprirea lagărelor, mișcări alternative), apoi în transferul de căldură etc.

Portanța Abbott, distribuția numărului de contacte, abaterea medie pătratică și aritmetică, poziția liniei medii a profilului și volumul golurilor dintre asperități sînt unii dintre parametrii cantitativi ai unei microgeometrii, care pot fi analizați statistic și folosiți în scopurile menționate.

La cuplurile de frecare tehnice apar însă asocieri din diferite materiale, iar în ceea ce privește microgeometria, aceasta intervine la începutul funcționării cu microgeometria rezultată din prelucrare și după aceea, adică pe toată durata de funcționare a cuplului, cu microgeometria specifică. Apare deci util ca parametrii cantitativi a unei microgeometrii

să fie determinaţi în toate aceste cazuri. În cele ce urmează aceşti parametrii se determină pentru microgeometriile specifice ale suprafeţelor de frecare în cazul tipurilor de materiale antifricţiune caracterizate printr-o structură care conţine compuşi definiţi duri, pe bază de staniu, plumb şi cupru.

2. MODELE EXPERIMENTALE ŞI CONDIŢII DE ÎNCERCARE

Pentru scopurile ce se urmăresc au fost alese trei materiale antifricţiune cu răspîndire mai mare în tehnică şi mai reprezentative din grupele de structură respective. Astfel, din grupa celor cu compuşi definiţi în structură sub formă de incluziuni dure, însă cu matricea moale, a fost luat aliajul pe bază de staniu Y-Sn83, simbolizat în cele ce urmează cu S_1, şi aliajul pe bază de plumb Y-PbSn 10, marcat cu P_2, ambele STAS 202—59. Compusul definit dur principal este în ambele cazuri acelaşi şi anume faza SnSb, iar matricea, de asemenea în ambele cazuri, faze eutectice binare, respectiv binare şi ternare. Aceste două materiale se deosebesc din punctul de vedere al comportării în funcţionare prin rezistenţa mai redusă la oboseală mecanică şi termică, dar mai ridicată la coroziune chimică a materialului S_1, dar cu aceste proprietăţi inversate ale materialului P_2 [4].

Al treilea material, notat cu B 14, luat în considerare este de tipul BzSnPb 20 (STAS 1512-50), caracterizat printr-o matrice semidură, soluţie solidă Cu-Sn, în care este înglobat compusul definit dur, sub formă eutectoidă $\alpha + \delta$. Plumbul nemişcibil formează faza moale, antigripantă a materialului, cu o repartiţie în structură de dorit nedendritică [5]. Acest material prezintă diferenţe de comportare în funcţionare datorită matricei cu rezistenţă mecanică mai mare şi acţiunii abrazive mai intense a fazei $\alpha + \delta$. Capacitatea abrazivă sporită a fazei $\alpha + \delta$ se datoreşte durităţii ei de peste cinci ori mai mare faţă de SnSb, precum şi, în oarecare măsură, formei cvazi filiforme, ca margini de ochi, a acesteia faţă de forma cuboidă a fazei SnSb. Eutectoidul $\alpha + \delta$ este mai dur ($H = 500$ faţă de $H = 400$ kgf/mm^2) chiar faţă de faza aciformă Cu6Sn5 din Y-Sn 83.

Pentru a desprinde unele diferenţe faţă de materialul B 14 s-a mai analizat şi aliajul binar Cu-Pb, de tipul BzPb 25 (STAS 1512-50) notat cu B_8. La acesta matricea este puţin mai moale, constînd numai din cupru şi lipseşte constituentul dur $\alpha + \delta$.

Diferenţa de constituţie structurală şi de duritate face ca aceste materiale să prezinte şi diferenţieri în comportarea la alunecare în cazul asocierii în funcţionare cu acelaşi fus din oţel. În consecinţă vor prezenta şi suprafeţe active cu microgeometrii specifice diferite.

Modelul experimental a constat dintr-o bucşă cilindrică circulară cu pereţi groşi, fusul din oţel avînd suprafaţa durificată la $HRC = 55$. Diametrul nominal al lagărului a fost 36 mm şi alungirea relativă $\lambda = 0{,}7$. Încercarea s-a făcut la sarcină statică, la temperatura de funcţionare în regim de 80°C măsurată la bucşă. Jocul relativ ψ la montaj, presiunea spe-

cifică medie p_m și viteza relativă V maxime la încercare au fost pentru fiecare din cele patru materiale:

S_1 ... $\psi = 1{,}25^0/_{00}$, $p_m = 320$ kgf/cm^2, $V = 12$ m/s,
P_2 ... $\psi = 1{,}25^0/_{00}$, $p_m = 245$ kgf/cm^2, $V = 8{,}8$ m/s,
B_{14} ... $\psi = 1{,}3^0/_{00}$, $p_m = 260$ kgf/cm^2, $V = 8{,}9$ m/s,
B_8 = ... $\psi = 1{,}3^0/_{00}$, $p_m = 190$ kgf/cm^2, $V = 9{,}5$ m/s.

Microgeometriile specifice rezultate în aceste condiții pe suprafețele active, în zona presiunilor maxime, ale celor patru materiale au profilogramele arătate în figurile 1*a*, 2*a*, 3*a* și 4*a*. Ele au fost ridicate cu aparatul Talysurf 3 și servesc, în cele ce urmează, analizei statistice.

Reflectarea particularităților de structură ale materialului în microgeometria sa specifică depinde de condițiile de lucru ale suprafețelor. În condițiile încercărilor de față profilogramele arată că microgeometriile specifice obținute conțin diferențieri dimensionale de ordinul 10^{-3} mm între asperități, atît pe înălțime cît și în direcția liniei medii a profilului. Unii constituenți structurali, de exemplu compusul definit SnSb din materialele S_1 și P_2 cu ponderea cea mai mare între incluziunile tari ale structurii, au latura cuboizilor de ordinul de mărime a 10^{-2} mm. Dacă cu toate acestea pe profilogramele din figurile 1*a*, și 2*a*, nu pot fi identificați dimensional clar acești cuboizi se datorește faptului că prin procesul de frecare și uzură aceste cristalite sînt zgîriate și fărîmate [4].

3. PARTICULARITĂȚI ÎN TRATAREA STATISTICĂ A MICROGEOMETRIEI SPECIFICE

Rugozitatea care se produce pe suprafețele de alunecare se datorește procesului complex al frecării ca acțiune mecanică, constînd din ruperea punților de sudură, abraziunea produsă de particulele dure străine și de particulele proprii de uzură, din transferul de material prin smulgerea de particule sub acțiunea forțelor moleculare, deformarea plastică și forfecarea asperităților. La această acțiune mecanică se adaugă efecte de coroziune chimică, precum și modificări structurale și topirea unor constituenți de structură ca efecte termice. Procesul producerii unei microgeometrii prin frecare este deci complex desfășurîndu-se în timp, iar pe suprafață ca loc și extindere, absolut întîmplător.

Diferența de duritate cuzinet-fus, relativ mare la lagărele tehnice, face însă ca efectul abraziv al particulelor dure să se manifeste mai ales la cuzinet prin formarea de rizuri relativ adînci. Tot din această cauză deformarea plastică a vîrfurilor asperităților se produce mai ales la suprafața cuzinetului, în special în regimurile de funcționare semifluide din perioadele de pornire și oprire și din perioada repausului fusului. Procesul de coroziune și efectele termice depind de natura materialului și pot fi considerate de asemenea mai energice în cazul vîrfurilor de asperitate mai ascuțite, datorită suprafeței de atac a acestora mai mare și masei lor mai reduse.

Efectul principal al acțiunii factorilor menționați este că în cazul microgeometriei specifice asperitățile situate deasupra liniei medii a profilului au în general vîrfurile mai teșite. Vîrfurile mai bonte deasupra și rizurile, unele disproporționat de adînci, sub linia medie a profilului, fac ca un profil de microgeometrie specifică să apară, mai ales din punctul

de vedere al formei asperităţilor, nesimetric faţă de această linie. Ţinînd seama de natura factorilor care produc microgeometria specifică, gradul de nesimetrie menţionat va diferi în funcţie de deosebirile dintre proprietăţile mecanice şi de constituţia structurală ale materialelor conjugate care alcătuiesc cuplul de frecare.

În cazul materialelor studiate, caracterul nesimetric al profilului de microgeometrie specifică, datorat mai ales vîrfurilor teşite ale asperităţilor şi rizurilor adînci, reiese calitativ din examinarea profilogramelor din figurile 1—4. Din punct de vedere cantitativ nesimetria menţionată este redată prin curbele de portanţă reală Abbott [6], adică a curbelor F din figurile 1*b*, 2*b*, 3*b* şi 4*b*, determinate şi trasate pe întreaga înălţime R_{max} a asperităţilor profilului. Se poate uşor constata că aceste curbe nu admit nici o simetrie faţă de o axă oarecare paralelă cu linia medie a profilului. Gradul cel mai mare de nesimetrie îl prezintă mai ales curbele F din figurile 1*b*, 2*b* şi 4*b*, ceea ce corespunde şi cu aspectul mai bont al vîrfurilor asperităţilor profilelor corespunzătoare.

Pentru tratarea statistică, în ipoteza distribuţiei normale a portanţei Abbott a profilului microgeometriei specifice se foloseşte curba aproximată normal [6] a curbei portanţei reale. Curba aproximată normal este însă o curbă simetrică, presupunînd astfel un profil analog ca formă a asperităţilor de o parte şi de alta a liniei sale medii. Suprapunînd cele două curbe rezultă, pe porţiuni, gradul în care portanţa reală poate fi redată prin curba de aproximaţie normală.

Greutatea şi oarecum subiectivitatea în tratarea cantitativă a problemei, apare însă la stabilirea curbei care aproximează normal curba portanţei reale. Una din metodele de aproximare este şi cea grafică, folosind hîrtie de probabilitate normală, la care gradul de nesuprapunere a celor două curbe se traduce prin neliniaritatea diferitelor puncte discrete ale curbei portanţei reale. Metoda permite astfel să se traseze o dreaptă care să aproximeze normal curba portanţei reale pe toată înălţimea R_{max} a asperităţilor profilului, sau numai parţial, pe o anumită porţiune a lui R_{max}. Aproximarea pe această cale poate fi de asemenea efectuată, în mod voit, pentru diferitele neregularităţi prezentate de profilul unei microgeometrii specifice ca rizuri anormal de adînci, ondulaţii, asociere de diferite anomalii de acest fel etc., care au fost analizate în [7]. În toate aceste cazuri, aproximarea s-a efectuat luînd ca bază criteriul de a considera întreaga înălţime R_{max} a asperităţilor profilului. În aceste condiţii, a apărut caracteristic faptul că asperităţile cu vîrfurile teşite au condus, în această zonă, la un grad de acoperire relativ redus între curba reală a portanţei şi curba care o aproximează normal. Această acoperire se constată a fi însă destul de bună pe o zonă centrală relativ largă a profilului, situată de o parte şi de cealaltă a liniei sale medii. În consecinţă, la utilizarea indicelui cantitativ de portanţă, dat de curba care aproximează normal curba portanţei reale a profilului, trebuie ţinut seama de gradul de acoperire diferit existent la diversele nivele de înălţime a asperităţilor.

Această particularitate a metodei poate fi folosită în sensul dirijării aproximării în aşa fel ca acoperirea celor două curbe să devină optimă la nivelul dorit al asperităţilor profilului. Pentru probleme legate de aria reală de contact, ca în lubrificaţia hidrodinamică, contactul fusului în repaus şi problema de contact direct în general între două supra-

fețe, este important ca zona de acoperire maximă a celor două curbe să fie cea de la vîrfurile asperităților. Aceasta pentru motivul că în perioada opririi unui lagăr regimul tranzitoriu, cînd regimul hidrodinamic trece în regim semifluid, se caracterizează prin contacte directe mai întîi la nivelul celor mai înalte vîrfuri ale asperităților. Pe de altă parte, încercările de duritate Brinell arată [5] că datorită ecruisării lor, asperitățile nu pot fi deformate plastic mai mult decît aproximativ 1/3 din înălțimea lor inițială.

Deformarea plastică limitată a asperităților este confirmată și de constatările experimentale [8], că în limite destul de largi de sarcină, aria unei asperități tasate rămîne constantă. Prin urmare, în probleme de contact sub sarcină, zona unui profil situată aproximativ sub linia sa medie, nu mai influențează aria reală de contact produsă de sarcină. Pe acest considerent, apare util ca aproximarea normală a curbei reale de portanță să se facă așa fel încît gradul maxim de acoperire a celor două curbe să apară în zona profilului situată deasupra liniei sale medii. Metoda aproximării grafice, pe hîrtie de probabilitate normală, permite o astfel de aproximare direcționată. Se coliniarizează în acest caz punctele discrete ale portanței reale situate deasupra liniei medii a profilului, adică acelea cu valori sub 0,5 în expresie adimensională. Un punct obligatoriu prin care trebuie să treacă dreapta mediatoare îl poate constitui punctul cu valoarea 0,5 a portanței reale exprimate adimensional, adică punctul M din figura 1 *b*.

Metoda aproximării normale numai a jumătății superioare a profilului real nu conduce nici ea la suprapunerea complectă a curbei reale și a celei care o aproximează normal, mai ales la vîrfurile asperităților. Teoretic această suprapunere nu poate fi însă completă niciodată, deoarece curba care aproximează normal se întinde la infinit, respectiv funcția care o exprimă ia valoarea zero numai la infinit. Tratarea problemei se poate face în acest caz punînd o altă condiție și anume ca cele două curbe să aibă un punct comun la un anumit nivel sub vîrful cel mai înalt al rugozității.

Determinarea unui astfel de punct comun de contact al curbelor se poate face pe diferite considerente. Unul dintre acestea ar putea consta în aceea că în acel punct deformarea plastică în înălțime a asperităților să aibă o anumită valoare față de tasarea totală ce o poate suporta materialul. Admițînd acest raport, de exemplu $k = 1/10$, și ținînd seama că tasarea totală poate fi maximum $\sim 30\%$ [5], rezultă că punctul ales corespunde unei deformări plastice a asperităților de ca 3%. În porțiunea profilului situată deasupra zonei acestui punct curba de aproximare va reda mai slab curba portanței reale, dar în zona punctului și eventual sub aceasta, reprezentarea va fi mai fidelă. Punînd apoi condiția ca cele două curbe să aibă ca al doilea punct comun pe M, situat pe linia medie a profilului, înseamnă că poziția, pe hîrtia de probabilitate normală, a dreptei corespunzătoare de aproximare devine bine determinată.

4. REZULTATE OBȚINUTE

Microgeometriile specifice de analizat fiind rezultate din frecare, în care au predominat fenomenele de contact, tratarea statistică a acestora în ceea ce privește portanța Abbott se face în cele ce urmează prin

metoda aproximării parțiale. În consecință curba de portanță reală Abbott, care exprimă cantitativ contactul dintre suprafețe, se va aproxima normal numai în zona asperităților situate deasupra liniei medii a profilului. Punctul M prin care trece dreapta de aproximare se va lua acela dat de intersecția curbei reale de portanță cu linia care redă valoarea 0,5 a acesteia în expresie adimensională. Pe hîrtie de probabilitate normală (fig. 1 *d*) dreapta ce trece prin M se va duce apoi astfel ca să medieze cît mai bine punctele curbei de portanță reală pe întreaga zonă a înălțimii profilului situată între punctul M și cel mai înalt punct al profilului real. Această curbă de aproximare este notată în cele ce urmează cu F_x.

Dacă suprapunerea curbei reale cu cea de aproximare normală determinată pe această cale (F_x) nu apare destul de satisfăcătoare și în zona celor mai înalte vîrfuri ale asperităților profilului, această zonă se aproximează normal în mod suplimentar printr-o curbă notată cu $F.$, impusă a trece prin A și M (fig. 1*d*). Punctul A va aparține curbei reale de portanță (fig. 1 *b*), situat sub vîrful cel mai înalt al profilului real cu distanța Δ, corespunzătoare unei tasări a acestor vîrfuri de 3% din înălțimea asperităților R^x rezultată din condițiile de aproximare admise. În cazul de față, punctul M dînd poziția liniei medii m a profilului, în cazul aproximării normale pe considerentele de portanță admise (pct. 3), distanța acestuia $\overline{m}$ de la vîrf reprezintă jumătate din înălțimea R^x a asperităților profilului cvazi idealizat, corespunzător porțiunii respective a curbei de aproximare normală. În acest caz $R^x = 2\overline{m}$ și $\Delta = \text{k.}30/100 \cdot R^x = 3\%\ R^x$.

Un alt aspect ce poate apare la tratarea statistică a portanței în cazul profilelor cu numeroase anomalii ca cele de microgeometrie specifică, este redat prin vîrfuri de asperități, singulare și nereprezentative, disproporționat de înalte. Luarea în considerare a înălțimii R_{max} a profilului real ținînd seama de aceste anomalii conduce la diferențe foarte mari de acoperire între curba de portanță reală și cea de aproximare normală, efect asemănător cu acela dat de rizurile adînci. Deoarece în cazul portanței, curba de aproximare a acesteia în zona vîrfurilor trebuie să fie însă cît mai reprezentativă, în cele ce urmează astfel de vîrfuri au fost considerate retezate la nivelul liniei exterioare superioare a profilului real (fig. 3 și 4). La nivelul acestei linii considerate ca început a vîrfurilor asperităților, valoarea portanței reale Abbott nu mai este zero ci are o anumită valoare OB (fig. 3 *b* și 4 *b*).

Pentru aproximarea normală a curbei care redă distribuția numărului de contacte a profilului s-a aplicat de asemenea metoda aproximării numai a zonei situate deasupra liniei medii a profilului. Dreapta de aproximare a cuprins în mod obligator punctul M' rezultat din intersectarea curbei reale cu linia care redă valoarea 0,5 a acestei funcții (fig. 1 *d*), în mod analog ca și în cazul punctului M de la portanță. Valoarea funcției care exprimă numărul real de contacte este redată de raportul

$$\sum_{i=0}^{i=x} n_i \Big/ \sum_{i=0}^{i=R_{max}} n_i$$

în care n_i este numărul de contacte, adică de întreruperi ale liniei de portanță Abbott la nivelul $x = i$, iar numitorul reprezintă suma cumulată a

contactelor de la toate nivelele i, în cadrul lungimii de referinţă L a profilului.

În figurile 1, 2, 3 şi 4 este redată tratarea statistică în ipotezele arătate a profilelor microgeometriilor specifice în cazul celor trei, respectiv patru materiale antifricţiune luate în considerare.

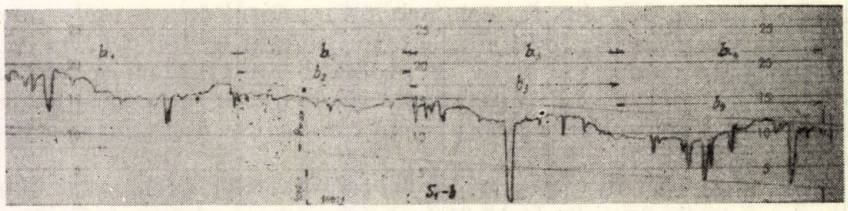
Curbele privind portanţa cu simbolul l (de ex. $S_1 - l$) sînt arătate în figurile 1 b, 2 b, 3 b, 4 b, iar cele privind numărul de contacte au simbolul n (de ex. $S_1 - n$) fiind prezentate în figurile 1 c, 2 c, 3 c şi 4 c. Dreptele de aproximare pe hîrtie de probabilitate normală se văd în figurile 1 d, 2 d, 3 d şi 4 d. În dreapta curbelor de portanţă, respectiv pentru numărul de contacte sînt prezentate curbele densităţii de probabilitate corespunzătoare.

Profilogramele din figurile 1a şi 4a sînt ridicate la scara 5000:1, iar cele din figurile 2a şi 3a la 10.000 : 1, în ceea ce priveşte înălţimea asperităţilor, iar în ceea ce priveşte lungimea profilului în direcţia liniei sale medii, la scara 100 : 1 în toate cele patru figuri. Portanţa Abbott s-a măsurat după profilogramele mărite de şapte ori, rezultînd astfel pentru ordonatele x (înălţimea asperităţilor) următoarele măriri : 35 000 : 1 în cazul figurilor 1b, c, d respectiv 4 b, c, d şi 70000 : 1 în cazul figurilor 2 b, c, d respectiv 3 b, c, d. Numărul de contacte s-a determinat la măririle indicate pentru portanţă.

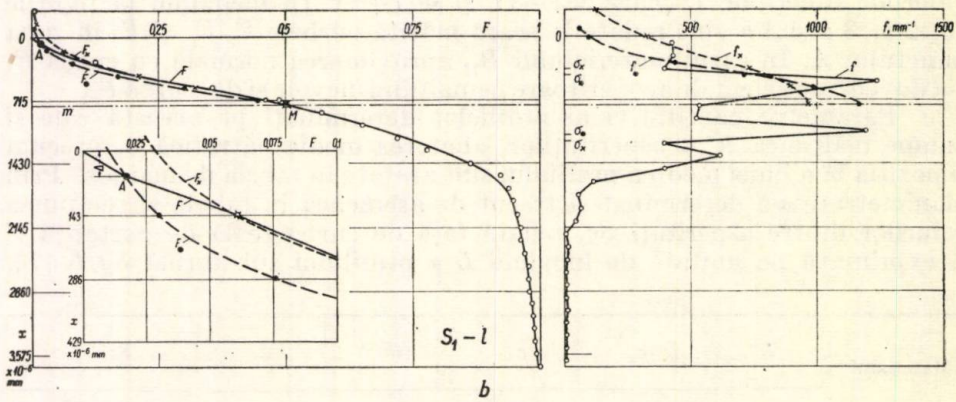
În aceste diagrame s-a notat în ceea ce priveşte portanţa : cu F curba de portanţă reală a profilului ; cu f, f_x şi $f.$ curbele densităţii de probabilitate corespunzătoare curbelor F, F_x şi $F.$; cu σ, σ_x şi $\sigma.$ abaterile medii pătratice corespunzătoare curbelor F, F_x şi $F.$, determinate cu ajutorul valorilor funcţiilor Laplace $\Phi(-1)$ şi Φ $(+1)$. În medalion la figurile 1b, 2 b, 3 b şi 4 b sînt redate la scară mărită curbele F, F_x şi $F.$ în zona punctului A. În cazul materialului B_{14} aproximarea normală cu curba F s-a dovedit suficient de acoperitoare nemaifiind nevoie şi de curba F_x.

Parametrii cantitativi ai profilelor determinaţi pe această cale şi anume înălţimea R^x a asperităţilor, abaterea medie pătratică σ, precum şi poziţia $\overline{m}$ a liniei medii a profilului sînt arătate în tabela de mai jos. Prin planimetrare s-a determinat şi trecut de asemenea în tabelă şi secţiunea golurilor dintre asperităţi Sg, redată faţă de curba reală de portanţă F şi exprimată pe unitate de lungime L a profilului sub formă Sg/L [7].

Materialul	R^x	σ_x	$\sigma.$	$\overline{m}$	Δ	Sg/L
	$\times 10^{-6}$ mm					$\times 10^{-6}$ mm²/mm
$S_1 - l$	1544,4	414,7	343,2	772,2	46,33	872
$S_1 - n$	2458	686	—	1229	—	—
$P_2 - l$	1144	257,4	229	572	34,32	647
$P_2 - n$	1430	315	—	715	—	—
$B_{14} - l$	2087,8	—	572	1043,9	62,63	1082
$B_{14} - n$	2298	631	—	1144	—	—
$B_8 - l$	3146	800,8	686,4	1573	94,38	1994
$B_8 - n$	4576	1173	—	2288	—	—

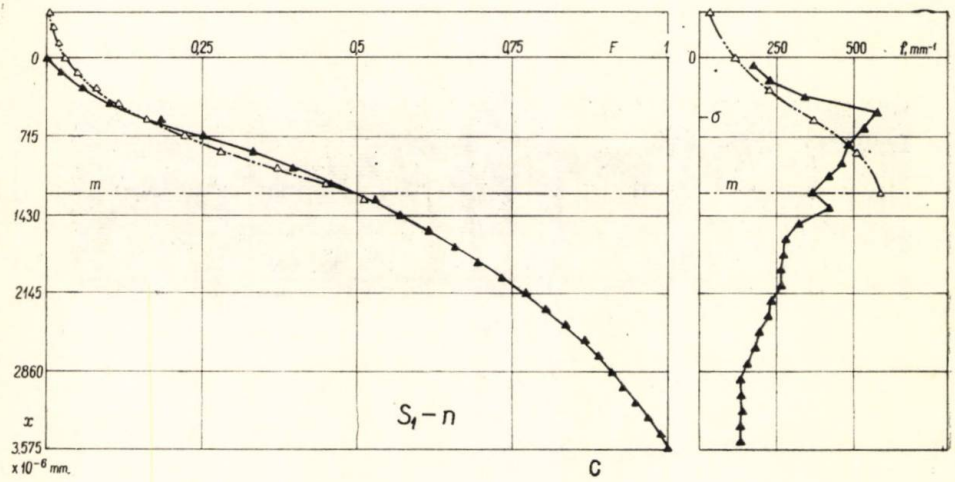


a


0,25
0,5
0,75
F
1
0
715
1430
2145
2860
3575
x 10⁻⁶ mm
A
M
m
0,025
0,05
0,075
0,1
143
286
429
x 10⁻⁶ mm
S₁ – l
500
1000
f, mm⁻¹
1500

b

Fig. 1 *a*, *b*


0
0,25
0,5
0,75
F
1
715
m
1430
2145
2860
x
3.575
x10⁻⁶ mm.
S₁ – n
c
0
250
500
f, mm⁻¹
σ
m

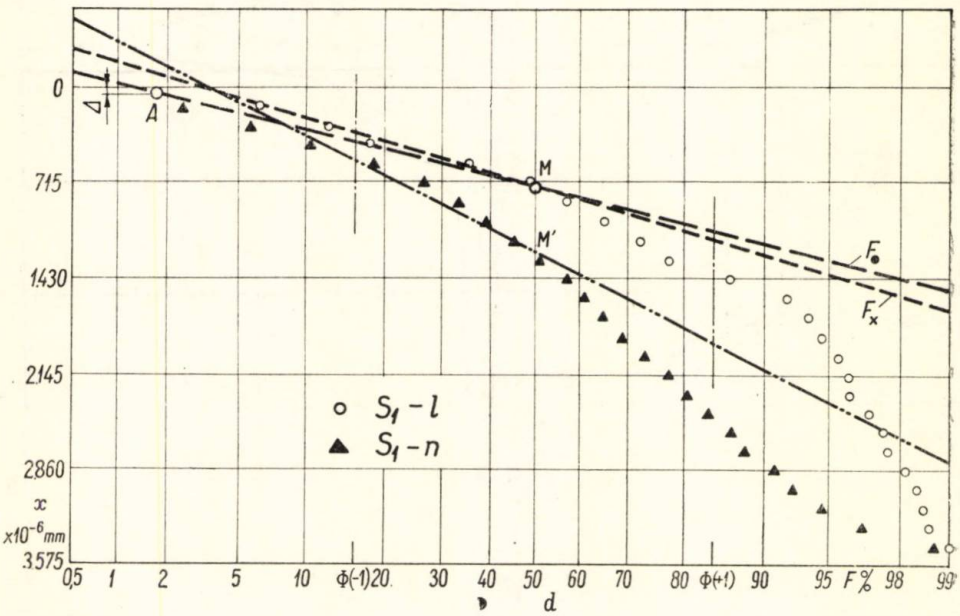
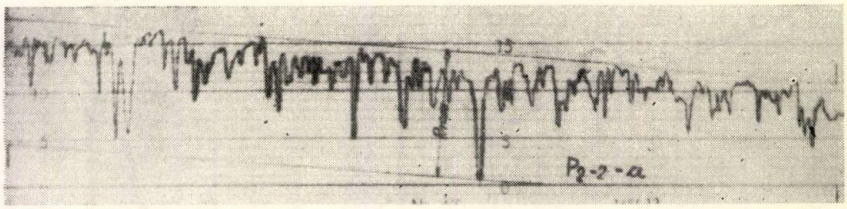
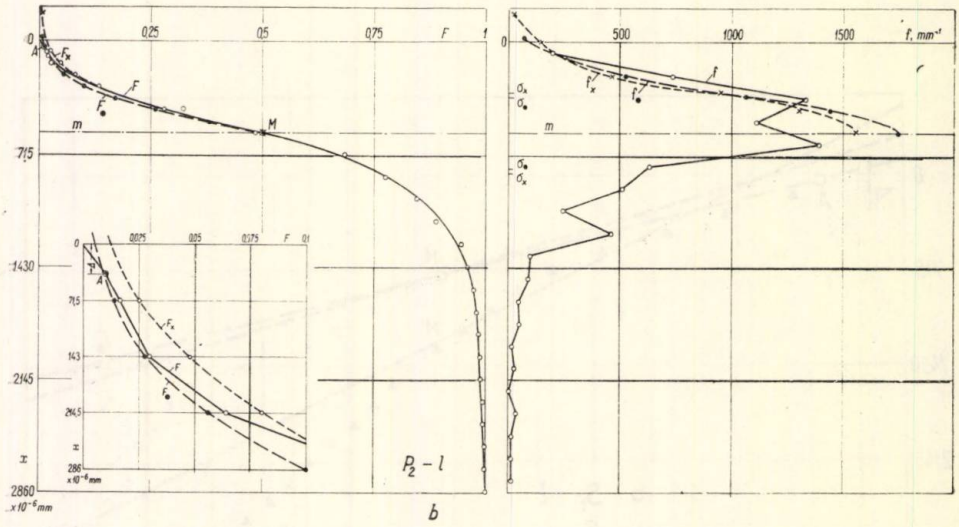

0
715
1430
2145
2860
x
x10⁻⁶mm
3.575
Δ
A
M
M'
F
Fx
S₁ – l
S₁ – n
0,5
1
2
5
10
Φ(-1)
20
30
40
50
60
70
80
Φ(+1)
90
95
F %
98
99
d

Fig. 1 *c*, *d*


P2-2-a

a


0
0,25
0,5
0,75
F
1
500
1000
1500
f, mm⁻¹
m
M
7,15
14,30
21,45
28,60
x 10⁻⁶ mm
P2 – l

b

Fig. 2 *a*, *b*

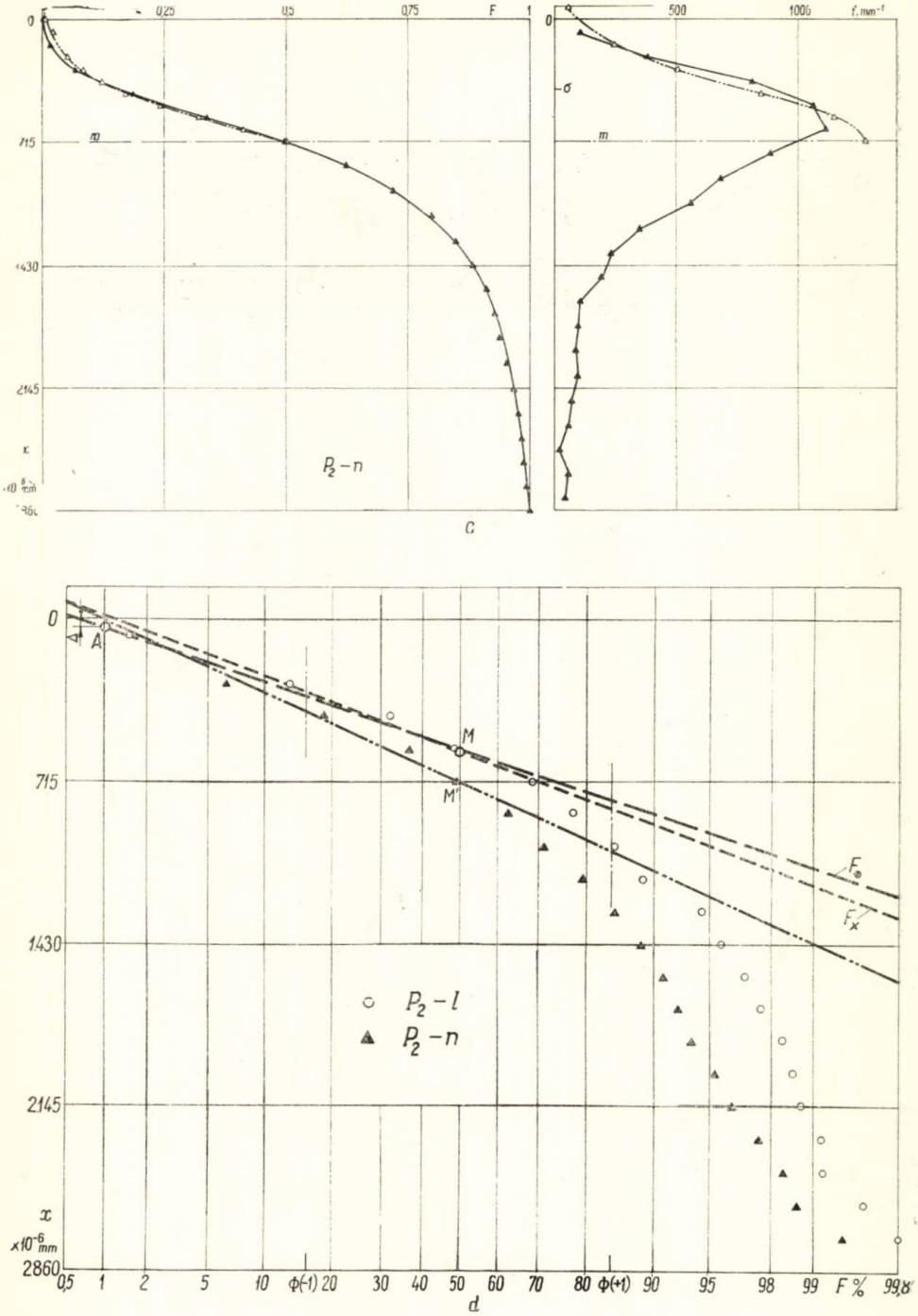
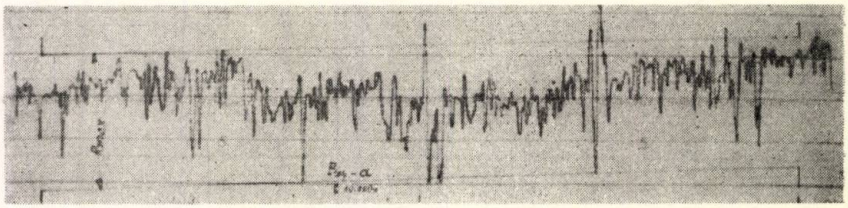
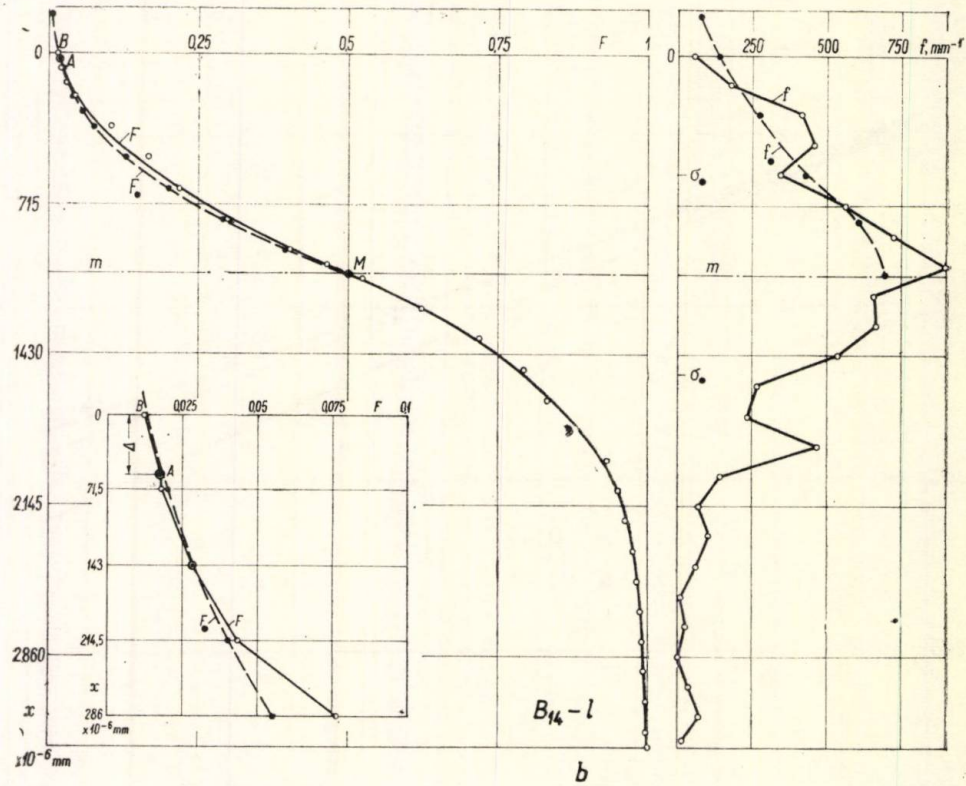

0,25
0,5
0,75
F
1
500
1000
f, mm⁻¹
0
715
1430
2145
x
m
σ
$P_2 - n$
c
A
M
M'
$F_\oplus$
F_x
$P_2 - l$
$P_2 - n$
x
$\times 10^{-6}$ mm
2860
0,5
1
2
5
10
Φ(-1)
20
30
40
50
60
70
80
Φ(+1)
90
95
98
99
F %
99,8
d

Fig. 2 *c*, *d*

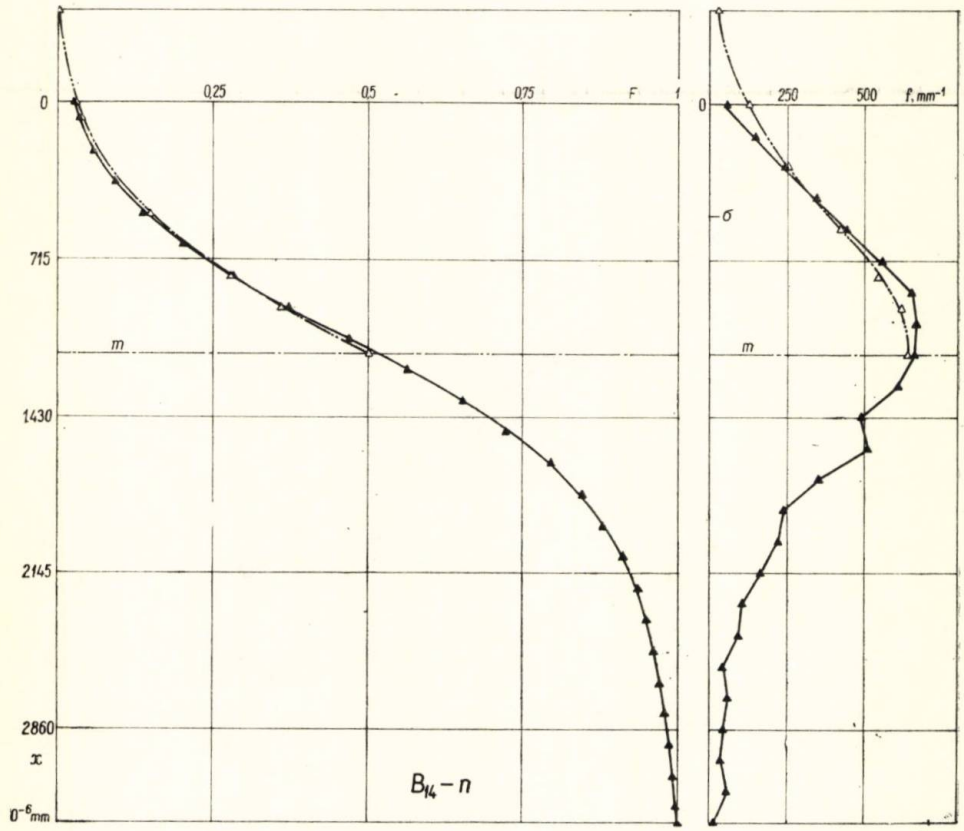


a


B
A
0,25
0,5
0,75
F
1
0
715
1430
2145
2860
m
M
x
x10⁻⁶mm
B14 – l
250
500
750
f, mm⁻¹
f
σ
0,025
0,05
0,075
71,5
143
214,5
286

b

Fig. 3 *a*, *b*


0
0,25
0,5
0,75
F
1
715
m
1430
2145
2860
x
10^{-6}mm
$B_{14}-n$
0
250
500
f, mm^{-1}
σ
m

c

Fig. 3 c

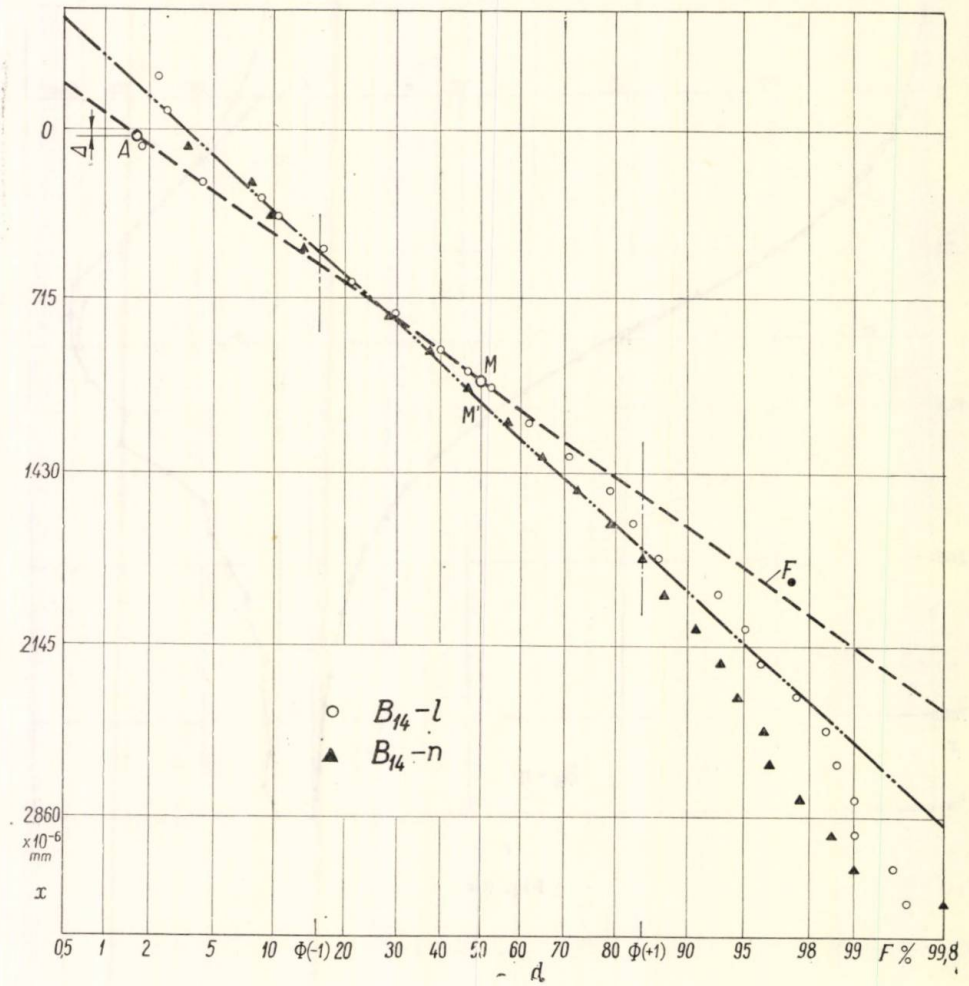
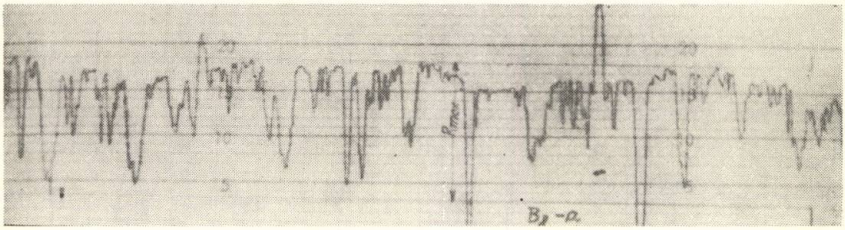
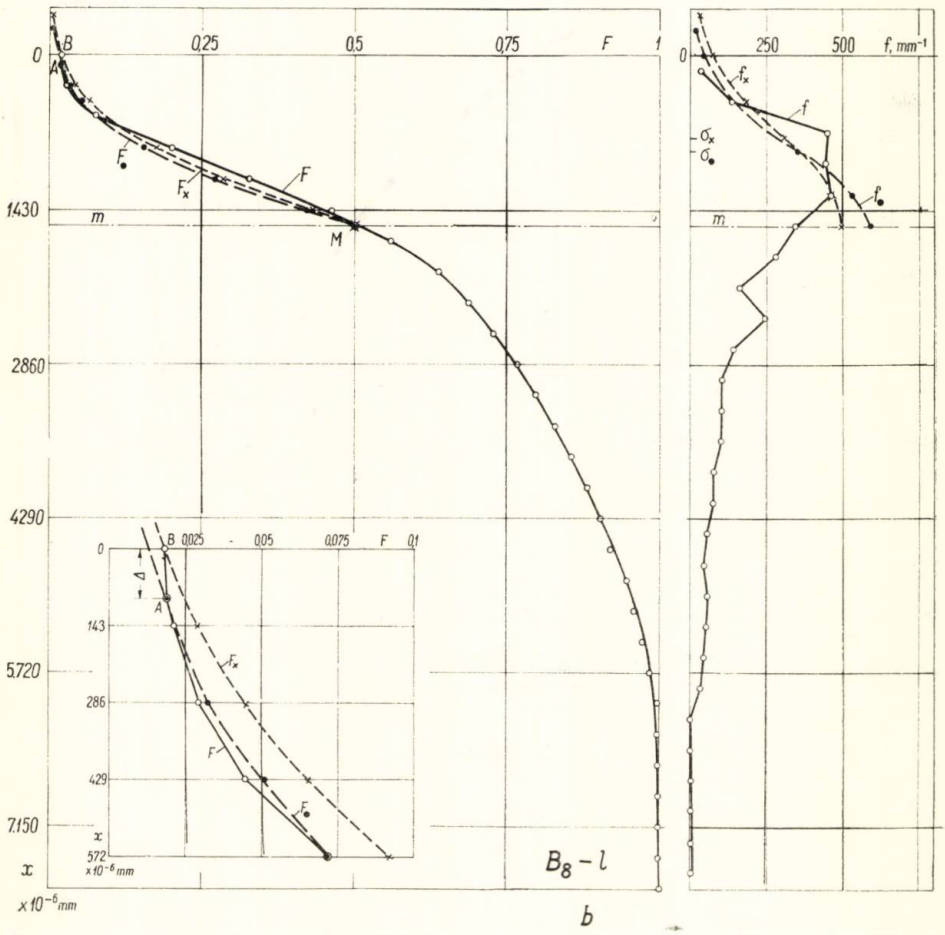

0
715
1430
2145
2860
x 10⁻⁶ mm
x
Δ
A
M
M'
F
B14 – l
B14 – n
0,5
1
2
5
10
Φ(-1)
20
30
40
50
60
70
80
Φ(+1)
90
95
98
99
F %
99,8
d

Fig. 3 *d*


B₈ - a

a


0
B
0,25
0,5
0,75
F
1
A
F
Fx
M
m
1430
2860
4290
5720
7150
x
x 10⁻⁶mm
0
250
500
f, mm⁻¹
fx
f
σx
σ
m
B 0,025
0,05
0,075
F
0,1
143
286
429
572
B₈ - l

b

Fig. 4 *a*, *b*

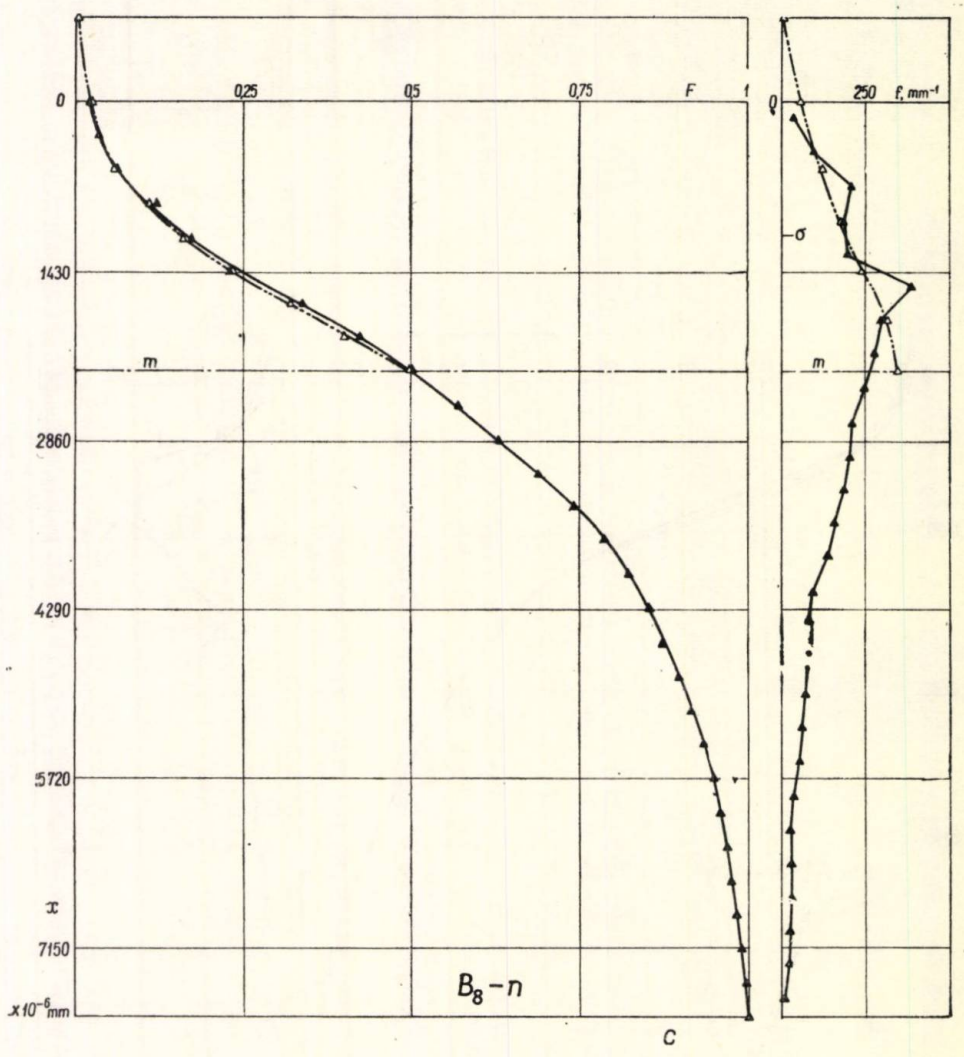

0
0,25
0,5
0,75
F
1
0
250
f, mm⁻¹
1430
m
2860
4290
5720
x
7150
x10⁻⁶mm
B8 – n
C
σ
m

Fig. 4 c

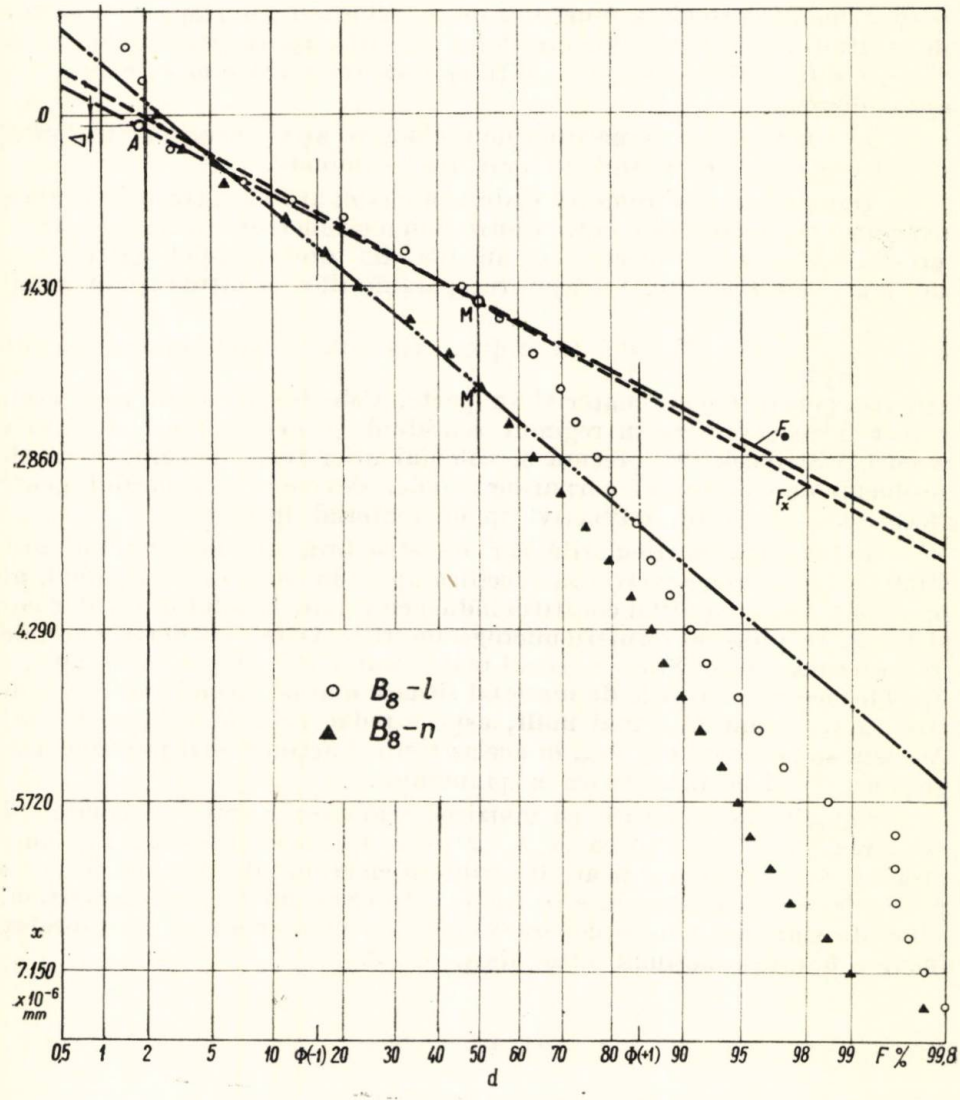

0
1.430
2.860
4.290
5.720
x
7.150
x 10⁻⁶ mm
Δ
A
M
M
F₀
Fₓ
B₈ - l
B₈ - n
0,5
1
2
5
10
Φ(-1)
20
30
40
50
60
70
80
Φ(+1)
90
95
98
99
F %
99,8
d

Fig. 4 *d*

5. CONCLUZII

Din tratarea statistică a acestor profile, rezultă că profilele de microgeometrie specifică prezintă în general particularitatea că pentru caracterizarea lor cantitativă în ipoteza distribuţiei normale, apare necesară o aproximare normală a funcţiilor de distribuţie reale respective pe zone de înălţimi ale asperităţilor profilului. Această aproximare zonală se dovedeşte a fi posibilă punînd condiţii ce caracterizează zona în care se face aproximarea.

În cazul microgeometriilor de prelucrare apar uneori particularităţi de altă natură, care sînt în curs de examinare.

Diagramele şi parametrii deduşi în modul arătat şi trecuţi în tabelă, exprimă cantitativ diferenţa dintre microgeometriile specifice care se produc în cazul asocierii cu un fus din oţel a celor patru tipuri de materiale studiate. Cu ajutorul parametrilor σ introduşi în relaţia $F = \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x} - \bar{m})}{2\sigma^2}} d\bar{x}$ se obţin expresiile acestor funcţii de distribuţie pentru fiecare material în parte. Calculul ponderii contactului direct între suprafeţe în regimul semifluid şi deci ramura respectivă a curbei Stribeck [9], precum şi calculul ariei reale de contact în alte probleme de contact al corpurilor solide, devine astfel posibil pentru fiecare tip de profil, respectiv tip de material, în parte.

Reflectarea particularităţilor de structură ale materialului antifricţiune în microgeometria sa specifică apare în cazul de faţă global, numai unele aspecte putînd constitui indicii cu privire la rolul diferiţilor constituenţi în procesul formării microgeometriei. Astfel, ponderea mai mică în structură a fazei SnSb în cazul materialului P_2 (12% faţă de 20% în S_1 [4]) face ca straturile de material situate mai la nivelul suprafeţei active să fie frămîntate mai mult, aspect redat prin $R^x\ (P_2) < R^x\ (S_1)$. Aceasta se poate datora însă în acelaş timp şi acţiunii mai puternic antigripante şi deci netezitoare a plumbului.

Constituţia structurii cu matricea semidură, cazul B_{14}, conduce la creşterea lui R^x. Faptul că la B_8 R^x este mai mare decît la B_{14}, adică profilul este mai rugos, poate fi atribuită efectului abraziv mai intens al particulelor de cupru sudate pe fus [4]. În cazul lui B_{14}, aceste particule aderente sînt mai reduse deoarece sînt rase permanent de pe suprafaţa fusului datorită acţiunii fazei dure $\alpha + \delta$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, H. Pascal, *Micro- and Macrogeometry Effects on Pressures in Three-Dimensional Lubrication*, I. Plan Surfaces. Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., **11**, (1966) şi *3* (699).
2. S. T. Tzeng, E. Saibel, *On the Effects of Surface Roughness in the Hydrodynamic Lubrication Theory of a Short Bearing*, Wear, **10**, *3*, 179 (1967).
3. M. H. Jones R.J.L. Howells, S. D. Probert, *Solid in Static Contact*, Wear, **12**, *4*, 225 (1968).
4. Gh. Vasilca, Olga Biţă, *Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
5. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, vol. 1, 1964.

6. Gh. Vasilca, Veturia Raszillier, *Gesichtspunkte zur Charakterisierung der spezifischen Mikrogeometrie von geschmierten Reibungsflächen*, Vortrag zum 9. Internationalen Symposion „Schmierstoffe und Schmiertechnik", Leipzig, August 1967.

7. Gh. Vasilca, Veturia Raszillier, *Aspecte cantitative privind microgeometria specifică a suprafețelor de frecare*, St. cerc. mec. apl., **27**, 2 (1968).

8. T. Tsukizoe, T. Hisakado, *On the Mechanism of Contact Between Metal Surface*, Part 2 — *The Real Area and the Number of the Contact Points*, Trans. of the ASME, Jan. 1968.

9. Gh. Vasilca, Veturia Raszillier, *Über das Gleitregime in der Abstellperiode der betriebsmässig belasteten Lager, unter Berücksichtigung der Reibungsflächenrauhigkeit*, Vortrag zmu 10. Internationalen Symposion „Schmierstoffe und Schmierungstechnik", Halle, Aug. 1968.

STADIUL ACTUAL ÎN DINAMICA MECANISMELOR CU CAME

II. MODELUL MONOMASIC LA STUDIUL MECANISMULUI DE DISTRIBUŢIE AL MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ.

de ION SAVA
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea prezentă este partea a doua a sintezei „Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came", care în continuarea primei părţi, analizează rezultatele utilizării modelului monomasic, la studiul comportării distribuţiei motoarelor cu ardere internă.
Se trec în revistă modele mai complexe de studiu apoi se face o apreciere critică a modelelor analizate.

O particularitate a mecanismelor de distribuţie a motoarelor cu ardere internă este aceea că piesa ce comandă admisia şi evacuarea gazelor din motor, supapa, se află dispusă la capătul lanţului cinematic al distribuţiei aşa după cum se vede în figura 15 *a*.

Această dispoziţie, face ca mişcarea transmisă supapei de către camă, să sufere importante modificări comparativ cu aceea considerată la proiectare, pe considerente cinematice. Nu rare ori modificările au o asemenea intensitate încît pot deteriora funcţionarea în ansamblu a mecanismului.

Vitezele motoarelor contemporane avînd o pantă ascendentă impun considerarea comportării dinamice a mecanismului de distribuţie.

În vederea scrierii matematice a mişcării elementelor distribuţiei, este necesară găsirea unui model intuitiv care să reproducă cît mai fidel funcţionarea mecanismului.

Se menţionează că prezenţa vibraţiilor face ca să se distrugă continuitatea lanţului cinematic iar mişcarea devine haotică mai ales în apropierea rezonanţei.

Pentru o funcţionare normală a mecanismului, structura lui nu se schimbă şi atunci poate fi înlocuit, fără a face erori mari, cu un model dinamic.

În afara ipotezelor de la capitolul I.1, considerate la alcătuirea modelului , aici se menţionează că se studiează numai mişcarea de ridicare a urmăritorului. Acest lucru fiind posibil, deoarece după fiecare ridicare

oscilațiile se sting complet și deci ciclurile sînt independente, realizîndu-se în aceleași condiții.

Luînd în considerare figura 15*a*, modelul dinamic intuitiv este redat în figura 15 *b*, unde notațiile au următoarele semnificații :

c este constanta elastică a resortului supapei,

c_k — constanta elastică pentru culbutor și se măsoară pe axa supapei,

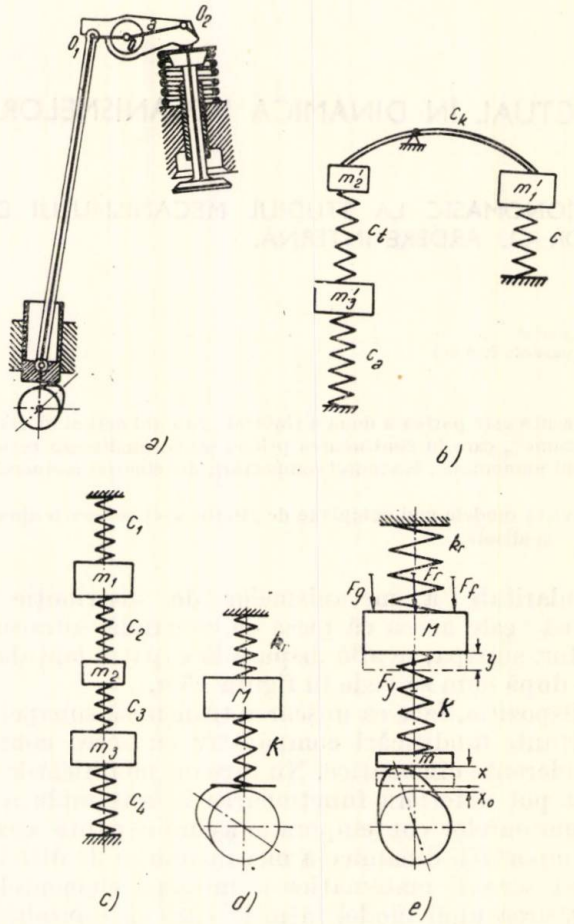


Fig. 15. — Schema mecanismului de distribuție și diversele sale modele dinamice intuitive.

c_t — constanta elastică pentru tija împingătoare,

c_a — constanta elastică pentru arborele de distribuție și se măsoară pe săgeata sa,

m_1' — masa supapei, a pieselor de fixare ale resortului reduse la supapă și o parte a masei culbutorului,

m_2' — masa supapei pentru restul masei culbutorului și parțial pentru tija împingătoare,

m_3' — masa supapei pentru restul tijei, tachet și arborele de distribuție.

Fără a se scri modelul matematic pentru figura 15*b*, s-a trecut la simplificarea sa care presupune toate masele pe axa supapei, aşa cum arată figura 15 *c*.

Aici semnificaţia notaţiilor se păstrează iar expresiile lor sînt :

$$m_1=m_1';\ m_2=m_2'/i^2;\ m_3=m_3'/i^2;\ c_1=c;\ c_2=c_k;\ c_3=c_t/i^2;\ c_4=c_a/i^2 \quad (52)$$

unde i este raportul braţelor culbutorului.

Scriind forţele care acţionează asupra maselor m_i, se pot obţine ecuaţiile lor de mişcare, care, rezolvate împreună, conduc la cunoaşterea mişcării lor reale.

Rezolvarea laborioasă şi rezultatele insuficient de comode pentru analiză, au determinat simplificarea modelului, considerînd următoarele ipoteze suplimentare :

— masa m_2 este mică comparativ cu masele m_1 şi m_3 ($\simeq 1, \approx 1/20$).

— constanta elastică a arborelui este de circa 5 la 10 ori mai mare decît constanta elastică a tuturor celorlalte elemente considerate împreună,

— perturbaţia provocată prin deplasarea tachetului, este puţin influenţată chiar de cele mai joase frecvenţe proprii ale sistemului, dacă s-au luat măsuri pentru preîntîmpinarea ciocnirilor dintre elemente,

— singura mişcare care interesează este aceea a supapei.

Astfel eliminarea masei m_2 şi fixarea masei m_3, transformă sistemul iniţial într-unul monomasic ca în figura 15 *d*, unde semnificaţia notaţiilor este următoarea :

K este constanta elastică a lanţului cinematic al distribuţiei redusă la supapă,

k_r — constanta pentru resort,

M — masa redusă la supapă a elementelor lanţului cinematic, considerate parţial.

În scopul determinării corecte a forţei provocată tachetului de către camă, se introduce masa m care execută mişcarea dată de camă dar care nu participă la oscilaţiile sistemului, aşa că modelul dinamic intuitiv are forma redată în figura 15*e*.

1. MODELUL MATEMATIC CORESPUNZĂTOR MIŞCĂRII SUPAPEI

Acesta corespunde, conform ecuaţiei 1, modelului matematic 2, care pentru cazul de faţă are una din următoarele două forme :

$$y'' + \frac{b}{M\omega} y' + \frac{K+k_r}{M\omega^2} y = \frac{b_1}{M\omega} x' + \frac{K}{M\omega^2} x - \frac{F_0+F_g}{M\omega^2}, \quad (53)$$

$$z'' + \frac{b}{M\omega} z' + \frac{K+k_r}{M\omega^2} z = x'' + \frac{b_2}{M\omega} x' + \frac{k_r}{M\omega^2} x + \frac{F_0+F_g}{M\omega^2}, \quad (54)$$

unde semnul prim, indică derivarea în raport cu unghiul de rotaţie al camei.

Cele două ecuații 53 și 54, sînt ecuații diferențiale liniare, neomogene de ordinul II cu coeficienți constanți (ω este considerat constant pentru viteze mari de rotație). Diferența dintre ele se manifestă numai prin membrii din dreapta, deoarece

$$z = x - y,$$

unde z este deformația elastică a sistemului,

x — deplasarea imprimată de rotirea camei și are expresia $x = is - x_0$, cu s legea de profilare a camei, iar x_0 deplasarea corespunzătoare preluării jocului dintre elementele lanțului cinematic.

y — deplasarea supapei considerată absolută.

Prin urmare ecuația (53) descrie mișcarea absolută a supapei iar ecuația 54 deplasarea ei relativă, adică deformația sistemului.

2. DETERMINAREA MĂRIMILOR DIN ECUAȚIILE DE MIȘCARE

a) *Determinarea masei M și a constantei elastice C.* Este evident că rezolvarea problemei considerînd modelul 15*c*, deși este mai dificilă, conduce la rezultate mai veridice decît în cazul modelului monomasic. Pentru ușurința rezolvării se consideră modelul monomasic, însă valorile masei și constantei elastice reduse la supapă, se calculează considerînd modelul dinamic intuitiv trimasic din figura 15 *c*.

Notînd prin z_i, pozițiile celor trei mase, energiile cinetică și potențială au expresiile.

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{z}_1^2 + m_2\dot{z}_2^2 + m_3\dot{z}_3^2);$$

$$V = \frac{1}{2}[c_1z_1^2 + c_2(z_1 - z_2)^2 + c_3(z_2 - z_3) + c_4z_4]. \tag{55}$$

Folosind ecuația lui Lagrange, se obțin ecuațiile de mișcare pentru toate masele sistemului:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + c_1z_1 + c_2(z_1 - z_2) &= 0, \\ m_2\ddot{z}_2 - c_2(z_1 - z_2) + c_3(z_2 - z_3) &= 0, \\ m_3\ddot{z}_3 - c_3(z_2 - z_3) + c_4z_3 &= 0, \end{aligned} \tag{56}$$

care descrie oscilații armonice de forma

$$z_i = A_i \sin(\nu t + \alpha), \tag{57}$$

unde A_i, este amplitudinea masei de ordinul i,
ν — frecvența oscilațiilor proprii sistemului,
α — faza inițială a oscilației.

Introducînd ecuația (57) în ecuația (56), se obține ecuația de frecvență

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1\nu^2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 - m_2\nu^2 & -c_3 \\ 0 & -\frac{c_3}{c_4} & \frac{c_3}{c_4} + 1 - \frac{m_3\nu^2}{c_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Cunoscînd amplitudinile $A_2 = f(A_1)$ și $A_3 = f(A_1)$ din ecuațiile (56) și (57), iar din ecuația (58) frecvența ν, se pot determina energiile cinetică și potențială cu ecuațiile (55).

Energiile modelelor trimasic și monomasic înlocuitor, trebuie să fie egale :

$$T_{\max}^{3m} = T_{\max}^{1m}; \quad V_{1m}^{3m} = V_{\max}^{1m},$$

de aici rezultînd relațiile de calcul pentru masa și constanta elastică redusă a sistemului monomasic :

$$M = m_c + \frac{1}{3} m_r + \frac{J_k}{a^2} + \frac{1}{3} m_t \left(\mathrm{i} \frac{K}{c_t}\right)^2, \tag{59}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{c_k} + i\left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_a}\right), \tag{59}$$

unde m_c este masa supapei,
m_r — masa resortului supapei,
J_k — momentul de inerție al culbutorului,
a — distanța dintre axa culbutorului și axa supapei,
m_t — masa tijei împingătoare.
Celelalte notații au semnificația cunoscută.

b) *Determinarea forțelor F_f, F_r, F_e și F_v.* Forța de frecare se scrie sub forma

$$F_f = b_1\dot{z} - b_2\dot{y},$$

unde b_1 este coeficientul convențional al rezistențelor interioare ale sistemului urmăritor, b_2 — coeficientul rezistențelor exterioare.

Forța resortului, pentru caracteristica sa liniară, este dată de relația

$$F_r = F_0 + k_r y,$$

unde F_0, este prestrîngerea resortului supapei.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Forţa gazelor corespunde presiunii din cilindrul motorului în momentul deschiderii supapei de evacuare, a cărei lege de variaţie nu este cunoscută, acţiunea ei manifestîndu-se sub formă de impulsuri.

Pentru considerarea sa în calcule, s-au propus diferite legi de variaţie, stablindu-se astfel, numai calitativ, influenţa ei.

Forţa elastică a sistemului este proporţională cu deformaţia sa

$$F_y = Kz.$$

3. REZOLVAREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE

Soluţia exactă a ecuaţiei 54 are următorul aspect:

$$z(\varphi) = e^{-\frac{b}{2M\omega}(\varphi-\varphi_0)}\left[z_0 \cos\frac{\nu_1}{\omega}(\varphi-\varphi_0) + \left(z_0'\frac{\omega}{\nu_1} + \frac{b}{2M\nu_1}z_0\right)\sin\frac{\nu_1}{\omega}(\varphi-\varphi_0)\right] +$$

$$+ \frac{\omega_1}{\nu_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{-\frac{b}{2M\omega}(\varphi-\alpha)}\left[x''(\alpha) + \frac{b_2}{M\omega}x'(\alpha) + \right. \tag{60}$$

$$\left. + \frac{K}{M\omega^2}x(\alpha) + \frac{F_0 + F_g}{M\omega^2}\right]\sin\frac{\nu_1}{\omega}(\varphi-\alpha)\,d\alpha,$$

unde

$\nu_1 = \sqrt{\frac{K+k_r}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}$ este frecvenţa de amortizare a vibraţiilor proprii sistemului,

$z_0 = z(\varphi_0)$ şi $z_0' = z'(\varphi_0)$ — valoarea iniţială a deformaţiei sistemului şi derivata ei,

$b = b_1 + b_2$ — suma coeficienţilor rezistenţelor interioare şi exterioare.

Dificultăţile ridicate de calculul integralei din soluţia (60), face ca utilizarea ei practică să fie exclusă, cu excepţia cazurilor cînd interesează valoarea caracteristicilor numai în anumite puncte.

Ecuaţia diferenţială (54), se poate rezolva însă cu uşurinţă fie aplicînd modelarea electronică fie folosind calculatoarele numerice.

În figura 16, este redată schema bloc pentru rezolvarea ecuaţiei de mişcare prin modelarea analogică.

Problema dificilă a acestui mod de rezolvare, constă în realizarea generatorului de funcţii, ce precede blocul coeficientului variabil Acest mod de rezolvare are avantajul redării directe a soluţiei, prin trasarea curbelor în comparaţie cu calculatoarele numerice unde se obţin, funcţiile ce interesează, prin puncte.

Oricîtă atenţie s-ar da alegerii scărilor pentru variabilele z şi z', rezolvarea are o precizie limitată în comparaţie cu aceea obţinută prin

folosirea calculatoarelor numerice, iar pentru studiul ecuației de mișcare a distribuției nu are decît o valoare calitativă.

Pentru a ilustra utilitatea soluționării ecuației diferențiale (54), în continuare, se redă un exemplu de calcul concret pentru a cărei rezol-

Ecuația

$$z'' = -\frac{b}{M\omega} z' - \frac{K+k_r}{M\omega^2} z + x'' + \frac{k_r x + f_0 + f_g}{M\omega^2}$$

Observație:
la rezolvare s-a considerat
$b_2 = 0$

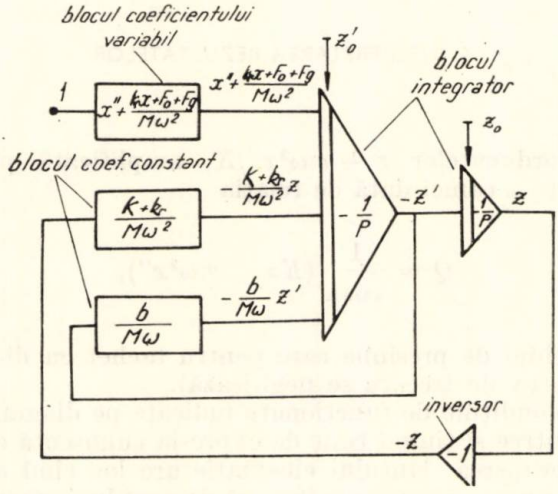


Fig. 16. — Schema bloc a modelului analogic de rezolvare a ecuației (60).

vare s-a făcut uz de calculatorul electronic. Pentru un sistem de date cunoscut s-au calculat, cu relațiile corespunzătoare, coeficienții ecuației diferențiale (54) astfel încît forma ei este următoarea:

$$z'' + 2{,}02z' + 356z = x'' + 3{,}40x + 32{,}8,$$

cu următoarele condiții inițiale: $z_0 = 0{,}093$ mm iar $hz_0' = 0{,}0225$ mm, iar cînd se consideră și presiunea gazelor, adică F_g, $z_0 = 0{,}168$ mm și $hz_0' = 0{,}0225$ mm, unde h este pasul punctelor considerate.

Se remarcă faptul că modificarea jocului dintre elemente, a forței de prestrîngere a resortului supapei și a constantei elastice a sistemului, atrage modificarea valorii condițiilor inițiale.

În figura 17 *a*, sînt redate curbele z şi z', reprezentînd soluţia ecuaţiei (54) şi respectiv derivata acesteia în raport cu unghiul φ. Celelalte curbe au semnificaţia următoare;

x este curba deplasării masei m, a cărei mărime este dată de relaţia

$$m = \frac{m_t + m_{\text{tachet}}}{i^2} - \frac{1}{3} m_t \left(i \frac{K}{c_t} \right),$$

z_{st} — curba reprezentînd deformaţia sistemului fără considerarea oscilaţiilor mecanismului şi este dată de relaţia

$$z_{st} = \frac{M\omega^2 x'' + F_0 + k_r x}{K},$$

$\frac{m\omega^2 x}{K}$ — deplasarea elastică a masei m.

4. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Observaţii

1. Suma ordonatelor $z + m\omega^2 x''/K$, amplificată prin Ci, indică forţa de încărcare a camei dată de relaţia

$$Q = \frac{1}{\cos \varkappa} (Kz + m\omega^2 x''),$$

unde $\varkappa$ este unghiul de presiune care pentru tachet cu disc plan are valoarea $\varkappa = 0$ (forţa de frecare se neglijează).

2. Pentru condiţiile de funcţionare indicate pe diagramă, ordonatele curbei z sînt pozitive şi ţinînd cont de expresia cunoscută ca semnificaţie, $z = x - y$, întreruperea lanţului cinematic are loc cînd deplasarea y a masei M este mai mare decît aceea impusă de profilul camei x adică atunci cînd

$$z \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad z + \frac{m\omega^2 x''}{K} \leqslant 0,$$

rezultă deci continuitatea lanţului cinematic.

3. Pentru oscilaţii mici, diferenţa dintre încărcarea reală pe tijă considerînd oscilaţiile şi aceea neconsiderîndu-le nu este mare (a se compara z_{st} cu z). Pentru oscilaţii mari diferenţa creşte.

4. Aşezarea supapei pe scaun se face în condiţiuni bune deoarece curbele x şi z nu se intersectează. Această afirmaţie, are o valoare relativă deoarece înclinarea supapei în ghidaje şi erorile de fabricaţie ale profilului nu au fost considerate la alcătuirea ecuaţiei diferenţiale (54) şi uneori influenţa acestora asupra funcţionării distribuţiei poate anula diferenţa destul de mică dintre curbele x şi z.

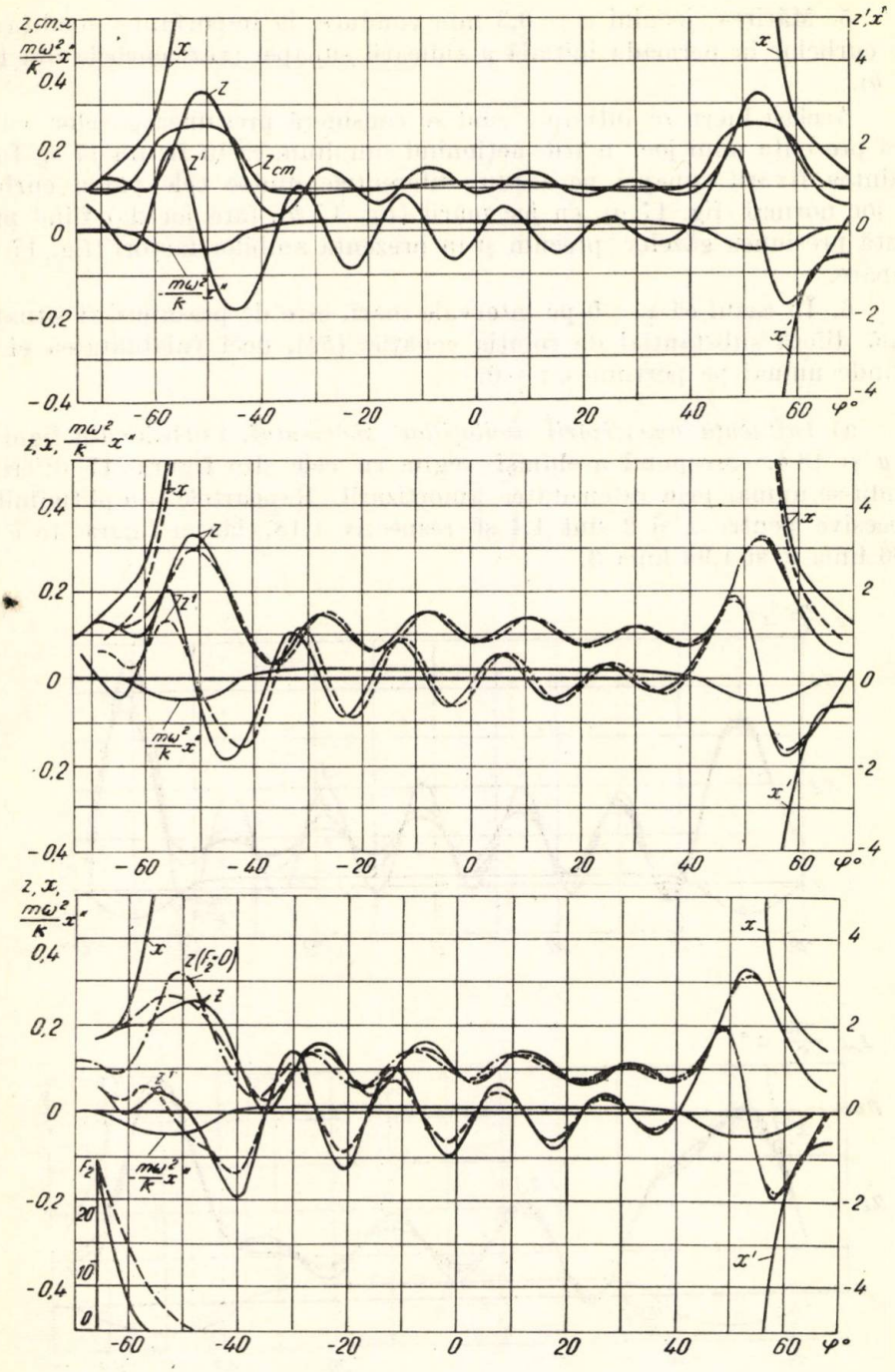


Fig. 17. — Soluția ecuației (54) pentru diferite jocuri și forțe de presiune ale gazelor.

5. Mărirea jocului $x = 0{,}3$ mm conduce la importante modificări ale curbelor în perioada inițială a ridicării supapei (vezi curbele din fig. 17 *b*).

Același lucru se întîmplă cînd se consideră presiunea gazelor, cu și fără prezența unui joc, mărit, acționînd simultan, ca în figura 17 *c*. Însă înaintea fixării supapei pe scaun, diferențele dintre cele patru curbe: cu joc normal (fig. 17 *a*), cu joc mărit (fig. 17 *b*), fără joc dar fiind prezentă presiunea gazelor, precum și în prezența ambilor factori (fig. 17 *c*), dispare.

6. În cazul că $z < 0$ pe intervale mari, este de presupus că situația reală diferă substanțial de soluția ecuației (54), deci valabilitatea ei se întinde numai pe porțiunea $z > 0$.

a) *Influența amortizării oscilațiilor sistemului.* Curbele din figurile 18 *a* și 18 *b*, corespund aceluiași regim ca cele din figura 17 diferențiindu-se numai prin intensitatea amortizării. Rapoartele amplitudinilor succesive pentru 1 și 2 sînt 1,4 și respectiv 1,18, iar în figura 18 *b* — 1,66 linia 2 și 1,96 linia 3.

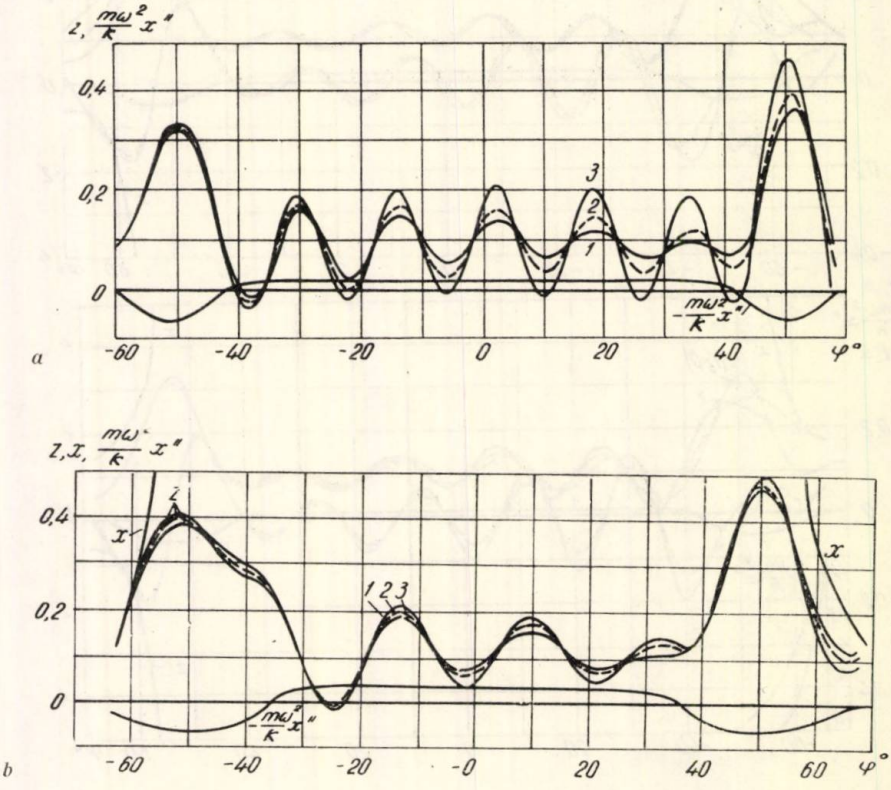


Fig. 18. — Influența intensității amortizării asupra proprietăților dinamice ale supapei de evacuare.

Se observă că amortizarea modifică curba z, atenuînd vîrfurile amplitudinilor şi deci sarcinile maxime suportate de tijă şi tachet sînt mai reduse.

Prin urmare, pentru o apreciere justă a comportării dinamice a distribuţiei se impune considerarea amortizării.

Lipsa datelor privind frecarea în mecanismele distribuţiei face ca coeficienţii corespunzători să aibă numai o valoare orientativă.

b) *Influenţa numărului de turaţii ale motorului.* Creşterea numărului de turaţii duce la o înrăutăţire accentuată a parametrilor de funcţionare, aşa după cum se poate vedea în figura 19, astfel :

— se întrerupe lanţul cinematic deoarece $z < 0$,

— se înrăutăţeşte aşezarea supapei pe scaun, deoarece curbele z şi x nu se intersectează iar viteza de şoc a supapei, în acest caz, se determină amplificînd prin ω distanţa dintre curbele z' şi x', la acelaşi unghiu φ, la care se intersectează curbele z şi x,

— mărimea jocului (curba întreruptă), simultan cu creşterea turaţiei, conduce la mărirea excesivă a vitezei de aşezare prematură a supapei pe scaunul său ($v_{ad} = 0{,}5-0{,}8$ m/sec). După lovitură, supapa se reaşează, reprezentînd o sursă de vibraţii suplimentară pentru mecanism,

— creşterea turaţiei impune un control al comportării arcului la vibraţii, deoarece ecuaţia (54) nu ţine seamă de acestea.

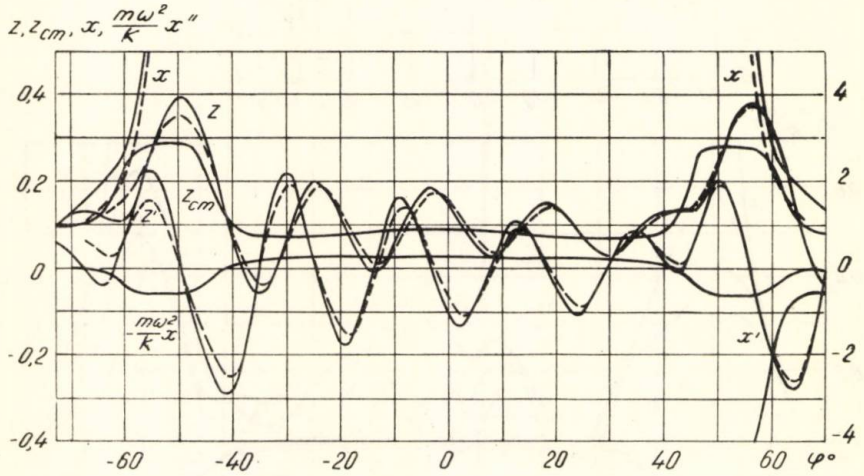


Fig. 19. — Influenţa creşterii turaţiei motorului asupra soluţiei ecuaţiei (54).

c) *Influenţa forţei arcului supapei.* Mărirea forţei arcului supapei se consideră baza preîntîmpinării întreruperii lanţului cinematic al distribuţiei, însă simultan apare şi o creştere a încărcării pe toate elementele mecanismului, accelerînd uzura lor.

d) *Influența frecvenței oscilațiilor proprii ale sistemului.* Din figura 20 *a* rezultă influență negativă a frecvenței oscilațiilor proprii asupra caracteristicilor dinamice ale distribuției.

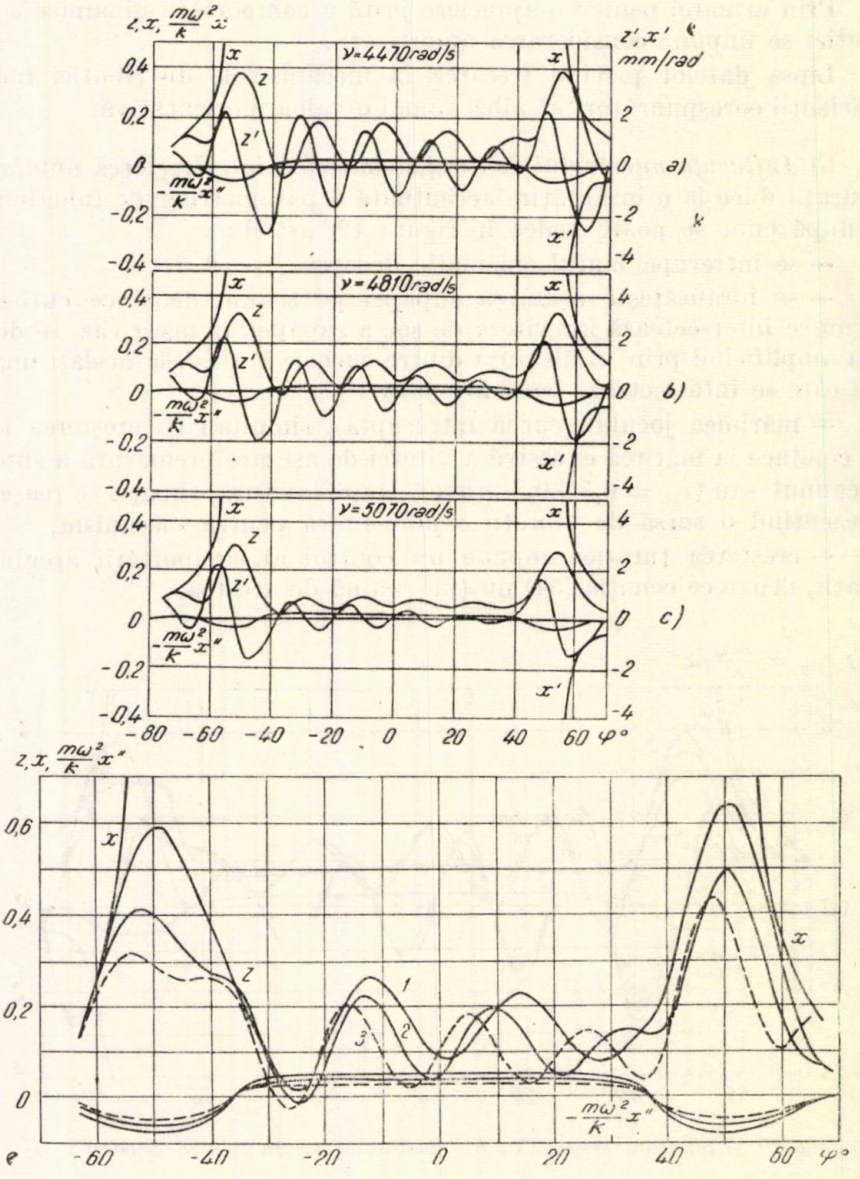


Fig. 20. — Influența frecvenței oscilațiilor proprii asupra proprietăților dinamice ale supapei de evacuare.

Creșterea ei înbunătățește funcționarea mecanismului prin asigurarea așezării liniștite a supapei pe scaun și scurtarea perioadei de întrerupere a lanțului cinematic.

În figura 20*b* se observă că creşterea frecvenţei proprii conduce la mărirea probabilităţii întreruperii lanţului cinematic, însă simultan apare o înbunătăţire a aşezării supapei.

În figura 21, sînt redate influenţele frecvenţelor proprii asupra diverselor legi de mişcare. Pentru legea corespunzătoare primei coloane, apare existenţa unei frecvenţe proprii optime, în timp ce pentru a doua coloană, creşterea frecvenţei proprii, îmbunătăţeşte funcţionarea.

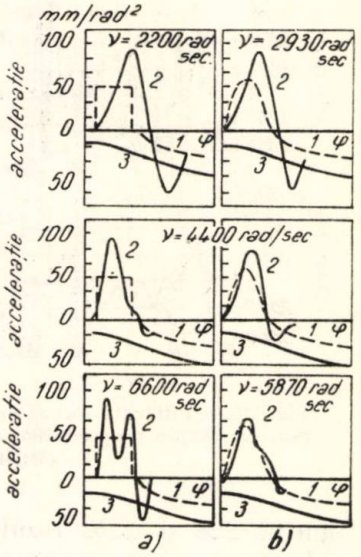


Fig. 21. — Influenţa frecvenţei oscilaţiei proprii ale sistemului asupra proprietăţilor dinamice pentru diverse legi de mişcare ale tichetului.

e) *Influenţa legii de mişcare a tachetului.* Legea de mişcare a tachetului reprezintă perturbaţia principală asupra sistemului de oscilaţii, de aceasta depinzînd doi termeni ai ecuaţiei (54). Întrucît variaţia lui x în comparaţie cu x' este mult mai înceată, la cercetarea dinamică a mecanismului de distribuţie compararea dintre diferitele legi se face după curbele de variaţie ale acceleraţiei.

Corectarea calităţilor dinamice ale funcţionării motorului se poate efectua acţionînd asupra curbei acceleraţiei fără a opera asupra schimbului de gaze în motor.

Atenţia deosebită este îndreptată asupra formei şi duratei acceleraţiilor pozitive. În prezent, la motoarele de automobil, raportul dintre duratele acceleraţiilor negative şi pozitive este cuprins între 3 şi 4. Valoarea acestui raport face ca efortul perturbaţiei să fie resimţit de acceleraţiile pozitive, motiv pentru care acestea se analizează cînd se pune problema studierii influenţei legilor de mişcare ale urmăritorului asupra calităţilor dinamice ale mecanismului.

Experienţa de pînă acum indică excluderea folosirii, la motoarele de turaţii ridicate, a acelor legi pentru care curba acceleraţiilor are întreruperi care forţează oscilaţia mecanismului.

Pentru aprecierea comportării, privind oscilaţiile sistemului, a diverselor legi de mişcare se utilizează raportul K al lungimii porţiunii acceleraţiilor pozitive către perioada oscilaţiilor proprii ale sistemului. Pentru valori ale lui K, apropiate de unitate comportarea se înrăutăţeşte.

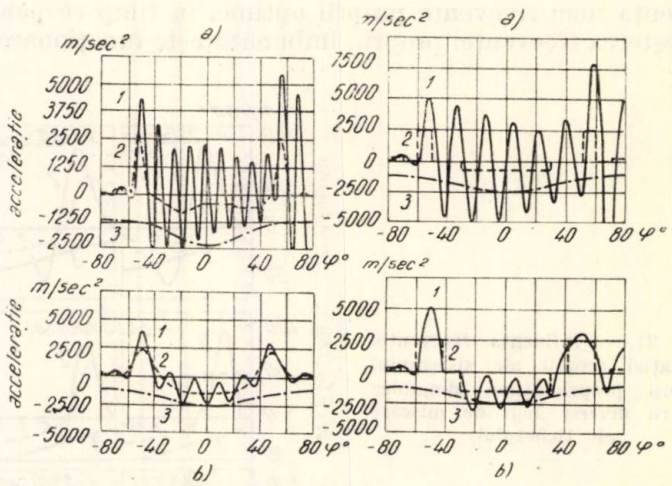


Fig. 22. — Influenţa formei curbei şi a lungimii acceleraţiei pozitive asupra proprietăţilor dinamice ale mecanismului de distribuţie.

Din figurile 22*a* şi 22*b*, rezultă funcţionarea mai liniştită pentru curbele de ridicare ale căror acceleraţii au variaţie mai lină. Deşi condiţiile de experimentare sînt aceleaşi, acceleraţia din figura 22 *a*, suferă schimbări mai bruşte, deci o funcţionare înrăutăţită, iar în figurile 22*c*, şi 22*d*, se remarcă influenţa lungimii porţiunii acceleraţiilor pozitive asupra funcţionării mecanismului. Porţiunile scurte sînt defavorizante.

Dezavantajele aduse de acceleraţii cu variaţii bruşte ale mărimilor şi cu lungimi reduse ale acceleraţiilor pozitive sînt amplificate la turaţii ridicate.

Micşorarea ridicării tachetului pentru înbunătăţirea funcţionării mecanismului se recomandă numai cînd astfel curba acceleraţiei devine mai lină. Bunăoară, în figura 22 *c*, înălţimea de ridicare este 6,45 mm, iar în figura 22*d* este de 10,8 mm, totuşi funcţionarea din figura 22*c* este înrăutăţită deoarece s-a redus lungimea sectorului acceleraţiei pozitive.

Înrăutăţirea funcţionării, în regim dinamic, a mecanismului de distribuţie apare şi în cazul folosirii legilor puternic nesimetrice, cărora le sînt proprii modificări ale perioadelor de accelerare şi decelare, deci o posibilitate mai mare sau mai mică de intersectare a curbelor z şi x, deci, şi o eventuală întîlnire prematură a supapei cu scaunul său. Deasemeni, se poate sconta pe o înbunătăţire a aşezării supapei pe scaun, folosind un sector mărit al acceleraţiei pozitive pe porţiunea ridicării supapei iar vibraţiile care apar, pe această porţiune, se atenuează sub influenţa amortizării.

5. PROBLEMA CAMELOR POLIDINE LA MOTOARELE CU ARDERE INTERNĂ

Ideia care stă la baza camelor polidine este următoarea : „să se dea camei acel profil care să asigure supapei mişcarea dinainte stabilită, independent de elasticitatea elementelor lanţului cinematic" iar condiţia necesară pentru aplicarea metodei „polydyn", constă în cunoaşterea legăturii dintre mişcarea tachetului şi aceea a supapei, dată de ecuaţia de mişcare a supapei.

În ipoteza absenţei frecării, relaţiile se stabilesc cu uşurinţă

$$My''\omega^2 + (K + k_1)\, y = \mathrm{i}K(s - s_0) - F_0 - F_g. \tag{61}$$

Se notează prin $Y(\varphi)$ legea dorită a supapei iar prin ω_0 viteza de rotaţie la regimul de calcul. În acest caz legea ridicării tachetului se obţine din ecuaţia (61) :

$$s = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{M}{K}\, Y''\omega_0^2 + \left(1 + \frac{k_r}{K}\right) Y + \frac{F_0 + F_g}{K}\right] + s_0, \tag{62}$$

care reintrodusă în (61) conduce la expresia

$$My''\omega^2 + (K + k_r)\, y = MY''\omega_0^2 + (K + k_r)\, Y. \tag{63}$$

Se observă ca la regimul de calcul ($\omega = \omega_0$), legea dată de mişcare $Y(\varphi)$, satisface ecuaţia (63), transformînd-o în identitate. Astfel, dacă $Y(\varphi)$ satisface condiţiile iniţiale de mişcare ale supapei $Y(\varphi_0) = \dot{Y}(\varphi_0) = 0$, adică ea nu se mişcă în momentul începerii mişcării, atunci cu precizia condiţionată de ipotezele adoptate supapa va urmări, la regimul de calcul, legea adoptată $y(\varphi) = Y(\varphi)$.

Pentru alte valori ale lui ω_0, $Y(\varphi)$ nu mai reprezintă soluţia ecuaţiei de mişcare şi legea dată se va denatura, înlesnind apariţia de oscilaţii ale mecanizmului de comandă.

În realitate, neglijarea frecării şi a erorilor de execuţie determină apariţia oscilaţiilor şi la regimul de calcul, dar de slabă intensitate.

Pentru legea de mişcare a supapei, se alege forma polinomială

$$Y = H_s\left[1 + C_2\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^2 + C_p\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^p + C_q\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^q + C_r\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^r + C_k\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^k\right], \tag{64}$$

unde H_s este ridicarea supapei, φ — unghiul de rotaţie al camei, Φ — unghiul corespunzător ridicării H_s iar p, q, şi r, k — numere pare pozitive.

Se consideră originea unghiului φ la vîrful camei, iar valorile coeficienţilor C_2, C_q, C_k, ... se determină din condiţiile de continuitate ale capătului intervalului cînd deplasarea, viteza, şi acceleraţia sînt nule : $Y(-\Phi) = \dot{Y}(-\Phi) = \ddot{Y}(-\Phi) = 0$ şi chiar derivata de ordinul trei.

Exponenţii polinomului (64) se adoptă ţinînd cont de cronosecţiunea obţinută şi de valoarea medie patratică a acceleraţiei supapei.

Unii autori au considerat raţională adăugarea încă a unui termen în polinomul care să dea mişcarea dorită a supapei, acesta permiţînd introducerea unui număr sporit de condiţii iniţiale, de pildă derivatele de ordinul trei şi patru pot căpăta valori impuse, legate de viteza şi acceleraţia corespunzătoare începutului mişcării.

Dublu diferenţiind ecuaţia (62), se obţin relaţiile :

$$\dot{s} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{M}{K}\dddot{Y} + \left(1 + \frac{k_r}{K}\right)\dot{Y} + \frac{\dot{F}_g}{K}\right],$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{M}{K}\overset{\mathrm{IV}}{Y} + \left(1 + \frac{k_r}{K}\right)\ddot{Y} + \frac{\ddot{F}_g}{K}\right] \tag{65}$$

şi deoarece la începutul mişcării, cînd $\varphi = -\Phi$, $\dot{Y}(-\Phi) = \ddot{Y}(-\Phi) = 0$, rezolvat în raport cu s şi respectiv cu x, se obţine

$$\dddot{Y}(-\Phi) = \frac{K}{M}\mathrm{i}\dot{s}(-\Phi) - \frac{1}{M}\dot{F}_g(-\Phi) = \left[\frac{K}{M}x'(-\Phi) - \frac{1}{M}F'_g(-\Phi)\right]\omega_0,$$

$$\overset{\mathrm{IV}}{Y}(-\Phi) = \frac{K}{M}\mathrm{i}\ddot{s}(-\Phi) - \frac{1}{M}\ddot{F}_g(-\Phi) = \left[\frac{K}{M}x''(-\Phi) - \frac{1}{M}F''_g(-\Phi)\right]\omega_0. \tag{66}$$

Pentru supapa de admisie cînd $F_g = 0$, coeficienţii au expresia generală

$$C_i = \frac{(-1)^n j\cdot k\cdot l\cdot m + (-1)^{n+1}\dfrac{K\Phi^3}{M\omega_0^2 H_s}(j+k+l+m+\ldots-6)x'(-\Phi) + \Phi x''(-\Phi)}{(j-i)(k-i)(l-i)(m-i)}, \tag{67}$$

$$\text{cu } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

Pe partea de deschidere, cînd $F_g \neq 0$, în relaţia (67) se înlocuiesc $x'(-\Phi)$ prin $x'(-\Phi) - \frac{1}{K}F'_g(-\Phi)$ şi $x''(-\Phi)$ prin $x''(-\Phi) - \frac{1}{K}F''_g(-\Phi)$, iar dimensiunile mărimilor care intră în ecuaţia (67) sînt : K(kg/mm), M(kgs^2/mm), H_k(mm), Φ(rad.), x'(mm/rad) şi x''(mm/rad^2).

În alte lucrări exponenţii s-au ales în progresie geometrică cu raţia $k - 2$, şi suplimentar derivatele de ordinul trei şi patru să fie nule în momentul începerii mişcării.

Din relaţiile redate rezultă un mare volum de calcul, fapt care reclamă folosirea pentru aplicarea metodei „polydyn" a maşinilor electronice de calcul. Pentru vîrful camei valorile parametrilor interesaţi rezultă imediat: $Y = H_s$, $\dot{Y} = 0$ şi $\ddot{Y} = 2C_2H_s\frac{\omega_0^2}{\Phi^2}$, din relaţiile date, pentru $\varphi = 0$.

Legătura dintre cronosecţiunea corespunzătoare ridicării supapei F_s şi aceea corespunzătoare tachetului F, este:

$$F_s = F\frac{iK}{k_r + K}. \tag{68}$$

Viteza şi acceleraţia supapei, la regimul de calcul, se obţin prin derivarea ecuaţiei (64), în care se introduc coeficienţii daţi de (67). Deaceea aprecierea formei curbei de viteză şi acceleraţie este dificilă, creindu-se o reală incomoditate pentru depistarea concavităţii pe porţiunea acceleraţiilor pozitive, caracteristică profilelor polidine, în special cînd exponenţii polinomului (64) sînt mai mari iar frecvenţa oscilaţiilor proprii mai mică. Acest incovenient impune evitarea exponenţilor mari, chiar dacă prin aceasta apare o sporire a cronosecţiunii.

Profilarea camelor după metoda „polydyn", se utilizează pe scară largă în S.U.A. Dacă mai există rezerve în folosirea lor, acestea se datoresc faptului ca la regimurile necalculate ale camei apar oscilaţii mai mari decît acelea provocate de camele obişnuite şi deci un zgomot sporit în timpul funcţionării.

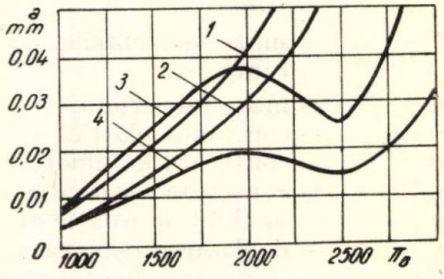


Fig. 23. — Amplitudinea oscilaţiilor la diverse turaţii: *1* — arce de cerc; *2* — fără şoc; *3*, *4* — polidin.

Din fig. 23, rezultă o înrăutăţire rapidă a funcţionării motorului la depăşiri relativ mici (10 %) ale turaţiei de calcul (2 500 rot/min). Diminuarea influenţei acestor dezavantaje este realizată prin considerarea unor recomandări:

— între două maxime ale acceleraţiei pozitive a tachetului aceasta nu trebuie să aibă valori negative,

— mărimea primului maxim nu trebuie să o depăşească pe a celui de-al doilea.

Se menţionează utilitatea camelor polidine la automobilele de curse, deoarece aceste motoare au un diapazon al turaţiilor de funcţionare relativ îngust şi dezavantajele prezente, în afara turaţiei de calcul, nu mai au importanţă.

III. STUDIUL DINAMICII MECANISMELOR CU CAME, FOLOSIND MODELE COMPLEXE

În afara modelului monomasic, în scopul reducerii numărului de ipoteze simplificatoare, în ultima vreme unii autori folosesc modele mai complexe de studiu. Acestea permit evidenţierea influenţei oscilaţiilor de torsiune ale arborelui port-camă asupra parametrilor funcţionali ai mecanismului precum şi a jocurilor, frecării şi elasticităţii celorlalte elemente, considerate simultan.

1. INFLUENŢA OSCILAŢIILOR LA TORSIUNE ASUPRA CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE MECANISMELOR CU CAME

Aşa după cum se vede în fig. 24, arborele port-camă, prin torisonarea sa elastică, poate influenţa funcţionarea mecanismelor cu camă în ansamblu.

Modelul dinamic intuitiv corespunzător schemei cinematice din fig. 24a, este redat în fig. 24 b, unde semnificaţia notaţiilor este următoarea :

I — reprezintă sistemul studiat (arborele camei împreună cu lagărele),
II — sistemul urmăritor,
III — elementul condus (elementul final din sistemul urmăritor)
J — suma momentelor de inerţie ale elementelor reduse la camă,
m — masa tachetului,
c — constanta elastică a arborelui cu camă,
b — constanta de amortizare liniară,
c_p — constanta elastică a resortului de readucere,
φ — unghiul de rotaţie al camei $\varphi = \omega t + q$,
q — deplasarea relativă a secţiunii 2—2 faţă de 1—1,
F — suma forţelor tehnologice şi prestrîngere a resortului de readucere,
$x = P(\varphi)$ — funcţia cinematică a ridicării tachetului,
ω — viteza unghiulară constantă în secţiunea 1—1,
t — timpul în care se desfăşoară mişcarea.

La alcătuirea modelului dinamic intuitiv s-a avut în vedere următorul sistem de ipoteze :

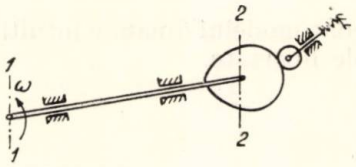
— s-a considerat numai elasticitatea torsională a arborelui cu camă şi elasticitatea resortului de readucere,

— s-a considerat numai influenţa amortizării în lagărele arborelui port-camă.

În rest se menţin ipotezele de la punctul I.

Considerînd că coeficientul de neuniformitate are o influenţă mică asupra elementului condus, funcţia cinematică a tachetului şi a derivatelor sale se scrie

$$x = P(\varphi),$$
$$\dot{x} = P(\varphi)\cdot(\omega + \dot{q}),$$
$$\ddot{x} = P''(\varphi)\cdot(\omega + \dot{q})^2 + P'(\varphi)\,\ddot{q}.$$



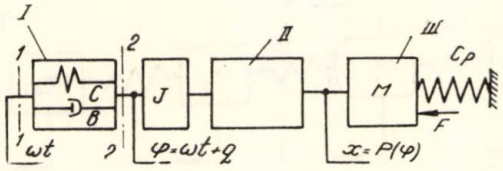


Fig. 24. — Modelul dinamic intuitiv pentru studiul influenţei oscilaţiilor la torsiune.

Ţinînd cont de expresiile derivatelor funcţiei de poziţie $P(\varphi)$ şi de modelul dinamic intuitiv redat în figura 24*b*, modelul matematic corespunzător, care reprezintă şi ecuaţia diferenţială ce descrie vibraţiile de torsiune ale sistemului, are următorul aspect :

$$J\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -P'(\varphi)\{m[P''(\varphi)(\omega + \dot{q})^2 + P'(\varphi)\,\ddot{q}] + c_p P(\varphi) + F\}.$$

Prelucrarea acestei expresii conduce la ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi variabili

$$\ddot{q} + 2P(\omega t)\,\dot{q} + B^2(\omega t)\,q = Q(\omega t),$$

unde notaţiile P, Q şi R au expresiile

$$P(\omega t) = \frac{\sqrt{c/J^3}}{J + mP'^2}\left(\frac{b}{2\sqrt{cJ}} + \frac{m\omega P'P''}{\sqrt{cJ}}\right),$$

$$R^2(\omega t) = \frac{c}{J + mP'^2}\left[1 + \frac{m\omega}{C}(P''^2 + P'P'') + \frac{c_p}{c}(P'^2 + PP'') + F\cdot\frac{P''}{C}\right],$$

$$Q(\omega t) = -\frac{J}{J + mP'^2}\left(m\omega^2\frac{P'P''}{J} + C_p PP'/J + FP'/J\right).$$

Pentru controlul justeței ipotezelor admise, la alcătuirea modelului și la rezolvarea ecuației diferențiale, s-a făcut uz de modelarea analogică și de încercări experimentale.

Deși rezultatele obținute au evidențiat influența oscilațiilor de torsiune asupra mișcării ideale a sistemului urmăritor, frecvențele mici de lucru justifică valabilitatea rezultatelor, numai pentru arbori suficient de flexibili iar restul elementelor suficient de rigide.

2. MODEL MULTIMASIC

În figura 25, este redat modelul dinamic intuitiv pentru un mecanism cu came cu cinci grade de libertate.

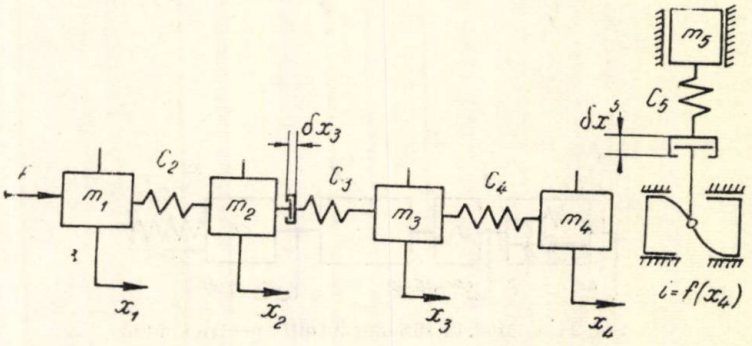


Fig. 25. — Modelul dinamic intuitiv al mecanismului cu came cu cinci grade de libertate.

Notațiile din figură au următoarea semnificație:

m_i reprezintă masele diferitelor elemente,
c_i — constantele elastice respective,
x_i — jocurile între diversele elemente,
F — forța perturbatoare,
$i = f(x_4)$ — legea de variație a raportului de transmisie.

Modelul matematic corespunzător este:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_m - C_2 i_2 \Delta\varphi_{2el},$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = C_2 \Delta\varphi_{2el} - C_2 i_3 \Delta\varphi_{3el},$$

$$J_3\ddot{\varphi}_3 = C_3 \Delta\varphi_{3el} - C_4 i_4 \Delta\varphi_{4el},$$

$$J_4\ddot{\varphi}_4 = C_4 \Delta\varphi_{4el} - C_5 i_4 \Delta\varphi_{5el},$$

$$J_5\ddot{\varphi}_5 = C_5 \Delta\varphi_{5el} - M_f \operatorname{sign}\dot{\varphi}_5,$$

unde J_i reprezintă momentele de inerţie corespunzătoare maselor m_i,
φ_i — variabilele corespunzătoare deplasărilor x_i,
M_p — momentul corespunzător forţei perturbatoare F,
φ_{iel} — deformaţiile unghiulare elastice,
M_f — momentul de frecare în suportul elementului final,
sign $\dot{\varphi}_5$ — valoarea unitară cu semn alternativ.

Folosind criteriul similitudinii, pentru un caz concret s-a studiat comportarea dinamică, considerînd elasticitatea, jocul dintre elemente şi frecarea, pe o maşină analogică.

Curbele obţinute pentru parametrii analizaţi au permis unele concluzii :

1. Schema modelului dinamic al mecanismului cu came permite obţinerea rezolvării problemei pentru diferite jocuri iniţiale.

2. Factorii care influenţează comportarea dinamică sînt momentele de inerţie ale elementelor, elasticitatea elementelor cuprinse între elementul conducător şi elementul final, precizia de execuţie a profilului camei şi jocurile dintre elementele mecanismului.

Se menţionează că deşi modelul matematic este destul de complex se rezolvă numai una dintre ecuaţii pe baza unor restricţii suplimentar introduse şi în acest caz valabilitatea altor concluzii, care se desprind (netrecute aici), dispare.

IV. APRECIERI CRITICE

În vederea efectuării unor observaţii critice privind modelele folosite, devine necesară mai întîi cunoaşterea factorilor care influenţează funcţionarea mecanismului în ansamblu.

1. FACTORII CARE INFLUENŢEAZĂ FUNCŢIONAREA DINAMICĂ A MECANISMELOR CU CAME

Considerînd figura 15, ca utilizare în cadrul unui mecanism mai complex a camelor, şi ţinînd cont de funcţionarea mecanismului în ansamblu, de tehnologia de execuţie a elementelor componente, de destinaţie precum şi de rezultatele cercetărilor întreprinse, pînă în prezent privind comportarea lor dinamică, se poate afirma că ori de cîte ori se pune problema comportării unui mecanism cu came, urmează a fi avute în vedere următoarele :

1. *Elasticitatea elementelor componente ale lanţului cinematic, camă-ultimul element, al sistemului urmăritor.*

a) Arborele port-camă capătă în timpul funcţionării deformaţii elastice de torsiune şi încovoiere care pot influenţa parametrii funcţionali ai sistemului urmăritor.

b) Cama se poate deforma elastic ca urmare a forţelor de contact.

c) Tachetul suferă o deformaţie elastică în lungime, iar prin dispoziţia sa de consolă în ghidajele sale, suferă şi o deformaţie elastică transversală, de constantă elastică variabilă.

În prezența unei forțe de frecare apreciabile, ultima deformație reprezintă o sursă suplimentară de vibrații.

d) Tija înpingătoare (cînd este cazul), datorită forțelor prezente în timpul funcționării, suferă deformații elastice longitudinale și de încovoiere.

e) Culbutorul (cînd este cazul), se deformează elastic la încovoiere.

f) Arcul de readucere capătă deformații elastice în timpul funcționării care se suprapun peste acelea ale organului de lucru, influențînd mișcarea în ansamblul ei mai ales la turații ridicate.

g) Organul de lucru suferă deformații elastice.

2. *Precizia de execuție a elementelor lanțului cinematic.*

În ipoteza respectării excentricității camă-arbore port-camă, singurul element a cărei precizie de execuție influențează puternic curba de răspuns a sistemului urmăritor, este cama.

3. *Uzura elementelor lanțului cinematic.*

În general, uzura elementelor, mai puțin a camei, influențează numai prin jocul creiat între elemente comportarea dinamică în ansamblul său. Prezența forțelor de contact la suprafața camei, efectele întreruperii continuității lanțului cinematic și frecarea în cupla superioară, determină o uzură neuniformă a conturului camei, transformînd legea inițial considerată și deci parametrii normali de funcționare.

Uzura este favorizată și de temperatura ce se dezvoltă, ca urmare a frecării și intensității forțelor la întreruperea continuității lanțului cinematic.

4. *Prezența forțelor de frecare.*

Forțele de frecare se manifestă în toate cuplele cinematice, însă cele mai importante sînt cele din ghidajul tachetului, elementul condus și în cupla superioară camă-tachet.

5. *Jocul dintre elemente.*

Își manifestă acțiunea pe porțiunea de început a ridicării supapei. Un joc mărit atrage după sine o funcționare mai zgomotoasă și încărcări dinamice sporite pe elementele mecanismului.

6. *Prezența rezistențelor tehnologice.*

Influența lor depinde de modul de aplicare și de mărimea lor.

2. ANALIZA CRITICĂ A MODELELOR CONSIDERATE LA STUDIUL DINAMICII MECANISMELOR CU CAME

Cunoscînd factorii care influențează funcționarea în regim dinamic a mecanismelor cu came precum și ipotezele care au stat la baza alcătuirii modelelor matematice analizate în prezenta lucrare, evaluarea critică a procedeelor de investigare dinamică folosite pînă în prezent, se face fără dificultăți.

1. *La folosirea modelului monomasic* :

— folosirea unei singure mase presupune că mișcarea tuturor elementelor sistemului analizat, urmăresc mișcarea elementului de reducere, ori, conform celor menționate la punctul 1 din prezentul capitol, în afara deformațiilor elementului redus, celelalte elemente mai au și alte deformații care depind de poziția lor în ansamblul lanțului cinematic considerat ;

— în cazul utilizării modelului matematic trei din capitolul I se neglijează frecarea din mecanism, ori studiile, destul de timid efectuate, au arătat că şi amortizarea are unele efecte ce nu pot fi neglijate (vezi cap. II, pct. 4) afectează forţele prezente în timpul funcţionării şi determină valorile vibraţiilor remanente de la ciclul anterior;

— s-a considerat numai constanta elastică redusă unidirecţională, ori prezenţa şi a altor deformări (vezi cap. IV, pct. 1), conduce la neglijarea surselor de vibraţii suplimentare, ca de pildă dispoziţia în consolă a tachetului;

— nu s-a ţinut seama de întreruperea lanţului cinematic şi deci de deformarea parametrilor funcţionali generată de acest fenomen;

— s-a neglijat uzura profilului camei, care conduce la modificarea conturului acesteia şi deci şi a parametrilor funcţionali pe ansamblul mecanismului;

— deşi s-au considerat abaterile de execuţie ale profilului (vezi cap. I, pct. 7), pentru evaluarea concretă a influenţelor acestora asupra funcţionării mecanismului în ansamblul său, este necesară măsurarea abaterilor precum şi cunoaşterea poziţiei lor. Acest lucru reprezintă o dificultate practică greu de trecut şi deaceea importanţa studiilor prezentate în acel capitol au numai o importanţă calitativă iar evitarea erorilor de execuţie prin toleranţe este destul de dificilă;

— nu s-a considerat deformaţia elastică la torsiune a arborelui port-camă care, deşi asupra deplasării sistemului urmăritor nu are o influenţă practică, deformează considerabil viteza şi acceleraţia acestuia (v. cap. III, pct. 1);

— nu s-a considerat jocul dintre elementele lanţului cinematic;

— nu s-a ţinut seama de rezistenţele tehnologice, ori prezenţa acestora şi legea lor de variaţie pot influenţa comportarea dinamică a mecanismului, în ansamblu.

2. *În cazul problemei tratate la capitolul II.*

La folosirea modelului matematic 53, se elimină dezavantajele datorite neconsiderării amortizării, jocului dintre elemente şi a rezistenţelor tehnologice.

3. *la folosirea metodelor complexe.*

Concluziile analizei nu au un caracter de generalitate, ele aplicîndu-se numai în cazul arborilor port-camă elastici, iar restul elementelor să fie rigide, ori aceste cazuri sînt mai rar întîlnite.

Modelul multimasic prezentat reprezintă prin felul de rezolvare numai un început în tendinţa de reducere a numărului ipotezelor simplificatoare care dau numai o importanţă calitativă rezultatelor.

Primită la redacţie la 30 noiembrie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. G. D. Anderson, Cam Dynamics, Prod. Eng. *24*, p. 170 (oct. 1953).
2. — „ „ Mach. Design., 1956, 5, 100.
3. P. Barkan, *Calculations of High-Speed Valve motion with Flexible Overhead Linkage*, Trans. S.A.E. *61*, p. 687 (1953).
4. F. I. Barratta, J. I. Blum, *When Will a Cam Follower Jamp*? Prod. Eng. *25*, p. 156 (july 1954).

5. V. S. Beniovici, *O profilirovanii kulacicov gazoraspredelenia dlea uprugovo klapanovo privoda*, M., Maşgiz, 1960 (MADI, Vç. P. 25).
6. E. B. Borodin, G. E. Nahapetean, *Isledovanii dinamiki kulacicovoţevocinovo mehanizma avtomata*, Maşinovedenie, *1* (1965).
7. P. Barkan, *Spring — driven cam systems*, Mech. Design, May 14, **31**, *10* (1959).
8. B. Bilaisis, *Modified-Trapezoid Cam Profiles*, Mach. Design Vol. **29**, p.135—138 (1957).
9. V. H. Charles, *Design equations and graphs for finding the dynamic response of Cycloidal-Motion Cam Systems*, Mach. design feb. 2, 1961.
10. F. R. E. Crossley, *Dynamics in Machines* — N—Y. 1954.
11. — *Dynamic Mechanisms and Non linear Control Systems*, Proc. Int. Conf. for Teachers of Mechanism. Yale Univ., 1961, 123—140.
12. W. M. Dudley, *New Methods in Valve Cam Design*, Transactions SAE *2* (1948).
13. — Idem în SAE Quarterly Transactions, *1* (1958).
14. O. H. Derndinger, *Untersuchung über das Dynamische Verhalten der ventile an verbrennungsmotoren*, MTZ *7* (1961).
15. E. A. Edwards, *Analysis of mechanisms with High-Speed Photography*, Mach. Design, 26, dec., 1954.
16. S. Edgar, *Continuous Cam Curves*,. Mach Design., *1* (1960).
17. E. B. Borodin, *Modelirovanie dinamiki culacicobîh mehanizmov periodiciscovo povorota s ucetom uprugosti, zazorov i trenia*, Mehanika Maşinî, vîpusc 1—2.
18. E. Fuhrman, *Cams and Followers for High-Speed Internal Combustion Engines*, Engineers' Digest 12, p. 340 (Oct. 1951).
19. R. I. Fanella, *Dynamics analysis of a cylindrical cam*, — ASME-paper Nr. SA-3, (1959).
20. M. Feldinger, *Problems of high-speed cam drivers and spring surge*, Eng. Digest, **17**, *4* (1956).
21. A. F. Gagne jr. *Design og High-Speed Cams*, Mach. Design **22**, *7* (1950).
22. A. S. Gutman, *Cam Dynamics*, Mach. Design. **23**, *3* (1951).
23. R. E. Garret, *Force cams*, Mach. Des., *19*, 174—176 (1962).
24. EA. L. Geronimus, *Dinamiceskii sintez mehanizmov po Cebîşevu*, Hracov, Izd-vo Universiteta, 1958,
25. A. A. Guhman, *Vvedenie v teoriu podobia*, Izd-vo ,,Vîsşaea şcola'' 1963.
26. J. A. Hrones, *Dynamics forces in cam mechanisms*, Mach. Des. Nr. 1948.
27. — *Analysis of Dynamic Forces in a Cam-Driven System*, Trans. ASME 70, p. 467 (jun 1950).
28. S. S. Ivar, *The influence of cam curve derivative steps on cam dynamical properties*, Transactions of Chalmares University of Technology Gothenbugr, Sweden, 1961.
29. P. A. Ionuşas, *K vaprosu iznosa profilea kulacika*, Tr. litov. AN SSR, 1958.
30. A. Jante, *Einheitsnocken mit sprung- und knickfreiem Beschleunigungsverlauf*, Kraftfahrzeugtechnik *1* (1958).
31. R. C. Johnson, *Method of finite differences of cam design*, Mach. Des. **27**, *11* (1955).
32. — *Cam mechanisms*, Mach. Design, **28**, *2* (1956).
33. — *Cam dynamics*, Mach. Des., **29**, *3* (1957).
34. — *Method of finite differences in cam design*, Mach. Des., **29**, *23* p. 159—161 (1957).
35. — *Dynamic analysis of cam mechanisms*, Trans. 5-a Confer on Mechanisms. Cleveland 1958.
36. — *A simple numerical method for dynamic analysis and design of flexible cam mechanisms*, Mach. Des. Sept. 3, **31**, *18* (1959).
37. — *Haw profile errors affect cam dynamics*, Mach. Des. vol. 29, feb. 7, 1957, p. 105—108.
38. — *The dynaimc analysis and design of relatively flexible cam mechanisms having more than one degree of freedom*, ASME-paper 58-A-192; seria B J. Eng. f. Industry (Trans. ASME) 1959, B81, 4, 323—331.
39. — *A new Point of View on Minimizing Cam Vibration*, Mach. Des., **28**, *16*, 103—104 (1956).
40. B. Janssen, *Forţe cu acţionare reciprocă în mecanizme cu came*, Ind-Anz. nr. 101, 1966.
41. F. Ferdinand, *On the dynamics of high-speed cam profiles*, International J.M.S. july 1960.
42. A. E. Kobrinski, *Vlianie uprugosti zveniev na kinematiku gazoraspredileonaea*, V kn. Trudî Seminara TMM, *4* (1947).
43. — *Vlianie uprugosti zveniev na kinematicu necatorîh kulacikovîh mehanizmov*, Oboronghiz, M., 1948.
44. — *Mehanizmî s uprughimi sviazmi. Dinamica i ustoicivosti*, Nauca. M., 1964.
45. Kaneko Iasuo., *Dinamica klapanovo mehanizma bistrohodnovo dvigatelia*, Engine and Industry Machine, *9* (1958).

46. L. V. Korcemnîi, *Mehanizmî gazoraspredileonaia dvigatelia*, Moscva 1964.
47. IU. A. Kogan, *Isledovanie dvijenia klapanov divgatelia ZIL 111*, Avtomobilnaia promîş-lenosti., *8* (1962).
48. P. Kuhn, *Despre comportarea dinamică a comenzilor cu ventile la maşini de forţă cu ardere internă*, Dissertation, Technische Hochschule Darmatadt, 1963.
49. G. F. Kennison *Cycloidal-Motion cams*, Mach. Des., vol. 28, ian. 1956.
50. D. Kurz, *Entwurf und Berechnung ruckfreier Nochen*, ATZ *11* p. 293—299 (1954).
51. F. V., Karsnikov, *Teoreticescoe i experimentalnoe isledovanie kulacicovoe mehanizma s ucetom tocinosti eve izgoto vlenia*, Maşinovedenie *1* (1965).
52. S. N. Kojevnicov, *Dinamika maşinî s uprughimi zveniami*, Kiev, Izd-vo AN USSR, 1961.
53. I. N. Levitski. *Kulacicovîe mehanizmî*, Izd-vo., Maşinostroenie, 1964.
55. M. Kloomok, R. V., Muffley, *Plate cam design with Emphasis on dynamic effects*, Product. Engng., vol. 26,. feb. 1955.
56. — *Plate cam design, evaluating dyna mic loads*, Product. Engng. vol. 27, ian. 1956.
57. V. M. Malarova, *Dinamica culacicovîh mehanizmov*, Trudî Cibirscovo metallurg. in-ta. Vîp. 4A, 1957.
58. — *Experimentalinoe isledovanie dinamiki kulacicovîh mehanizmov*, Trudî Sibirscovo matallurg. in-ta. Vîp. 4A, 1957.
59. D. Mitcell, *Experimentalnoe islovanie dianmiki ploskih kulacicovîh mehanizmov. Cb.*, Prikladnaia Mehanica i Maşinostroenie., Nr. 2, Izd-vo inostr., lit. 1952.
60. S. Mercer, A. R. Holowenko, *Dynamic characteristics of cam forms calculated by the digital computer*, Trans. A.S.M.E. 1958, 80, nr. 8. 1695—1701.
61. — Idem în Mech. Engrs. 1957 W. A — 42,
62. J. Muler, *Usledovanie vliania şablonov dlia izgotovlenia kulacicov na dinamiceskie haracteristiki kulacicovîh mehanizmov*, Fertigungstechnic und Betrieb., *1*, 1965,
63. D. B. Mitchell, *Tests on dynamic response of cam folloWer systems*, Mech. Eng., 1950, 72, 467—471.
64. K. K. Matveev, *Necatoroe voprosî tocinosti kulacikovîh mehanizmov povorota*, Vestnic maşinostroenia, *8* (1963).
65. N. C. Nekliutin, *Designing cams for controlled inerţia and vibration*, Mach. Des. *24*, p. 143, iunie 1950.
66. ,,*Vibration analysis of cams*, *Mach.* Des. 26, p. 190., dece. 1954.
67. N. C. Neklutin, *Cam design Tables*, Trans. 5-th Conf. of Mech. Cleveland, 1958.
68. J. H. Nourse, R. C. Dennis, W. M. Wood, *Recent developments in cam design*, SAE Transactions, 1961, V. 69.
69 S. A. Okcuogly , *An application of polydine cam design*, Trans. 6-the Conf. on Mechanism. Purdue univ. Lafayette. Ind., 1960, 44—47.
70. I. I. Obrosiv, *Zacont dvijenia mehanizmov s ucetom uprughih de deformaţii*, Trudî taganroscovo radiotehnicescove in-ta. T. 3, ci. 2, 1957.
71. E. Ia. Peisah, *Vlianie uprugosti tolicatelia na dinamicu kulacikovîh mehanizmov i coeficient dinamicinosti*, Izv. vuz. Maş., 1963, 2, 12—26.
72. — *Isledovanie dinamiki kulacicovîh mehanizmov i sintez dinamiceskih optimalinîh zaconov dvijenia vedomovo zvena*, Avtoreferat disertaţii., LITLP, L. 1964.
73. R. A. Roggenbuck , *Designing the cam profile for low virations at high speeds*, SAE Transactions., 1953, V. 61.
74. R. D. Rumsey, *Redesign for hiher speed*, Mach. Des. **23**, *4*, (1951).
75. L. N. Reşetov, *Dinamiceskie sintez obraşcenovo kulacikovo mehanizma*, Maşinostroenie *12* (1965).
76. L. N. Reşetov, V. A. Nikonorov, T. I. Gorina, *Sili b obraşcenom kulacicovom mehanizme*, Maşinostroenie *7* (1965).
77. — *Dinamiceskii sintez obraşcenovo kulacicovo mehanizma s ucetom zazora*, Maşinostroenie *1* (1966).
78. — *Dinamiceskie nagruzki v privode s kulacicovîi predohranitelinoi muftoi*, Maşinostroenie, *2* (1967).
79. H. A. Rothbart, *Cams design*, Dynamics and accuracy. N.Y. 1956.
80. — *A numerical method for determinig cam-folower response*, ASME Trans. sept. *23* (1957).
81. *Mechanical control cams*, Control Engineering, 1960, 6, 118—122.
82. D. A. Stoddart, *Polydin cam design*, Mach. Des., 1953, 1, 121 ; 2, 146 ; 3, 149.
83. H. C. Schulz, *Oszillographische Untersuchungen an der Ventilsteureung von Dieselmotern*, MTZ, *9*, (1959).
84. M. Straubel, *Vibraţiile în mecanismele cu came*, MTZ, *10* (1966).

85. W. Sackmann, *Contribuţie la calcularea programată a discurilor cu came rapide*, Konstruction., *7* (1966).
86. P. V. Sergeev, *Sinteza dinamică a mecanizmului cu camă cu tachet oscilant, după unghiul de presiune admis şi curbura profilului.*, Sb. Vopr. prikl. mehan. i tehnolog. maşinostr., Omsk 1966, 115—123.
87. K. V. Tir, *Mehanika poligraficeskih avtomatom*, Izd-vo. Kinga. 1965
88. T. R. Thoren H. H. Engemann, D. A. Stoddard, *Cam design as related to valve train-dynamics*, Trans. SAE, **6**, *1* (1952).
89. M. C. Turkish, *Valve gear design*, Detroit 1946.
90. — *Inspection of cam contours by the electronic Method*, Electronics, vol. 23, oct. 1950.
91. — *The relationship of valve spring design to valve gear dynamics and hidraulic lifter pump-up*, Transactions SAE, vol. 61., 1953.
92. D. Tutunaru, T. Demian, *Construirea profilelor camelor cosinusoidale şi sinusoidale printr-o curbă generatoare*, Metalurgia şi Construcţia de Maşini. *10* (1958).
93. I. I. Vulifson, *Dinamica tachetului elastic cu socotirea amortizării*, V sb., TMM, 1963, Bîp. 94—95.
94. — *Ucet vozbujdaemih krutilnih kolebanii privoda pri analize i dinamicescom sinteze culacicovo mehanizma*, Mehanica maşin., vîpusc 9—10. 1967.
95. — *Determinarea stabilităţii mărimii acceleraţiei maxime, a elasticităţii tachetului*, V sb. TMM, Maşinostroenie 1965, 81—92.
96. E. I. Vorobiev, *K vaprosu ob izonsostoicosti i proectirobanii kulacikovih mehanizmov.*, Nauka 1965 p. 76—86.
97. — *Vilianie parametrov kulacicovo mehanizma na iznoprofilia kulacika v usloviah plasticescovo contacta*, Maşinovedenie *3* (1965).
98. S. K. Saronov, *Proectirovanie kulacicovih mehanizmov s ucetom iznosa profilia kulacika*, Maşinovedenie N3, 1965
99. N. S. Eiss, *Vibration of cams having two degrees of freedom*, Trans. ASME, *4* (1964).

DIN PROBLEMATICĂ DE MECANICĂ DEZBĂTUTĂ ÎN CADRUL CELEI DE A DOUA CONFERINŢE INTERNAŢIONALE DE METODE COMPUTAŢIONALE ÎN PROBLEME DE OPTIMIZARE

(SAN REMO, 9—13 SEPTEMBRIE 1968)

de D. MANGERON

În cadrul conferinţei a doua internaţionale consacrată expunerii metodelor computaţionale în probleme de optimizare de la San Remo (9—13 septembrie 1968), organizată sub egida Societăţii de matematică industrială şi aplicată (SIAM), a universităţilor din California şi din California de sud şi ospitată de către Consiliul Naţional al Cercetării ştiinţifice din Italia, s-au dezbătut extrem de interesante şi numeroase probleme şi din domeniul Mecanicii aplicate. Aceasta întrucît probleme de optimizare îmbrăţişează astăzi o gamă imensă de subprobleme, ca de ex., aspectele computaţionale ale controlului optimal şi ale problemei traiectoriilor sateliţilor, rachetelor etc. etc., tehnicile computaţionale în programări matematice ale variatelor probleme fizice şi economice, tehnicile computaţionale în probleme de optimizare în meteorologie, biomecanică şi în domenii învecinate, aspecte computaţionale ale descifrării textelor şi informaţiilor, probleme de recunoaştere a modelelor etc. etc. Pentru a ne da seama de ritmul vertiginos de dezvoltare a problematicii în domeniul tehnicii computaţionale a optimizărilor şi a legăturii lor cu Mecanica, ajunge să constatăm de ex., articolul de fond al revistei APPLIED MECHANICS REVIEWS (octombrie, 1968), elaborat de C. Y. Sheu şi W. Prager, consacrat „Recentelor dezvoltări în proiectarea optimă a structurilor".

Menţionînd interesul deosebit al conferinţelor de sinteză expuse la San Remo, de pildă, de acad. L. S. Pontriaghin („Jocuri diferenţiale"), acad. N. N. Moiseev („Unele probleme în Teoria sintezei"), acad. M. R. Hestenes („Metoda gradientului") ş. a., dăm mai jos unele indicaţii asupra tematicii acestei Conferinţe de seamă legată strîns şi de Mecanică.

1. R. Cosaert expune rezultate de seamă în problema stabilirii programului pentru determinarea orbitei asociate cu lansarea şi păstrarea

în stație a sateliților de 24 ore. Astăzi, cînd și cercetările românești în domeniul Astronauticii sînt apreciate la justa lor valoare la nivel mondial, aducîndu-ne onoarea proclamării ca Președinte al Federației Internaționale de Astronautică a tov. Acad. Elie Carafoli, problematica prezentată în ordinea de idei de mai sus începe să intereseze cercuri din ce în ce mai largi de mecanicieni-specialiști.

2. M. Enns prezintă rezultatele proprii și ale colectivului pe care-l conduce referitoare la controlul optimal al unei uzine de putere cu reactori nucleari.

3. Yu. Evtușenko propune aplicarea metodei de „mediatizare" în rezolvarea unei vaste clase de probleme de control al sistemelor cu mic parametru. Ca exemplificare sînt rezolvate trei probleme de control optimal referitoare la vehicule spațiale.

4. P. L. Falb și W. E. Bosarge, Jr., expun metode iterative infinit dimensionale și aplicarea lor la rezolvarea problemelor de valori proprii, probleme de aproximații succesive și altele. Aplicații interesante prezentate în această ordine de idei se referă la probleme de zboruri cosmice și la alte probleme aero-spațiale.

5. J. Fave expune un criteriu de convergență prin supraestimarea optimului pentru metoda gradientului. Optimizarea prin modulație a incidenței zborului și unghiul de ruliu al traiectoriilor unui planor orbital sînt indicate ca o ilustrare a rezultatelor teoretice prezentate de autor.

6. B. Finkbeiner și W. Runggaldier perfecționează eleganta metodă a lui Howard de determinare a strategiei optimale pentru procese de decizie aleatorie. Numeroase exemple în domeniu, interesînd și Mecanica au fost calculate la MEC I.B.M. 360/40 a Universității din Zürich.

7. A. Gill și I. L. Traiger calculează traiectorii optimale în grafuri finite. Rezultatele obținute conduc la stabilirea unui algoritm de computație a unei clase deosebit de simple de traiectorii optimale și la construirea unei strategii a traiectoriilor „staționare" care minimizează costul mediu pentru un timp infinit.

8. D. H. Jacobson expune noi algoritme de ordinul al doilea și de primul ordin pentru determinarea controlului optimal. Ele sînt concretizate într-o programare dinamică-diferențială.

9. S. Kau și K. S. P. Kumar expun liniarizarea succesivă și filtrarea neliniară ca metode pentru estimația stării parametrilor unui sistem neliniar dinamic.

10. D. G. Luenberger descrie o metodă computațională, bazată pe o teoremă de dualitate finit-dimensională referitoare la programarea convexă, care conduce la soluționarea a numeroase probleme de control optimal, dintre care un număr de exemple se referă la interesante probleme de Mecanică aplicată.

11. D. Mangeron și M. N. Oğuztöreli prezintă metode computaționale în probleme de optimizare referitoare la ecuații polivibrante. Problematica autorilor, expusă de primul dintre referenți, se referă la vastul cadru înglobat în optimizarea în sisteme de control cu parametri distribuiți. Interesul trezit de rezultatele expuse se leagă și de faqtul că în cercetări cu totul recente, ca de ex. ale acad. american Gar-

rett Birkhoff și W. Gordon se reiau „ecuațiile Mangeron", extinzîndu-se gama lor de aplicații la proiectarea grafică automată a suprafețelor libere.

12. A. Miele expune cu ajutorul calculului variațional problematica referitoare la metoda gradientului. Exemple numerice arată o rapidă convergență a metodei către soluția căutată, iar curba inițială nu trebuie să satisfacă neapărat condițiile diferențiale impuse soluției căutate.

13. R. R. Mohler, S. G. Moon și H. J. Price analizează în detaliu conputații de control optimal pentru reactori nucleari.

14. R. L. Zahradnik calculează profile de temperatură aproape optimală pentru reactori tubulari.

Trebuie subliniată atenția deosebită acordată oaspeților de către profesorii A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt și L. A. Zadeh, președinte și co-președinți ai acestei frumoase Conferințe Internaționale, programată într-un cadru demn de tot ce este frumos în lume : San Remo.

DIN PROBLEMATICA DE MECANICĂ ŞI MATEMATICĂ APLICATĂ EXPUSĂ ŞI DEZBĂTUTĂ LA AL VII-LEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR AUSTRIACI

(LINZ, 16—20 SEPTEMBRIE 1968)

de D. MANGERON

Cel de al VII-lea Congres al Matematicienilor Austriaci, desfăşurat anul acesta în cadrul unei frecvenţe bienale, a întrunit un număr destul de mare de specialişti în domeniul Mecanicii şi Matematicii aplicate. Lucrările acestora s-au prezentat într-un şir de şedinţe de lucru, prezidate pe rînd de T. Andjelić (Belgrad), R. Leis (Bonn) şi D. Mangeron (Iaşi).

Din problematica dezbătută la Congres în această ordine de idei menţionăm :

1. *Observaţii asupra legăturilor neolonome de gradul al doilea* (T. Andjelić). Autorul, după ce discută care din legăturile neolonome de gradul al doilea au şi care nu au un sens dinamic, infirmă, în particular, afirmaţia lui Carathéodory că atare legături dacă sînt scleronome şi au sens dinamic trebuie să fie neapărat omogene în viteze. Problema compatibilităţii sau incompatibilităţii legăturilor neolonome considerate este rezolvată folosind interpretarea geometrică a acestor legături privite ca hodografe (în spaţiul cu trei dimensiuni ca suprafeţe de ordinul al doilea şi, corespunzător, în spaţiul configuraţiilor cu mai multe dimensiuni). Lucrarea se încheie cu studiul dinamic al mişcării cu legături $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{z} = 0$.

2. *Tensiuni proprii în corp solid neomogen discontinuu* (K. Herrmann, Halle (Saale)). Autorul studiază tensiuni proprii cauzate de cvazideplasări într-un corp solid cilindric de lungime infinită, izotrop, linear elastic, constituit însă dintr-un material neomogen discontinuu. Se presupune izolarea termică a solidului în raport cu mediul înconjurător, excluderea propagării căldurii între domeniile parţiale ale corpului considerat, independenţa de temperatură a constantelor elastice şi termice E_i, ν_i, $\varkappa_i$ ($i = I, II$) şi lipsă de tensiune la suprafaţă.

3. *Unele probleme referitoare la aplicarea metodei directe a lui Liapunov în studiul stabilității reactorilor nucleari* (F. Kapel, Graz). Autorul, după ce demonstrează că teoremele „clasice" referitoare la metoda directă a lui Liapunov nu pot fi aplicate nemijlocit în studiul stabilității poziției de repaus a modelului punctiform al unui reactor, stabilește un număr de rezultate referitoare la stabilitatea reactorilor nucleari folosind unele extensiuni recente ale teoriei lui Liapunov datorite între altele lui LaSalle.

4. *Mulțimea accelerațiilor normale și tangențiale nule ale punctelor unui corp* (J. Kováč, Bratislava). Autorul stabilește unele rezultate reflectate în titlu, ce constituie un caz particular al seriei de teoreme enunțate de D. Mangeron în 1963 în „Buletinul Institutului politehnic din Iași", studiate apoi cu unele detalii de dr. ing. E. Croitoru.

5. *Cu privire la teoria oscilațiilor electromagnetice în medii anizotrope neomogene* (R. Leis, Bonn). Autorul demonstrează unicitatea și existenta soluției problemei exterioare maxwelliene rot $E - i\omega\mu H = J$; rot $H + i\omega\varepsilon E = K$; $n \times E | \partial G = 0$.

6. *Sisteme ortogonale de funcții proprii a două membrane triunghiulare* (E. Makai, Budapest). Autorul stabilește sisteme ortogonale complete de funcții proprii pentru două anume membrane triunghiulare și demonstrează că o anumită conjectură în această ordine de idei atribuită lui H. Weyl și demonstrată într-un anume caz de N. V. Kuznețov în 1966 este valabilă și în cazul domeniilor considerate de autor. La discuții, D. Mangeron a putut sublinia rezultatele proprii referitoare la problema spectrelor și a funcțiilor proprii privitoare la membrane triunghiulare, publicate în 1964 în „Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée".

7. *Procese Markoviene și Dinamică stelară* (W. Tscharnuter, Viena). Autorul, urmînd rezultatele studiilor lui Chandrasekhar și a continuatorilor lucrărilor acestuia de acum 25 de ani, stabilește, în particular, că distribuția maxwelliană nu reprezintă în domeniul dinamicii stelare o distribuție de echilibru.

8. *Aplicarea metodei lui N. Saltykov la ecuații cu derivate parțiale ale dinamicii, cu trei parametri, integrabile prin separarea de variabile* (R. J. Ilić, Kragujevac). Autorul expune aplicarea metodei lui N. Saltykov la ecuația lui Hamilton-Jacobi cu trei parametri, integrabilă prin separarea de variabile.

9. *Ecuații funcționale și probleme optimale în sisteme de control cu parametri distribuiți referitoare la sisteme polivibrante* (D. Mangeron, Iași și M. N. Oguztöreli, Edmonton). Autorii, ținînd seama de faptul că numeroși oameni de știință, ca de ex. academicianul american Garrett Birkhoff (J. Approx. Theory, 1968), W. Gordon ș.a., au subliniat importanța unor noi aplicații practice ale ecuațiilor polivibrante, introduse în literatura de specialitate de primul dintre autori și numite de diferiți cercetători de peste hotare „ecuații Mangeron", rezolvă a serie de probleme optimale cu parametri distribuiți referitoare la sisteme polivibrante.

Contacte științifice intense, adîncirea problematicii expusă de autorul acestor rînduri în ciclul său de conferințe ținute în noiembrie 1967 la Universitatea din Innsbruck și Institutul politehnic din Viena, cu prilejul convorbirilor avute la Congres cu prof. dr. W. Gröbner și numeroșii săi discipoli, au constituit alte laturi fructuoase legate de participarea activă a autorului la această manifestație științifică internațională de anvergură, desfășurată în condiții ireproșabile și în prezența și la alte secții ale Congresului, a unor cercetători români din același centru (Iași) ca de ex., dr. V. Murgescu de la Institutul politehnic Iași sau din alte centre universitare.

— MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE —

CONFERINŢĂ CU PARTICIPĂRI INTERNAŢIONALE DE TEORIA MECANISMELOR ŞI A MAŞINILOR

(MAGDEBURG, R.D.G., 2—4 OCTOMBRIE 1968)

de D. MANGERON

Între 2—4 octombrie 1968 s-a desfăşurat la Magdeburg, sub egida Institutului politehnic „Otto von Guericke", conferinţă cu participări internaţionale de Teoria mecanismelor şi a maşinilor (TMM). Din mulţimea de lucrări prezentate la conferinţă, menţionăm pe scurt conţinutul celor ce urmează.

1. H. Boden (Karl-Marx-Stadt), *Aplicarea combinată a mişcărilor de repulsie a unui mecanism de bielă-manivelă la transmiterea cartoanelor perforate.* Autorul expune, simultan cu prezentarea unui mecanism adecvat de bielă-manivelă, teoria şi practica transmiterii pe cale mecanică şi nu pe cea pneumatică a unui număr de cca. 3000 cartoane perforate/min (50 cartoane/s). Aceasta fără a deteriora cartoanele respective.

2. G. Christen (Ilmenau), *Analiza cinematică şi studiul experimental al mecanismelor înfăşurătoare cu frecare a curbelor.* Se expune teoria şi practica mecanismelor de înfăşurare cu frecare a curbelor. Ref. menţionează cu această ocazie interesul ce-l prezintă atare mecanisme, studiul acestora fiind inaugurat de ref. apelînd la aparatul matematic de investigaţie ştiinţifică, numit geometrie tangenţială. *Metoda tangenţială*, introdusă de ref. în studiul TMM, expusă la Conferinţa jubiliară a Academiei (Bucureşti 2—4 iulie 1960), a fost continuată de alţi cercetători din ţară şi de peste hotare. Ea constituie astăzi subiectul tezei de doctorat în curs de elaborare de către dr. ing. N. Orlandea.

3. Fl. Dudiţă (Braşov), *Autotensiune în mecanisme cardanice cuplate în cerc închis.* Autorul, continuîndu-şi seria de lucrări consacrate studiilor aprofundate ale mecanismelor cardanice, cristalizate recent în cunoscuta sa teză de doctorat, prezintă aici teoria şi practica unui model generalizat, aplicabil la studiul solicitărilor periodice, precum şi a variaţiei ciclice a randamentului în maşini cu transmisii cardanice cuplate în cerc închis.

4. Kyril Encev (Rusciuc), *Geometria cinematică a ternelor plane.* Autorul, numind ansamblul a trei elemente arbitrare aparținînd unui mecanism plan o „ternă plană", enunță un număr de teoreme referitoare la a) două poziții vecine, b) două poziții infinit vecine, c) trei poziții vecine, d) trei poziții infinit vecine, și expune un număr de aplicații ale rezultatelor obținute la studiul problemelor de analiză și sinteză a mecanismelor plane.

5. H. - J. Heinrich (Dresden), *Studiul cinematic al mecanismelor spațiale.* Autorul prezintă sub formă de diagrame interdependențe funcționale între axele momentane de rotație și de rototranslație și funcții de transmitere în studiul mecanismului spațial cu dublă manivelă.

6. H. Kerle (Braunschweig), *Influența jocului în articulație și a frecării coulombiene asupra mișcării unui element în translație la un mecanism centrat cu manivelă și glisor.* Autorul studiază, făcînd și aplicație concretă la mecanismul indicat în titlu, influența jocului în articulație și a frecării uscate asupra mișcării glisorului și a comportării la vibrații în cazul vitezelor mari.

7. D. Mangeron (Iași), *Studiul comparativ al metodelor analitice actuale de investigație a mecanismelor și a mașinilor.* Autorul, luînd ca punct de plecare volumele cu totul recente elaborate de A. P. Lebedev, R. Voinea și M. Atanasiu, Chr. Pelecudi și R. C. Bogdan, consacrate expunerii diferitelor metode analitice de studiu al mecanismelor plane și spațiale, prezintă un studiu comparativ al metodelor actuale în domeniu, trecînd în revistă avantajele și dezavantajele unor metode proprii, ca de ex., metoda tangențială, metoda accelerațiilor reduse, metoda matricială-tensorială (aceasta din urmă, elaborată în colaborare cu C. Drăgan) ș.a.

8. E. G. Nachapetjan (Moscova), *Analiza cinematică și dinamică a mecanismelor sferice malteze.* Autorul, ținînd seama de rolul crescînd al mecanismelor cu mișcare intermitentă, precum și de literatura existentă în domeniul cinematicii mecanismelor sferice malteze (S. Rappaport, W. Meyer zur Capellen ș.a.), expune un număr de rezultate proprii referitoare la cinetica unor atare mecanisme și anume ecuații și diagrame de determinare a momentelor, a unor extreme sau zerouri. Sînt interesante și considerațiile referitoare la comportarea comparativă a mecanismelor malteze plane și sferice.

9. V. I. Nebesnov (Odessa), *Probleme fundamentale ale mecanismelor mașinilor navale.* Autorul expune, făcînd uz și de aportul MEC, diferite date obținute în domeniul studiului regimurilor tranzitorii ale diferitelor complexe componente ale mașinilor navale, ca de ex. dinamica complexului de angrenări cu roți dințate, a mecanismelor electromagnetice și hidrostatice ce se află în funcțiune în timpul transmiterii puterii de la motor la elice.

10. Chr. Pelecudi și I. Sava (București), *Sinteza numerică optimală a mișcării dispozitivelor de reglare automată a supapelor.* Autorii, folosind programarea liniară și metoda calculului cu diferențe finite, rezolvă problema de optimizare a diferitelor funcționale referitoare la dispozitive de reglare automată a supapelor. Recentele teze de doctorat ale autorilor permit de asemenea extinderea la domeniul particular abordat aici a unor metode de studiu al mecanismelor și a mașinilor, elaborate de școala de TMM din patria noastră, caracterizată de redactorul responsabil al revistei

JOURNAL OF MECHANISMS, F. R. E. Crossley, ca fiind „viguroasă și excelentă, deosebit de apreciată în lumea întreagă" (vol. 3, 1968, p. 209).

11. E. Székely și V. Handra-Luca (Cluj), *Aplicarea funcțiilor de transmitere în studiul mecanismelor.* Autorii, continuîndu-și șirul de studii, inițiat cu prilejul adîncirii unor lucrări ale ref., expun rezultate noi, care se întregesc cu cele trimise spre prezentare la recenta conferință de TMM, organizată sub egida revistei JOURNAL OF MECHANISMS (Atlanta, Georgia), privitoare la funcții de transmitere vectoriale. Se indică totodată și unele aplicații la analiza și sinteza mecanismelor.

12. S. Tavkhelidze și T. Giorkhelidze (Tbilisi), *Studiul analitic al unor mecanisme ale mașinilor de lucru.* Autorii prezintă tabele și diagrame referitoare la cinematica mecanismelor cu mai multe elemente ce se întîlnesc în mașini moderne de lucru.

13. S. A. Cerkudinov și I. G. Olejnik (Moscova), *Sinteza optimală a dimensiunilor unui mecanism plan cu oprire cu manivelă cu șase elemente.* Fiind date : 1. unghiul manivelei antrenoare corespunzător cu timpul de oprire al balansierului condus, 2. unghiul total de oscilație al balansierului și 3. cea mai mică valoare a unghiului de transmitere, se determină — în ipoteza optimizării — lungimile tuturor elementelor mecanismului, valoarea unghiului de direcție între balansier al primului patrulater articulat și manivela antrenoare a celui de al doilea patrulater articulat. Rezultatele obținute sînt consemnate în tabele și diagrame, programările respective fiind executate cu ajutorul MEC „Minsk-2". Diapazonul de aplicabilitate este foarte larg.

14. V. Brát (Praga), *Mecanismul „Turbula".* Autorul studiază un mecanism spațial cu șase elemente, puțin cunoscut, aparținînd unui malaxor (Mașină „Turbula" a firmei elvețiene W. A. Bachofen). Soluția analitică a comportării cinematice a elementului principal în mișcare spațială generală este determinată folosind metoda matricială (A se vedea lucrarea lui D. Mangeron și C. Drăgan, prezentată la aceeași conferință „*Teoria generală a aproximațiilor succesive în studiul mecanismelor și a mașinilor, elaborată pe baza unei noi metode matriciale-tensoriale în vederea aplicării mașinilor electronice de calcul*").

15. A. Morecki (Varșovia), *Asupra construcției unei mașini cu reglare automată pentru etalonarea dinamometrelor.* Autorul expune avantajele mașinii cu reglare automată pentru etalonarea dinamometrelor, construită la catedra de TMM de la Institutul politehnic din Varșovia (Director prof. dr. Jan Oderfeld), aflată în funcție timp de doi ani la CUJM din Varșovia. O serie de atare mașini este în curs de construcție în vederea acoperirii diferitelor domenii de sarcină.

16. H. Houben (Aachen), *Oscilații de rotație în sisteme neolineare ținîndu-se seama de influența asupra mașinii de forță a oscilațiilor de rapel în mecanisme.* Folosind o mașină asincronă ca mașină de forță și incluzînd-o în calculul oscilațiilor de rotație autorul obține în afară de explicația teoretică a unor fapte cunoscute în practică și determinări de grade de neuniformitate, de sarcini în lagăre și de momente în arborele motor.

Variate contribuții referitoare la sistematica și cinematica mecanismelor spațiale cu geometrie variabilă (G. Kunad, Magdeburg), la aplicarea unor metode de programare neliniară la optimizarea problemelor de tehnica mecanismelor (P. Kulitscher, Karl-Marx-Stadt), la automatizarea reglării de înaintare a aței în mașini de cusut talpă (K. Kveladze, Tbilisi) ș.a.ș.a. întregesc această interesantă conferință, care, împreună cu conferința de TMM din Atlanta, Georgia, deja citată și cu lucrările în domeniul TMM ce au fost susținute în cadrul Conferinței naționale de Mecanică aplicată (Academia R.S.R., București, 23—27 iunie 1969) au constituit preludiul celui de al doilea Congres internațional de TMM, din luna septembrie 1969 de la Zakopane.

RECENZII

* * * *Matematische Hilfsmittel des Ingenieurs* (*Metode matematice în inginerie*). Herausgegeben von (sub redacția) R. Sauer, I. Szabó, unter Mitwirkung (în colaborare cu) H. Neuber, W. Nürnberg, K. Pöschl, E. Truckenbrodt, W. Zander. Teil (partea) I. Verfasst (elaborată de) G. Doetsch, G. W. Schafke, H. Tietz. 103 figuri, XV + 496 p. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

Dezvoltarea vertiginoasă a tehnicii înalte de astăzi, caracterizată prin miniaturizarea, aplicarea efectivă a modelării matematice n e l i n i a r e a fenomenelor naturii, făcută posibilă grație folosirii nemijlocite a MEC (mașinilor electronice de calcul), rezolvarea cu succes a problematicii care a dus și duce în continuare într-un ritm din ce în ce mai viu la cucerirea micro- și macrocosmosului, face indispensabilă pentru orice inginer mînuirea dacă nu și stăpînirea perfectă a unui aparat matematic de investigație științifică foarte variat și modern.

Volumul „Mathematische Hılfsmittel des Ingenieurs"-primul din seria de *patru* volume, ce se publică de către binecunoscuta și apreciata editură științifică Julius S p r i n g e r sub redacția prof. R. Sauer și I. Szabó — se subdivide în trei părți, elaborate cu grijă și competență deosebită de renumiți specialiști în materie. Volumul recenzat, ca și următoarele trei din această serie, nefiind nicidecum un simplu formular, conține aranjate într-o ordine logică, definiții precise, teoreme fundamentale și linii principale de demonstrație referitoare la fiecare domeniu de seamă din cadrul disciplinelor expuse. Spre deosebire de expuneri adresate matematicienilor „puri" însă, această serie de volume este caracterizată prin prezența sublinierilor sistematice care arată unde și în ce chip teoriile expuse pot fi aplicate cu deosebit succes sau s-au și aplicat cu folos. Atare concretizări referentul le socoate deosebit de valoroase. Dacă la aceasta se adaugă și prezentarea excelentă — tradițional excelentă —, literatură esențială la zi, dată după fiecare capitol și un foarte detaliat indice de materii, valoarea acestui volum și fără îndoială și a celorlalte trei este greu de supraevaluat.

În imposibilitatea de a intra aici în alte detalii, dăm mai jos următoarele indicații privitoare la conținut.

A. *Teoria funcțiilor de variabilă complexă*, redactată de H. Tietz, profesor la Institutul politehnic din Hanovra, este expusă în 84 pagini fiind subdivizată în următoarele subdiviziuni principale: Bazele teoriei funcțiilor de variabilă complexă, teoria potențialului, reprezentări conforme, probleme de contur și unele clase de funcții speciale (liniare, raționale, eliptice,...), tehnica integrării complexe. Deosebit de interesante sînt date și tabele concrete privitoare la reprezentări conforme, în particular la reprezentări aproape circulare.

B. *Funcții speciale*. Acest capitol vast, aflat — după cum se știe — într-o foarte rapidă dezvoltare, tabelări de funcții noi putînd fi făcute astăzi, în opoziție cu uriașa perioadă de muncă neîntreruptă făcută de pildă timp de 35 de ani de regretatul profesor K. Hayashi pentru a da la lumină cunoscutele sale tabele de funcții Bessel, într-un număr redus de zile, în care se include și durata de tipărire a volumelor de tabele respective, este redactat de prof.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6, P. 1551–1554, 1969

F. W. Schäfke de la Universitatea din Köln. Menționăm aici bogăția de date referitoare la funcția gama, la separarea ecuației oscilațiilor, la funcții cilindrice, la funcția hipergeometrică, la funcții sferice, la funcții hipergeometrice confluente, la funcții speciale — soluții ale ecuației $\frac{d}{dz} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1)$, la polinoame ortogonale, la funcții Mathieu și la funcții sferoidale (pp. 85—230).

C. *Transformări funcționale.* Acest extrem de important în aplicații vast capitol a fost redactat de prof. G. Doetsch, de la Universitatea din Freiburg i. Br., o celebritate — alături de M. Picone — în teoria și practica transformatelor lui Laplace. Aici găsim expuse cu măiestrie subcapitolele: 1. Noțiuni de transformări funcționale și spațiul hilbertian L^2, 2. Transformarea Fourier, în care se includ și sisteme filtru fictive, 3. Transformata lui Laplace, cu aplicații la analiză și sinteza rețelelor electrice și cu studii privitoare la calculul originalelor după funcții imagine, 4. Transformata bilaterala a lui Laplace și transformata lui Mellin, 5. Transformata lui Laplace în două dimensiuni, 6. Transformate discrete ale lui Laplace sau Transformate Z (Zypkin) și 7. Transformate finite.

Pînă la apariția unor elaborări fericite românești în domeniu, care — fără îndoială — nu vor întîrzia mult, Ref. recomandă traducerea acestui și a următoarelor trei volume.

Merită subliniere specială prezența în volumul recenzat a unui apendice consacrat expunerii detaliate a noțiunii actuale de funcție în sensul distribuțiilor, urmată apoi de noțiunea de derivată a unei distribuții, de purtător al unei distribuții, de înmulțirea unei distribuții printr-o funcție și de un scurt studiu asupra pseudofuncțiilor.

Deosebit de utile sînt și tabele de Transformata Fourier, (pp. 473—475), Transformata Laplace (pp. 476—477), Transformata Mellin (pp. 478—479), Transformata Laplace bidimensională (pp. 480—481), Transformata Z $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ (p. 482) și Transformata finită sinus $\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = F_n$ (p. 483) și Transformata finită cosinus $\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = F_n$ (p. 484***).

D. Mangeron

Elemente de construcții pentru locuințe de L. WIEL (*în colaborare cu Heinz Dittmann*), 184 pag. cu 17 figuri în text și 115 planșe de desene de construcții. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1968.

Ca formă, lucrarea este caracterizată printr-un anumit mod de redactare: din totalul de 184 pagini, textul cuprinde numai 56 pagini (incluzînd și 17 figuri), în timp ce restul de 128 pagini este rezervat planșelor cu desene ale diferitelor elemente de construcții (pereți, schelete, tavane, acoperișuri, terase, ferestre etc.).

Autorul a reușit deci să dea explicațiilor o formă cît se poate de concisă, indicînd însă în fiecare capitol standardele, cataloagele și instrucțiunile în vigoare pentru materia tratată. În felul acesta se accentuează necesitatea ca arhitectul și inginerul proiectant să fie la curent

cu aceste documentații, să fie preocupat în permanență de aplicarea acestora și să urmărească modificările care intervin în mod curent datorită dezvoltării continue a tehnicii construcțiilor.

Avînd în vedere că industrializarea lucrărilor de construcții joacă un rol din ce în ce mai mare, accentul a fost pus pe discuția acestor metode, fără însă a se subestima metodele tradiționale, în special în legătură cu lucrări de conservare sau de restaurare a clădirilor mai vechi.

Cartea adresîndu-se în primul rînd studenților de la facultățile de arhitectură și de construcții, cuprinde și unele aspecte introductive privind construcții istorice, și anume casele de locuit pînă în secolul al XIX-lea, cu scopul de a contribui la înțelegerea tendințelor de dezvoltare ulterioară a sistemelor de construcții.

Ca perspectivă se subliniază aspectul că metodele industriale, prin perfecționarea lor continuă, vor impune amprenta lor arhitecturii viitorului. De aici rezultă sarcini importante pentru tînăra generație de constructori, la soluționarea cărora vrea să contribuie lucrarea de față.

E. Mândroiu

Ingenieurtaschenbuch, Bauwesen. Band III Boden — Wasser — Verkehr. Sub redacția (Herausgegeben von) Prof. Dr.-Ing., habil. Karl — Franz Busch (Manualul inginerului, construcții. Vol. III Teren — Apă — Circulație) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965, 1504 pag.

Editura B. G. Teubner dun Leipzig (R.D.G.) a inițiat încă din anul 1963 tipărirea unui manual al inginerului de construcții, deosebit de cuprinzător, oferind specialiștilor o privire generală sistematică asupra tuturor domeniilor ingineriei de construcții. În lucrare se insistă în egală măsură atît asupra bazelor teoretice ale diferitelor probleme tratate, cît și asupra aplicării în practica proiectării și a execuției a cunoștințelor teoretice expuse, redîndu-se numeroase exemple de calcul, tabele numerice, date statistice recente, abace etc.

Din manualul amintit, au apărut pînă în prezent următoarele volume:

— Vol. I. Bazele ingineriei de construcții, 1256 pag., 1963.

— Vol. IV. Construcții, civile, partea 1, Probleme generale, 1572 pag., 1964.

— Vol. III. Teren — apă — circulație, lucrare care face obiectul prezentei recenzii.

Sînt prevăzute a apărea încă următoarele volume:

— Vol. II, Construcții inginerești.

— Vol. IV. Partea 2, construcții civile. Proiectare.

— Vol. IV. Partea 3, construcții civile. Tehnologia construcțiilor.

✦

Volumul II al colecției, cuprinde probleme legate de mecanica pămîntului, geologia inginerească, terasamente, tunele, alimentări cu apă, căi de comunicație terestre, fluviale și maritime.

În cap. I, intitulat „Terenul", se studiază raporturile de interacțiune dintre straturile superioare ale scoarței Pămîntului și activitatea de construcție a oamenilor. Acest capitol cuprinde: geologia inginerească, mecanica pămînturilor, construcții de pămînt și terasamente, construcția tunelelor, biologia inginerească, surse de apă.

În cap. II cu titlul „Hidraulica" se studiază procedeele de regularizare și purificare a apelor, precum și de compensare între debitele de apă oferite de sursele naturale și necesitățile consumatorilor, bazele teoretice ale hidraulicii tehnice și tehnica măsurătorilor hidrologice

Cap. III intitulat „Alimentări cu apă și canalizări", tratează toate problemele teoretice și aplicative corespunzătoare acestei ramuri a ingineriei de construcții.

Cap. IV se intitulează „Construcții hidrotehnice" și cuprinde: (căi de comunicații fluviale (regularizări, proiectare, construcții hidrotehnice corespunzătoare), centrale hidroenergetice (proiectare, construcție, mașini hidraulice, exploatare), hidrotehnică agricolă (proprietățile solurilor, canalizarea și alimentarea cu apă a solurilor de cultură, întreținerea și asanarea precum și protecția contra eroziunii a solurilor de cultură), construcții piscicole.

În cap. V având titlul „Căi de comunicație terestre", se tratează următoarele probleme: sistematizarea și proiectarea circulației pe drumuri terestre, construcția drumurilor (infrastructura, tratamente de consolidare, suprastructuri pietroase și bituminoase, canalizarea drumurilor, lucrări de întreținere).

Cap. VI cu titlul „Căi ferate" cuprinde: proiectarea traseelor, stații, instalații de semnalizare, particularități de construcție a căilor ferate cu tracțiune electrică, căi ferate cu destinații speciale (monoșine, căi ferate cu cremalieră), construcția suprastructurii, instalații de ramificare și macazuri, lucrări de întreținere.

Cap. VII „Construcția căilor de navigație", cuprinde: regularizarea cursurilor de apă navigabile, ecluze, construcții maritime (acțiunea apelor maritime, măsuri de protecție, guri de vărsare a apelor navigabile), porturi fluviale și maritime.

Cap. VIII „Aeroporturi" studiază probleme privind proiectarea aeroporturilor, construcția suprastructurii și procedee de consolidare, construcția stațiilor, aeroporturi speciale (aeroporturi sportive, aeroporturi pentru elicoptere).

Este necesar să subliniem că tematica fiecărui capitol este deosebit de cuprinzătoare, studiindu-se unele probleme-anexă care în general sînt lăsate de-o parte la cursurile de specialitate ținute în facultățile tehnice din țara noastră, probleme care contribuie însă la o informare multilaterală și deci la o sporire calitativă a muncii de cercetare, de proiectare și de execuție a inginerului constructor.

Ernest Beiu — Paladi

STUDII ŞI CERCETĂRI

DE MECANICĂ APLICATĂ

1969

INDEX ALFABETIC

STUDII	Tomul	Nr.	Pag.
ALBU ANDREI, EUGEN PAY, Contribuţii la dinamica vibraţiilor supapelor de presiune din circuitele hidraulice de acţionare ale maşinilor unelte	28	3	725
ANTAL A., Teoria generală a frezelor melcate	28	4	933
ANTONESCU PĂUN, Contribuţii la sinteza cinematică a mecanismelor bielă-manivelă spaţiale	28	2	381
ARSENIE DUMITRU, vezi ARSENIE MARIA şi	28	3	595
ARSENIE MARIA, DUMITRU ARSENIE, O propunere privind lungimea de amestec din teoria lui L. Prandtl pentru cazul curgerii turbulente în canale şi conducte, avînd la bază un principiu variaţional	28	3	595
BĂRĂNESCU GEORGE, Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit	28	6	1355
BĂRĂNESCU GEORGE, GHEORGHE ZĂTREANU, Imbunătăţirea echilibrajului momentelor forţelor de inerţie prin plasarea cilindrilor în două linii prevăzute fiecare cu un arbore cotit	28	5	1063
BĂRĂNESCU GHEORGHE, GHEORGHE ZĂTREANU, DINU TARAZA, Unele probleme privind comportarea la oboseală a asamblărilor cu şurub	28	6	1403
BEINER LEON, MARIA GAVRILĂ, O soluţie riguroasă în problema întîlnirii cu minimum de combustibil pe orbite circulare	28	2	325
BEINER L., vezi MARINESCU AL.	28	1	111
BOGDAN RADU C., SERGIU CONONOVICI, DAN LARIONESCU, Calculatorul analogic în cercetarea mecanismelor	28	5	1093
BOICU N., Deformaţia locală, de contact elastic liniar, la roţile dinţate	28	3	705
CALCAN VICTOR, Utilizarea textolitului în construcţia ghidajelor rectilinii plane. I. Comportarea la uzură a cuplurilor de frecare textolit-fontă	28	4	969
CALCAN V., CORNELIA OBEJDEANU, Modificările dimensionale şi variaţia masei la imersiunea în apă şi în ulei a unor materiale plastice armate de tip textolit	28	1	211
CARAFOLI ELIE, ŞTEFAN STAICU, Asupra separaţiei curentului la bordurile aripii delta antisimetrice în regim supersonic	28	4	771
CARAFOLI E., ŞT. STAICU, Scurgerea supersonică în jurul aripii delta arcuită şi torsionată simetric ţinînd seama de separaţia curentului la bordurile de atac	28	3	525
CHIROIU VETURIA, vezi RĂUTU S.	28	1	137
CHIROIU V., vezi RĂUTU S.	28	4	821
CIOBANU TRAIAN, vezi MARCU VASILE	28	2	463
CIUCĂ C., vezi TEODORESCU M.	28	4	955
CONONOVICI SERGIU, vezi BOGDAN RADU C.	28	5	1093

	Tomul	Nr.	Pag.
CONSTANTINESCU V. N., GH. MARIN, Grup electrogen pe lagăre cu aer	28	1	251
COSAC V., vezi PETRE A.	28	2	309
COZMA CIPRIAN, vezi IONESCU VASILE	28	5	1013
COZMA CIPRIAN, vezi IONESCU VASILE.	28	6	1303
CRĂCIUN C. I., vezi DUMITRESCU D.	28	3	497
CRĂCIUN CORNELIU, Mişcarea de antrenare şi transferul de căldură pentru fluide vîscoase stratificate	28	3	585
CRĂCIUN IOAN, O metodă de calcul al oscilaţiilor de torsiune ale arborilor maşinilor cu ajutorul grafelor liniare	28	6	
DAVID IOAN, Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu limitat cu condiţii mixte pe contur	28	2	361
DENNAOUI SAHL, vezi SOARE AL.	28	6	
DIMITROV BORIS, vezi PAVELESCU DAN	28	3	747
DINCĂ F., T. SIRETEANU, Vibraţii aleatoare în dinamica autovehiculelor	28	4	475
DÎMBOIU EUGEN, Consideraţii asupra măsurării frecării interne în solide	28	1	169
DODOC P., Apariţia şi măsurarea rugozităţii de vibraţii la strunjirea de înaltă precizie	28	4	941
DODOC P., Fenomene de rezonanţă la axele principale ale maşinilor unelte şi influenţa lor asupra preciziei de prelucrare	28	2	427
DROBOTĂ V., vezi VOINEA R.	28	4	803
DUDIŢĂ FL., Mecanisme spaţiale tripode	28	6	
DUMITRESCU D., C. I. CRĂCIUN, Mişcarea fluidului vîscos în lungul unei plăci plane la numere Reynolds mici	28	3	497
EGRI IOSIF, Calculul randamentului şi bilanţul energetic al transmisiilor prin curele	28	5	1123
FLORIAN VIRGILIU, Contribuţiuni privind calculul spaţial al structurilor multietajate simetrice cu etaj constant, alcătuite cu diafragme (I)	28	5	1167
FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul spaţial al structurilor multietajate simetrice cu etaj constant alcătuite cu diafragme (II)	28	6	
GĂLEŢUŞE S., Asupra căderii de presiune la scurgerile prin conducte în regim turbulent	28	3	607
GAVRILĂ MARIA, vezi BEINER LEON	28	2	325
GAVRILĂ MARIA, vezi MARINESCU AL.,	28	1	111
GIONCU VICTOR, Calculul plăcilor curbe subţiri cu dublă curbură pozitivă, rezemate pe arce cu tiranţi	28	5	1191
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, ezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene	28	6	
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, Mişcarea fluidului într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde	28	5	1013
KEINTZEL EINAR, Calculul simplificat al conlucrării spaţiale a diafragmelor cu mai multe şiruri de goluri	28	3	697
LARIONESCU DAN, vezi BOGDAN RADU C.	28	5	1093
LĂZĂRESCU ION, EUGEN PAY, Contribuţii la determinarea influenţei regimului de lucru asupra preciziei grosimii dintelui, la frezarea danturii roţilor dinţate cilindrice	28	5	1147
LIBRESCU L., Stabilitatea panourilor elastic-neliniare plasate într-un curent de gaz supersonic	28	1	153
MANIŢIU RODICA, Asupra condiţiilor de etanşare ale segmenţilor de piston în cazul variaţiei diametrului de montaj	28	4	921
MANOLESCU N. I., Pentru adoptarea unui punct de vedere unitar în studiul analizei structurale a lanţurilor cinematice şi mecanismelor.	28	2	403
MARCU VASILE, TRAIAN CIOBANU, Unele aplicaţii speciale ale metalizării prin pulverizare în R.S.R.	28	2	463
MARIN GH., vezi CONSTANTINESCU V. N.	28	1	251
MARIN GHEORGHE, vezi NICA ALEXANDRU	28	5	1053
MARIN GH., vezi SĂLCUDEAN MARTHA	28	2	439
MARINESCU AL., L. BEINER, MARIA GAVRILĂ, Studiul manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil în faza de apropiere pe orbite eliptice şi hiperbolice (teoria neliniară)	28	1	111
MARINESCU P., V. TOMA, ŞT. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra elementelor de amplificare cu fluid de tip bistabil	28	6	

	Tomul	Nr.	Pag.
MATEESCU DAN, Aripi cruciforme şi cu ampenaje prevăzute cu fuzelaj conic în regim supersonic. II.Mişcări conice de ordin superior	28	1	53
MATEESCU DAN, Asupra mişcării conice de ordin doi în jurul sistemelor aripă-fuzelaj	28	6	
MATHEESCU ANCA, vezi PELECUDI CHR.	28	1	195
MUNTEANU ION, Contribuţii la rezolvarea structurilor spaţiale	28	3	665
MUTAFOLO, M., Simplificări în calculul turnurilor spaţiale etajate axial simetrice	28	2	
NĂSTASE ADRIANA, Aripă delta, de rezistenţă minimă, în curent hipersonic moderat	28	2	349
NĂSTASE ADRIANA, Aripă delta subţire, de geometrie variabilă, optimă la două regimuri de zbor supersonice	28	3	551
NĂSTASE ADRIANA, Asupra problemei de rezistenţă minimă a aripii trapezoidale simetrice, de grosime simetrică în curent supersonic	28	1	17
NĂSTASE M. GR., Alegerea judicioasă a parametrilor de expunere în radiologia industrială	28	2	453
NEDELCU ŞT., vezi TIPEI N.	28	3	507
NICA ALEXANDRU, GHEORGHE MARIN, Cercetări experimentale asupra distribuţiei de temperaturi în lagărele circulare cu alunecare	28	5	1053
NIŢĂ M. M., Ecuaţiile neliniare ale mişcării perturbate a vehiculului orbital staţionar la o latitudine arbitrară	28	5	1081
OBEJDEANU CORNELIA, vezi CALCAN V.	28	1	211
ORLANDEA N., Contribuţii la sinteza mecanismelor pe baza algoritmului de formare a curbelor de înfăşurare liniară	28	3	731
OROVEANU T., Asupra difuziei convective în regim nepermanent	28	1	3
OROVEANU T., Răcirea găurii de sondă prin circulaţie de lichid	28	6	
OROVEANU T., I. SPULBER, Cîteva consideraţii asupra unor probleme de scurgere cu suprafaţă liberă a lichidelor din medii poroase	28	1	95
OROVEANU T., I. SPULBER, Unele aspecte ale dislocuirii bidimensionale a fluidelor miscibile în medii poroase	28	3	517
PASCAL H., Curgerea nestaţionară a fluidelor eterogene printr-un mediu poros	28	1	33
PASCOVICI M., Asupra influenţei transferului căldurii la mişcarea fluidelor în filme subţiri	28	5	1041
PATRAULEA N. N., Asupra determinării figurii de echilibru a unei plasme rotitoare	28	4	791
PAVEL A., Legile de variaţie a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune (II)	28	1	183
PAVELESCU DAN, BORIS DIMITROV, Uzarea în condiţiile alunecării sacadate	28	3	747
PAY EUGEN, vezi ALBU ANDREI	28	3	725
PAY EUGEN, vezi LĂZĂRESCU ION	28	5	1147
PELECUDI CHR., Sinteza numerică şi structurală a mecanismelor spaţiale de diverse familii	28	6	
PELECUDI CHR., ANCA MATHEESCU, Analiza armonică a legilor de mişcare la mecanismele cu came	28	1	195
PETCU VALERIU, Generalizarea teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat	28	2	289
PETCU VALERIU, Teoria redistribuţiei minime de momente a structurilor continue de beton armat	28	4	845
PETRE AUGUSTIN, Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante datorită efectelor combinate de rezistenţă la înaintare, produse de vînt	28	2	267
PETRE AUGUSTIN, Repartiţia sarcinilor datorită acţiunii vîntului asupra construcţiilor elastice, luînd în considerare efectele combinate de rezistenţă la înaintare şi portanţă	28	3	615
PETRE A., V. COSAC, Vibraţiile verticale ale grinzilor pendulare luînd în considerare efectele de flambaj dinamic	28	2	309
POPESCU N. D., Stabilitatea dinamică la încovoiere a consolelor	28	5	1159
RADEŞ MIRCEA, Lungimea de încastrare la flambaj	28	4	867

	Tomul	Nr.	Pag.
RADEŞ MIRCEA, Vibraţiile transversale forţate ale grinzilor finite, rezemate pe fundaţie deformabilă amortizantă	28	3	677
RAICU A., Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor plane	28	6	
RASZILLIER V., vezi VASILCA GH.	28	1	241
RASZILLIER VETURIA, vezi VASILCA GH.	28	6	
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, Unele probleme ale calculului structurilor static nedeterminate în domeniul plastic	28	1	137
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, Utilizarea calculatoarelor electronice în calculul structurilor static nedeterminate, alcătuite din bare, în domeniul elasto-plastic	28	4	821
SĂLCUDEAN MARTHA, GH. MARIN, Verificarea experiementală a unei metode analitice de calcul a lagărelor circulare alimentate sub presiune	28	2	439
SĂVULESCU ŞT., vezi MARINESCU P.	28	6	
SETEANU ION, Dezlocuirea plană negravitaţională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros. (II). (Procedeul „five spot")	28	1	75
SETEANU I., Mişcarea plană a fluidului vîscos într-un domeniu simplu conex nemărginit	28	2	369
SETEANU ION, Soluţii în serie în studiul fluidului vîscos	28	3	573
SIRETEANU T., vezi DINCĂ F.	28	4	875
SOARE AL., SAHL DENNAOUI, Studiul variaţiei presiunii într-un sistem stratificat	28	6	
SOARE MIRCEA, Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul reţelelor spaţiale planare pătrate	28	3	631
SPULBER I., vezi OROVEANU T.	28	1	95
SPULBER I., vezi OROVEANU T.	28	3	517
STAICU ST., vezi CARAFOLI E.	28	3	525
STAICU ŞTEFAN, vezi CARAFOLI ELIE	28	4	771
STĂNOIU L., vezi TIPEI N.	28	3	507
TARAZA DINU, vezi BĂRĂNESCU GEORGE	28	6	
TARĂU I., vezi TEODORESCU M.	28	4	955
TEODORESCU M., C. CIUCĂ, I. TARĂU, E. ŢÂRU, Studiul influenţei regimului de aşchiere şi a structurii materialului asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate prin strunjire	28	4	955
TIPEI N., ST. NEDELCU, L. STĂNOIU, Despre posibilităţile de caracterizare a mediilor nenewtoniene	28	3	507
TOMA V., vezi MARINESCU P.	28	6	
TUTUNARU D., Mecanisme pentru conducerea rectiliniară a mişcării	28	2	393
ŢÂRU E., vezi TEODORESCU M.	28	4	955
VAICUM ALEX., Influenţa forţei tăietoare asupra stabilităţii fundaţiilor încastrate	28	4	901
VAICUM AL., Modele reologice pentru calculul deformaţiilor pămînturilor saturate	28	2	339
VASILCA GH., VETURIA RASZILLIER, Consideraţii cantitative asupra microgeometriei unor suprafeţe de frecare cu compuşi definiţi în structura materialului	28	6	
VASILCA GH., VETURIA RASZILLIER, Unele efecte ale frecării intermitente în cazul cuplurilor din aliaje similare neferoase	28	1	241
VOINEA R., V. DROBOTĂ, Studiul grinzilor continue de deschidere egale cu ajutorul ecuaţiilor funcţionale	28	4	803
ZĂTREANU GHEORGHE, vezi BĂRĂNESCU GEORGE	28	5	1063
ZĂTREANU GHEORGHE, vezi BĂRĂNESCU GEORGE	28	6	

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

ILIUC IVAN, Metode fizice şi electrice folosite în studiul frecării şi uzării	28	2	481
SAVA I., Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. I.	28	5	1213
SAVA ION, Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came. II.	28	6	

Tomul Nr. Pag.

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE

HUNCHER TUDOR-VASILE, A V-a consfătuire asupra problemelor de bază ale teoriei mașinilor și mecanismelor. Suhumi-URSS, 15—20 mai 1967 . 28 3 761
MANGERON D., Congresul jubiliar Canadian de Mecanică Aplicată. Anul Centenarului 1967, Universitatea LAVAL, Québec, 22—26 mai 1967 . . . 28 3 757
MANGERON D., Al treilea Congres Unional de Mecanică teoretică și aplicată (Moscova, 25 ianuarie — 1 februarie 1968) 28 4 997
MANGERON D., Al IX-lea Congres Jugoslav de Mecanică teoretică și aplicată (Split, 3—8 iunie 1968) 28 4 1001
MANGERON D., Din problematica de mecanică a Conferinței Societății Naționale de Matematică Industrială și Aplicată (SIAM) (11—14 iulie 1968, Toronto, Ontario, Canada) 28 5 1247
MANGERON D., Din problematica de Mecanică Aplicată expusă la Conferința de Teoria calitativă a ecuațiilor neliniare diferențiale și integrale (Universitatea din Wisconsin, Madison, Wisconsin, 19—23 august 1968) 28 5 1251
MANGERON D., Din problematica de Mecanică dezbătută în cadrul celei de a doua Conferințe internaționale de metode computaționale în probleme de optimizare (San Remo, 9—13 septembrie 1968) 28 6
MANGERON D., Din problematica de Mecanică și Matematică aplicată expusă și dezbătută la al VII-lea Congres al Matematicienilor Austrieci (Linz, 16—20 septembrie 1968) 28 6
MANGERON D., Conferință cu participări internaționale de Teoria mecanismelor și a mașinilor (Magdeburg, R. D. G., 2—4 octombrie 1968) 28 6
MANGERON D., Din problematica de mecanică a Congresului estiv anual al Societății Matematice Americane și al Asociației de Matematică din America 28 5 1255
PELECUDI CHR., A 10-a Conferință de mecanisme a Asociației Americane a Inginerilor Mecanici 28 5 1245

RECENZII

28 1 263
28 2 491
28 3 765
28 4 1259
28 5 1005
28 6

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel, cu caracter fundamental, de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. C. Mille, nr. 15, sectorul 7.

P. MARINESCU, V. TOMA și ȘT. SĂVULESCU

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ELEMENTELOR DE AMPLIFICARE CU FLUID DE TIP BISTABIL

Lucrarea a avut drept scop să stabilească o metodologie de experimentare în condițiile unei instalații simple, cu minimul de aparatură necesară ridicării caracteristicilor statice ale elementelor fluidice. Totodată s-a urmărit să se obțină indicații asupra proiectării acestor elemente și îndeosebi asupra dimensiunilor geometrice, capabile să producă modificări substanțiale ale curbelor caracteristice. Rezultatele au permis să se tragă concluzii cu privire la îmbunătățirea configurației interioare a acestor elemente, cu scopul de a se obține o presiune recuperată maximă.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1265–1275
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15.

DAN MATEESCU

ASUPRA MIȘCĂRII CONICE DE ORDIN DOI ÎN JURUL SISTEMELOR ARIPĂ–FUZELAJ

Studiind mișcarea conică de ordin doi în jurul sistemelor aripă-fuzelaj, lucrarea permite tratarea unor probleme prezentînd un deosebit interes, ca de exemplu problema rotațiilor sau oscilațiilor de tangaj sau de ruliu ale unui astfel de sistem, care pot apare în cursul diferitelor evoluții ale avioanelor supersonice.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1277–1301
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15.

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA

DEZLOCUIREA INTEGRALĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE NEOMOGENE

Se studiază problema dezlocuirii integrale a unui fluid de către altul într-un mediu poros neomogen. Pe baza unor rezultate obținute în altă lucrare se formulează problema la limită a dezlocuirii care se rezolvă în clasa funcțiilor analitice generalizate. Rezultatele obținute se compară cu cele date în literatură de alți autori în cazuri particulare.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1303–1320

AL. SOARE, SAHL DENNAOUI

STUDIUL VARIAȚIEI PRESIUNII ÎNTR-UN SISTEM STRATIFICAT

Se tratează variația presiunii într-un zăcămînt închis format din două strate cu permeabilități diferite exploatat la presiune constantă. Studiul se face în special pentru cazul existenței intercomunicației de fluid între strate.
Rezultatele obținute se compară cu cele pentru cazul cînd stratele nu comunică hidrodinamic între ele și cu cele ale unui zăcămînt omogen. Calculele au fost efectuate cu ajutorul I.M.B. 360.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1321–1332

T. OROVEANU

RĂCIREA GĂURII DE SONDĂ PRIN CIRCULAȚIA DE LICHID

Se dă o soluție pentru problema determinării temperaturii la talpa unei sonde, atunci cînd în gaura de sondă se efectuează în acest scop o circulație de lichid.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1335–1353
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15.

GEORGE BĂRĂNESCU

INTERPRETĂRI VECTORIALE ALE FORȚEI DE INERȚIE A MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE AFERENTE ECHIPAJULUI MOBIL AL CILINDRULUI UNUI MOTOR CU ARDERE INTERNĂ, CU CONSIDERAREA VARIAȚIEI VITEZEI UNGHIULARE DE ROTAȚIE A ARBORELUI COTIT

Se elaborează două interpretări vectoriale ale forței de inerție a maselor cu mișcare de translație pentru echipajul mobil al unui cilindru de motor cu ardere internă. Interpretările, care țin seama de variația vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit, se bazează pe descompunerea expresiei forței de inerție într-o serie cu coeficienți variabili.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1355–1368
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15.

VIRGILIU FLORIAN

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL SPAȚIAL AL STRUCTURILOR MULTIETAJATE SIMETRICE CU ETAJ CONSTANT ALCĂTUITE CU DIAFRAGME. II.

În această parte a lucrării se dau două procedee de calcul numeric aproximativ, fără concesii de ordin teoretic, a problemei tratate în partea întîia a lucrării efectuabile, prin mijloacele tradiționale de calcul.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1369–1379

IOAN CRĂCIUN

O METODĂ DE CALCUL AL OSCILAȚIILOR DE TORSIUNE ALE ARBORILOR MAȘINILOR CU AJUTORUL GRAFELOR LINIARE

Se prezintă o metodă de calcul al oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor bazată pe teoria grafelor liniare. Ambele variante ale metodei, atît cea exactă cît și cea aproximativă, conduc la o importantă reducere a volumului de calcule în comparație cu metodele matriceale.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1381–1401

GEORGE BĂRĂNESCU, GHEORGHE ZĂTREANU, DINU TARAZA

UNELE PROBLEME PRIVIND COMPORTAREA LA OBOSEALĂ A ASAMBLĂRILOR CU ŞURUB

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a asamblărilor cu şurub supuse la solicitări axiale variabile, cu luarea în consideraţie a răsucirii produse la montaj şi a variaţiei în exploatare a temperaturii elementelor asamblării. Se demonstrează că există o valoare optimă a coeficientului de siguranţă, care se obţine nu numai pentru o valoare dată a forţei de exploatare dar şi pentru o anumită elasticitate a elementelor asamblării.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1403–1420
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, nr.15.

CHR. PELECUDI

SINTEZA NUMERICĂ ŞI STRUCTURALĂ A MECANISMELOR SPAŢIALE DE DIVERSE FAMILII

Sînt redate tabelele de lanţuri cinematice cu 5–12 elemente şi 2–4 contururi alcătuite prin metoda elementelor (barelor) şi metoda contururilor (independente). Gradul de libertate este stabilit în raport cu familia în care se încadrează lanţul cinematic respectiv.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1421–1456
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15.

A. RAICU

CONTRIBUŢII LA SINTEZA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR PLANE

În lucrare se introduce noţiunea de *variantă structurală de bază* pentru clasa mecanismelor plane caracterizate prin n elemente, C_i cuple inferioare şi C_s cuple superioare, fără a ţine seama de dispunerea relativă a acestora în lanţul cinematic. În scopul evitării reprezentării grafice, pentru fiecare clasă ase adoptă un *simbol numeric* de tipul nC_iC_s. Pe baza acestui simbol, în lucrare este întocmită o tabelă cu variantele de bază pentru n crescător. De asemenea, sînt scoase în evidenţă şi alte clase, ca de exemplu clasa mecanismelor la care $C_i + C_s =$ minim, cu importanţă practică deosebită.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1457–1465
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille, nr. 15.

FL. DUDIŢĂ

MECANISME SPAŢIALE TRIPODE

În lucrare sînt propuse cîteva mecanisme spaţiale tripode noi care împreună cu cele deja existente sînt sistematizate şi analizate structural şi cinematic. Legea de transmitere a rotaţiei este stabilită, pe mecanisme derivate, pentru trei tipuri de cuplaje tripode.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1467–1492

GH. VASILCA și VETURIA RASZILIER

CONSIDERAȚII CANTITATIVE ASUPRA MICROGEOMETRIEI UNOR SUPRAFEȚE DE FRECARE CU COMPUȘI DEFINIȚI ÎN STRUCTURA MATERIALULUI

Portanța Abbott, distribuția numărului de contacte, abaterea medie pătratică, poziția liniei medii a profilului și volumul golurilor dintre asperități sînt unii dintre parametrii cantitativi ai unei microgeometrii care pot fi analizați statistic și redă specificul unei rugozități. Se deduc și se analizează acești parametri pentru microgeometriile specifice ale suprafețelor de alunecare în cazul unor materiale antifricțiune cu compuși definiți în structură (Y-Sn83, Y-PbSn10 BzPb20Sn3).

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1493–1511
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15.

ION SAVA

STADIUL ACTUAL ÎN DINAMICA MECANISMELOR CU CAME

II. MODELUL MONOMASIC LA STUDIUL MECANISMULUI DE DISTRIBUȚIE AL MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

Lucrarea de față, reprezintă partea a doua a sintezei „Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came" care în continuarea primei părți, analizează comportarea distribuției motoarelor cu ardere internă, utilizînd corespunzător modelul monomasic. După trecerea în revistă a modelelor de rezolvare a ecuației de mișcare a urmăritorului, pentru un caz concret, se obține rezolvarea, are permite analizarea comportării distribuției atunci cînd se consideră mai mulți parametri asociați funcționării reale.
Se prezintă problema curbelor polidine utilizate la distribuția motoarelor cu ardere internă.
După o trecere în revistă a modelelor de studiu considerate, de forme mai complexe, lucrarea se încheie printr-o apreciere critică a acestora, pe baza ipotezelor avute în vedere la alcătuirea lor.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 6, 1969, p. 1513–1538
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15.

BUDAPESTI MÜSZ... KÖZPO... 1348 KÖNYVTÁRA

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GH. VASILCA şi OLGA BIŢĂ, **Procese de lubrifiere, frecare şi uzură la suprafeţele metalice**, 1967, 409 p., 29 lei.

S. HÎNCU, **Modelarea hidraulică în curenţi de aer sub presiune**, 1967, 246 p., 11 lei.

H. PASCAL, **Curgerea staţionară a gazelor prin conducte magistrale**, 1967, 273 p., 16 lei.

CHR. PELECUDI, **Bazele analizei mecanismelor**, 1967, 370 p., 18 lei.

T. HACKER, **Stabilitate şi comandă în teoria zborului**, 1968, 322 p., 29 lei.

ŞT. N. SĂVULESCU, **Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă**, 1968, 312 p., 15 lei.

DAN TEODORESCU, **Servomotorul amplificator şi aplicaţiile lui în automatizări**, 1968, 260 p., 12,50 lei.

A. MILLION şi C. MILLION, **Hidrogenul în oţeluri şi în îmbinări sudate**, 1968, 354 p., 27 lei.

GH. BUZDUGAN, **Dinamica fundaţiilor de maşini**, 1968, 368 p., 24 lei.

PAUL DIMO, **Analiza nodală a sistemelor electroenergetice**, 1968, 628 p., 44 lei.

I. S. GHEORGHIU şi AL. FRANSUA, **Tratat de maşini electrice, vol. I. Maşini de curent continuu**, 1968, 412 p., 27 lei.

RADU C. BOGDAN, DAN LARIONESCU, **Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane**, 1968, 432 p., 29 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer**, 1968, 282 p., 16,50 lei.

MIRCEA SOARE, **Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri**, 1968, 624 p., 33 lei.

LIVIU LIBRESCU, **Statica şi dinamica structurilor elastice anizotrope şi eterogene**, 1969, 320 p., 18,50 lei.

DORU TODERICIU, **Preistoria rachetei moderne. Manuscrisul de la Sibiu (1400—1569)**, 1969, 352 p., 29 lei.

ADRIANA NĂSTASE, **Forme aerodinamice optime prin metoda variaţională**, 1969, 242 p., 17,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ŞI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ŞI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 28, NR. 6, p. 1263—1560, Bucureşti, 1969

I. P. „Informaţia" — c. 3822

43832

Lei 40. —